Math. Z. 108, 10–14 (1968)

Sur les μ-demi-anneaux*

A. ALMEIDA COSTA

1. Introduction

Le concept de demi-anneau, introduit par Vandiver [1], a été développé principalement par Bourne [2, 3], etc. D'autres auteurs, par exemple Bourne et Zassenhaus [4, 5], Iséki [6, 7], M^lle Noronha Galvão [8, 9] et l'auteur de cette Note [10, 11], y ont apporté des contributions.

Soit $\mathfrak{S}$ un demi-anneau. D'après l'auteur [12], un ensemble $\mathfrak{M}$ d'idéaux de $\mathfrak{S}$ est un *μ-système*, si, en prenant $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$, il existe un idéal $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. D'une façon analogue, un ensemble $\mathfrak{P}$ d'idéaux de $\mathfrak{S}$ est un *π-système*, si, en prenant $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$, il existe un idéal $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$. On considère l'ensemble vide d'idéaux en tant que μ-système. D'autre part, tout μ-système est un π-système.

Parmi les μ-systèmes, nous distinguons les *μ-systèmes particuliers* $\mathfrak{M}_0$. Ils vérifient la condition que voici: l'ensemble réunion $\mathfrak{U}_0$ des éléments des idéaux n'appartenant pas à $\mathfrak{M}_0$ ne contient aucun idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0$. Et la définition de *π-systèmes particuliers* est analogue.

Soit $\mathfrak{B}$ un sous-ensemble de $\mathfrak{S}$. Le symbole $C(\mathfrak{B})$ représente l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{S}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{B}$. Donc, en prenant un $\mathfrak{M}_0$, on a $\mathfrak{M}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$. Et, pour un π-système particulier, on écrit de même $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$.

L'ensemble vide d'idéaux, la totalité des idéaux d'un demi-anneau, et, en supposant $\mathfrak{p}$ un idéal premier, l'ensemble $C(\mathfrak{p})$ donnent des exemples de μ-systèmes particuliers. Si $\mathfrak{x}$ est un idéal semi-premier, $C(\mathfrak{x})$ est un π-système particulier. Sauf évidemment le premier exemple, on tiendra aussi compte de l'idéal vide.

De plus, si $C(\mathfrak{U}_\alpha)$, $(\alpha \in A)$, est une famille de μ-systèmes (π-systèmes) particuliers, $\mathfrak{P} = \bigcup C(\mathfrak{U}_\alpha)$ est un π-système particulier. En effet: prenons tous les idéaux $\mathfrak{b}_\beta$, $(\beta \in B)$, qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}$. On a, quel que soit α, $\bigcup \mathfrak{b}_\beta \subseteq \mathfrak{U}_\alpha$, de sorte qu'un idéal $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup \mathfrak{b}_\beta$ ne peut pas appartenir à $\mathfrak{P}$, ce qui entraîne $\mathfrak{P} = C(\bigcup \mathfrak{b}_\beta) = C(\bigcap \mathfrak{U}_\alpha)$.

Rappelons aussi la définition de *μ-demi-anneau* [13, 8]. $\mathfrak{S}$ est un tel demi-anneau, s'il vérifie la *μ-condition* suivante: en prenant un μ-système quelconque d'idéaux de $\mathfrak{S}$ et une deuxième famille $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, d'idéaux, l'hypothèse que cette famille soit ordonnée par inclusion et que chaque $\mathfrak{a}_\lambda$ n'admet aucun sous-idéal appartenant au μ-système entraîne pour l'idéal $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\lambda$ la même propriété. En introduisant une *π-condition* d'une façon analogue, on peut démontrer

* Ce travail, en tant que conséquence d'un projet d'études, a été réalisé grâce à l'aide de la Fundação Calouste Gulbenkian.

que les concepts de μ-demi-anneau et de *π-demi-anneau* sont identiques, [8; 10, II].

Tout demi-anneau vérifiant la condition de chaîne ascendante pour ses idéaux est un μ-demi-anneau.

