Duas LIÇÕES

sôbre

ÁLGEBRAS E MECÂNICA QUÂNTICA

1ª Lição

Representações dos grupos e Quântica

1) Palavras iniciais: Ex.^{mo} Senhor Presidente da Sociedade Portuguêsa de Matemática, minhas Senhoras e meus Senhores:

Na série de lições que o Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto se propõe realizar nesta Sociedade, cabe-nos falar de "Álgebras e Mecânica Quântica". Precisemos, porém, o nosso objectivo. Sob o ponto de vista físico, trata-se, por agora, de pôr unicamente em evidência a importância que têm em Espectroscopia as "Representações dos Grupos", nada abordando da necessidade das álgebras pròpriamente ditas em certos raciocínios recentes de Quântica, nem da aplicação da Teoria dos Anéis ao estudo das partículas elementares. Sob o ponto de vista matemático, depois de dármos algumas definições e falármos brevemente das "Representações dos grupos contínuos", passaremos em resumo a "Teoria das representações das álgebras" e mostraremos como as representações dos grupos finitos se incluem nessa teoria.

2) Generalidades sôbre a equação de Schrödinger: É a impossibilidade em que nos encontramos, em geral, de integrar a equação de Schrödinger que dá especial relêvo às conclusões a tirar do simples facto de a referida equação admitir certos grupos de invariância. Essas conclusões são especialmente qualitativas. Casos há, porém, em que se recebe informação de natureza quantitativa.

Admitamos, com Schrödinger, que o comportamento dum sistema físico é descrito pela equação não relativista, dependente do tempo,

$$H\Psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \qquad (1)$$

Falar dum tal comportamento é, antes de tudo, introduzir uma causalidade. Como a descrição referida se faz pròpriamente, com Schrödinger, por meio da função de onda Ψ, a equação (1) deverá estar apropriada à definição de $\Psi(q,t)$, a partir do conhecimento desta função para $t=0$: $\Psi(q,0)$. Se é válida a hipótese de Schrödinger e se se admite que $\Psi(q,t)$ é uma função analítica de t, a solução de (1) deduz-se da própria equação, em virtude da circunstância de H ser independente daquela variável. Pondo, de facto,

$$\Psi(q,t) = \Psi(q,0) + \frac{t}{1}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right)_0 + \cdots$$

tem-se imediatamente

$$\Psi(q,0) = \text{função dada de ponto}; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0 = -\frac{i}{\hbar} H\Psi(q,0);$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} H\Psi = -\frac{i}{\hbar} H\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H\left(-\frac{i}{\hbar} H\Psi\right) = -\frac{1}{\hbar^2} H^2\Psi; \quad \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\right)_0 = -\frac{1}{\hbar^2} H^2 \Psi_0; \text{ etc.}$$

A resolução da equação de Schrödinger tenta-se pròpriamente por outra via, sugerida, de resto, pela interpretação dos fenómenos. Põe-se $\Psi(q,t) = \varphi(q)\, e^{-i\omega t}$ e passa-se a

$$H\varphi = E\varphi, \qquad (E = \hbar\omega). \qquad (2)$$

Esta equação diz-se equação de Schrödinger independente do tempo. Se se admite que o domínio das acções do sistema é limitado, H é, geralmente, um operador completo com valores próprios discretos e funções próprias correspondentes:

$$E_1, \cdots, E_n, \cdots; \quad \varphi_1, \cdots, \varphi_n \cdots;$$

em condições conhecidas. Regressando de (2) a (1) passa-se a soluções de (1) da forma

$$\Psi(q,t) = \varphi(q)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \qquad (3)$$

que se dizem soluções estacionárias, pelo facto de corresponderem a ondas estacionárias. As soluções de (1) obtêem-se, depois, à custa das soluções (3), pois que uma solução de (1), correspondente à condição inicial $\Psi(q,0)$, se obtem pondo $\Psi(q,0) = \varphi(q) = \sum_{\nu} \varphi_{\nu}(q)\, c_{\nu}$, e, em seguida

$$\Psi(q,t) = \sum \varphi_\nu(q)\, e^{-i\frac{E_\nu}{\hbar}t} c_\nu . \qquad (4)$$

Efectivamente, uma expressão da forma

$$\varphi_1(q)\, e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} c_1 + \varphi_2(q)\, e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} c_2 = \psi_1(q,t) + \psi_2(q,t),$$

pelo facto de se ter

$$H\psi_1(q,t) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = 0, \qquad H\psi_2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0,$$

dá

$$H(\psi_1+\psi_2) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1+\psi_2) = 0.$$

Por outro lado, pondo em (4) $t=0$, obtem-se a função de onda na origem, dada a priori. Estas considerações mostram como podemos limitar-nos a estudar a equação (2).

3) Significado da invariância em face dum grupo: Seja, pois, a equação $H\psi = E\psi$. Suponhamos que $\mathcal{G}$ é um grupo de invariância da mesma. Isso significa que, dado o elemento $S \in \mathcal{G}$, a mudança de variáveis

$$q_1' = S q_1, \ \dots, \ q_f' = S q_f,$$

faz passar da equação dada à equação

$$H'\psi' = E\psi', \qquad (5)$$

onde H' tem a mesma forma que H e ψ' é a função

$$\psi'(q_1', \dots, q_f') = \psi(q_1, \dots, q_f) = \psi(S^{-1}q_1', \dots, S^{-1}q_f').$$

Podemos, na equação (5), continuar a representar as variáveis $q_1', \dots, q_f'$ com $q_1, \dots, q_f$. Será, dêsse modo,

$$H\psi'(q) = E\psi'(q). \qquad (6)$$

Se o valor próprio E, em causa, tiver uma degenerescência de ordem n, e se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ fôrem funções próprias independentes correspondentes, a eq. (6) mostra que $\varphi_1', \dots, \varphi_n'$ são soluções de (2) para o valor próprio E. Ter-se-à, pois,

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= \varphi_1 s_{11} + \varphi_2 s_{21} + \dots + \varphi_n s_{n1},\\
\varphi_2' &= \varphi_1 s_{12} + \varphi_2 s_{22} + \dots + \varphi_n s_{n2},\\
&\dots\\
\varphi_n' &= \varphi_1 s_{1n} + \varphi_2 s_{2n} + \dots + \varphi_n s_{nn},
\end{aligned} \qquad (7)$$

onde os s_{ik} são números complexos constituindo uma matriz quadrada do grau n. Será usada a terminologia seguinte: dada a função $\psi(q)$, pôr-se-à

$$S\psi(q) = \psi'(q) = \psi(S^{-1}q)$$

e diz-se que ψ' resulta de ψ por aplicação da transformação S do grupo. Podemos dar, então, à (7), a forma seguinte:

$$S\varphi_1 = \sum_k \varphi_k s_{k1}, \ \dots, \ S\varphi_n = \sum_k \varphi_k s_{kn}. \qquad (8)$$

Dizemos que, no espaço linear $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, o elemento $S \in \mathcal{G}$ induz uma transformação linear.

4) A representação do grupo $\mathcal{G}$: Apliquemos, sucessivamente, as duas transformações S e $T \in \mathcal{G}$. Obtem-se

$$T(S\psi) = T\psi(S^{-1}q) = \psi(S^{-1}T^{-1}q) = \psi((TS)^{-1}q) = (TS)\psi(q).$$

Êste resultado mostra que, aplicar S, depois T, é aplicar TS. Recorrendo às relações (8), a aplicação sucessiva de S e T leva, como se sabe, a uma matriz

$$\Pi = (\pi_{ik}) = \left(\sum_j t_{ij} s_{jk}\right),$$

pelo que podemos dizer: a cada elemento de S corresponde uma matriz e ao produto de dois elementos corresponde o produto das matrizes correspondentes. Tem-se, como se diz, uma representação do grupo $\mathcal{G}$. Se fôr possí

vel, *a priori*, classificar as representações do grupo, podemos compreender como uma
primeira classificação dos valores próprios $\underline{E}$ resulta das representações que $\underline{E}$ determina.

5) As representações redutíveis e irredutíveis: Tomemos um espaço linear abstracto $\mathcal{R}$ a $\underline{n}$ dimensões, de base $(e_1, \dots, e_n)$. Os postulados que é costume dar para a construção do espaço, como por ex. em H. Weyl (*Temps, espace et matière*), costumam dividir-se em postulados de adição e postulados de multiplicação. Os primeiros, em linguagem de grupos, caracterizam o espaço como grupo abeliano aditivo ou módulo, os segundos caracterizam êste módulo como módulo relativo ao côrpo dos números complexos, sob a hipótese de o elemento um do côrpo ser operador unitário do módulo. É a linguagem introduzida por W. Krull (1925).

Se um grupo $\mathcal{G}$ é um novo domínio operatório do nosso módulo, que nele induz transformações lineares (endomorfismos), escreveremos, para cada $a \in \mathcal{G}$,

$$a\, e_i = \sum_k e_k\, a_{ki}. \qquad (9)$$

Diz-se sub-espaço invariante da transformação um sub-espaço (sub-módulo) $\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{R}$, tal que, para cada vector $b \in \mathfrak{h}$, se tem $a b \in \mathfrak{h}$. Um sub-módulo dum módulo com respeito a um côrpo é sempre um módulo com respeito a um côrpo, e pode imaginar-se o espaço com uma base composta de $r \leq n$ elementos independentes constituindo uma base independente de $\mathfrak{h}$ e de mais $n-r$ elementos não pertencentes a $\mathfrak{h}$. As equações (9) partem-se em dois sistemas de equações do modo seguinte:

$$a\, e_i = \sum_{k=1}^{r} e_k\, p_{ki}, \qquad (i = 1, 2, \dots, r), \qquad (10)$$
$$a\, e_j = \sum_{k=1}^{r} e_k\, q_{kj} + \sum_{l=r+1}^{n} e_l\, r_{lj}, \qquad (j = r+1, \dots, n).$$

A matriz $\underline{A}$, que corresponde a $\underline{a}$, toma o aspecto

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix}, \qquad (P = (p_{ki}), \dots).$$

Se $\mathfrak{h}$ é invariante para todas as transformações induzidas por elementos do grupo e se se está em face duma representação do grupo, diz-se que se tem uma representação redutível. Quando não há sub-espaço invariante, a representação diz-se irredutível. A representação diz-se decomponível, no caso de as igualdades (10) poderem tomar a forma

$$a\, e_i = \sum_{k=1}^{r} e_k\, p_{ki}, \qquad a\, e_j = \sum_{l=r+1}^{n} e_l\, r_{lj}.$$

As matrizes $\underline{A}$ tomam o aspecto

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

O conjunto dos vectores e_j define um novo sub-espaço invariante $\mathcal{L}$, e escreve-se, se $\mathcal{R}$ é o espaço total, $\mathcal{R} = \mathfrak{h} + \mathcal{L}$, no sentido de soma directa de grupos. A representação global $\mathfrak{d}$ diz-se também soma de duas representações $\mathfrak{d}_1$ e $\mathfrak{d}_2$: $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$, a primeira das quais é definida pelo conjunto das matrizes $\underline{P}$, a segunda pelo conjunto das matrizes $\underline{R}$.

