ANÁLISE COMPLEXA

NUNO DA COSTA PEREIRA

2023

PREFÁCIO

Este livro baseia-se em notas que o autor foi redigindo ao longo dos anos com vista à sua futura utilização como base para um livro de Análise Complexa.

Um dos objectivos do livro é o de tentar dar uma fundamentação sólida aos métodos e resultados que formam o núcleo da Análise Complexa. Nisso se baseia a opção do autor por não usar figuras e por apresentar demonstrações rigorosas de alguns resultados geometricamente intuitivos. Outro objectivo é o de tratar num único livro tópicos importantes e variados que estão geralmente dispersos na literatura.

Num domínio tão vasto como a Análise Complexa, a escolha de assuntos tem de reflectir as preferências pessoais do autor e isso justifica, por exemplo, o relevo aqui dado ao desenvolvimento assimptótico do logaritmo da função gama, ou o estudo da relação entre a localização dos zeros da função zeta de Riemann e a distribuição dos números primos.

Na opinião do autor, a Análise Complexa é um assunto fascinante que associa elegância de métodos com profundidade de resultados, a um nível difícil de igualar noutros ramos da Matemática. Se a leitura do livro conseguir transmitir esta ideia a alguns dos seus leitores, o esforço de o escrever terá valido a pena.

Uma palavra final de agradecimento ao Professor Armando Machado por toda a atenção que dispensou a este texto e pelas suas valiosas sugestões que incluíram indicações preciosas no âmbito da topologia.

ÍNDICE

1 - Sucessões e séries complexas

Dado um número complexo $z = a + ib$ com a e b reais, define-se o seu *conjugado* $\overline{z}$ por

$$\overline{z} = a - ib.$$

Da definição resulta imediatamente a relação

$$\overline{\overline{z}} = z$$

e dado $w \in \mathbb{C}$ temos

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{e} \quad \overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}.$$

Representando por $\mathrm{Re}(z)$ e por $\mathrm{Im}(z)$ respectivamente a *parte real* a e a *parte imaginária* b de $z = a + ib$, é também

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2i}.$$

O *módulo* ou *valor absoluto* de z define-se por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

o que conduz directamente às identidades

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad |\overline{z}| = |z|\,, \quad |zw| = |z|\,|w|$$

e às desigualdades

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|\,, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \quad \text{e} \quad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|\,.$$

É ainda válido o enquadramento expresso pelo teorema seguinte:

Teorema 1.1 - *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|\,.$$

Demonstração. Usando as propriedades anteriores obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\,(\overline{z} + \overline{w}\ ) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

o que estabelece a segunda desigualdade do enunciado. Temos então também

$$|z| = |(z+w) + (-w)| \leq |z+w| + |w|$$

o que completa a demonstração.

■

Exemplo 1.2 - *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$|z+w| = |z| + |w|$$

sse $zw = 0$ *ou* $w/z \in \mathbb{R}^+$.

Efectivamente a identidade $|z+w| = |z| + |w|$ equivale a $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\,|z|\,|w|$. Supondo $zw \neq 0$ e sendo $\lambda = w/z$, esta relação traduz-se por

$$\left(\overline{\lambda} + \lambda\right)|z|^2 = 2\,|\lambda|\,|z|^2$$

o que equivale a $\mathrm{Re}(\lambda) = |\lambda|$ e portanto a $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Uma sucessão (z_n) de complexos diz-se *convergente com limite* $z = a + ib$ se $\lim \mathrm{Re}\,(z_n) = a$ e $\lim \mathrm{Im}\,(z_n) = b$. Neste caso, como para as sucessões reais escreve-se $\lim z_n = z$ ou, abreviadamente, $z_n \to z$.

Se $z_n \to z$ resulta directamente que $\overline{z_n} \to \overline{z}$ e que $|z_n| \to |z|$. Dadas duas sucessões convergentes de complexos (z_n) e (w_n), as propriedades dos limites de sucessões reais conduzem imediatamente às regras de cálculo

$$\lim\,(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n,$$

$$\lim\,(z_n w_n) = \lim z_n \lim w_n$$

e

$$\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim z_n}{\lim w_n} \quad \text{se} \quad \lim w_n \neq 0.$$

Exemplo 1.3 - *Dada uma sucessão* (z_n) *de complexos tem-se* $\lim z_n = z$ *sse* $\lim |z_n - z| = 0$.

Efectivamente, sendo $a_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$, $b_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$ e $z = a+ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$, as relações $|a_n - a| \leq |z_n - z|$ e $|b_n - b| \leq |z_n - z|$ mostram que de $\lim |z_n - z| = 0$ resulta $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, o que implica $\lim z_n = z$. Recíprocamente, da desigualdade $|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ resulta que a condição $\lim z_n = z$ exige $\lim |z_n - z| = 0$.

O exemplo anterior mostra que a condição $\lim z_n = z$ equivale, como nas sucessões reais, a que para cada $\delta > 0$ exista uma ordem k tal que $|z_n - z| < \delta$ para todo o $n \geq k$.

Dada uma sucessão complexa (z_n) chamaremos *subsucessão* de (z_n) a toda a sucessão da forma (z_{α_n}) em que (α_n) é uma sucessão estritamente crescente de índices. Por indução deduz-se imediatamente a relação $\alpha_n \geq n$ para todo o n, e isto implica $\lim \alpha_n = +\infty$. Atendendo às definições e às propriedades das sucessões reais, resulta directamente que toda a subsucessão de uma sucessão complexa convergente também converge e tem o mesmo limite.

Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *limitado* ou *ilimitado* consoante o conjunto $\{|z| : z \in E\}$ for limitado ou não. Como para as funções reais, uma função complexa diz-se limitada ou ilimitada consoante o seu contradomínio for limitado ou ilimitado. Em particular uma sucessão complexa é limitada sse o conjunto dos seus termos for limitado. Podemos agora provar o seguinte teorema que amplia às sucessões complexas propriedades válidas para sucessões reais:

Teorema 1.4 - *Toda a sucessão complexa convergente é limitada e toda a sucessão complexa limitada tem alguma subsucessão convergente.*

Demonstração. Dada uma sucessão convergente (z_n), as sucessões $\operatorname{Re}(z_n)$ e $\operatorname{Im}(z_n)$ são ambas limitadas por serem convergentes. Sendo L e M majorantes respectivamente das sucessões $|\operatorname{Re}(z_n)|$ e $|\operatorname{Im}(z_n)|$ segue-se que $L+M$ é um majorante de $|z_n|$ e conclui-se que (z_n) é limitada.

Suponha-se agora que (z_n) é uma sucessão limitada. Sendo $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$ e $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$, as sucessões (a_n) e (b_n) são ambas limitadas e por um resultado conhecido da Análise Real sabe-se que ambas têm subsucessões convergentes. Seja então (a_{α_n}) uma subsucessão convergente de (a_n) e ponha-se $u_n = a_{\alpha_n}$ e $v_n = b_{\alpha_n}$. Sendo agora $\left(v_{\beta_n}\right)$ uma subsucessão convergente de (v_n), a convergência de (u_n) implica a convergência de $\left(u_{\beta_n}\right)$ e conclui-se que $\left(u_{\beta_n} + iv_{\beta_n}\right)$ é uma subsucessão convergente de (z_n).

■

Diz-se que uma sucessão complexa (z_n) tem limite ∞ se $\lim |z_n| = +\infty$. É então válido o seguinte resultado:

Teorema 1.5 - *Toda a sucessão complexa ilimitada tem alguma subsucessão com limite* ∞.

Demonstração. Se a sucessão (z_n) é ilimitada, para cada inteiro $n > 0$ e para cada índice k existe um índice $m > k$ tal que $|z_m| > n$. Seja então α_1 tal que $|z_{\alpha_1}| > 1$ e, indutivamente, $\alpha_n > \alpha_{n-1}$ tal que $|z_{\alpha_n}| > n$. Como (α_n) é uma sucessão estritamente crescente de índices e $|z_{\alpha_n}| \to +\infty$, segue-se que (z_{α_n}) é uma subsucessão de (z_n) com limite ∞.

■

Nota 1.6 - Alguns autores definem subsucessão (z_{α_n}) de (z_n) com a condição menos restritiva de a sucessão (α_n) ter limite $+\infty$. Pode no entanto ver-se que se (z_{α_n}) é uma subsucessão de (z_n) de acordo com esta definição então ela tem uma subsucessão que verifica a condição aqui imposta. Efectivamente, tomando $\beta_1 = \alpha_1$ e, indutivamente, $\beta_{n+1} = \min\{\alpha_m : \alpha_m > \beta_n\}$ se $n \geq 1$, a sucessão (β_n) é uma subsucessão estritamente crescente de (α_n) pelo que $\left(z_{\beta_n}\right)$ é uma subsucessão de (z_{α_n}) no sentido aqui definido.