L'objet de cette Note est celui de donner, d'une part, un exemple de demi-anneau ne vérifiant pas la condition de chaîne ascendante dont on vient de parler; et, d'autre part, de démontrer la proposition suivante: Pour que $\mathfrak{S}$ soit un μ-demi-anneau, il faut et il suffit que $\mathfrak{S}$ vérifie les deux conditions suivantes: 1) *tout π-système maximal qui ne contient aucun sous-idéal d'un idéal $\mathfrak{a}$ est un π-système particulier;* 2) *toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie.*

2. Exemple de μ-demi-anneau ne vérifiant pas la condition de chaîne ascendante

Pour donner l'exemple en question, nous ferons, d'après une idée fondamentale due à M^lle^ Noronha Galvão, les remarques suivantes, concernant le demi-anneau $\mathfrak{S}_2$ des nombres réels $\geqq 2$: 1_0) les éléments de tout idéal $\mathfrak{b}$ admettent une borne inférieure, qui peut ou non appartenir à $\mathfrak{b}$; 2_0) la condition de chaîne ascendante n'est pas vérifiée dans $\mathfrak{S}_2$; 3_0) en prenant deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, dont a et b soient, respectivement, les bornes inférieures, alors $a\,b$ est la borne inférieure de $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$; 4_0) si l'on prend un μ-système d'idéaux, les bornes inférieures correspondantes constituent un *m-système* [14].

Cela fait, supposons M un m-système de $\mathfrak{S}_2$. Si $a \in M$, on voit que $a^2 < a\,x\,a \in M$, pour un certain $x \geqq 2$. Puis, $a^3 < (a\,x\,a)\,y\,a \in M$, pour un certain $y \geqq 2$; et le raisonnement poursuit. De cette manière, on trouve dans M des nombres qui sont plus grands que tout nombre réel donné. Alors, soit $\mathfrak{a}_\lambda$ un idéal quelconque, de borne inférieure a_λ. Si $\mathfrak{M}$ est un μ-système donné, on peut trouver dans $\mathfrak{M}$ un idéal $\mathfrak{m}$ dont la borne inférieure m soit plus grand que $2a_\lambda$ et par conséquent $\mathfrak{m}$ sera un sous-idéal de $\mathfrak{a}_\lambda$. Enfin, compte tenu de que, lorsque $\mathfrak{M}$ est vide, la μ-condition est automatiquement satisfaite, on arrive à ce résultat: *le demi-anneau des nombres réels $\geqq 2$ est un μ-demi-anneau qui ne vérifie pas la condition de chaîne ascendante pour ses idéaux.*

Remarques. 1_{00}) Dans le raisonnement qu'on vient de faire, on peut remplacer $\mathfrak{S}_2$ par le demi-anneau des nombres réels $\geqq r_0 > 1$.

2_{00}) On ne peut pas prendre le demi-anneau $\mathfrak{S}_1$ des nombres réels >1, car nous aurions $\mathfrak{S}_1^2 = \mathfrak{S}_1$ et le seul idéal $\mathfrak{S}_1$ constituerait un μ-système. Alors, il existe des familles $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, ordonnées par inclusion, telles que $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{S}_1$.

3_{00}) Pour le demi-anneau des nombres réels $\geqq 1$, le seul nombre 1 serait un m-système et les raisonnements seraient aussi en défaut.

3. Caractérisation des μ-demi-anneaux

Les μ-systèmes particuliers se présentent d'une façon toute naturelle dans l'étude des μ-demi-anneaux. Nous avons en effet ce

Théorème 1. *Dans un μ-demi-anneau, tout μ-système (π-système) maximal $\mathfrak{M}$, parmi les μ-systèmes (π-systèmes) qui ne contiennent aucun sous-idéal d'un idéal*