Quando o espaço $\mathcal{R}$ é soma directa de $\underline{m}$ sub-espaços simples, isto é, soma de sub-espaço cada um dos quais é simples como grupo com os operadores do côrpo dos números complexos e do grupo $\mathcal{G}$, a representação diz-se completamente redutível. O conhecido teorema de Jordan-Hölder garante que a decomposição do espaço, feita por qualquer processo, leva sempre ao mesmo número de sub-espaços simples, cada um dos quais opera toriamente isomorfo dum certo sub-espaço doutra decomposição. As diferentes representações irredutíveis aparecem substituídas por outras que se dizem equivalentes e cujas matrizes se constroem segundo a regra

$$A' = P A P^{-1},$$

onde A' é a nova matriz correspondente de A e P é uma matriz fixa.

6) Representações unitárias: Se no espaço linear introduzimos uma métrica hermiteana, dizem-se transformações métricas as transformações lineares que conservam o valor da forma hermiteana fundamental, ou seja, que conservam a norma dum vector. A matriz da transformação é não singular, isto é, tem inversa. O determinante da matriz é diferente de zero. Se um sub-espaço é invariante para uma transformação métrica, o espaço totalmente ortogonal (composto de todos os vectores ortogonais àquele sub-espaço) é igualmente invariante. As transformações métricas dizem-se ainda transformações unitárias e as matrizes correspondentes matrizes unitárias. Se numa representação de G, aos elementos do mesmo correspondem matrizes unitárias, define-se uma representação unitária. Pelo que acaba de dizer-se, conclui-se que toda a representação unitária é completamente redutível.

7) As representações da Quântica são unitárias: Entre os grupos de invariância da equação de Schrödinger contam-se, segundo

as circunstâncias, o grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ (das permutações), o grupo das rotações à volta da origem das coordenadas, o grupo das rotações à volta dum eixo, etc. No espaço $E(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ a norma duma função φ (quadrado dum vector) é definida, como se sabe, pelo integral

$$N\varphi = \int \bar{\varphi}\varphi \, d\tau = \sum_{i=1}^{n} \int \bar{\varphi}_i \varphi_i \bar{c}_i c_i \, d\tau = \sum_i \bar{c}_i c_i, \quad \left(\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i c_i\right),$$

estendido ao espaço das configurações ($\bar{\varphi}$ = complexo conjugado de φ). Se se faz uma mudança de variáveis conforme as relações

$$q_1' = S q_1, \; \dots, \; q_f' = S q_f,$$

aquele integral pode tomar a forma

$$N\varphi = \int \bar{\varphi}(S^{-1}q') \, \varphi(S^{-1}q') \, |\Delta| \, d\tau',$$

onde Δ é o jacobiano da transformação. Nos diferentes casos enunciados, tem-se $|\Delta| = 1$, pelo que virá

$$N\varphi = \int \bar{\varphi}(S^{-1}q') \, \varphi(S^{-1}q') \, d\tau' = \int \bar{\varphi}' \varphi' \, d\tau' = \int \bar{\varphi}' \varphi' \, d\tau.$$

Isto significa que a norma da função transformada por via de S se conserva, e que, por consequência, a matriz (s_{ik}) é uma matriz unitária. As representações da Quântica são representações unitárias, as quais, como tal, são completamente redutíveis.

8) Importância dos conceitos de redutibilidade e irredutibilidade em Quântica: É frequente em Quântica terem de considerar-se hamiltonianos H que podem supor-se da forma $H = H^0 + \varepsilon\Phi$, onde ε

se considera uma quantidade de 1ª ordem. Os valores próprios correspondentes são funções de ε que tendem para os valores próprios do hamiltoniano H°, quando ε tende para zero. A integração da equação $H\psi = E\psi$, ou $(H^\circ + \varepsilon\phi)\psi = E\psi$ faz-se por um método de aproximações que repousa sôbre o facto de H° se poder considerar um operador completo. Um valor próprio E°, de H°, com a degenerescência n_0, dá origem a um certo número de valores próprios vizinhos de E°, que representaremos com $E, E', E'', \ldots$, e cujas degenerescências $n, n', n'', \ldots$ são tais que $n+n'+n''+\ldots = n_0$. Em virtude de analogia óbvia com o que se passa em Mecânica Celeste, diz-se que se pratica o <u>método de cálculo das perturbações</u>: o operador $\varepsilon\phi$ aparece como uma <u>perturbação</u>. Sucede, então, o que vai seguir-se. Tanto H° como ϕ (e, consequentemente, H) admitem um grupo de invariância $\mathcal{G}$. A um valor próprio E° corresponde uma certa representação de $\mathcal{G}$, de grau n_0, que designaremos com ϑ_0; aos valores próprios de H, vizinhos daquele, correspondem representações de graus $n, n', n'', \ldots$, designadas com $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \ldots$ Quando ε tende para zero, estas últimas representações tendem a associar-se na única representação ϑ_0. Como os graus das representações são números inteiros que não podem variar bruscamente, a representação limite ϑ_0 aparece como uma representação soma das diferentes representações limites.

Se ϑ_0 fôr irredutível, não existirão $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \ldots$, mas uma única representação ϑ, de grau n_0. Pode dizer-se:

se E_0 é um valor próprio ao qual pertence uma representação irredutível, êsse valor não se multiplica quando se introduz uma perturbação, por maior que esta venha a tornar-se. A representação permanece irredutível.

Um raciocínio análogo mostra que, se ϑ_0 é completamente redutível e da forma $\vartheta_0 = \vartheta_0^{(1)} + \ldots + \vartheta_0^{(n)}$, a multiplicação de E_0 pode levar, quando muito, a n valores próprios vizinhos, a cada um dos quais corresponderá uma representação do grau duma representação $\vartheta_0^{(i)}$, podendo suceder, porém, que a multiplicação seja menor e que um dos $E, E', E'', \ldots$ venha dar, no limite, uma representação soma de várias representações $\vartheta_0^{(i)}$.

Esta proposição pode precisar-se ainda. As representações do grupo $\mathcal{G}$ que comparecem, de facto, em Quântica, são caracterizadas por números racionais determinados, os quais não variam bruscamente. Quando a E° corresponde $\vartheta_0 = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_0^{(i)}$, aos diferentes $E, E', E'', \ldots$, em que E° se multiplica, corresponderão aquelas mesmas representações $\vartheta_0^{(i)}$, ou somas delas.

9) <u>Os grupos contínuos</u>: Depois de posta em evidência a importância do estudo das representações, há necessidade de encontrar, efectivamente, essas representações. Os grupos que comparecem em Quântica são, na verdade, grupos tipo, cujas representações se podem determinar por um estudo directo. Há que distinguir entre os grupos contínuos e os grupos abstractos. Aqueles são aqui, também, grupos abstractos. Nos grupos contínuos figura, em especial, o grupo das rotações do espaço ordinário à volta da origem das coordenadas.

Seja, dum modo geral, um grupo contínuo com p parâmetros. Quere dizer que se tem um conjunto de transformações

$$(T_\alpha): \qquad y_i = f_i(x_1, \dots, x_q;\, \alpha_1, \dots, \alpha_p), \qquad (i = 1, 2, \dots, q),$$

por meio das quais se faz corresponder ao ponto $(x_1, \dots, x_q)$ dum espaço a q dimensões um segundo ponto $(y_1, \dots, y_q)$ do mesmo espaço, e de tal modo que uma segunda correspondência

$$(T_\beta): \qquad z_i = f_i(y_1, \dots, y_q;\, \beta_1, \dots, \beta_p)$$

leva ao ponto $(z_1, \dots, z_q)$, que pode ser determinado directamente a partir de $(x_1, \dots, x_q)$ por meio das fórmulas

$$(T_\delta): \qquad z_i = f_i(x_1, \dots, x_q;\, \delta_1, \dots, \delta_p),$$

onde os valores δ_j a atribuir aos parâmetros são funções determinadas, $\delta_j = \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_p;\, \beta_1, \dots, \beta_p)$, dos valores atribuídos aos $\alpha\alpha$ e aos $\beta\beta$. Escreve-se então, por definição, $T_\delta = T_\beta T_\alpha$.

Aos parâmetros α_i exige-se que sejam <u>essenciais</u>, isto é, que não existam as funções $A_1, \dots, A_s$, dos $\underline{\alpha_i}$, com $s < p$, tais que

$$f_i(x_1, \dots, x_q;\, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = \varphi_i(x_1, \dots, x_q;\, A_1, \dots, A_s).$$

O grupo contínuo supõe-se ainda, como se disse, um grupo abstracto, por forma que entre as transformações do grupo figura a transformação idêntica

$$y_i = x_i,$$

a qual se pode supor obtida quando os $\underline{\alpha_i}$ se anulam. A propriedade associativa deverá ter lugar, o que acarreta o seguinte:

$$
\begin{array}{ll|ll}
T_\alpha: & u = f(x, \alpha), & T_\gamma \cdot T_\beta T_\alpha: & u = f(x, \varphi(\varphi(\alpha,\beta), \gamma)), \\
T_\beta: & u = f(x, \beta), & T_\gamma T_\beta: & u = f(x, \varphi(\beta, \gamma)), \\
T_\beta T_\alpha: & u = f(x, \varphi(\alpha, \beta)), & T_\gamma T_\beta \cdot T_\alpha: & u = f(x, \varphi(\alpha, \varphi(\beta,\gamma))) \\
T_\gamma: & u = f(x, \gamma), & &
\end{array}
$$

Verso

$$\varphi(\varphi(\alpha,\beta), \gamma) = \varphi(\alpha, \varphi(\beta, \gamma)).$$

Sabe-se (independentemente das condições que caracterizam o grupo contínuo como grupo abstracto) que as equações $\delta_j = \varphi_j(\alpha, \beta)$ se podem resolver em ordem aos $\beta\beta$, sob a forma

$$\beta_j = \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_p;\, \delta_1, \dots, \delta_p), \qquad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Poremos

$$S^j_k(\alpha) = \left(\frac{\partial \delta_j}{\partial \beta_k}\right)_{\beta = 0}, \qquad T^j_k(\alpha) = \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial \gamma_k}\right)_{\gamma = \alpha}$$

As duas matrizes S e T são inversas: $ST = TS = \mathcal{U}$ = matriz unidade.

Pretendem-se agora as representações do grupo contínuo na vizinhança da unidade, ou seja, uma correspondência que faça corresponder a T_α uma transformação linear $A(\alpha)$ cuja matriz tenha elementos funções analíticas dos $\alpha\alpha$, de tal sorte que se tenha

$$A(\beta) \cdot A(\alpha) = A(\delta) = A(\varphi(\alpha, \beta)),$$

pelo menos quando os $\alpha\alpha$ e os $\beta\beta$ são suficientemente pequenos.