Sabe-se da Análise Real que uma sucessão (u_n) de números reais converge sse verificar a chamada *condição de Cauchy*: para cada $\delta > 0$ existe uma ordem

k tal que $|u_m - u_n| < \delta$ se $m, n \geq k$. Este resultado generaliza-se imediatamente às sucessões complexas:

Teorema 1.7 (Cauchy-Bolzano) - *Uma sucessão complexa (z_n) converge sse para cada $\delta > 0$ existir uma ordem k tal que $|u_m - u_n| < \delta$ quando $m, n \geq k$.*

Demonstração. Sendo $a_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ e $b_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$, as desigualdades

$$|a_m - a_n| \leq |z_m - z_n|\,, \quad |b_m - b_n| \leq |z_m - z_n|$$

e

$$|z_m - z_n| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$$

mostram que (z_n) verifica a condição de Cauchy sse o mesmo suceder com as sucessões (a_n) e (b_n). Como a convergência de (z_n) equivale à convergência de (a_n) e (b_n), o enunciado resulta do teorema correspondente para sucessões reais. ∎

Dadas duas sucessões complexas (z_n) e (w_n) suponha-se que existe uma sucessão (h_n) e uma ordem k tais que

$$z_n = h_n w_n \quad \text{se} \quad n \geq k.$$

Então, se $\lim h_n = 1$ diz-se que (z_n) é *assimptoticamente igual a* (w_n) e escreve-se $z_n \sim w_n$. Se $\lim h_n = 0$ diz-se que (z_n) é *desprezável relativamente a* (w_n) e escreve-se $z_n = o\,(w_n)$. Finalmente, se (h_n) for limitada diz-se que (z_n) é *dominada por* (w_n) e escreve-se $z_n = O\,(w_n)$. Destas definições resulta em particular que as condições

$$z_n = o(1),\ z_n = O(1) \quad \text{e} \quad z_n = w_n\,(1 + o(1))$$

traduzem respectivamente que $\lim z_n = 0$, que (z_n) é limitada e que $z_n \sim w_n$.

O seguinte resultado de Análise Real será utilizado posteriormente e define a chamada *constante de Euler*

$$\gamma = 0.5772156649... \,.$$

Exemplo 1.8 - *Existe uma constante $\gamma \in \,]0, 1[$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1). \tag{1.1}$$

Efectivamente, partindo das desigualdades elementares

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \quad \text{se} \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

e pondo

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n,$$

temos

$$u_n > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0,$$

e

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0.$$

Então a sucessão (u_n) converge por ser positiva e decrescente, e sendo $\gamma = \lim u_n$ obtém-se a identidade (1.1). Considerando finalmente a sucessão (v_n) definida por $v_n = u_n - 1/n$, temos

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$$

pelo que (v_n) é estritamente crescente. Para cada $n \geq 1$ é então $v_n < \gamma < u_n$ e, em particular, $0 = v_1 < \gamma < u_1 = 1$.

Como para as séries reais, dada uma sucessão (z_n) de números complexos a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$$

diz-se convergente se for convergente a sucessão das somas parciais (s_m) definidas por

$$s_m = \sum_{n=p}^{m} z_n \quad \text{se} \quad m \geq p.$$

Começamos por generalizar às séries complexas dois resultados básicos sobre séries reais.

Teorema 1.9 - *Dada uma sucessão $(z_n)_{n\geq p}$ de números complexos, se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$ for convergente tem-se $\lim z_n = 0$.*

Demonstração. Efectivamente, se $\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$ converge também convergem as séries $\sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(z_n)$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{Im}\,(z_n)$. Temos então $\lim \mathrm{Re}\,(z_n) = \lim \mathrm{Im}\,(z_n) = 0$, pelo que $\lim z_n = 0$.
■

Teorema 1.10 - *Dada uma sucessão (z_n) de números complexos, se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} |z_n|$ for convergente também a série $\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$ converge e tem-se*

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=p}^{+\infty} |z_n|\,.$$

Demonstração. Como $|\mathrm{Re}\,(z_n)| \leq |z_n|$ e $|\mathrm{Im}\,(z_n)| \leq |z_n|$, se $\sum_{n=p}^{+\infty} |z_n|$ convergir também convergem as séries $\sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{Re}\,(z_n)$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{Im}\,(z_n)$, pelo que $\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$ é convergente. Tem-se então

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty} z_n\right| = \lim_{m\to+\infty} \left|\sum_{n=p}^{m} z_n\right| \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=p}^{m} |z_n| = \sum_{n=p}^{+\infty} |z_n| \,.$$

■

Do mesmo modo que para as séries reais diz-se que uma série complexa convergente $\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$ é *absolutamente convergente* ou s*implesmente convergente* consoante a série $\sum_{n=p}^{+\infty} |z_n|$ for convergente ou divergente.

Para estudar a natureza de séries que não sejam absolutamente convergentes são úteis as chamadas *sucessões de variação limitada* ou *sucessões absolutamente convergentes* que são as sucessões (λ_n) para as quais a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}|$$

é convergente. Como esta condição implica a convergência da série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1})$$

vemos que as sucessões de variação limitada são necessariamente convergentes. A recíproca é no entanto falsa como mostra a sucessão $(-1)^n/n$. Provaremos o seguinte critério de convergência:

Teorema 1.11 (Critério de Dirichlet) - *Sejam* $\sum_{n=p}^{\infty} u_n$ *um série complexa e* (λ_n) *uma sucessão complexa de variação limitada. Se* $\lim \lambda_n = 0$ *e a sucessão das somas parciais da série* $\sum_{n=p}^{\infty} u_n$ *for limitada, então a série* $\sum_{n=p}^{+\infty} \lambda_n u_n$ *converge.*

Demonstração. Sendo $s_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$ se $n \geq p$, para cada $m \geq p$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{m} \lambda_n u_n &= \lambda_p s_p + \sum_{n=p+1}^{m} \lambda_n (s_n - s_{n-1}) = \sum_{n=p}^{m} \lambda_n s_n - \sum_{n=p+1}^{m} \lambda_n s_{n-1} \\
&= \sum_{n=p}^{m} \lambda_n s_n - \sum_{n=p}^{m-1} \lambda_{n+1} s_n
\end{aligned}$$

pelo que

$$\sum_{n=p}^{m} \lambda_n u_n = \sum_{n=p}^{m-1} (\lambda_n - \lambda_{n+1})\, s_n + \lambda_m s_m. \tag{1.2}$$

Nas condições do enunciado é $\lim \lambda_m s_m = 0$, e sendo L um majorante da sucessão $(|s_n|)$ temos também

$$|(\lambda_n - \lambda_{n+1})\, s_n| \leq |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\, L$$

pelo que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1})\, s_n$ é absolutamente convergente. De (1.2) resulta então

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=p}^{m} \lambda_n u_n = \sum_{n=p}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1})\, s_n,$$

e conclui-se que a série $\sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n u_n$ converge.

■

A identidade (1.2) estabelecida na demonstração anterior é conhecida por *fórmula da soma por partes.*

Corolário 1 - *Seja* $(a_n)_{n\geq p}$ *uma sucessão complexa de variação limitada e tal que* $\lim a_n = 0$. *Então a série*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n$$

converge quando $|z| = 1$ *e* $z \neq 1$.

Demonstração. Se $|z| = 1$ e $z \neq 1$, para todo o $m \geq p$ temos efectivamente

$$\left|\sum_{n=p}^{m} z^n\right| = \left|\frac{z^{m+1} - z^p}{z-1}\right| \leq \frac{\left|z^{m+1}\right| + |z^p|}{|z-1|} = \frac{2}{|z-1|}$$

pelo que, com z fixo, a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=p}^{+\infty} z^n$ é limitada. O enunciado resulta agora do critério de Dirichlet.

■

Corolário 2 - *Seja* $(a_n)_{n\geq p}$ *uma sucessão positiva e decrescente tal que* $\lim a_n = 0$. *Então a série*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n$$

converge quando $|z| = 1$ *e* $z \neq 1$.

Demonstração. Neste caso tem-se

$$\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_p$$

pelo que (a_n) é de variação limitada e o enunciado resulta do corolário anterior.

■

2 - Noções topológicas em $\mathbb{C}$

Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

diz-se o *círculo aberto* de centro a e raio r e representa-se abreviadamente por $B(a, r)$. Analogamente, o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$$

diz-se o *círculo fechado* de centro a e raio r e será representado por $\overline{B}\,(a, r)$. Por extensão usaremos ainda as convenções $B(a, 0) = \varnothing$, $\overline{B}\,(a, 0) = \{a\}$ e $B(a, +\infty) = \mathbb{C}$. Dado um ponto $a \in \mathbb{C}$, qualquer conjunto da forma $B(a, r)$ com $r > 0$ diz-se uma *vizinhança* de a.

Dados um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ e um ponto $a \in \mathbb{C}$, diz-se que a é *ponto interior* a E se existir $\delta > 0$ tal que $B\,(a, \delta) \subseteq E$, e diz-se que a é *ponto aderente* a E se $B(a, \delta) \cap E \neq \varnothing$ para todo o $\delta > 0$. O conjunto dos pontos interiores a E diz-se o *interior* de E e será representado por E°. O conjunto dos pontos aderentes a E diz-se o *fecho* ou a *aderência* de E e representa-se por $\overline{E}$. Diz-se que E é *aberto* se todos os seus pontos forem interiores, e que é *fechado* se todos os seus pontos aderentes pertencerem a E. Diz-se que um conjunto $D \subseteq E$ é *denso em* E se $E \subseteq \overline{D}$.

Das definições resultam imediatamente as inclusões

$$E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$$

e também que de uma inclusão $D \subseteq E$ se deduz $D^\circ \subseteq E^\circ$ e $\overline{D} \subseteq \overline{E}$. Resulta ainda que E é aberto ou fechado consoante se tiver, respectivamente, $E^\circ = E$ ou $E = \overline{E}$.