$\mathfrak{a}$, *est un μ-système (π-système) particulier, donc de la forme* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0=C(\mathfrak{U}_0)$. Faisons la démonstration pour les μ-systèmes. Partons de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{M}$. Compte tenu de la μ-condition, il existe des idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{a}$ et n'admettant pas de sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}$. Un tel idéal est premier, car, au contraire, on pourrait trouver des idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ tels que $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{b}\nsubseteq\mathfrak{p}$, $\mathfrak{c}\nsubseteq\mathfrak{p}$. Les idéaux $(\mathfrak{p},\mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{p},\mathfrak{c})$ admettraient, respectivement, des sous-idéaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ appartenant à $\mathfrak{M}$ et il existerait un idéal $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m}_2\in\mathfrak{M}$. D'autre part, on aurait $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m}_2\subseteq(\mathfrak{p},\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{p},\mathfrak{c})\subseteq\mathfrak{p}$, ce qui donne une contradiction. Par conséquent, $C(\mathfrak{p})=\mathfrak{M}_0$ est un μ-système particulier (d'ailleurs un domaine multiplicatif d'idéaux) qui contient tout idéal appartenant à $\mathfrak{M}$. La maximalité de ce dernier implique $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0$.

Corollaire 1. *Dans un μ-demi-anneau, la réunion de tous les μ-systèmes maximaux (donc de tous les μ-systèmes) qui ne contiennent aucun sous-idéal d'un idéal $\mathfrak{a}$ est un π-système particulier.*

Soit, dans un μ-demi-anneau, une famille $\mathscr{G}=\{\mathfrak{g}_\alpha\}$, $(\alpha\in A)$, d'idéaux telle que: $1_{000})$ si $\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta\in\mathscr{G}$, alors la somme $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta)$ appartient à $\mathscr{G}$; $2_{000})$ si $\mathfrak{g}_\alpha\in\mathscr{G}$, tout idéal $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{g}_\alpha$ appartient aussi à $\mathscr{G}$; $3_{000})$ l'ensemble complémentaire des idéaux de la famille est un π-système. Nous démontrerons ce

Lemme 1. *Dans un μ-demi-anneau, si $\mathscr{G}=\{\mathfrak{g}_\alpha\}$, $(\alpha\in A)$, est une famille d'idéaux satisfaisant aux conditions $1_{000})-3_{000})$, l'ensemble réunion $\bigcup\mathfrak{g}_\alpha$ est un idéal de la famille.* La famille $\mathscr{G}$ contient des idéaux maximaux, car, si $\{\mathfrak{g}_\lambda\}$, $(\lambda\in L)$, est une chaîne d'idéaux appartenant à $\mathscr{G}$, le fait que chaque $\mathfrak{g}_\lambda$ n'admet pas de sous-idéal appartenant au π-système entraîne pour l'idéal $\bigcup\mathfrak{g}_\lambda$ la même propriété, puisque, comme nous l'avons dit, tout μ-demi-anneau est un π-demi-anneau. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal maximal dans $\mathscr{G}$, on aura $\mathfrak{h}=\bigcup\mathfrak{g}_\alpha$, parce que l'hypothèse $\mathfrak{g}_\beta\nsubseteq\mathfrak{h}$, pour un certain $\beta\in A$, entraînerait $(\mathfrak{g}_\beta,\mathfrak{h})\in\mathscr{G}$, en contradiction avec la maximalité de $\mathfrak{h}$. Nous voyons d'ailleurs que $C(\mathfrak{h})=\mathfrak{P}_0$ est un π-système particulier.

On trouve un exemple de famille $\mathscr{G}$, en considérant une chaîne $\{\mathfrak{x}_\sigma\}$, $(\sigma\in S)$, d'idéaux semi-premiers et en prenant pour éléments de la famille les idéaux $\{\mathfrak{g}_\alpha\}$, $(\alpha\in A)$, contenus au moins dans un $\mathfrak{x}_\sigma$. Les conditions $1_{000})$ et $2_{000})$ sont évidentes. Quant à la condition $3_{000})$, nous savons que $\bigcap C(\mathfrak{x}_\sigma)$, qui est justement l'ensemble complémentaire de $\mathscr{G}$, constitue un domaine de puissances (c'est-à-dire contient les différentes puissances des idéaux qui lui appartiennent) et est par conséquent un π-système. Alors, d'après le lemme, $\bigcup\mathfrak{g}_\alpha=\bigcup\mathfrak{x}_\sigma\in\mathscr{G}$, donc $\bigcup\mathfrak{x}_\sigma=\mathfrak{x}_\tau$, pour un certain $\tau\in S$. De plus, $C(\bigcup\mathfrak{x}_\sigma)=\bigcap C(\mathfrak{x}_\sigma)$. On énonce ce