Consideremos o espaço R de representação. Esta fará passar dum vector $\mathcal{C}$ a um vector $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} = \mathcal{C} + \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \beta_1}\right)_{\beta=0}\beta_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \beta_p}\right)_{\beta=0}\beta_p + \cdots .$$

A correspondência $\mathcal{C} \to \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \beta_i}\right)_{\beta=0}$ é linear. Diz-se uma transformação infinitesimal da representação. Será designada com I_i, de modo que podemos escrever

$$\mathcal{W} = \mathcal{C} + I_1\mathcal{C}\cdot\beta_1 + \cdots + I_p\mathcal{C}\cdot\beta_p + \cdots .$$

Partamos dum vector inicial qualquer $\mathcal{C}_0$. Se se faz

$$\mathcal{C} = A(\alpha)\,\mathcal{C}_0,$$
$$\mathcal{W} = A(\beta)\,\mathcal{C} = A(\beta)A(\alpha)\,\mathcal{C}_0 = A(\delta)\,\mathcal{C}_0,$$

tem-se

$$I_i\mathcal{C} = \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \beta_i}\right)_{\beta=0} = \sum_\kappa \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \delta_\kappa}\right)_{\delta=\alpha}\left(\frac{\partial \delta_\kappa}{\partial \beta_i}\right)_{\beta=0} = \sum_\kappa \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \alpha_\kappa}\, S_i^\kappa(\alpha),$$

donde se tira

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \alpha_i} = \sum_\kappa I_\kappa\mathcal{C}\cdot T_i^\kappa(\alpha).$$

Este sistema de equações às derivadas parciais, no qual o vector $\mathcal{C}$ é a incógnita e os α_i são as variáveis independentes, determina $\mathcal{C}$, conhecido o vector $\mathcal{C}_0$, valor inicial de $\mathcal{C}$, para os $\alpha_i = 0$, desde que sejam satisfeitas as respectivas condições de integrabilidade. Como os coeficientes $T_i^\kappa(\alpha)$ só dependem do grupo contínuo considerado, vê-se que a representação fica conhecida, se fôrem dadas as transformações infinitesimais da mesma representação.

Não vamos continuar com a teoria das representações dos grupos contínuos. Li-

mitamo-nos a salientar que é simples encontrar as representações unitárias do grupo contínuo das rotações do espaço ordinário à volta da origem das coordenadas. São as chamadas representações $\mathcal{D}_j$, que têem em Espectroscopia um papel importante e que podem ser descritas do modo a seguir.

10) As representações $\mathcal{D}_j$: Seja o espaço $(\overset{1}{u}, \overset{2}{u})$ a duas dimensões. Diz-se grupo linear especial, L_2, o grupo das transformações lineares

$$\overset{1}{u}{}' = \overset{1}{u}\alpha + \overset{2}{u}\gamma, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$
$$\overset{2}{u}{}' = \overset{1}{u}\beta + \overset{2}{u}\delta,$$

Quando se consideram unicamente as transformações

$$\overset{1}{u}{}' = \overset{1}{u}\alpha - \overset{2}{u}\bar{\beta}, \qquad (\bar{\alpha} = \text{complexo conjugado de } \alpha;\ \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1),$$
$$\overset{2}{u}{}' = \overset{1}{u}\beta + \overset{2}{u}\bar{\alpha},$$

define-se um sub-grupo de L_2, chamado o grupo unitário especial U_2. Um vector do espaço é da forma $u = \overset{1}{u}\xi_1 + \overset{2}{u}\xi_2$. Se se introduz a métrica hermitiana

$$G(u) = \bar{\xi}_1\xi_1 + \bar{\xi}_2\xi_2,$$

verifica-se que as transformações do grupo unitário são as transformações métricas (unitárias) do espaço.

Seja agora um espaço linear S, a $p+1$ dimensões, cujos vectores fundamentais representaremos por

$$(\overset{1}{u})^p,\ (\overset{1}{u})^{p-1}\overset{2}{u},\ \ldots,\ (\overset{1}{u})^{p-r}(\overset{2}{u})^r,\ \ldots,\ (\overset{2}{u})^p.$$

Dado um vector

$$\mathcal{C} = \sum_{r=0}^{p} (\overset{1}{u})^{p-r}(\overset{2}{u})^r\,\xi_r$$

e introduzindo a métrica

$$G(\mathcal{C}) = \sum_{r=0}^{p} r!\,(p-r)!\,\bar{\xi}_r\xi_r,$$

se a cada transformação $\underline{A}$, de U_2, fizérmos corresponder a transformação seguinte de S:

$$A \cdot (\overset{1}{u})^{p-r} (\overset{2}{u})^{r} = (\overset{1}{u}{}')^{p-r} (\overset{2}{u}{}')^{r} = (\overset{1}{u}\alpha - \overset{2}{u}\bar{\beta})^{p-r} (\overset{1}{u}\beta + \overset{2}{u}\bar{\alpha})^{r} =$$

$$= \sum_{t=0}^{p} (\overset{1}{u})^{p-t} (\overset{2}{u})^{t} a_{tr} ,$$

fàcilmente se vê que se obtem uma representação unitária de $\mathcal{U}_2$. Essa representação indica-se com $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}p} = \mathcal{D}_J$, onde $J = \frac{1}{2}p$. Ora é muito fácil estabelecer uma correspondência entre o grupo das rotações à volta da origem (dependente de 3 parâmetros reais) e o grupo $\mathcal{U}_2$ (igualmente dependente de 3 parâmetros reais). Nessa correspondência, a cada transformação de $\mathcal{U}_2$ faz-se corresponder uma rotação, mas uma rotação pode ser correspondente de duas transformações de $\mathcal{U}_2$. Recorrendo a $\mathcal{U}_2$, obtem-se, pois, uma representação $\mathcal{D}_J$ do grupo das rotações (biforme quando J é semi-inteiro e uniforme se J é inteiro). No domínio da rotação idêntica (rotação nula), pode $\mathcal{D}_J$ supôr-se sempre uniforme.

As conhecidas <u>funções esféricas</u>, que aparecem, por ex., quando se trata o problema do movimento central, são em número de $2l+1$, se o número quântico azimutal é <u>l</u> (inteiro). Por meio da aplicação das rotações, transformam-se aquelas funções precisamente conforme uma representação $\mathcal{D}_l$.

11) <u>O produto de representações</u>: À interpretação da construção atómica é particularmente apropriada a noção do <u>produto de duas representações</u>. Sejam $\mathfrak{M}(u_1, \dots, u_m)$ e $\mathfrak{N}(v_1, \dots, v_n)$ dois espaços e <u>A</u> e <u>B</u> dois endomorfismos de $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$, respectivamente. Pôr-se-à

$$u_i' = A u_i = \sum u_j a_{ji} , \qquad v_k' = B v_k = \sum_l v_l b_{lk} .$$

Os <u>mn</u> produtos $u_i v_k$ podem tomar-se como base dum novo espaço mn-dimensional $\mathfrak{R}$. Se êsses produtos se sujeitam à transformação

$$(A \times B) u_i v_k = u_i' v_k' = \sum_j u_j a_{ji} \cdot \sum_l v_l b_{lk} = \sum_{j,l} u_j v_l a_{ji} b_{lk} ,$$

tem-se um endomorfismo de $\mathfrak{R}$. A matriz correspondente representa-se por $A \times B = \mathfrak{L}$ e diz-se <u>transformação linear produto</u> a transformação de $\mathfrak{R}$ assim obtida. Na definição não se distinguirá entre um produto $u_i v_k$ e o produto $v_k u_i$.

Se um conjunto de matrizes $A, B, \dots$ constitui uma representação $\mathcal{D}$ dum grupo $\mathfrak{G}$, e um conjunto de matrizes $A', B', \dots$ constitui uma segunda representação $\mathcal{D}'$ do mesmo grupo, o conjunto das matrizes $A \times A'$, $B \times B'$, ... define ainda uma representação $\Delta = \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ do grupo. É a <u>representação produto de</u> <u>Kronecker</u>.

Tem lugar o seguinte

<u>Teorema</u>: <u>O produto de duas representações unitárias é uma representação unitária</u>.

Consideremos, em especial, um produto $\mathcal{D}_J \times \mathcal{D}_{J'}$. Como, por definição, é $\mathcal{D} \times \mathcal{D}' = \mathcal{D}' \times \mathcal{D}$, podemos sempre supôr $J \geq J'$. É válida a importante igualdade seguinte:

$$\mathcal{D}_J \times \mathcal{D}_{J'} = \mathcal{D}_{J+J'} + \mathcal{D}_{J+J'-1} + \dots + \mathcal{D}_{J-J'} .$$

12) <u>A construção atómica</u>: Tomemos, por ex., um átomo com um núcleo e <u>f</u> electrões. Escrita a equação de <u>Schrödinger</u> num sistema próprio da Mecânica, façamos a mudança de variáveis que leva a introduzir as coordenadas do centro de massa e as coordenadas dos electrões relativas a êsse centro. A equação de <u>Schrödinger</u> transforma-se noutra que pode separar-se em duas: uma delas apenas introduz as coordenadas do centro de massa; na outra figuram as coordenadas relativas. Admite-se, no geral, que as variações de energia do sistema são devidas unicamente às variações do valor da energia relativo à segunda equação. Tudo se passa como se o centro de massa fôsse um ponto fixo no sistema de referência. Uma aproximação, que equivale a desprezar a quantidade $\frac{\mu}{M}$ em face da unidade (μ = massa do electrão, M = massa do sistema), permite escrever finalmente a equação de Schrödinger como se o núcleo (que coincide com o centro de massa, na ordem de aproximação considerada) estivesse fixo e os electrões fôssem solicitados por um campo central e estivessem sujeitos à sua acção mútua. Pode agora proceder-se à construção do átomo do modo seguinte: I) cada electrão está isolado em frente do núcleo, sob a acção dêste e duma parte da acção dos outros electrões (protecção); II) o resto da acção dos electrões sôbre cada electrão (de modo a ser obtida no final a acção mútua total) é introduzido como uma perturbação. Por virtude de I), cada electrão encontra-se num campo central (a fôrça correspondente não é, porém, uma fôrça de Coulomb), correspondendo-lhe uma energia $E_i(n_i, l_i)$, dependente dos dois números quânticos n_i, l_i. O átomo encontra-se num estado estacionário a que corresponde a energia $E = \sum_{i=1}^{f} E_i(n_i, l_i)$ e a função própria Ψ, da forma

$$\Psi = \varphi_1(n_1, l_1) \cdots \varphi_f(n_f, l_f).$$

À energia $\underline{E}$ corresponde uma multiplicidade de estados próprios em que as funções próprias são os diferentes produtos análogos ao anterior. Por outras palavras: o valor próprio $\underline{E}$ define uma representação

$$\vartheta = \vartheta_{l_1} \times \vartheta_{l_2} \times \cdots \times \vartheta_{l_f} = \sum \vartheta_J .$$

Quando agora se introduz o resto das acções mútuas, $\underline{E}$ multiplica-se em dife-

rentes valores próprios, a cada um dos quais corresponde uma representação ϑ_J.

Em suma: o estado estacionário actual do sistema é caracterizado por um certo $\underline{E}$ e uma certa representação irredutível ϑ_J correspondente (ou uma soma de tais representações). Emprega-se a letra $\underline{L}$, em vez de $\underline{J}$, e diz-se que $\underline{L}$ é o número quântico azimutal total. A caracterização pròpriamente dita exige agora que se saiba o valor de L_z (que é $\underline{M}$, entre $-L$ e $+L$).

Ainda mesmo que se introduza o "Spin", têem lugar considerações análogas.

13) Sôbre certos resultados quantitativos: Os raciocínios feitos até agora são apenas de natureza qualitativa. Dissémos já, todavia, que, em certos casos, podemos ter informação de natureza quantitativa, ainda por simples aplicação de considerações sôbre grupos. Daremos nêste momento algumas indicações em que jôgam o "qualitativo" e o "quantitativo". Eis aqui as proposições que vão servir-nos de base.

Proposição 1ª: Se se consideram duas representações ϑ_1, ϑ_2, dum mesmo grupo, em dois espaços R_1, R_2, dadas por dois grupos idênticos de matrizes, e se os vectores fundamentais de R_2 se consideram linearmente dependentes; na hipótese de ser completamente redutível a representação ϑ_1, a representação ϑ_2, também completamente redutível, é soma duma parte das irredutíveis que entram na decomposição de ϑ_1.