Exemplo 2.1 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r \in [0, +\infty]$, o conjunto $B(a, r)$ é aberto.*

Efectivamente, como $\varnothing$ e $\mathbb{C}$ são trivialmente conjuntos abertos podemos supôr $r \in \mathbb{R}^+$. Então, dado $z \in B(a, r)$ e tomando $\delta = r - |z - a| > 0$, para cada $w \in B(z, \delta)$ é $|w - a| \leq |w - z| + |z - a| < \delta + |z - a| = r$ pelo que $w \in B(a, r)$. Isto mostra que $B(z, \delta) \subseteq B(a, r)$ e conclui-se que z é interior a $B(a, r)$.

Exemplo 2.2 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r \in [0, +\infty[$, o conjunto $\overline{B}\,(a, r)$ é fechado.*

Efectivamente, dado $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{B}\,(a, r)$ e tomando $\delta = |z - a| - r > 0$, para cada $w \in B(z, \delta)$ é $|w - a| \geq |z - a| - |w - z| > |z - a| - \delta = r$ pelo que $w \notin \overline{B}\,(a, r)$. Então $B(z, \delta) \cap \overline{B}\,(a, r) = \varnothing$ pelo que z não é ponto aderente a $\overline{B}\,(a, r)$.

Exemplo 2.3 - *Dado $a \in \mathbb{R}$ os semiplanos verticais $\{z : \mathrm{Re}(z) > a\}$ e $\{z : \mathrm{Re}(z) < a\}$ são conjuntos abertos e o mesmo sucede com os semiplanos horizontais $\{z : \mathrm{Im}(z) > a\}$ e $\{z : \mathrm{Im}(z) < a\}$.*

Efectivamente, tomando por exemplo o conjunto $E = \{z : \mathrm{Re}(z) > a\}$ e dado $z \in E$, seja $\delta = \mathrm{Re}(z) - a > 0$. Se $w \in B(z, \delta)$ temos

$$\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}\,(z - w) \leq |w - z| < \delta = \mathrm{Re}\,(z) - a$$

pelo que $\mathrm{Re}(w) > a$ e isto mostra que $w \in E$. Então $B(z, \delta) \subseteq E$ e conclui-se que E é aberto.

No teorema seguinte estabelecem-se algumas propriedades básicas dos conceitos agora definidos.

Teorema 2.4 - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, então*

1 - Se G for um conjunto aberto e H um conjunto fechado, as inclusões $G \subseteq E$ e $E \subseteq H$ exigem respectivamente $G \subseteq E^\circ$ e $\overline{E} \subseteq H$.

2 - Tem-se $\mathbb{C} \setminus E^\circ = \overline{\mathbb{C} \setminus E}$ e $\mathbb{C} \setminus \overline{E} = (\mathbb{C} \setminus E)^\circ$.

3 - E é aberto sse o seu complementar for fechado e é fechado sse o seu complementar for aberto.

4 - E° é um conjunto aberto e $\overline{E}$ é um conjunto fechado.

5 - Um ponto $a \in \mathbb{C}$ é aderente a E sse existir uma sucessão de pontos de E com limite a.

Demonstração. A proposição 1 resulta simplesmente de que as inclusões $G \subseteq E$ e $E \subseteq H$ implicam $G^\circ \subseteq E^\circ$ e $\overline{E} \subseteq \overline{H}$.

Para estabelecer a proposição 2 notamos que a condição $a \in \mathbb{C} \setminus E^\circ$ equivale a que $B(a, \delta)$ não esteja contido em E para algum $\delta > 0$. Isto por sua vez equivale a $B(a, \delta) \cap (\mathbb{C} \setminus E) \neq \varnothing$, o que significa que a é aderente a $\mathbb{C} \setminus E$. Analogamente a condição $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{E}$ equivale a existir $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap E = \varnothing$, o que por sua vez equivale a $B(a, \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus E$, e isto significa que a é interior a $\mathbb{C} \setminus E$.

Passando agora à proposição 3, como a condição $E = E^\circ$ equivale a $\mathbb{C} \setminus E = \mathbb{C} \setminus E^\circ$, a proposição anterior mostra que isto equivale a $\mathbb{C} \setminus E = \overline{\mathbb{C} \setminus E}$, o que significa que $\mathbb{C} \setminus E$ é fechado. A segunda parte da proposição resulta agora da primeira parte por passagem ao complementar.

Para provar que E° é aberto notamos que dado $a \in E^\circ$ existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq E$. Daqui resulta $(B(a, \delta))^\circ \subseteq E$ mas como $B(a, \delta)$ é aberto segue-se que $(B(a, \delta))^\circ = B(a, \delta)$ pelo que $B(a, \delta) \subseteq E^\circ$ e isto mostra que a é ponto interior a E°. Atendendo à proposição 3, da relação $\mathbb{C} \setminus \overline{E} = (\mathbb{C} \setminus E)^\circ$ deduz-se agora que o conjunto $\overline{E}$ é fechado.

Finalmente, se um ponto a é aderente a E, para cada inteiro $n > 0$ existe $z_n \in B\,(a, 1/n) \cap E$. Então (z_n) é uma sucessão de pontos de E e a condição $|z_n - a| < 1/n$ mostra que $\lim z_n = a$. Reciprocamente, se existir uma sucessão (z_n) de pontos de E com limite a, dado $\delta > 0$ existe uma ordem n para a qual $z_n \in B(a, \delta)$. É então $B(a, \delta) \cap E \neq \varnothing$ e conclui-se que $a \in \overline{E}$. ∎

Exemplo 2.5 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, é*

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}\,(a,r) \quad e \quad \left(\overline{B}\,(a,r)\right)^{\circ} = B(a,r).$$

Efectivamente, como $B(a,r) \subseteq \overline{B}\,(a,r)$ e $\overline{B}\,(a,r)$ é fechado, necessariamente $\overline{B(a,r)} \subseteq \overline{B}\,(a,r)$. Por outro lado, dado z tal que $|z-a| = r$ e pondo $z_n = a + (1 - 1/n)\,(z-a)$, obtém-se uma sucessão de pontos de $B(a,r)$ com limite z. Então z é aderente a $B(a,r)$ e conclui-se $\overline{B(a,r)} = \overline{B}\,(a,r)$.

De modo análogo, como $B(a,r) \subseteq \overline{B}\,(a,r)$ e $B(a,r)$ é aberto, segue-se que $B(a,r) \subseteq \left(\overline{B}\,(a,r)\right)^{\circ}$. No entanto, dado z tal que $|z-a| = r$ e pondo $z_n = a + (1 + 1/n)\,(z-a)$, obtém-se uma sucessão de pontos de $\mathbb{C} \setminus \overline{B}\,(a,r)$ com limite z, pelo que z é aderente a $\mathbb{C} \setminus \overline{B}\,(a,r)$. Então $z \in \mathbb{C} \setminus \left(\overline{B}\,(a,r)\right)^{\circ}$ e conclui-se que z não é interior a $\overline{B}\,(a,r)$.

Exemplo 2.6 - *Dado $a \in \mathbb{R}$ os semiplanos verticais $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq a\}$ e $\{z : \mathrm{Re}(z) \leq a\}$ são conjuntos fechados e o mesmo sucede com os semiplanos horizontais $\{z : \mathrm{Im}(z) \geq a\}$ e $\{z : \mathrm{Im}(z) \leq a\}$.*

Efectivamente cada um destes semiplanos é o complementar de algum dos semiplanos abertos referidos no exemplo 2.3.

Exemplo 2.7 - *Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, E é fechado relativamente a $\mathbb{R}$ sse for fechado relativamente a $\mathbb{C}$, mas se E é aberto relativamente a $\mathbb{R}$ e $E \neq \varnothing$ então E não é aberto relativamente a $\mathbb{C}$.*

Efectivamente, para cada $a \in \mathbb{R}$ a condição $]a-\delta, a+\delta[\, \cap E \neq \varnothing$ equivale a $B\,(a,\delta) \cap E \neq \varnothing$ pelo que a é aderente a E relativamente a $\mathbb{R}$ sse for aderente a E relativamente $\mathbb{C}$. Por outro lado, dado $a \in E$ nenhum círculo $B(a,\delta)$ está contido em E e isto mostra que a não é ponto interior a E relativamente a $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.8 - *Um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ é aberto relativamente a $\mathbb{R}$ sse o conjunto $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup E$ for aberto.*

Efectivamente E é aberto relativamente a $\mathbb{R}$ sse $\mathbb{R} \setminus E$ for fechado relativamente a $\mathbb{R}$ e o exemplo anterior mostra que isto equivale a $\mathbb{R} \setminus E$ ser fechado relativamente a $\mathbb{C}$. De acordo com a proposição 3 do teorema anterior isto por sua vez equivale a $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus E) = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup E$ ser aberto.

Teorema 2.9 - *A união de uma colecção de subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ é um conjunto aberto e a intersecção de uma colecção finita de subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ também é um conjunto aberto.*

Demonstração. Dada uma colecção $\mathcal{C}$ de subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ seja E a sua união. Se $a \in E$ existe então um conjunto $G \in \mathcal{C}$ tal que $a \in G$, e por G ser aberto existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subseteq G$. Como $G \subseteq E$ segue-se que $B(a,\delta) \subseteq E$ e isto mostra que a é ponto interior a G.