Théorème 2. *Dans un μ-demi-anneau, si $\{\mathfrak{x}_\sigma\}$, $(\sigma\in S)$, est une chaîne d'idéaux semi-premiers, on a $\bigcup\mathfrak{x}_\sigma=\mathfrak{x}_\tau$, pour un certain $\tau\in S$, et on a aussi $C(\bigcup\mathfrak{x}_\sigma)=\bigcap C(\mathfrak{x}_\sigma)$. En particulier, toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie.*

Maintenant que nous disposons des théorèmes 1 et 2, nous allons démontrer deux lemmes, dont on a besoin pour pouvoir établir la partie «suffisante» de notre proposition fondamentale énoncée dans l'Introduction.

Lemme 2. *Dans un demi-anneau quelconque, soit $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$ un π-système particulier et $\mathfrak{a}$ un idéal qui n'admet pas de sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$. Alors, il existe des idéaux maximaux $\mathfrak{y}$ contenant $\mathfrak{a}$ et n'admettant pas de sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$. Ces idéaux maximaux sont semi-premiers.* $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{a}$ étant donnés, l'ensemble partiellement ordonné des idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et n'admettent pas de sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$ est inductif, car une chaîne $\{\mathfrak{y}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, de tels idéaux définit $\mathfrak{y}_0 = \bigcup \mathfrak{y}_\lambda$ et $\mathfrak{y}_0$ n'admet pas aussi de sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$, du fait que tout $\mathfrak{y}_\lambda$ est contenu dans $\mathfrak{U}_0$, donc $\mathfrak{y}_0 \subseteq \mathfrak{U}_0$. Soit $\mathfrak{y}$ un idéal maximal au sens de l'énoncé. En supposant $\mathfrak{b}^2 \subseteq \mathfrak{y}$, on a aussi $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{y}$, car, au contraire, il existerait un idéal $\mathfrak{m} \subseteq (\mathfrak{y}, \mathfrak{b})$ appartenant à $\mathfrak{P}_0$, et, moyennant un choix convenable de l'idéal $\mathfrak{g}$, on aurait $\mathfrak{m}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m} \in \mathfrak{P}_0$ ainsi que $\mathfrak{m}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{m} \subseteq (\mathfrak{y}, \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{y}, \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{y}$, ce qui est une contradiction.

Lemme 3. *Dans un demi-anneau quelconque, pour que l'ensemble réunion $\mathfrak{x}$ de certains idéaux soit l'idéal semi-premier minimal appartenant à l'idéal $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $C(\mathfrak{x})$ soit un π-système maximal, parmi les π-systèmes particuliers $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$ qui ne contiennent aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$.* La condition est *nécessaire:* Si $\mathfrak{x}$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, l'inclusion $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{x}$ montre que $C(\mathfrak{x})$ est un domaine de puissances qui ne contient pas d'élément qui soit sous-idéal de $\mathfrak{a}$. Supposons maintenant $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0) \supset C(\mathfrak{x})$ un deuxième π-système particulier ayant la même propriété. En désignant par $\mathfrak{y}$, d'après le lemme précédent, un idéal maximal, parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et n'admettent pas de sous-idéal qui soit un élément de $\mathfrak{P}_0$, nous savons que $\mathfrak{y}$ est semi-premier. Les inclusions $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{x}$ donnent $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$, donc $C(\mathfrak{y}) = C(\mathfrak{x})$. D'autre part, $\mathfrak{P}_0 \subseteq C(\mathfrak{y})$ et on arrive ainsi à une contradiction.

La condition est *suffisante:* Prenons $\mathfrak{x}$ et $C(\mathfrak{x})$ conformément à l'énoncé. Nous avons alors $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{x}$. Parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et n'admettent pas de sous-idéal appartenant à $C(\mathfrak{x})$, choisissons un idéal maximal $\mathfrak{y}$. Nous voyons que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{x}$. Puisque $\mathfrak{y}$ est un idéal semi-premier, $C(\mathfrak{y}) \supseteq C(\mathfrak{x})$ est un π-système particulier. La maximalité de $C(\mathfrak{x})$ même à $C(\mathfrak{y}) = C(\mathfrak{x})$, donc à $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ et $\mathfrak{x}$ est un idéal semi-premier. Et il n'existe pas un idéal semi-premier $\mathfrak{x}_1$ tel que $\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_1 \supseteq \mathfrak{a}$, car ceci contredirait à nouveau la maximalité de $C(\mathfrak{x})$.