Proposição 2ª: Imaginemos que um sistema completo de funções orto-normadas se decompõe em partes sucessivas $P^{(\mu)}$, cada uma das quais define um sistema base de representações dum grupo; ponhamos aqui a restrição de que tais representações são irredutíveis $\vartheta^{(\mu)}$; então, dado um sistema de funções base, capaz duma representação completamente redutível, $\mathfrak{D}$, do mesmo grupo, o desenvolvimento duma função (vector) dêste último espaço de representação, segundo o sistema completo de funções acima indicado, só pode conter funções dêste sistema completo que pertençam às partes de decomposição $P^{(\mu)}$ para as quais a respectiva representação irredutível $\mathfrak{D}^{(\mu)}$ do grupo tenha equivalente entre as parcelas de decomposição de $\mathfrak{D}$.

Proposição 3ª: Se os elementos irredutíveis da representação $\mathfrak{D}$, referida na proposição 2ª, são todos "não equivalentes", então, tomado um sistema base da representação $\mathfrak{D}$, é possível, por simples considerações da teoria dos grupos, achar os coeficientes dos desenvolvimentos dessas funções base segundo as funções do sistema completo também aludido na proposição 2ª, desde que se ponha de parte uma constante multiplicativa para cada sistema de coeficientes correspondentes a cada parte $P^{(\mu)}$.

Demonstração da proposição 1ª: Seja $R_1(u_1,\dots,u_n)$, $R_2(v_1,\dots,v_n)$. A correspondência $\sum u_i\lambda_i \longrightarrow \sum v_i\lambda_i$ é um homomorfismo. Suposto

$$R_1 = R_1' + \dots + R_t', \qquad (\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_1' + \dots + \mathfrak{D}_t'),$$

tem-se $R_2 \cong R_1/\mathfrak{Z}_1 \cong R'_{i_1}+\dots+R'_{i_k}$, como se sabe.

Demonstração da proposição 2ª: Seja o sistema completo

$$\underbrace{\varphi_1^{(1)},\varphi_1^{(2)},\dots,\varphi_1^{(p_1)}}_{P^{(1)}};\ \underbrace{\varphi_2^{(1)},\varphi_2^{(2)},\dots,\varphi_2^{(p_2)}}_{P^{(2)}};\ \dots;\ \underbrace{\varphi_\mu^{(1)},\varphi_\mu^{(2)},\dots,\varphi_\mu^{(p_\mu)}}_{P^{(\mu)}};\ \dots$$

e seja o sistema base da representação $\mathfrak{D}$:

$$\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_q, \qquad (11)$$

sistema que define um espaço R. Dado um vector (função) de R, ficam determinados os coeficientes do desenvolvimento

$$\psi = \sum_{\mu=1}^{p_1}\varphi_1^{(\mu)}c_{1\mu} + \sum_{\mu=1}^{p_2}\varphi_2^{(\mu)}c_{2\mu}+\cdots \qquad (12)$$

As variáveis de que depende ψ são as mesmas de que dependem os $\varphi_\lambda^{(\nu)}$. Dessa maneira, a aplicação dum elemento T do grupo a ambos os membros pode fazer-se mediante uma certa transformação de variáveis. E virá

$$T\psi = \sum_{\mu=1}^{p_1} T\varphi_1^{(\mu)}\cdot c_{1\mu}+\cdots+\cdots$$

Como $T\psi$ é ainda uma combinação das funções (11) e como $T\varphi_1^{(\mu)}$, $T\varphi_2^{(\mu)}$, ... etc. são combinações das funções $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, etc., respectivamente, vê-se que o homomorfismo $R \sim P^{(\mu)}$, fazendo corresponder a cada Ψ um vector Φ bem determinado de $P^{(\mu)}$, faz corresponder a $T\psi$ o vector $T\Phi$, igualmente pertencente a $P^{(\mu)}$. Trata-se dum homomorfismo operatório relativamente ao grupo. Havendo uma correspondência homomorfa $R\sim P^{(\mu)}$, o espaço $P^{(\mu)}$ será isomorfo duma parte de R, pois R é completamente redutível. Mas, como $P^{(\mu)}$ é irredutível, será equivalente a uma das partes irredutíveis de R. Logo, no desenvolvimento (12), haverá no 2º membro apenas funções dos $P^{(\mu)}$ que tiverem equivalentes em $\mathfrak{D}$ (ou R), o que demonstra a proposição em vista.

Para demonstrar a proposição 3ª, escrevamos os desenvolvimentos (12) correspondentes aos vectores base (11). Tem-se

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \sum_{\mu=1}^{p_1}\varphi_1^{(\mu)}c'_{1\mu} + \sum_{\mu=1}^{p_2}\varphi_2^{(\mu)}c'_{2\mu}+\cdots,\\
\psi_2 &= \sum_{\mu=1}^{p_1}\varphi_1^{(\mu)}c''_{1\mu} + \sum_{\mu=1}^{p_2}\varphi_2^{(\mu)}c''_{2\mu}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi_q &= \sum_{\mu=1}^{p_1}\varphi_1^{(\mu)}c^{(q)}_{1\mu} + \sum_{\mu=1}^{p_2}\varphi_2^{(\mu)}c^{(q)}_{2\mu}+\cdots.
\end{aligned} \qquad (13)$$

A proposição 3ª afirma que, pondo de parte constantes, conhecidas $\mathfrak{D},\mathfrak{D}_1,\dots,\mathfrak{D}_\mu,\dots$

se podem determinar os coeficientes $(c'_{1\mu}, c''_{1\mu}, \ldots, c^{(q)}_{1\mu})$, $(c'_{2\mu}, c''_{2\mu}, \ldots, c^{(q)}_{2\mu})$, ... Demonstremo-lo para o primeiro sistema de coeficientes. Estudar o homomorfismo operatório $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{P}^{(1)}$ é determinar a matriz rectangular que faz corresponder a cada vector de $\mathfrak{R}$ um vector de $\mathfrak{P}^{(1)}$. Trata-se precisamente da matriz

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c'_{11} & c''_{11} & \cdots & c^{(q)}_{11} \\ c'_{12} & c''_{12} & \cdots & c^{(q)}_{12} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c'_{1p_1} & c''_{1p_1} & \cdots & c^{(q)}_{1q_1} \end{pmatrix}.$$

Visto que conhecemos ϑ e ϑ_1 (e visto que ϑ_1 se não repete em ϑ), mudemos a base dos $\psi\psi$ (em $\mathfrak{R}$), por forma a escolher entre os novos $\psi\psi$ um sistema $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(p_1)}$, de $\psi\psi$, tais que o espaço por eles definido seja equivalente a $\mathfrak{P}^{(1)}$. Aos desenvolvimentos (13) temos de substituir outros, nos quais os $\underline{p_1}$ primeiros fazem comparecer nas p_1 primeiras colunas uma matriz múltipla da matriz unidade (resulta do teorema de Schur[1]). Nos desenvolvimentos dos restantes $\psi\psi$, os coeficientes correspondentes aos dos anteriores são nulos. Regressando aos antigos $\psi\psi$, ficam determinados os $c^{(i)}_{1\mu}$, pondo de parte a constante que figura na diagonal da matriz múltipla da matriz unidade. A proposição está demonstrada.

---

1) $\mathfrak{M}$ é módulo finito relativamente a um côrpo. Seja $\mathfrak{G}$ um 2.º domínio operatório de $\mathfrak{M}$. Os elementos de $\mathfrak{G}$ induzem em $\mathfrak{M}$ transformações lineares. Admitamos que $\mathfrak{M}$ é simples em face de $\mathfrak{G}$. Seja $\underline{\mathfrak{L}}$ um endomorfismo operatório de $\mathfrak{M}$, por meio do qual, se $m' \in \mathfrak{M}$ é correspondente de $\underline{m}$, se tem

$$\mathfrak{L}\begin{cases} m \to \mathfrak{L}m = m' \\ gm \to \mathfrak{L}.gm = gm', \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{pondo } gm = Am, \\ \mathfrak{L}.Am = A.\mathfrak{L}m. \end{cases}$$

Êste resultado mostra que o endomorfismo $\mathfrak{L}$ comuta com todas as matrizes de $\underline{A}$. Vamos vêr que a matriz $\mathfrak{L}$, que representa $\mathfrak{L}$, é uma matriz diagonal de elementos iguais, se o côrpo fundamental $\mathfrak{K}$, do módulo $\mathfrak{M}$, fôr algèbricamente fechado. Se $\mathfrak{U}$ é a matriz unidade e $\lambda \in \mathfrak{K}$, tem-se

$$A(\mathfrak{L} - \lambda\mathfrak{U})m = (\mathfrak{L} - \lambda\mathfrak{U})Am.$$

Se a matriz $\underline{\mathfrak{L}}$ não é a matriz nula, determina um automorfismo de $\mathfrak{M}$. A matriz $\mathfrak{Q} = \mathfrak{L} - \lambda\mathfrak{U}$ determina também um endomorfismo de $\mathfrak{M}$. Escolhendo $\underline{\lambda}$ de modo que a um vector não nulo venha a corresponder um vector nulo, para o que basta considerar o sistema

É sabido que as coordenadas x_ν, y_ν, z_ν, ou, mais precisamente, $x_\nu - iy_\nu$, $z_\nu\sqrt{2}$, $-(x_\nu + iy_\nu)$ se transformam, em face das rotações, como os vectores duma representação ϑ_1. É claro que o mesmo se diz de $\sum(x_\nu - iy_\nu)$, $\sqrt{2}\sum z_\nu$, $-\sum(x_\nu + iy_\nu)$, que representamos com $X - iY$, $Z\sqrt{2}$, $-(X + iY)$. O momento eléctrico do sistema tem as componentes $-e\sum x_\nu = -eX$, $-eY$, $-eZ$ $(e > 0)$. É fácil fazer o estudo dos produtos

$$X\psi_L^{(M)}, \quad Y\psi_L^{(M)}, \quad Z\psi_L^{(M)}, \qquad (14)$$

onde $\psi_L^{(M)}$ representa um estado do sistema correspondente a um valor da energia e ao valor $\underline{L}$ do número quântico azimutal. $\underline{M}$, que varia entre $-L$ e $+L$ é tal que $\hbar M$ dá a componente de $\hbar k_z$ no referido estado. Em vez das funções (14), consideremos antes as funções

$$-(X + iY)\psi_L^{(M)}, \quad Z\sqrt{2}\,\psi_L^{(M)}, \quad (X - iY)\psi_L^{(M)}. \qquad (15)$$

Estas funções, em face das rotações transformam-se como $\vartheta_1 \times \vartheta_L = \vartheta_{L+1} + \vartheta_L + \vartheta_{L-1}$. Nos desenvolvimentos de (15) segundo as funções orto-normadas $\psi_L^{(M)}$ só podem comparecer funções pertencentes a sistemas de funções que são bases de espaços onde o grupo