Sejam agora $G_1, ..., G_n$ subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ e E a sua intersecção. Dado $a \in E$, como a pertence a cada um dos G_k existem números positivos $\delta_1, ..., \delta_n$ tais que $B\,(a,\delta_k) \subseteq G_k$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Sendo

$$\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_n\}$$

segue-se que $B(a,\delta)$ está contido em todos os G_k pelo que $B(a,\delta) \subseteq E$ e conclui-se que a é ponto interior a E.

■

Corolário 1 - *A intersecção de uma colecção de subconjuntos fechados de $\mathbb{C}$ é um conjunto fechado e a união de uma colecção finita de subconjuntos fechados de $\mathbb{C}$ também é um conjunto fechado.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e da proposição 3 do teorema 2.4 notando que o conjunto complementar de uma intersecção é a união dos complementares e o conjunto complementar de uma união é a intersecção dos complementares.

■

Corolário 2 - *Todo o subconjunto finito de $\mathbb{C}$ é fechado.*

Demonstração. Como para cada ponto $a \in \mathbb{C}$ o conjunto $\{a\} = \overline{B}(a,0)$ é fechado, o enunciado resulta directamente do corolário anterior.

■

Exemplo 2.10 - *Dados $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $c < d$, o rectângulo aberto*

$$R = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < b \quad e \quad c < \mathrm{Im}(z) < d\}$$

é um conjunto aberto, o rectângulo fechado

$$S = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b \quad e \quad c \leq \mathrm{Im}(z) \leq d\}$$

é um conjunto fechado, R é o interior de S e S é o fecho de R.

Efectivamente o rectângulo aberto é a intersecção de quatro semiplanos abertos e o rectângulo fechado é a intersecção de quatro semiplanos fechados. Daqui resultam directamente as inclusões $R \subseteq S^\circ$ e $\overline{R} \subseteq S$, e verifica-se sem dificuldade que um ponto de $S \setminus R$ é aderente a R e a $\mathbb{C} \setminus S$, pelo que $S \subseteq \overline{R}$ e $S^\circ \subseteq R$.

Exemplo 2.11 - *Dados dois conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{C}$ tem-se*

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad e \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Efectivamente, das inclusões $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$ resulta $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ e $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$ pelo que $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$. No entanto $A^\circ \cap B^\circ$ é um conjunto aberto contido em $A \cap B$ pelo que $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. Analogamente, das inclusões $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$ deduz-se $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ e a inclusão oposta resulta de $\overline{A} \cup \overline{B}$ ser um conjunto fechado que contém $A \cup B$.

Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, o conjunto $\overline{E} \setminus E^\circ$ diz-se a *fronteira* de E e representa-se por ∂E. Da definição resulta que $\overline{E}$ é a união dos conjuntos disjuntos E° e ∂E, pelo que as condições $E = \overline{E}$ e $E = E^\circ$ equivalem respectivamente a $\partial E \subseteq E$ e a $E \cap \partial E = \varnothing$. Temos ainda

$$\partial E = \overline{E} \cap (\mathbb{C} \setminus E^\circ) = \overline{E} \cap \overline{(\mathbb{C} \setminus E)}$$

donde se conclui que ∂E é um conjunto fechado e também que E e $\mathbb{C} \setminus E$ têm a mesma fronteira.

Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, representamos por $C(a, r)$ a circunferência de centro a e raio r, ou seja,

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}\,.$$

O exemplo 2.5 mostra então que é

$$\partial\,(B(a, r)) = \partial\left(\overline{B}(a, r)\right) = C(a, r).$$

Exemplo 2.12 - *Tem-se* $\partial\varnothing = \partial\mathbb{C} = \varnothing$.
Efectivamente, das definições resulta $\varnothing^\circ = \overline{\varnothing} = \varnothing$ e $\mathbb{C}^\circ = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{C}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ se a for aderente a $E \setminus \{a\}$. Um ponto de E diz-se *ponto isolado* de E se não for ponto de acumulação de E. O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ será aqui representado por E'.

Teorema 2.13 - *Dado um conjunto* $E \subseteq \mathbb{C}$*, então*

1 - Tem-se $\overline{E} \setminus E \subseteq E' \subseteq \overline{E}$ *e* $\overline{E} = E \cup E'$.
2 - Todo o ponto interior a E *é ponto de acumulação de* E.
3 - E' *é fechado*
4 - Um ponto $a \in E$ *é ponto isolado de* E *sse existir* $\delta > 0$ *tal que* $B(a, \delta) \cap E = \{a\}$.
5 - Um ponto $a \in \mathbb{C}$ *é ponto de acumulação de* E *sse para cada* $\delta > 0$ *o conjunto* $B(a, \delta) \cap E$ *for infinito.*

Demonstração. Se $a \in E'$ então $a \in \overline{E \setminus \{a\}} \subseteq \overline{E}$ pelo que $E' \subseteq \overline{E}$. Dado $a \in \overline{E} \setminus E$, como $E = E \setminus \{a\}$ segue-se que $a \in \overline{E \setminus \{a\}}$ pelo que $a \in E'$. É então válida a inclusão $\overline{E} \setminus E \subseteq E'$ e daqui resulta $\overline{E} \subseteq E \cup E'$. Como $E \cup E' \subseteq E \cup \overline{E} = \overline{E}$ conclui-se $E \cup E' = \overline{E}$ o que acaba de estabelecer a primeira proposição.

Para provar a proposição 2 notamos que se $a \in E^\circ$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq E$. Então, dado $\delta > 0$ e sendo $\varepsilon = \min\{r, \delta\}$, temos que $B\,(a, \varepsilon) \setminus \{a\} = B\,(a, \delta) \cap (B(a, r) \setminus \{a\}) \subseteq B\,(a, \delta) \cap (E \setminus \{a\})$. Resulta assim que $B\,(a, \delta) \cap (E \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ pelo que $a \in E'$.

Passando agora à proposição 3, dados $a \in \overline{E'}$ e $\delta > 0$ seja $z \in B(a, \delta) \cap E'$. Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq B(a, \delta)$ e $\varepsilon < |z - a|$, segue-se que $B(z, \varepsilon) \subseteq B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Como $z \in E'$ também $B(z, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing$ pelo que $(B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap E = B(a, \delta) \cap (E \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ e conclui-se que $a \in E'$.

Quanto à proposição 4 basta notar que um ponto $a \in E$ não é ponto de acumulação de E sse existir $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \cap (E \setminus \{a\}) = \varnothing$; como $a \in E$, isto equivale a $B(a,\delta) \cap E = \{a\}$.

Passando finalmente à proposição 5 e dado $a \in \mathbb{C}$, se para cada $\delta > 0$ o conjunto $B(a,\delta) \cap E$ for infinito o mesmo sucede com $B(a,\delta) \cap (E \setminus \{a\})$ pelo que a é ponto de acumulação de E. Suponha-se agora que para algum $\delta > 0$ o conjunto $B\left(a,\delta\right) \cap E$ é finito. Se $E_\delta = B\left(a,\delta\right) \cap \left(E \setminus \{a\}\right) \neq \varnothing$, tomando então $\varepsilon = \min\left\{|z-a| : z \in E_\delta\right\}$ segue-se que $B\left(a,\varepsilon\right) \cap \left(E \setminus \{a\}\right) = \varnothing$ e isto mostra que a não é ponto de acumulação de E.

■

A proposição 1 do teorema anterior mostra em particular que um subconjunto de $\mathbb{C}$ é fechado sse contiver o conjunto dos seus pontos de acumulação.

Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *discreto* se todos os seus pontos forem isolados, ou seja, se $E \cap E' = \varnothing$.

Teorema 2.14 - *Todo o subconjunto discreto de* $\mathbb{C}$ *é numerável.*

Demonstração. Como o conjunto $\mathbb{Q}^2$ dos pares de números racionais é numerável, o mesmo sucede com o conjunto

$$Q = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Q} \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Dado um conjunto discreto $E \subseteq \mathbb{C}$ basta então provar que existe uma aplicação injectiva de E em Q. Para cada $z \in E$ existe $r(z) > 0$ tal que $B\left(z, r(z)\right) \cap E = \{z\}$, e como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ existem necessariamente pontos de Q em $B\left(z, r(z)/2\right)$. Escolhendo agora $\rho(z) \in B\left(z, r(z)/2\right) \cap Q$, a função ρ é então uma aplicação injectiva de E em Q. Efectivamente, dados $z, w \in E$ tais que $z \neq w$, as condições $w \notin B\left(z, r(z)\right)$ e $z \notin B\left(w, r(w)\right)$ exigem $r(z), r(w) \leq |w - z|$ pelo que $B\left(z, r(z)/2\right) \cap B\left(w, r(w)/2\right) = \varnothing$ e conclui-se que $\rho(z) \neq \rho(w)$.

■

Em particular, se um conjunto discreto $E \subseteq \mathbb{C}$ for infinito existe uma aplicação injectiva de $\mathbb{Z}^+$ sobre E que se diz uma *enumeração* de E.