Théorème 3. *$\mathfrak{S}$ est un μ-demi-anneau, si et seulement si $\mathfrak{S}$ vérifie les deux conditions suivantes:* 1) *tout π-système maximal qui ne contient aucun sous-idéal d'un idéal $\mathfrak{a}$ est un π-système particulier;* 2) *toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie.* Il ne reste qu'à démontrer la «suffisance». Soit $\{\mathfrak{g}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, une chaîne d'idéaux et soit $\mathfrak{P}$ un π-système qui ne contient aucun sous-idéal des $\mathfrak{g}_\lambda$. On doit montrer que $\mathfrak{P}$ ne contient aucun sous-idéal de $\bigcup \mathfrak{g}_\lambda$. Faisons correspondre à chaque $\mathfrak{g}_\lambda$ le π-système maximal $\mathfrak{P}_\lambda$ qui contient $\mathfrak{P}$ et ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{g}_\lambda$. On a, d'après 1), $\mathfrak{P}_\lambda = C(\mathfrak{U}_\lambda)$. Si $\mathfrak{g}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}_\nu$, $(\nu \in L)$, on voit que $\mathfrak{P}_\nu \subseteq \mathfrak{P}_\lambda$, donc $\mathfrak{U}_\lambda \subseteq \mathfrak{U}_\nu$. Les $\mathfrak{U}_\lambda$, conformément au lemme 3, sont des idéaux semi-premiers, et si l'on tient compte de 2), on arrive à $\bigcup \mathfrak{U}_\lambda = \mathfrak{U}_\tau$, pour un certain $\tau \in L$. Tous les sous-idéaux de $\bigcup \mathfrak{U}_\lambda$ sont contenus dans $\mathfrak{U}_\tau$, ce qui entraîne qu'aucun d'eux n'appartient à $C(\mathfrak{U}_\tau)$ et par conséquent à $\mathfrak{P}$. Or $\bigcup \mathfrak{g}_\lambda \subseteq \bigcup \mathfrak{U}_\lambda$ et le théorème est démontré.

Bibliographie

1. Vandiver, H. S.: Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold. Bull. Am. Math. Soc. **40**, 914–920 (1934).
2. Bourne, S.: The Jacobson radical of a semiring. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 163–170 (1951).
3. – On locally compact positive halffields. Math. Annalen **146**, 423–426 (1962).
4. –, and H. Zassenhaus: On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43**, 613–615 (1957).
5. – – On the semiradical of a semiring. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **44**, 907–914 (1958).
6. Iséki, K.: Ideal theory of semiring. Proc. Japan Acad. **32**, 554–559 (1956).
7. – Ideals in semirings. Proc. Japan Acad. **34**, 29–31 (1958).
8. Noronha Galvão, M. L.: Sobre a teoria de Noether-Krull em semi-anéis. Rev. Fac. Ci. Lisboa **8**, 175–256 (1961).
9. – Sur les idéaux réguliers d'un semianneau. Rev. Fac. Ci. Lisboa **8**, 169–173 (1960).
10. Almeida Costa, A.: Sur la théorie générale des demi-anneaux, I, II. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, exposés 24 et 25 (1961).
11. – Sur la théorie générale des demi-anneaux. Publ. Math. Debrecen **10**, 14–29 (1963).
12. – μ-systèmes et π-systèmes d'idéaux. Rev. Fac. Ci. Lisboa **7**, 235–243 (1959).
13. – Sur les μ-anneaux et les μ_0-anneaux. Rev. Fac. Ci. Lisboa **8**, 131–144 (1960).
14. McCoy, N. H.: Prime ideals in general rings. Am. J. Math. **71**, 823–833 (1949).

Dr. Almeida Costa
Rua de Francisco Metrass 2, 1º E
Lisboa 3 (Portugal)

(Reçu le 29 septembre 1967)