---

$$x'_1 = (p_{11} - \lambda)x_1 + \cdots + p_{1n}x_n$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - -}$$
$$x'_n = p_{n1}x_1 + \cdots + (p_{nn} - \lambda)x_n,$$

onde os x'_i são as componentes de $m' \in \mathfrak{M}$ e os x_i as componentes de $m \in \mathfrak{M}$, e pôr igual a zero o determinante dos p_{ij}, vê-se que $\mathfrak{Q}$ determina a correspondência $\mathfrak{M} \sim 0$, tendo-se $\mathfrak{Q} = 0$, ou seja $\mathfrak{L} = \lambda\mathfrak{U}$. Se, agora $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ são dois módulos simples com o mesmo côrpo fundamental e relativos ao mesmo domínio operatório $\mathfrak{G}$, seja $\underline{\mathfrak{L}}$ um homomorfismo operatório de $\mathfrak{M}_1$ sôbre $\mathfrak{M}_2$. Os correspondentes E_i dos elementos base $e_i^{(1)}$, de $\mathfrak{M}_1$, exprimem-se nos elementos base $e_j^{(2)}$, de $\mathfrak{M}_2$, do modo seguinte:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = e_1^{(2)}p_{11} + \cdots + e_m^{(2)}p_{m1}, \\ \text{- - - - - - - - - - -} \\ E_n = e_1^{(2)}p_{1n} + \cdots + e_m^{(2)}p_{mn}, \end{array}\right\} \begin{pmatrix} n = \text{n.º de dimensões de } \mathfrak{M}_1 \\ m = \text{n.º de dimensões de } \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}.$$

Se o homomorfismo $\underline{\mathfrak{L}}$ não é o homomorfismo nulo, trata-se dum isomorfismo. Então, os $\underline{E_k}$ constituem uma base independente de $\mathfrak{M}_2$, pelo que será $m = n$. Vem dêsse modo:

$$m_1 \to m_2, \qquad gm_1 \to gm_2, \quad \text{ou seja}$$

$$\begin{cases} m_1 \to \mathfrak{L}m_1 = m_2, \\ gm_1 \to \mathfrak{L}.gm_1 = g.\mathfrak{L}m_1, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathfrak{L}A_1m_1 = A_2\mathfrak{L}m_1, \text{ se } A_1 \text{ e } A_2 \text{ são as ma-} \\ \text{trizes correspondentes ao operador } \underline{g} \text{ nos dois} \\ \text{módulos.} \end{cases}$$

das rotações tem representação $\mathcal{D}_{L+1}, \mathcal{D}_L, \mathcal{D}_{L-1}$. Tem, assim, lugar a regra de selecção $L \to L-1, L, L+1$. É claro que, sendo $L=0$, será $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_1$, pelo que a regra de selecção será nêsse caso $0 \to 1$. A proposição 3ª, atrás aludida, permite, pondo de parte constantes, obter efectivamente os desenvolvimentos das funções (15), em séries dos $\psi_{L'}^{(M')}$, com $L' = L-1, L, L+1$. Dêsses desenvolvimentos passa-se aos desenvolvimentos de (14), e obtêm-se, como se sabe, regras para a intensidade e polarização das riscas permitidas.

14) **O programa que vai seguir-se**: Depois de se ter posto em evidência a importância da teoria das representações em Quântica, trata-se de encontrar, efectivamente, as representações dos grupos da equação de Schrödinger. Já falámos dos grupos contínuos. Nos grupos abstractos tem importância fundamental o grupo simétrico. O estudo das representações dêste pode fazer-se por via directa. Dum modo geral, porém, a teoria das representações dos grupos finitos, devida a Frobenius, e para a qual Schur e Burnside deram contribuições importantes, data dos fins do século passado, começos dêste século, e contém as representações do grupo simétrico. Em 1929, E. Noether (em colaboração com van der Waerden) deu uma teoria da representação dos grupos finitos que assenta na teoria das representações das álgebras finitas (ou sistemas hiper-complexos). As ál-

Não pode dizer-se aqui que $PA_1 = A_2P$ traduza a comutabilidade de P com as matrizes A_1 ou A_2. Todavia, efectuemos em $\mathfrak{M}_2$ a mudança de base indicada por $P = (p_{ij})$. A matriz A_2 tomará a forma $P^{-1}A_2P = A_2' = A_1$. Assim, tomando nos módulos equivalentes $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ duas bases que se correspondam na isomorfia, as matrizes representativas dos operadores são iguais. Supondo realizada essa condição, imaginemos agora um isomorfismo operatório $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$. A matriz T do isomorfismo é ainda uma matriz diagonal de elementos iguais, se $\mathfrak{K}$ é algèbricamente fechado, pois verifica a condição $TA_1 = A_1T$, como no caso dum endomorfismo.

gebras aparecem como anéis fortemente restringidos por uma condição que se designa "condição dupla de cadeia", o que permite aplicar ao seu estudo os resultados conhecidos relativos a tais anéis. Não podendo dar aqui indicações históricas completas, cremos ter sido, inversamente, a teoria dos anéis não comutativos fortemente inspirada nos métodos seguidos para o estudo das álgebras. São de citar, nesta ordem de ideias, os trabalhos seguintes: de Wedderburn (1907), de L. E. Dickson, de E. Noether e W. Krull (é a êste último que se deve a noção de grupo com operadores), de E. Artin (1927), de E. Noether (1929), de G. Köthe (1930), de Levitzki (1931), de Hopkins (1938 e 1939), de K. Asano (1939), de J. Dieudonné (1942), de J. Levitzki (1943 e 1944), etc. Uma exposição sistemática de quási todos os resultados dêstes autores (pelo menos num certo aspecto) será publicada em breve na Colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto. Faremos àmanhã referências mais pormenorizadas a êstes assuntos. Nêste momento, permitimo-nos exprimir algumas ideias que se nos sugerem.

Depois da publicação, em 1930 e 1931, dum livro célebre de B. L. van der Waerden, "Moderne Algebra", em dois tomos, ficou ao alcance dos estudiosos de todo o mundo um instrumento de trabalho que os habilita a tomar contacto rápido com a Álgebra abstracta, incluindo os resultados mais recentes. A influência exercida por êsse livro reconhece-se no estilo e nas citações em grande número de trabalhos feitos em toda a parte. Nos volumezitos que já publicámos na Colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto démos o conteúdo da maior parte daquele livro.

A actividade, em Portugal, no domínio da Álgebra moderna, pode dizer-se extremamente reduzida. Estamos absolutamente convencidos de que poderiam realizar-se, no nosso país, progressos rápidos nesta matéria, se alguns jóvens diplomados portuguêses a ela quizessem dedicar os seus esforços. Julgo mesmo que estamos incorrendo em insuficiências sérias não introduzindo os elementos do seu estudo no nosso ensino superior. Os métodos da Álgebra moderna revestem-se duma elegância e dum sentido de generalidade que parecem não ter rival. Recebe-se uma sensação de alegria e segurança sempre que, nos outros ramos de matemática, métodos análogos podem ser usados. O regime de adaptação à sua disciplina pode, de comêço, revelar-se penoso. Vencidas as primeiras dificuldades, que provêem apenas de predisposição mental, abrem-se em seguida horizontes interessantes.

Os trabalhos de grande número de algebristas célebres aparecem ao estudioso como exemplos de reflexão acabada, que tomará por modêlo e se esforçará por imitar.

Se os nossos modestos esforços puderem contribuir, por pouco que seja, para dar entusiasmo a alguns estudantes ou diplomados, no sentido de se abalançarem aos estudos de que falamos, largamente nos sentiremos recompensados de os ter efectuado, certos como estamos das dificuldades que há, não apenas em realizar planos de trabalho, mas ainda em conceber os mesmos planos. Não será talvez descabido acentuar que na Álgebra moderna se distinguem hoje a "Teoria dos grupos abstractos", a "Teoria dos corpos comutativos", a "Teoria dos anéis e ideais comutativos", a "Teoria dos anéis e ideais não comutativos", a "Teoria das álgebras associativas" e a "Teoria das álgebras não associativas". Embora estas teorias se entrelacem, é evidente que há possibilidade de o esfôrço de cada um ser orientado num dos sentidos indicados. Quere-nos parecer ser a teoria dos anéis e ideais não comutativos aquela em que mais fàcilmente se podem os interessados pôr ao corrente dos seus objectivos actuais. É certo, pelo menos, que a leitura de grande número de memórias recentes não exige grande número de conhecimentos.

Minhas Senhoras e meus Senhores: dada a extensão das considerações precedentes, não queremos fatigá-los mais. Deixamos para amanhã as restantes indicações que nos propomos.

2ª Lição

Representações das álgebras

11) Palavras iniciais: Ex.^mo Senhor Presidente da Sociedade Portuguêsa de Matemática, minhas Senhoras e meus Senhores: Como dissémos, o programa de hoje é relativo a "Álgebras e suas representações". Serão feitas algumas considerações gerais sôbre a "Teoria dos anéis e ideais não comutativos", em correlação imediata com a "Teoria das álgebras".

12) Definição duma álgebra finita: Sob pena de nos perdermos em meras definições, não podemos deixar de admitir conhecidos certos resultados de "Álgebra moderna", já expostos na Colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto. Comecemos pela definição duma álgebra linear associativa finita (ou sistema hiper-complexo). Seja $\mathfrak{M} = \{0, v, w, \dots, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ um módulo relativo a um anel Γ com elemento um: $\Gamma = \{u, \alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \dots\}$. Tem-se

$$\alpha v \in \mathfrak{M}, \qquad \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w,$$

$$(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v, \qquad \alpha\beta . v = \alpha . \beta v.$$

Se se introduz em $\mathfrak{M}$ um produto associativo

$$vw \in \mathfrak{M}, \qquad vw . e_i = v . we_i ;$$

se se põe a hipótese

$$\lambda(vw) = \lambda v . w = v . \lambda w, \qquad (\lambda v = v\lambda),$$

e se $\Gamma = \mathfrak{K}$ é um côrpo comutativo; diz-se que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra associativa finita, sempre que $\mathfrak{M}$ é finito relativamente a $\mathfrak{K}$ (e o elemento unidade $u \in \mathfrak{K}$ é operador unitário do módulo). A álgebra aparece, em face desta definição, como um grupo abeliano com 2 domínios operatórios: o côrpo $\mathfrak{K}$, chamado côrpo fundamental, e a própria álgebra.

13) A álgebra dum grupo finito: Consideremos um grupo $\mathfrak{G}$ com N elementos. Supondo $g_i \in \mathfrak{G}$, $x_i, y_j \in \mathfrak{K}$ = côrpo comutativo, a álgebra do grupo é o conjunto de elementos da forma $\sum g_i x_i$, no qual as regras de soma e de produto são as seguintes:

$$\sum g_j x_j + \sum g_j y_j = \sum g_j (x_j + y_j),$$

$$\sum g_i x_i \cdot \sum g_j y_j = \sum g_i g_j \cdot x_i y_j = \sum g_k z_k,$$

onde $g_i g_j$ e $x_i y_j$ se calculam pelas regras de produto nos sistemas a que pertencem.

14) As representações duma álgebra: Consideremos, duma maneira geral, um côrpo $\mathfrak{K}$ e um anel $\mathfrak{A}$ de matrizes quadradas com elementos de $\mathfrak{K}$. Dado um anel Γ, diz-se que se tem uma representação do grau n de Γ, por meio de $\mathfrak{A}$, se tiver lugar o homomorfismo anular $\Gamma \sim \mathfrak{A}$. Se Γ tem um domínio operatório $\mathfrak{O}$, comutativamente ligado a Γ, isto é, se, dados $a, b \in \Gamma$ e $\rho \in \mathfrak{O}$, tiver lugar a relação

$$(ab)\rho = a\rho . b = a . b\rho,$$

além das relações que caracterizam $\mathfrak{O}$ como domínio operatório modular de Γ, exige-se que a representação de Γ, por meio de $\mathfrak{A}$, verifique a propriedade seguinte:

se $s \in \Gamma$ tem $S \in \mathfrak{A}$ como correspondente,

$s\rho \in \Gamma$ deverá ter $S\rho \in \mathfrak{A}$ como correspondente.