Teorema 2.15 (Bolzano-Weierstrass) - *Todo o subconjunto de* $\mathbb{C}$ *infinito e limitado tem algum ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto infinito e limitado. Tomando $z_1 \in E$ e, indutivamente, $z_{n+1} \in E \setminus \{z_1, ..., z_n\}$, segue-se que (z_n) é uma sucessão de pontos distintos de E. Como a sucessão (z_n) é limitada ela tem uma subsucessão (z_{α_n}) convergente, e sendo $a = \lim z_{\alpha_n}$, para cada $\delta > 0$ existe uma ordem k tal que $z_{\alpha_n} \in B(a,\delta)$ se $n \geq k$. Dado que todos os z_{α_n} são distintos resulta que o conjunto $B(a,\delta) \cap E$ é infinito e conclui-se que a e ponto de acumulação de E. ■

Em Análise Complexa é conveniente ampliar o conjunto $\mathbb{C}$ introduzindo o *ponto no infinito* ∞, e obter assim o conjunto

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Pondo $|\infty| = +\infty$ e definindo as vizinhanças de ∞ por

$$B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1/r\} = \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{B}(0, 1/r) \quad \text{se} \quad r > 0,$$

os conceitos de ponto aderente e de ponto de acumulação generalizam-se directamente ao ponto ∞.

Exemplo 2.16 - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, ∞ é ponto aderente a E sse E for ilimitado.*
Efectivamente ∞ é ponto aderente a E sse para cada $r > 0$ existir $z \in E$ tal que $|z| > 1/r$, e isto equivale a E ser ilimitado.

O teorema de Bolzano-Weierstrass pode agora generalizar-se:

Exemplo 2.17 - *Todo o subconjunto infinito de $\mathbb{C}$ tem algum ponto de acumulação em $\mathbb{C}_\infty$.*

Efectivamente, se um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é ilimitado então o ponto ∞ é aderente a E o que implica que seja ponto de acumulação de E.

3 - Continuidade

Os conceitos de limite e continuidade para funções de variável complexa são análogos aos conceitos correspondentes para funções de variável real. Começaremos por provar um resultado básico que se traduz pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1 - *Dados $D \subseteq \mathbb{C}$, $E \subseteq D$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{E}$ e $c \in \mathbb{C}$, são equivalentes as duas condições seguintes:*

1 - Para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f\left[B\left(a, \varepsilon\right) \cap E\right] \subseteq B\left(c, \delta\right)$.

2 - Para cada sucessão (z_n) de pontos de E tal que $\lim z_n = a$, é $\lim f\left(z_n\right) = c$.

Demonstração. Supondo que se verifica a condição 1, seja (z_n) uma sucessão de pontos de E tal que $\lim z_n = a$. Dado $\delta > 0$ existe uma ordem k a partir da qual $z_n \in B\left(a, \varepsilon\right) \cap E$. Da condição 1 resulta então que $f\left(z_n\right) \in B\left(c, \delta\right)$ quando $n \geq k$ e isto mostra que $\lim f\left(z_n\right) = c$.

Suponha-se agora que a condição 2 se verifica. Se a condição 1 não fosse válida existia $\delta > 0$ tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, $f\left[B\left(a, \varepsilon\right) \cap E\right] \nsubseteq B\left(c, \delta\right)$. Para cada inteiro $n \geq 1$ existia assim um ponto $z_n \in B\left(a, 1/n\right) \cap E$ tal que $\left|f\left(z_n\right) - c\right| \geq \delta$. Então $f\left(z_n\right) \nrightarrow c$ o que contraria a hipótese, pois (z_n) é uma sucessão de pontos de E e a relação $|z_n - a| < 1/n$ implica $\lim z_n = a$.

■

Se se verificarem as condições equivalentes do teorema anterior diz-se que f *tem limite c quando z tende para a por valores em E* e escreve-se

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z) = c.$$

No caso particular $E = D \setminus \{a\}$ a condição $a \in \overline{E}$ equivale a a ser ponto de acumulação de D e escreveremos então simplesmente

$$\lim_{z \to a} f(z) = c.$$

Supondo $E = D$ e $a \in D$, as condições do teorema 3.1 impõem que seja $c = f(a)$ pois a segunda condição tem que ser verificada para a sucessão constante $z_n = a$. Diremos neste caso que a função f é *contínua no ponto* a e podemos então enunciar o seguinte resultado:

Corolário - *Dados $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, são equivalentes as condições:*

1 - f é contínua no ponto a.

2 - Para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f\left[B\left(a,\varepsilon\right)\cap D\right] \subseteq B\left(f(a),\delta\right)$.

3 - Para cada sucessão (z_n) de pontos de D tal que $\lim z_n = a$ é $\lim f\left(z_n\right) = f(a)$.

■

Exemplo 3.2 - *Dados $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, se a for ponto isolado de D então f é contínua em a.*

Efectivamente, neste caso existe $\varepsilon > 0$ tal que $B\left(a,\varepsilon\right)\cap D = \{a\}$ e a condição 2 do corolário anterior é trivialmente verificada.

Exemplo 3.3 - *Dados $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, seja $a \in D \cap D'$. Então f é contínua em a sse*

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Efectivamente, se f é contínua no ponto a a condição 3 do corolário anterior implica que a condição 2 do teorema 3.1 com $E = D\backslash\{a\}$ também seja satisfeita. Reciprocamente, sendo $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$, a relação

$$f\left[B\left(a,\varepsilon\right)\cap D\right] = \{f(a)\} \cup \left(f\left[B\left(a,\varepsilon\right)\cap E\right]\right)$$

mostra que f verifica a condição 2 do corolário anterior.

Exemplo 3.4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D^{\circ}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f é contínua no ponto a então para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B\left(a,\varepsilon\right) \subseteq D \quad e \quad f\left[B(a,\varepsilon)\right] \subseteq B\left(f(a),\delta\right).$$

Efectivamente, pela continuidade de f no ponto a existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f\left[B\left(a,\varepsilon_1\right)\cap D\right] \subseteq B\left(f(a),\delta\right)$, e como $a \in D^{\circ}$ existe também $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B\left(a,\varepsilon_2\right) \subseteq D$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ segue-se que $B\left(a,\varepsilon\right) \subseteq D$ e $f\left[B(a,\varepsilon)\right] \subseteq B\left(f(a),\delta\right)$.

Nota 3.5 - Alguns autores usam a notação $\lim_{z\to a} f(z) = c$ para abreviar a relação

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in D}} f(z) = c$$

e usam a notação

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} f(z) = c$$

para representar o limite atrás definido. Os dois conceitos de limite são equivalentes se $a \in \overline{D} \setminus D$ mas em pontos do domínio a existência deste novo tipo de limite equivale à continuidade da função no ponto.

Com a definição dada de $B(\infty, r)$ para cada $r > 0$, verifica-se sem dificuldade que o teorema 3.1 se mantém válido no caso $a = \infty$ ou $c = \infty$. Em particular se D for ilimitado o ponto ∞ é ponto de acumulação de D e pode definir-se o limite de f quando $z \to \infty$.

Exemplo 3.6 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ ilimitado, $c \in \mathbb{C}_\infty$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Tem-se então $\lim_{z\to\infty} f(z) = c$ sse $\lim_{z\to 0} f(1/z) = c$.*

Efectivamente, dada uma sucessão complexa (z_n) as condições $\lim z_n = \infty$ e $\lim (1/z_n) = 0$ são equivalentes.

Da condição 3 do corolário anterior e dos resultados já conhecidos sobre limites de sucessões resulta imediatamente que se uma função de variável complexa f é contínua num dado ponto também $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$, e $|f|$ são contínuas nesse ponto. Analogamente, se g é contínua num ponto a o mesmo sucede com as funções $f+g$, fg e, se $g(a) \neq 0$, com f/g. Finalmente, se g for contínua no ponto $f(a)$ também a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto a.

Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}_\infty$ um ponto de acumulação de D, e suponha-se que existem $r > 0$ e uma função $h : B(a,r) \cap D \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f(z) = h(z)g(z) \quad \text{se} \quad z \in B(a,r) \cap D.$$

Então, se $\lim_{z\to a} h(z) = 1$ diz-se que f é *assimptoticamente igual a g quando* $z \to a$ e escreve-se

$$f(z) \sim g(z) \quad (z \to a)\,.$$

Se $\lim_{z\to a} h(z) = 0$ diz-se que f é *desprezável relativamente a g quando* $z \to a$ e escreve-se

$$f(z) = o\,(g(z)) \quad (z \to a)\,.$$

Se h for limitada nalguma vizinhança de a diz-se que f é *dominada por g quando* $z \to a$ e escreve-se

$$f(z) = O\,(g(z)) \quad (z \to a)\,.$$

Uma função diz-se contínua num dado subconjunto do seu domínio se for contínua em todos os pontos desse conjunto, e diz-se contínua se for contínua no seu domínio. Em particular as funções constantes e a função identidade são contínuas, e daqui resulta a continuidade das funções polinomiais e racionais.

Teorema 3.7 - *Sejam $D, E \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua. Então $f^{-1}[E]$ é aberto se D e E forem abertos e é fechado se D e E forem fechados.*

Demonstração. Supondo D e E abertos, dado $a \in f^{-1}[E]$ existe $\delta > 0$ tal que $B(f(a),\delta) \subseteq E$, e o exemplo 3.4 mostra que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f\,[B\,(a,\varepsilon)] \subseteq B\,(f(a),\delta)$. Então $B\,(a,\varepsilon) \subseteq f^{-1}\,[E]$ e conclui-se que a é ponto interior a $f^{-1}\,[E]$.