Isto exigirá que σ opere sôbre os elementos de $\mathfrak{K}$. Supôr-se-á, por isso, que σ está contido no centro de $\mathfrak{K}$.

Quando $\mathfrak{r}$ é um sistema hiper-complexo $\mathfrak{H}$, de côrpo fundamental P, êste côrpo desempenha o papel do domínio operatório σ.

Diz-se <u>módulo de representação de $\mathfrak{r}$ relativamente a $\mathfrak{K}$</u> um módulo duplo $\mathfrak{M}$, relativo a $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{K}$, finito, de ordem n, relativamente a $\mathfrak{K}$, sôbre o qual $\mathfrak{r}$ opera à esquerda, de tal modo que vale a <u>lei associativa</u>

$$a.m\lambda = am.\lambda, \qquad (a\in\mathfrak{r},\quad \lambda\in\mathfrak{K},\quad m\in\mathfrak{M}).$$

Esta igualdade exprime que os operadores a induzem no módulo $\mathfrak{M}$ transformações lineares (endomorfismos operatórios):

$$a\begin{cases} m \to am = m',\\ m\lambda \to a.m\lambda = am.\lambda = m'\lambda.\end{cases}$$

Designando com $e_1,\dots,e_n$ os elementos base do módulo, ter-se-á

$$ae_1 = \sum e_k a_{k1},\quad \dots,\quad ae_n = \sum e_k a_{kn}.$$

É, então, fácil de vêr que a cada módulo de representação pertence uma representação e que, reciprocamente, cada representação pertence a um módulo de representação.

15) <u>Representações dos grupos e dos sistemas hiper-complexos</u>: Passemos dum grupo finito $\mathfrak{G}$ à álgebra $\mathfrak{H}$ do grupo. Se o côrpo fundamental P da álgebra é o côrpo em que se quere a representação, ou, pelo menos, é um côrpo contido no centro do côrpo de representação $\mathfrak{K}$, a representação do grupo estende-se para uma representação da álgebra do modo seguinte:

Sejam $g_1,\dots,g_N\in\mathfrak{G}$ e $A_1,\dots,A_N$ as matrizes correspondentes do grupo de representação. Fazendo corresponder ao elemento $\sum g_i x_i\in\mathfrak{H}$ a matriz $\sum A_i x_i$, vê-se imediatamente que ao produto

$$\sum g_i x_i\cdot\sum g_k y_k = \sum g_i g_k x_i y_k$$

se deve fazer corresponder $\sum A_i A_k x_i y_k$. Ora é

$$\sum A_i A_k x_i y_k = \sum A_i x_i\cdot\sum A_k y_k.$$

Inversamente, uma representação da álgebra do grupo contém uma representação do grupo.

16) <u>As álgebras são anéis com condição dupla de cadeia</u>: Diz-se, como sabemos, que um anel $\mathfrak{r}$ é um <u>anel-O direito</u>, ou é um anel com <u>condição de cadeia ascendente</u> ou ainda um anel com <u>condição de máximo</u> para os seus ideais direitos, se, dada uma cadeia

$$\mathfrak{r}_1\subseteq\mathfrak{r}_2\subseteq\mathfrak{r}_3\subseteq\dots,$$

o sinal $=$ tiver lugar a partir de determinada ordem. A condição de máximo costuma enunciar-se, todavia, do modo seguinte: dado um conjunto qualquer de ideais direitos, há sempre, nêsse conjunto, um ideal máximo, ou seja um ideal que não está contido noutro qualquer. A equivalência dêste enunciado com o anterior é imediata.

Do mesmo modo se dão as noções de <u>anel-U direito</u>, de <u>cadeia descendente</u> ou de anel com <u>condição de mínimo</u>.

As álgebras satisfazem às duas condições, em virtude da proprieda de seguinte: todo o sub-módulo admissível dum módulo finito ~~admissível~~ com respeito a um côrpo é um módulo finito com respeito a êsse côrpo. Bem entendido que os ideais das álgebras que se põem em causa são apenas os ideais admissíveis, ou seja aqueles ideais que, com a, contêem o elemento $a\lambda$, $\lambda \in P$.

17) A noção de radical $\mathfrak{R}$: O estudo das representações exige que se dê a noção de radical dum anel. No sentido mais antigo, o radical $\mathfrak{R}$ é o conjunto unido dos ideais nilpotentes de $\mathfrak{r}$ (ou, mais simplesmente, dos ideais bilaterais nilpotentes de $\mathfrak{r}$). $\mathfrak{R}$ não é geralmente nilpotente.

Teorema:- Um anel-O tem radical nilpotente. Tomemos, com efeito, o conjunto dos ideais direitos nilpotentes do anel e um ideal máximo, m, dêsse conjunto. Se $\mathfrak{R}$ não está contido nêsse ideal máximo, seja $w \in \mathfrak{R}$ um elemento não pertencente a m. w gera um ideal direito nilpotente (w) e a soma $(m, (w))$ é um ideal direito nilpotente que contém m, contra a hipótese dêste ser máximo. Será, assim, $\mathfrak{R} \subseteq m$. Daqui, e do facto de ser $m \subseteq \mathfrak{R}$, se conclui $\mathfrak{R} = m$, q. e. d.

Hopkins, em 1938, demonstrou o

Teorema: Um anel-U tem radical nilpotente. Não reproduzimos a demonstração de Hopkins, mesmo mais ou menos modificada por outros autores. Mas vamos estabelecer, com Levitzki (1944), ~~um~~ teorema importante, que inclue o teorema de Hopkins como caso particular.

Teorema: É condição necessária e suficiente, para que o radical $\mathfrak{R}$ seja nilpotente, que seja finita toda a cadeia de ideais bilaterais $\mathcal{L}_i$ (contidos em $\mathfrak{R}$) da forma $\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 \supseteq \dots$

A condição é necessária: se $\mathfrak{R}$ é nilpotente, suponhamos $\mathfrak{R}^\sigma = (0)$. Então, pelo menos, é $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_{\sigma-1} \subseteq \mathfrak{R}^\sigma = (0)$, e a cadeia é finita.

A condição é suficiente: Suponhamos finita toda a cadeia indicada no teorema. A cadeia $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{R}^2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{R}^{k-1} \supseteq \mathfrak{R}^k \supseteq \dots$ é finita. Será $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n+1}$, para um certo n. Vamos ver que é $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{a} = (0)$. Se fôsse $\mathfrak{a} \neq (0)$, ter-se-ia $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^3 = \dots$, e existiria uma infinidade numerável $b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$ de elementos de $\mathfrak{a}$ tais que o produto de qualquer número deles tomados consecutivamente seria $\neq 0$ (Para os encontrar, bastaria partir dum elemento $a \in \mathfrak{a}$, diferente de zero, e escrever $a = b_1 b_2'$ com $b_1, b_2' \in \mathfrak{a}$; em seguida escrever $b_2' = b_2 b_3'$, com $b_2, b_3' \in \mathfrak{a}$, e, portanto $a = b_1 b_2 b_3'$; etc). Então, pondo $\mathfrak{a} b_{2+3k} \mathfrak{a} = \mathcal{L}_k$, ter-se-ia, para cada r, $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_r \neq (0)$, pois que

$$\begin{cases} b_1 b_2 b_3 \in \mathcal{L}_0, & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \in \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1, \\ b_4 b_5 b_6 \in \mathcal{L}_1, & b_1 b_2 b_3\ b_4 b_5 b_6\ b_7 b_8 b_9 \in \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \\ \text{-------}, & \text{---------}. \end{cases}$$

Por outro lado, existiria um inteiro q tal que

$$\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_q = \mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{L}_{q+1}.$$

Como $\mathcal{L}_{q+1}$ estaria ~~contido~~ num ideal bilateral gerado por um elemento de $\mathfrak{R}$ seria nilpotente e ter-se-ia o absurdo

$$(0) \subset \mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{L}_{q+1}^\sigma = (0).$$

O teorema está demonstrado.

Num anel-U realizam-se as condições do teorema, de sorte que é válida a afirmação de Hopkins.

18) **A noção de radical R^***: Köthe (1930) deu uma noção diferente de radical. Para êste autor, o radical R^* é o conjunto unido $\mathfrak{N}$ dos nilideais bilaterais (ideais bilaterais compostos de elementos nilpotentes), se tal conjunto contém os ideais unilaterais (direitos e esquerdos). Parece-nos útil esclarecer esta definição com as noções que vão seguir-se. O conjunto unido $\mathfrak{N}$ abrange, em particular, o radical R (que existe sempre embora possa ser $R=(0)$), mas não é evidente que R^* exista. Pode enunciar-se o seguinte

Teorema: - É condição necessária e suficiente, para que R^* exista, que a soma dum número finito de nilideais direitos seja um nilideal direito.

A condição é necessária: Se R^* existe, um nilideal direito está sempre contido num nilideal bilateral. Como a soma dum nilideal direito e dum nilideal bilateral é um nilideal direito (o que é fácil de provar), segue-se que a soma de dois nilideais direitos é um nilideal direito.

A condição é suficiente: Dado o nilideal esquerdo $\mathfrak{n}$, consideremos o ideal bilateral $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{r})$. Vamos ver que o ideal bilateral $\mathfrak{n}\mathfrak{r}$ é nilideal. Um elemento que lhe pertença é da forma $\sum a_i s_i$, com $a_i \in \mathfrak{n}$, $s_i \in \mathfrak{r}$. Um elemento $a_i s_i$ é nilpotente, visto ser $s_i a_i \in \mathfrak{n}$, $(s_i a_i)^\sigma = 0$, $(a_i s_i)^{\sigma+1} = a_i (s_i a_i)^\sigma s_i = 0$. Dêste modo, $\sum a_i s_i$ pertence a uma soma $(a_1\mathfrak{r}, \dots, a_p\mathfrak{r})$ dum número finito de nilideais direitos. Por isso, $\sum a_i s_i$ é nilpotente e $\mathfrak{n}\mathfrak{r}$ é nilideal. Então, o ideal bilateral $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{r})$ é nilideal. Como contém $\mathfrak{n}$, será $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{N}$. Se se tratar dum nilideal direito, o ideal bilateral $(\mathfrak{n}, \mathfrak{r}\mathfrak{n})$ é também nilideal, pois que a soma $(\mathfrak{r}a_1, \dots, \mathfrak{r}a_q)$, análoga a uma soma anterior, é um nilideal, dada a circunstância de todos os nilideais esquerdos pertencerem a nilideais bilaterais. Será ainda $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{N}$, e, portanto, $\mathfrak{N} = R^*$.

Interessante é verificar que $\mathfrak{r}/R^*$ não tem nilideal.

Quanto às relações entre R e R^*, podemos enunciar a seguinte proposição:

Teorema: - É necessário e suficiente, para que R^* exista e seja $R^* = R$, que $\mathfrak{r}/R$ não tenha nilideal. A demonstração resulta imediatamente estudando o homomorfismo anular $\mathfrak{r} \sim \mathfrak{r}/R$.

19) **Regresso ao estudo das representações**: As representações das álgebras constituem o nosso objectivo essencial. O seu estudo repousa sôbre um certo número de questões que vamos ainda tratar.

20) **Representações dos anéis semi-simples**: Um anel-U para o qual $R=(0)$ diz-se semi-simples. Noether (1929) estabeleceu completamente a estrutura dos anéis semi-simples, demonstrando os teoremas a seguir.

Teorema: - Um anel simples que seja anel-U e para o qual $R=(0)$ é isomorfo dum anel completo de matrizes com elementos dum côrpo. Êste côrpo é isomorfo do côrpo endomórfico (ou automórfico) de cada ideal direito simples do anel.

Teorema: - Um anel semi-simples é soma directa dum certo número de anéis simples, nas condições do teorema anterior.

Mostrou ainda que, para um anel semi-simples, há simetria no tocante às afirmações relativas a ideais direitos ou esquerdos.

O estudo de módulos relativos a anéis semi-simples é importante. Se o módulo $\mathfrak{M}$ é finito, é um módulo com condição de base. Isto significa que todo o sub-módulo de $\mathfrak{M}$ é também um módulo finito. Limitemo-nos ao caso dum módulo simples $\mathfrak{M}$. Um tal módulo é isomorfo dum ideal esquerdo, $\mathfrak{l}_1$, do anel, salvo se fôr $\mathfrak{M}=(0)$. Para o vêr, notemos que, sendo $m\in\mathfrak{M}$ e $m\neq 0$, o sub-módulo $\mathfrak{S}m$ é $\neq(0)$, se $\underline{m}$ fôr convenientemente escolhido. A decomposição $m=(m-um)+um$ leva a dois sub-módulos admissíveis. Um deles não pode existir; ter-se-á $m-um=0$, visto que $um\neq 0$. Logo $\underline{u}$ é operador unitário. Decompondo $\mathfrak{S}$ sob a forma $\mathfrak{S}=\mathfrak{l}_1+\dots+\mathfrak{l}_n$, cada $\mathfrak{l}_i m$ é sub-módulo admissível. Haverá um $\mathfrak{l}_k m\neq(0)$. A correspondência $\mathfrak{l}_k\to\mathfrak{l}_k m$ é um isomorfismo relativamente a $\mathfrak{S}$ e, como $\mathfrak{l}_k m=\mathfrak{M}$, vem $\mathfrak{l}_k\cong\mathfrak{M}$. Neste caso, decompondo $\mathfrak{S}$ em ideais bilaterais consoante a igualdade $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_1+\dots+\mathfrak{a}_s$, se se supõe $\mathfrak{l}_k=\mathfrak{l}_1\subseteq\mathfrak{a}_1$, será $\mathfrak{a}_i\mathfrak{M}=(0)$ ou $\mathfrak{a}_i\mathfrak{l}_1=0$, para $i\neq 1$. A aplicação a $\mathfrak{M}$ dos elementos de $\mathfrak{S}$ reduz-se à aplicação dos elementos de $\mathfrak{a}_1$. Faremos, por isso $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_1$. Vale o

Teorema: - Aos ideais esquerdos simples dum anel simples $\mathfrak{S}$ pertencem representações irredutíveis de $\mathfrak{S}$. O côrpo de representação é isomorfo do côrpo automórfico Λ dum daqueles ideais.

Regressando aos anéis semi-simples, obtêem-se tantas representações irredutíveis distintas (não equivalentes) quantos os ideais esquerdos simples não isomorfos entre si, ou quantos os anéis simples da decomposição do anel. Não se trata aqui, pois, de representações irredutíveis quaisquer de $\mathfrak{S}$. Admite-se, repita-se, que o módulo de representação é simples relativamente a $\mathfrak{S}$ e que o côrpo de representação é um dos $\Lambda\Lambda$ (ou um côrpo isomorfo).

Suponhamos agora Λ uma ampliação finita dum côrpo Γ. É válido o seguinte

Teorema: - A cada ideal esquerdo do anel simples $\mathfrak{S}$ corresponde ainda uma representação irredutível. A matriz que representa $s\in\mathfrak{S}$, em Γ, obtem-se substituindo os elementos λ_{pq}, da matriz que representa $\underline{s}$, em Λ, por matrizes C_{pq}, que representam λ_{pq} em Γ. Neste enunciado aparece Λ como um módulo de representação de si mesmo, em que o côrpo de representação é Γ.

Continuando a admitir que $\mathfrak{M}$ é um módulo simples relativamente ao anel simples $\mathfrak{S}$, poderá supôr-se $\mathfrak{K}$ um côrpo qualquer de representação? Vamos vêr que, de facto, não se introduz representação nova e que o côrpo $\mathfrak{K}$ é necessàriamente isomorfo dum sub-côrpo de Ω. Um elemento $k\in\mathfrak{K}$ satisfaz, por hipótese, à igualdade $sm.k=s.mk$, pelo que define um endomorfismo operatório de $\mathfrak{M}$:

$$k\begin{cases} m\to mk=m', \\ sm\to sm.k=s.mk=sm', \end{cases}\qquad \text{(operatório relativamente a } \mathfrak{S}\text{)}.$$

O côrpo $\mathfrak{K}$ admite uma imagem homomorfa dada por um sub-côrpo Ω', de Ω, mas êste sub-côrpo é isomorfo de $\mathfrak{K}$, porque o elemento um de $\mathfrak{K}$, definindo, por hipótese, o automorfismo idêntico de $\mathfrak{M}$, só o elemento nulo de $\mathfrak{K}$ pode definir o endomorfismo nulo. Como $\mathfrak{M}$ é finito relativamente a $\mathfrak{K}$, sê-lo-á relativamente a Ω', de sorte que Ω é ampliação finita de Ω', pois, se o não fôsse, a ordem de $\mathfrak{M}$ com respeito a Ω' não seria finita.

21) Caso em que existe domínio operatório: Se existe um domínio operatório $\mathfrak{O}$, do anel $\mathfrak{S}$, comutativamente ligado a $\mathfrak{S}$, quais serão as representações de $\mathfrak{S}$ pertencentes a módulos simples relativos a $\mathfrak{S}$, mas sob a condição da seguinte correspondência: $s \to S$, $s\rho \to S\rho$? Em primeiro lugar, o facto de $\mathfrak{M}$ ser módulo simples relativamente a $\mathfrak{S}$ garante que $\mathfrak{M}$ será isomorfo dum ideal esquerdo simples, $\mathfrak{n}$, de $\mathfrak{S}$. Depois, como a representação existe por hipótese, o côrpo de representação será isomorfo dum sub-côrpo do côrpo endomórfico daquele módulo. Mas há mais. Se $f \in \mathfrak{n}$, tem-se, em virtude de $\mathfrak{O}$ ser domínio operatório de $\mathfrak{S}$,

$$sf \cdot \rho = s\rho \cdot f = s \cdot f\rho.$$

Isto significa que ~~pode~~ deve dar-se imediatamente sentido à "operação de ρ sôbre o módulo $\mathfrak{M}$", por meio das relações

$$sm \cdot \rho = s\rho \cdot m = s \cdot m\rho.$$

E, neste caso, ρ opera também sôbre o côrpo $\mathfrak{K}$ de representação, pois, em virtude de ser

$$\rho \begin{cases} m \to m\rho = m', \\ sm \to sm \cdot \rho = s \cdot m\rho = s\,m', \end{cases}$$

ρ define um endomorfismo de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{S}$ [O resultado da operação é indicado dentro do côrpo $\mathfrak{L}$ dos endomorfismos-$\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{M}$.] A representação em causa não pode deixar de ser, portanto, uma das representações estudadas no § anterior. E vê-se, efectivamente, que $s\rho$ tem $S\rho$ como correspondente. Inversamente, se um anel semi-simples $\mathfrak{S}$ está ligado comutativamente a um domínio operatório $\mathfrak{O}$, a um módulo simples $\mathfrak{M}$ relativo a $\mathfrak{S}$ pertence uma representação irredutível de $\mathfrak{S}$, se valer $sm \cdot \rho = s\rho \cdot m = s \cdot m\rho$, tendo para ela lugar as correspondências $s \to S$, $s\rho \to S\rho$. A referida representação é equivalente à representação pertencente a um ideal esquerdo de $\mathfrak{S}$ isomorfo de $\mathfrak{M}$ (relativamente a $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{O}$).

22) Sôbre as representações dos anéis semi-primários:

$\mathfrak{S}$ diz-se semi-primário, se tiver radical $\mathfrak{R}^*$ e se $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ fôr semi-simples. A introdução dêstes anéis é devida a Köthe (1930). Em Deuring (Algebren, 1935) e Almeida Costa (Sôbre os anéis semi-primários, 1944) encontra-se uma análise detalhada dêstes anéis. Suponhamos $\mathfrak{R}^*$ nilpotente. É então $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$. Se, nessa hipótese, $\mathfrak{M}$

é um módulo simples relativamente a $\mathfrak{S}$, tem-se $\mathfrak{R}\mathfrak{M} = (0)$, porque, supondo $\mathfrak{R}\mathfrak{M} \neq (0)$, como $\mathfrak{R}\mathfrak{M}$ é sub-módulo admissível, ter-se-à

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R}\mathfrak{M} = \cdots = \mathfrak{R}^{\sigma}\mathfrak{M} = (0).$$

É equivalente considerar $\mathfrak{M}$ como simples com respeito a $\mathfrak{S}$ ou com respeito ao anel semi-simples $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$. Ao módulo simples $\mathfrak{M}$ corresponde uma representação irredutível de $\mathfrak{S}$, na qual os elementos de $\mathfrak{R}$ são representados por matrizes nulas. O côrpo de representação é isomorfo do côrpo endomórfico dum ideal esquerdo simples de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ ou isomorfo dum sub-côrpo dêste. É claro que as conclusões do § anterior subsistem, se $\mathfrak{S}$ está comutativamente ligado a um domínio operatório $\mathfrak{O}$.

Consideremos, por ex., um anel $\mathfrak{S}$ com condição dupla de cadeia. Toda a representação irredutível dum tal anel, pertencente a um módulo simples relativamente ao anel, é uma representação dum anel sem radical. Essa representação pertence a um ideal esquerdo simples de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ ou a um factor de composição da série de composição entre $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{R}$. No caso das álgebras, está precisamente em causa um anel com condição dupla de cadeia e com domínio operatório comutativamente ligado ao anel.

23) Intervenção dum absoluto: Num módulo relativo a um anel, cada elemento do anel induz um endomorfismo. O anel diz-se um *absoluto*, se os endomorfismos forem diferentes.

Consideremos um módulo simples $\mathfrak{M}$ relativo a um anel semi-simples $\mathfrak{r}$. Se $\mathfrak{N}$ é o ideal esquerdo de $\mathfrak{r}$ isomorfo de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ pertence a um ideal bilateral da decomposição $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_s$. Se fôr $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_1$ é um absoluto, como sabemos.