Supondo D e E fechados e dado um ponto a aderente a $f^{-1}\,[E]$, seja (z_n) uma sucessão de pontos de $f^{-1}\,[E]$ com limite a. Como D é fechado segue-se que $a \in D$ e a sucessão dos $f\,(z_n)$ converge para $f(a)$. Então, dado que E também é fechado e os $f(z_n)$ são uma sucessão de pontos de E, necessariamente $f(a) \in E$ e conclui-se que $a \in f^{-1}[E]$.

■

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $E \subseteq \mathbb{R}$. Se D é aberto (resp. fechado) e E é aberto (resp. fechado) relativamente a $\mathbb{R}$, então $f^{-1}[E]$ é aberto (resp. fechado).*

Demonstração. Na primeira hipótese o exemplo 2.8 mostra que o conjunto $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup E$ é aberto, e como $f^{-1}[E] = f^{-1}[(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup E]$ a conclusão resulta do teorema anterior. Na segunda hipótese o exemplo 2.7 mostra que E também é fechado relativamente a $\mathbb{C}$ e a conclusão resulta ainda do teorema anterior.

■

Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, o corolário anterior conduz a uma nova demonstração de que $B(a,r)$ é aberto e $\overline{B}(a,r)$ é fechado. Efectivamente, considerando a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(z) = |z - a|$ aqueles conjuntos são as imagens inversas por f respectivamente dos intervalos $]-\infty, r[$ e $[0, r]$.

Teorema 3.8 - *Sejam $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos fechados, $D = A_1 \cup A_2$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se as restrições de f a A_1 e a A_2 forem contínuas então f também é contínua.*

Demonstração. Dados $c \in D$ e $\delta > 0$ suponha-se sem perda de generalidade que $c \in A_1$. Pela continuidade no ponto c da restrição de f a A_1 existe então $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f[B(c, \varepsilon_1) \cap A_1] \subseteq B(f(a), \delta)$. Analogamente, se $c \in A_2$ existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $f[B(c, \varepsilon_2) \cap A_2] \subseteq B(f(a), \delta)$ e, se $c \notin A_2$, como A_2 é fechado existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B(c, \varepsilon_2) \cap A_2 = \varnothing$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ segue-se que em ambos os casos é válida a inclusão $f[B(c, \varepsilon) \cap D] \subseteq B(f(a), \delta)$ e conclui-se que f é contínua no ponto c.

■

4 - Conjuntos compactos

Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *compacto* se for limitado e fechado.

Exemplo 4.1 - *Se um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é limitado então $\overline{E}$ é compacto.*
Efectivamente, se E for limitado existe $r > 0$ tal que $E \subseteq \overline{B}(0,r)$. Como $\overline{E} \subseteq \overline{B}(0,r)$ resulta que $\overline{E}$ é compacto.

O teorema seguinte mostra que os conjuntos compactos podem ser caracterizados em termos de sucessões.

Teorema 4.2 - *Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é compacto sse toda a sucessão de pontos de E tiver uma subsucessão com limite em E.*

Demonstração. Se E é compacto qualquer sucessão de pontos de E é limitada pelo que tem uma subsucessão convergente. Sendo a o seu limite então $a \in \overline{E}$, e como E é fechado segue-se que $a \in E$.
Reciprocamente, se esta condição se verifica, dado $a \in \overline{E}$ existe uma sucessão (z_n) de pontos de E com limite a, e como toda a subsucessão de (z_n) ainda tem limite a segue-se que $a \in E$ pelo que E é fechado. Se E não fosse limitado, para cada inteiro positivo n existia $z_n \in E$ tal que $|z_n| > n$, pelo que $\lim |z_n| = +\infty$ e nenhuma subsucessão de (z_n) teria limite em E.
■

O resultado anterior pode generalizar-se a todos os conjuntos fechados na seguinte forma:

Teorema 4.3 - *Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é fechado sse toda a sucessão de pontos de E tiver uma subsucessão com limite em $E \cup \{\infty\}$.*

Demonstração. Supondo E fechado, dada uma sucessão de pontos de E ela tem uma subsucessão com limite em E se for limitada, e uma subsucessão com limite ∞ se for ilimitada.
Reciprocamente, se E verificar a condição do enunciado, como na demonstração do teorema anterior resulta que todo o ponto $a \in \mathbb{C}$ que seja aderente a E pertence necessariamente a E.
■

Os dois teoremas seguintes ilustram a importância do conceito de conjunto compacto no estudo das funções contínuas.

Teorema 4.4 - *Sejam $K \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Então $f[K]$ é compacto.*

Demonstração. Dada uma sucessâo (w_n) de pontos de $f[K]$ seja (z_n) uma sucessão de pontos de K tais que $f(z_n) = w_n$. Como K é compacto existe uma subsucessão (z_{α_n}) de (z_n) que converge para um ponto $a \in K$. Então $\lim w_{\alpha_n} = \lim f(z_{\alpha_n}) = f(a) \in f[K]$ pelo que (w_n) tem uma subsucessão com limite em $f[K]$ e o teorema 4.2 mostra que $f[K]$ é compacto.

■

Corolário - *Sejam $K \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto compacto não vazio e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo.*

Demonstração. De acordo com o teorema anterior f transforma K num subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}$, e sabe-se da Análise Real que estes conjuntos têm elemento máximo e elemento mínimo.

■

Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se *uniformemente contínua* se para cada $\delta > 0$ existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(w) - f(z)| < \delta \;\text{ se }\; w, z \in D \;\text{ e }\; |w - z| < \varepsilon.$$

Teorema 4.5 - *Se $K \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto compacto e $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se o enunciado fosse falso, para algum $\delta > 0$ e para cada inteiro positivo n existiam pontos $z_n, w_n \in K$ tais que $|w_n - z_n| < 1/n$ e $|f(w_n) - f(z_n)| \geq \delta$. Como K é compacto existe uma subsucessão (z_{α_n}) de (z_n) que converge para um ponto $a \in K$. Então também $\lim w_{\alpha_n} = a$, e da continuidade de f em a resultava $\lim (f(w_{\alpha_n}) - f(z_{\alpha_n})) = f(a) - f(a) = 0$ o que contraria a hipótese de ser $|f(w_{\alpha_n}) - f(z_{\alpha_n})| \geq \delta$ para todo o n.

■

Teorema 4.6 - *Seja (K_n) uma sucessão de subconjuntos de $\mathbb{C}$, compactos e não vazios, tal que $K_{n+1} \subseteq K_n$ para cada n. Tem-se então*

$$\bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \varnothing.$$

Demonstração. Seja (z_n) uma sucessão tal que $z_n \in K_n$ para cada $n \geq 1$. Como (z_n) é uma sucessão de pontos de K_1, existe uma subsucessão (z_{α_n}) que converge para um certo ponto $w \in K_1$. Dado um inteiro positivo n, para cada $\delta > 0$ existe então um índice $m > n$ tal que $z_{\alpha_m} \in B(w, \delta)$. Temos assim $B(w, \delta) \cap K_{\alpha_m} \neq \varnothing$, e como $\alpha_m \geq m > n$ também $B(w, \delta) \cap K_n \neq \varnothing$ pelo que $w \in \overline{K_n} = K_n$. O enunciado resulta agora de que w pertence à intersecção dos K_n.

■

Corolário - *Seja* (K_n) *uma sucessão de subconjuntos compactos de* $\mathbb{C}$ *tal que* $K_{n+1} \subseteq K_n$ *para cada* n*. Dado um conjunto aberto* $G \subseteq \mathbb{C}$ *tal que*

$$\bigcap_{n \geq 1} K_n \subseteq G$$

existe um índice m *para o qual* $K_m \subseteq G$*.*

Demonstração. Pondo $X_n = K_n \cap (\mathbb{C} \setminus G)$ para cada n, os X_n são compactos e verificam a condição $X_{n+1} \subseteq X_n$. Temos no entanto

$$\bigcap_{n \geq 1} X_n = \left(\bigcap_{n \geq 1} K_n \right) \setminus G = \varnothing$$

e o teorema anterior mostra que existe um índice m para o qual $X_m = \varnothing$, ou seja, $K_m \subseteq G$.

■

Dados um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ e uma colecção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{C}$, diz-se que $\mathcal{C}$ *cobre* E ou que é *uma cobertura de* E se todo o ponto de E pertencer a algum membro de $\mathcal{C}$, ou seja, se

$$E \subseteq \bigcup \mathcal{C}.$$

Teorema 4.7 - *Dado um conjunto limitado* $E \subseteq \mathbb{C}$*, para cada* $r > 0$ *existe uma cobertura finita de* E *formada por círculos de raio* r *e com centros em pontos de* E*.*

Demonstração. Se o enunciado for falso, para um certo $r > 0$ pode definir-se uma sucessão (z_n) de pontos de E tal que

$$z_{n+1} \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B\left(z_k, r\right).$$

Como todos os z_n são distintos o conjunto dos z_n é infinito e limitado pelo que tem um ponto de acumulação c. Então em $B\left(c, r/2\right)$ existia uma infinidade de termos da sucessão (z_n) o que é absurdo, pois se $z_k, z_m \in B(c, r/2)$ com $m > k$, então $|z_m - z_k| < r$ pelo que $z_m \in B(z_k, r)$ e isto contraria a definição dos z_n.

■

Teorema 4.8 (Lema de Heine-Borel) - *Se* $K \subseteq \mathbb{C}$ *é compacto e* $\mathcal{C}$ *é uma cobertura de* K *formada por subconjuntos abertos de* $\mathbb{C}$*, existe uma subcolecção finita de* $\mathcal{C}$ *que também cobre* K*.*

Demonstração. O teorema anterior mostra que para cada inteiro positivo n existe uma cobertura finita de K formada por conjuntos da forma $B\left(z, 1/n\right)$ com $z \in K$. Se o enunciado for falso, para cada n existe um conjunto

$$B_n = B\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \quad \text{com} \quad z_n \in K$$

que não está contido em qualquer membro de $\mathcal{C}$. Seja então (z_{α_n}) uma subsucessão de (z_n) que converge para um ponto $a \in K$. Como os membros de $\mathcal{C}$ são conjuntos abertos, existem $G \in \mathcal{C}$ e $\delta > 0$ tais que $B(a,\delta) \subseteq G$. Tomando $m > 2/\delta$ tal que $|z_{\alpha_m} - a| < \delta/2$, para cada $z \in B_{\alpha_m}$ temos assim

$$|z-a| \leq |z - z_{\alpha_m}| + |z_{\alpha_m} - a| < \frac{1}{\alpha_m} + \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{m} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

e isto mostra que B_{α_m} está contido em G, o que contraria a hipótese.

■

Dados $a \in \mathbb{C}$ e $E \subseteq \mathbb{C}$ define-se *distância* $d(a,E)$ *entre* a *e* E por

$$d(a,E) = \inf\{|a-z| : z \in E\}.$$

Em particular, usando a convenção usual $\inf \varnothing = +\infty$ resulta $d(a,\varnothing) = +\infty$.

Teorema 4.9 - *Dado um conjunto não vazio $E \subseteq \mathbb{C}$, a função definida em $\mathbb{C}$ por $z \mapsto d(z,E)$ é contínua.*

Demonstração. Dados $a, z \in \mathbb{C}$, para cada ponto $\zeta \in E$ é

$$d(z,E) \leq |z-\zeta| \leq |z-a| + |a-\zeta|$$

pelo que $|a-\zeta| \geq d(z,E) - |z-a|$ e daqui vem

$$d(a,E) \geq d(z,E) - |z-a|.$$

Temos assim

$$d(z,E) \leq d(a,E) + |z-a|$$

e mudando a em z resulta

$$|d(z,E) - d(a,E)| \leq |z-a|.$$

Dada uma sucessão (z_n) com limite a é então $\lim d(z_n,E) = d(a,E)$ pelo que a função em causa é contínua no ponto a.

■

Teorema 4.10 - *Se $a \in \mathbb{C}$ e $F \subseteq \mathbb{C}$ é fechado e não vazio, existe $b \in F$ tal que $d(a,F) = |a-b|$.*

Demonstração. Atendendo à definição de ínfimo, para cada inteiro $n \geq 1$ existe $z_n \in F$ tal que

$$d(a,F) \leq |a - z_n| < d(a,F) + \frac{1}{n}.$$

Como (z_n) é uma sucessão limitada, o teorema 4.3 mostra que ela tem uma subsucessão (z_{α_n}) que converge para um ponto $b \in F$, e daqui resulta

$$d(a,F) = \lim |a - z_{\alpha_n}| = |a-b|. \qquad ■$$

Corolário 1 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $E \subseteq \mathbb{C}$ tem-se $d(a,E) = d(a,\overline{E})$.*

Demonstração. Como $E \subseteq \overline{E}$, tem-se $d(a,\overline{E}) \leq d(a,E)$ e basta provar a desigualdade oposta. Supondo sem perda de generalidade $E \neq \varnothing$, o teorema anterior mostra que existe $b \in \overline{E}$ tal que $d(a,\overline{E}) = |a-b|$. Tomando uma sucessão (z_n) de pontos de E tal que $\lim z_n = b$, para cada n é $d(a,E) \leq |a-z_n|$ e daqui resulta $d(a,E) \leq |a-b| = d(a,\overline{E})$.
■

Corolário 2 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $E \subseteq \mathbb{C}$ tem-se $d(a,E) = 0$ sse $a \in \overline{E}$.*

Demonstração. Atendendo ao corolário anterior a condição $d(a,E) = 0$ equivale a $d(a,\overline{E}) = 0$. O teorema 4.10 mostra então que isto equivale a existir $b \in \overline{E}$ tal que $|a-b| = 0$, pelo que $a = b \in \overline{E}$.
■

Teorema 4.11 - *Dados $E \subseteq \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C} \setminus E^\circ$ tem-se $d(a,\overline{E}) = d(a,\partial E)$.*

Demonstração. Como $\partial E \subseteq \overline{E}$, tem-se $d(a,\overline{E}) \leq d(a,\partial E)$ e basta provar a desigualdade oposta. Supondo sem perda de generalidade $E \neq \varnothing$, existe $b \in \overline{E}$ tal que $d\left(a,\overline{E}\right) = |a-b|$. Se $a = b$ então $a \in \overline{E}$ logo $a \in \partial E$ e portanto $d(a,\partial E) = 0 = d(a,\overline{E})$. Supondo $a \neq b$ e sendo $r = |a-b|$, então $B(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus E$. Como $b \in \overline{B}(a,r) = \overline{B(a,r)} \subseteq \overline{\mathbb{C} \setminus E}$ necessariamente $b \in \overline{E} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus E} = \partial E$ e daqui resulta $d(a,\partial E) \leq |a-b| = d\left(a,\overline{E}\right)$.
■

Corolário - *Se $E \subseteq \mathbb{C}$ e $\partial E = \varnothing$ é então $E = \varnothing$ ou $E = \mathbb{C}$.*

Demonstração. Se $E \neq \varnothing$ e $E \neq \mathbb{C}$, tomando $z \in \mathbb{C} \setminus E$ temos $d(z,\overline{E}) < +\infty$ pelo que é também $d(z,\partial E) < +\infty$ e isto exige $\partial E \neq \varnothing$.
■

Dados dois conjuntos $D, E \subseteq \mathbb{C}$ define-se a *distância* $d(D,E)$ *entre* D *e* E por

$$d(D,E) = \inf \{|z-w| : z \in D \text{ e } w \in E\}.$$

Temos em particular $d(D,E) = +\infty$ sse $D = \varnothing$ ou $E = \varnothing$.

Exemplo 4.12 - *Dados dois conjuntos $D, E \subseteq \mathbb{C}$ tem-se*

$$d(D,E) = \inf_{z \in D} d(z,E) = \inf_{z \in E} d(z,D).$$

Efectivamente, da definição resulta que para cada $z \in D$ é $d(D,E) \leq d(z,E)$, pelo que $d(D,E) \leq \inf_{z \in D} d(z,E)$. Por outro lado, dado $w \in E$ temos

$$\inf_{z \in D} d(z,E) \leq \inf_{z \in D} |z-w|$$

pelo que

$$\inf_{z\in D} d(z,E) \leq \inf\{|z-w| : z \in D \text{ e } w \in E\} = d(D,E).$$

É então

$$d(D,E) = \inf_{z\in D} d(z,E)$$

e a segunda identidade resulta agora permutando os conjuntos D e E.

Teorema 4.13 - *Sejam $D, E \subseteq \mathbb{C}$ tais que $d(D,E) > 0$. Existe então um conjunto aberto $G \subseteq \mathbb{C}$ tal que $D \subseteq G$ e $\overline{G} \cap E = \varnothing$.*

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade $D \neq \varnothing$, seja $\delta > 0$ tal que $\delta < d(D,E)$. Pondo

$$G = \{z \in \mathbb{C} : d(z,D) < \delta\} \quad \text{e} \quad F = \{z \in \mathbb{C} : d(z,D) \leq \delta\}$$

tem-se $D \subseteq G \subseteq F$ e $F \cap E = \varnothing$. Por outro lado, como a função $z \mapsto d(z,D)$ é contínua o corolário do teorema 3.7 mostra que G é aberto e F é fechado. Então $\overline{G} \subseteq F$ pelo que $\overline{G} \cap E = \varnothing$ e G verifica as condições do enunciado.

■

Teorema 4.14 - *Sejam $K, F \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos não vazios tais que K é compacto e F é fechado. Existem então pontos $a \in K$ e $b \in F$ tais que*

$$d(K,F) = |a-b|.$$

Demonstração. Atendendo ao exemplo 4.12 temos

$$d(K,F) = \inf_{z\in K} d(z,F)$$

e como a função definida em K por $z \mapsto d(z,F)$ é contínua, o corolário do teorema 4.4 mostra que existe $a \in K$ tal que

$$\inf_{z\in K} d(z,F) = d(a,F).$$

O enunciado resulta agora do teorema 4.10.

■

Corolário 1 - *Sejam $K, F \subseteq \mathbb{C}$ tais que K é compacto e F é fechado. Se $K \cap F = \varnothing$ tem-se $d(K,F) > 0$.*

Demonstração. Supondo que K e F são não vazios, pelo teorema anterior existem $a \in K$ e $b \in F$ tais que $d(K,F) = |a-b|$. O enunciado resulta então de ser $a \neq b$.