Seja, então, $\mathfrak{r}$ um anel absolutamente qualquer. Uma representação dêsse anel, dada por um côrpo P, comutativamente ligado ao anel, e operatória homomorfa relativamente a P, pertence a um módulo de representação no qual os elementos do anel determinam endomorfismos operatórios relativamente a P. O anel de representação é uma imagem isomorfa (representação fiel) dum absoluto, o qual tem a estrutura dum anel de matrizes com elementos dum côrpo e é um módulo finito relativamente a P, comutativamente ligado a P. A condição dupla de cadeia (para os ideais admissíveis) tem lugar no absoluto. A representação de $\mathfrak{r}$ reduz-se, assim, à representação dum anel $\mathfrak{o}$ com condição dupla de cadeia, dada por um côrpo comutativamente ligado a $\mathfrak{o}$ que opera sôbre o módulo de representação, de tal modo que

$$a \cdot m\rho = am \cdot \rho = a\rho \cdot m, \qquad (a \in \mathfrak{o}).$$

24) As representações das álgebras: Como se disse, o côrpo fundamental P, da álgebra, está contido no côrpo Ω de representação. Suporemos $P = \Omega$. Não há perda de generalidade, pois que, dado o sistema $\mathfrak{h}$, se $(e_1, \dots, e_n)$ é uma base e se $M_1, \dots, M_n$ são as matrizes correspondentes na representação dada em Ω, pondo $\sum M_i \omega_i$ $(\omega_i \in \Omega)$

como representante de $\sum e_i \omega_i \in \mathfrak{h}_\Omega$, obtem-se uma representação do sistema ampliado $\mathfrak{h}_\Omega$, e, reciprocamente, a representação de $\mathfrak{h}_\Omega$ em Ω inclue a representação de $\mathfrak{h}$ em Ω. Trata-se, assim, de representações dum anel com condição dupla de cadeia e com domínio operatório constituído por um côrpo P, tomando êste côrpo como côrpo de representação. Como se exige também que $S\rho$ seja a matriz representante de $s\rho$, valem para o módulo de representação as igualdades $sm \cdot \rho = s \cdot m\rho = s\rho \cdot m$. As representações irredutíveis são, então, representações pertencentes a módulos simples relativamente ao anel e ao côrpo. ~~Vamos ver que um tal módulo $\mathfrak{M}$, porém, é módulo simples relativamente ao anel $\mathfrak{h}$. Se $\mathfrak{M}$ é simples relativamente a $\mathfrak{h}$ e P, mas não simples relativamente a $\mathfrak{h}$, existe $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, sem que todos os elementos $m'\rho$ pertençam a $\mathfrak{M}'$. Ora isto é absurdo, pois que~~

$$\cancel{m'\rho = u \cdot m'\rho = u\rho \cdot m' \in \mathfrak{M}', \qquad (u \in \mathfrak{h})}.$$

Portanto: *As representações irredutíveis duma álgebra são sempre representações irredutíveis pertencentes a um módulo simples relativo à álgebra, ou seja, são as representações irredutíveis de $\mathfrak{h}/\mathfrak{R}$, pertencentes a um ideal esquerdo simples dêste anel cociente semi-simples.* Costuma dizer-se ainda: *as representações irredutíveis duma álgebra são sempre representações irredutíveis dum sistema sem radical.* Tratando-se de representações quaisquer, apenas podemos dizer quais as representações que aparecem em escada diagonal.

Tomemos a própria álgebra como módulo de representação. Obtem-se a chamada "*representação regular*". Ela será completamente redutível, se $\mathfrak{h}$ fôr completamente redutível, como sucede se não há radical. As representações irredutíveis, bem determinadas, que comparecem na redução da representação regular, pertencem a módulos de representação definidos por factores de composição da série de composição de $\mathfrak{h}$, os quais são isomorfos de ideais esquerdos simples de $\mathfrak{h}/\mathfrak{R}$. Para se vêr que na representação regular comparecem todas as representações irredutíveis de $\mathfrak{h}$, basta ter em conta que, sendo π' um ideal esquerdo simples qualquer de $\mathfrak{h}/\mathfrak{R}$, a série de composição dêste anel-factor, na qual π' é penúltimo divisor normal, é isomorfa da parte da série de composição de $\mathfrak{h}$ compreendida entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{R}$.

Antes de dizermos algumas palavras sôbre as representações completamente redutíveis, vamos ligar às considerações anteriores o

Teorema de Burnside: Um anel γ irredutível de matrizes do grau $\underline{n}$, com elementos dum côrpo algèbricamente fechado P, comutativamente ligado ao anel, contém precisamente $\underline{n}^2$ matrizes linearmente independentes, em relação a P. γ é um módulo finito relativamente a P, e, portanto, um sistema hiper-complexo. Tomando γ como a sua própria representação, como γ é um absoluto, é um sistema sem radical. A representação em causa obtem-se através da representação de grau $\underline{m}$ dada por um ideal esquerdo simples π, de γ, na qual o respectivo côrpo endomórfico $\mathfrak{Q}$ é o côrpo de representação. Como P é algèbricamente fechado, pode supôr-se $P = \mathfrak{Q}$, como vamos vêr. Se o ideal esquerdo π pertence a um anel simples $\mathfrak{r} \subseteq \gamma$, o centro de $\mathfrak{r}$ é da forma $\mathfrak{z}e$, onde e = elemento um de $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{z}$ = centro de $\mathfrak{Q}$. Visto que Pe comuta com todos os elementos de $\mathfrak{r}$, tem-se $Pe \subseteq \mathfrak{z}e$. Em suma: P pertence ao centro de $\mathfrak{Q}$. Mas $\mathfrak{Q}$ é uma ampliação finita de P. Dado $\omega \in \mathfrak{Q}$, há um número finito de potências de $\underline{\omega}$ que são linearmente independentes relativamente a P.

Seja

$$f(\omega) = \omega^t + \omega^{t-1} p_{t-1} + \cdots + \omega p_1 + p_0 = 0 .$$

Substituindo $\underline{\omega}$ por $\underline{x}$, o polinómio obtido no 1.º membro pode decompôr-se em factores lineares, visto que P é algèbricamente fechado:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \alpha_i), \qquad (\alpha_i \in P).$$

Voltando a substituir aqui $\underline{x}$ por $\underline{\omega}$, as operações a efectuar levam a $f(\omega)$, pelo facto de $\underline{\omega}$ comutar com P. É, assim, $\omega = \alpha_k \in P$, ou seja $\mathfrak{Q} = P$.

Nestas condições, deverá ter-se $m = n$, e a representação é um anel completo de matrizes com elementos de P, pelo que existirão precisamente $\underline{n}^2$ matrizes linearmente independentes, como se afirmou.

25) Representações completamente redutíveis

: Comecemos pelo teorema seguinte: toda a representação completamente redutível dum anel comutativamente ligado ao côrpo de representação tem por absoluto um sistema hiper-complexo sem radical. Tomemos o absoluto. Em cada representação irredutível o seu radical é representado pela matriz nula. A mesma circunstância terá lugar na representação total. Ora, tratando-se dum absoluto, será $\mathfrak{R} = (0)$.

Sob um ponto de vista inverso, consideremos um sistema hiper-complexo sem radical. Uma representação ϑ dum tal sistema é uma representação dum anel semi-simples $\mathfrak{J}$. Pelo facto de ser, por hipótese, $\mathfrak{s}.\mathfrak{m}\rho = \mathfrak{s}\mathfrak{m}\cdot\rho$, a decomposição $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ (ou $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m} - u\mathfrak{m}) + u\mathfrak{m}$) leva a dois sub-módulos de representação. $\mathfrak{M}'$ é finito relativamente a P. Decomposto em módulos simples relativamente a P, tais módulos são ainda módulos de representação de $\Gamma = \mathfrak{h}$ (para a representação nula). $\mathfrak{M}'$ é, pois, completamente redutível. Relativamente a $\mathfrak{M}''$, supondo $U \in \Gamma$, tem-se $UP \cong P$, de modo que $\mathfrak{M}''$ é finito relativamente a UP ($UP \cdot m'' = Um'' \cdot P = U \cdot m''P = m''P$), e, portanto, relativamente a Γ. Nessas condições é completamente redutível e pode enunciar-se o

<u>Teorema:</u> <u>Toda a representação dum sistema hiper-complexo sem radical é completamente redutível.</u>

26) Exemplo de Dirac: Tomemos as matrizes

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com elementos do côrpo Γ dos números complexos. Pondo $\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$, verificam-se imediatamente as igualdades

$$\Sigma_\lambda^2 = U, \quad \Sigma_\lambda \Sigma_\mu = -\Sigma_\mu \Sigma_\lambda, \quad (U = \text{matriz unidade}). \qquad (11)$$

Consideremos o sistema das 16 matrizes seguintes:

$$\begin{gathered} U;\ \Sigma_1, \dots, \Sigma_4;\ \Sigma_1\Sigma_2, \dots, \Sigma_3\Sigma_4; \\ \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3, \dots, \Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4;\ \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4. \end{gathered} \qquad (12)$$

Êste sistema, à parte a questão do sinal, contém o produto de duas matrizes que lhe pertençam. As 16 matrizes são linearmente independentes e podem tomar-se como base do anel completo das matrizes de 4ª ordem com elementos de Γ. Êste anel só tem representações irredutíveis ou completamente redutíveis. As representações irredutíveis pertencem a um ideal esquerdo simples do anel e têem êste como absoluto. A única

representação irredutível do anel é o próprio anel. Quando se quere um sistema de matrizes satisfazendo a (11), a consideração das matrizes (12) leva a um sistema hiper-complexo de base $u, \sigma_1, \dots, \sigma_4, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{34}, \sigma_{123}, \dots, \sigma_{234}, \sigma_{1234}$, na qual os elementos obedecem à lei associativa de multiplicação (11). Se as matrizes de (11) existem, constrói-se por meio delas uma representação do sistema hiper-complexo. Inversamente, uma representação do sistema hiper-complexo tem de ser dada por matrizes, entre as quais matrizes como (12) representam os elementos base do sistema. A representação anterior, de <u>Dirac</u>, mostra que a estrutura do sistema hiper-complexo é a dum anel completo de matrizes de 4ª ordem. Tratando-se, então, dum sistema sem radical, a única representação irredutível é a de <u>Dirac</u>, e o sistema de matrizes satisfazendo a (11) é, pelo menos, de 4ª ordem. Pode haver, porém, matrizes de 8ª ordem, de 12ª ordem, etc., nas condições desejadas.

27) Representações dos grupos finitos: A teoria das representações dos grupos finitos é consequência das proposições seguintes:

1ª - As representações irredutíveis do sistema hiper-complexo comutativo $\mathfrak{Z}$ (de côrpo fundamental P) dadas pelo côrpo algèbricamente fechado são necessàriamente do 1º grau.

2ª - O número de tais representações é igual à característica de $\mathfrak{Z}_\Omega / \mathfrak{R}_1$, onde $\mathfrak{R}_1$ é o radical de $\mathfrak{Z}_\Omega$.

3ª - Um sistema hiper-complexo sem radical tem tantas representações irredutíveis quantas as do seu centro $\mathfrak{Z}$.

4ª - A álgebra dum grupo finito é um sistema sem radical, se o número de elementos do grupo não é dividido pela característica do côrpo.

5ª.- O centro da álgebra dum grupo tem uma característica igual ao número de classes conjugadas em que pode decompôr-se o grupo.

Consequências:

α) As representações dum grupo finito, num côrpo cuja característica não divide o número de elementos do grupo, são irredutíveis ou completamente redutíveis (Maschke)

β) O número de representações irredutíveis dum grupo é (num côrpo como o anterior) igual ao número de representações irredutíveis do seu centro.

γ) Se o côrpo de representação é, além disso, algèbricamente fechado, o número de representações irredutíveis é igual à característica da álgebra do seu centro ou igual ao número de classes de elementos conjugados em que pode decompôr-se o grupo.