■

Corolário 2 - *Sejam $K, F \subseteq \mathbb{C}$ tais que K é compacto e F é fechado. Se $K \cap F = \varnothing$ existe um conjunto aberto e limitado $G \subseteq \mathbb{C}$ tal que $K \subseteq G$ e $\overline{G} \cap F = \varnothing$.*

Demonstração. Atendendo ao corolário anterior o teorema 4.13 mostra que existe um conjunto aberto $G_0 \subseteq \mathbb{C}$ tal que $K \subseteq G_0$ e $\overline{G_0} \cap F = \varnothing$. Como K é limitado existe $r > 0$ tal que $K \subseteq B(0, r)$ e o enunciado é satisfeito pelo conjunto $G = G_0 \cap B(0, r)$.
■

Corolário 3 - *Sejam $K, D \subseteq \mathbb{C}$ tais que K é compacto, D é aberto e $K \subseteq D$. Existe então um conjunto aberto e limitado G tal que $K \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq D$.*

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior tomando para F o conjunto $\mathbb{C} \setminus D$.
■

Corolário 4 - *Sejam $K, F \subseteq \mathbb{C}$ tais que K é compacto e F é fechado. Se $K \cap F = \varnothing$ existem conjuntos abertos disjuntos G_1 e G_2 tais que G_1 é limitado, $K \subseteq G_1$ e $F \subseteq G_2$.*

Demonstração. Resulta directamente do corolário 2 tomando $G_1 = G$ e $G_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$.
■

5 - Conjuntos conexos

Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *conexo* se qualquer aplicação contínua de E em $\{0,1\}$ for constante. Diz-se que E é *desconexo* se não for conexo.

De acordo com a definição um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é desconexo sse existir alguma aplicação contínua não constante de E em $\{0,1\}$, e isto mostra em particular que $\varnothing$ é conexo.

Da definição resulta directamente que para cada $a \in \mathbb{C}$ o conjunto $\{a\}$ é conexo. Resulta também que os intervalos de $\mathbb{R}$ são conjuntos conexos. Efectivamente, sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \{0,1\}$ uma função contínua, se f não fosse constante pelo teorema dos valores intermédios existiria $c \in I$ tal que $f(c) = 1/2 \notin \{0,1\}$.

Teorema 5.1 - *Sejam $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto conexo e $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua. Então $f[E]$ também é conexo.*

Demonstração. Sendo φ uma aplicação contínua de $f[E]$ em $\{0,1\}$, $\varphi \circ f$ é uma aplicação contínua de E em $\{0,1\}$. Então $\varphi \circ f$ é constante e isto exige que φ também seja constante.

■

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ chama-se *segmento de extremos z e w* ao conjunto

$$[z,w] = \{z + t(w-z) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Exemplo 5.2 - *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ o segmento $[z,w]$ é conexo.*

Efectivamente, pondo $\varphi(t) = z + t(w-z)$ se $t \in [0,1]$, φ é uma função contínua que transforma o conjunto conexo $[0,1]$ em $[z,w]$.

Exemplo 5.3 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, a circunferência $C(a,r)$ é um conjunto conexo.*

Efectivamente a função φ definida em $[0,2\pi]$ por $\varphi(t) = a + r(\cos t + i \sin t)$ é contínua e transforma o conjunto conexo $[0,2\pi]$ em $C(a,r)$.

Teorema 5.4 - *Seja $\mathcal{C}$ uma colecção de subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$ com intersecção não vazia. Então a união dos membros de $\mathcal{C}$ é um conjunto conexo.*

Demonstração. Sejam $E = \cup\mathcal{C}$, $f : E \longrightarrow \{0,1\}$ uma função contínua e $a \in \cap\mathcal{C}$. Dado $z \in E$ seja ainda X um membro de $\mathcal{C}$ tal que $z \in X$. Como a restrição de f a X é contínua e X é conexo, f é constante em X. Temos então $f(z) = f(a)$ pelo que f é constante.

■

Exemplo 5.5 - *$\mathbb{C}$ é conexo e para cada $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ os círculos $B(a,r)$ e $\overline{B}(a,r)$ são conexos.*

Efectivamente temos

$$\mathbb{C} = \bigcup_{z\in\mathbb{C}} [0,z], \quad B(a,r) = \bigcup_{z\in B(a,r)} [a,z] \quad \text{e} \quad \overline{B}(a,r) = \bigcup_{z\in\overline{B}(a,r)} [a,z]$$

pelo que basta aplicar o teorema anterior.

Corolário 1 - *Dada uma sucessão finita $\{E_1, ..., E_n\}$ de subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$ tais que $E_k \cap E_{k+1} \neq \varnothing$ se $1 \leq k \leq n-1$, então $E_1 \cup ... \cup E_n$ é conexo.*

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior por indução em n.

■

Corolário 2 - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ seja M um subconjunto conexo de E. Se para cada $z \in E \setminus M$ existir um conjunto conexo $C(z) \subseteq E$ tal que $z \in C(z)$ e $C(z) \cap M \neq \varnothing$, então E é conexo.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior notando que se tem então

$$E = \bigcup_{z\in E\setminus M} (C(z) \cup M)$$

e que para cada $z \in E \setminus M$ o conjunto $C(z) \cup M$ é conexo.

■

Exemplo 5.6 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e r_1, r_2 tais que $0 \leq r_1 < r_2$, a coroa circular $B(a,r_2) \setminus \overline{B}(a,r_1)$ é um conjunto conexo.*

Efectivamente, sendo $r = (r_1 + r_2)/2$ e $M = C(a,r)$, para cada ponto $z \in B(a,r_2) \setminus \overline{B}(a,r_1)$ ponha-se

$$C(z) = \left\{ a + t\frac{z-a}{|z-a|} : r_1 < t < r_2 \right\}.$$

Então, tomando $t = |z-a| \in]r_1, r_2[$ verifica-se que $z \in C(z)$. Temos ainda $C(z) \cap M = \{a + r(z-a)/|z-a|\}$, e como $C(z)$ e M são conexos a conclusão resulta do corolário anterior.

Exemplo 5.7 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, o conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(a,r)$ é conexo.*

Efectivamente $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(a,r)$ é a imagem da coroa circular $B(a,1/r) \setminus \{a\}$ pela função contínua definida por $z \mapsto 1/(z-a)$.

Exemplo 5.8 - *Sejam $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, e $A \subseteq E$ um conjunto discreto. Então $E \setminus A$ também é conexo.*

Efectivamente para cada ponto $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B(a,r_a) \subseteq E$ e $B(a,r_a) \cap A = \{a\}$. Como cada conjunto $B(a,r_a) \setminus \{a\}$ é conexo, dada uma função contínua $f : E \setminus A \longrightarrow \{0,1\}$ ela toma um valor constante k_a em $B(a, r_a) \setminus \{a\}$. Pode então definir-se um prolongamento contínuo $\widetilde{f}$ de f a E pondo $\widetilde{f}(a) = k_a$ para cada $a \in A$, e como E é conexo conclui-se que f é constante.

Teorema 5.9 - *Seja $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto conexo. Então todo o conjunto X tal que $E \subseteq X \subseteq \overline{E}$ também é conexo.*

Demonstração. Seja $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ uma função contínua. Como E é conexo existe $k \in \{0,1\}$ tal que $f(z) = k$ para todo o $z \in E$. Dado $z \in X$, como $z \in \overline{E}$ existe uma sucessão (z_n) de pontos de E tal que $z_n \to z$, e a continuidade de f em z exige $\lim f(z_n) = f(z)$. É então $f(z) = k$ e f é constante.

■

Teorema 5.10 - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, se para cada par de pontos $z, w \in E$ existir um conjunto conexo $L \subseteq E$ tal que $z, w \in L$, então E é conexo.*

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade $E \neq \varnothing$, tome-se $a \in E$ e para cada $z \in E$ seja $L(a, z)$ um conjunto conexo tal que $a, z \in L(a, z)$. Temos então

$$E = \bigcup_{z \in L} L(a, z)$$

e o enunciado resulta do teorema 5.4.

■

Um conjunto E diz-se *convexo* se para cada par de pontos $z, w \in E$ o segmento $[z, w]$ estiver contido em E. Atendendo ao exemplo 5.2 o teorema anterior mostra que todo o conjunto convexo é conexo.

Da definição de conjunto convexo resulta imediatamente que $\mathbb{C}$ é convexo e que a intersecção de uma colecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Em particular, dado $E \subseteq \mathbb{C}$, a intersecção dos conjuntos convexos que contêm E diz-se o c*onjunto convexo gerado* por E ou o *envólucro convexo* de E.

Exemplo 5.11 - *Um círculo em $\mathbb{C}$ aberto ou fechado é um conjunto convexo.*

Efectivamente, dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ consideremos por exemplo o círculo aberto $B(a, r)$. Se $z, w \in B(a, r)$ e $u \in [z, w]$ é $u = z + t(w - z)$ com $t \in [0, 1]$ e temos

$$\begin{aligned} |u - a| &= |(1-t)z + tw - a| = |(1-t)(z-a) + t(w-a)| \\ &\leq (1-t)|z-a| + t|w-a| < (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

pelo que $[z, w] \subseteq B(a, r)$ e $B(a, r)$ é convexo.

Exemplo 5.12 - *Um rectângulo em $\mathbb{C}$ aberto ou fechado é um conjunto convexo.*

Efectivamente, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $c < d$, consideremos por exemplo o rectâgulo aberto

$$R = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < b \ \text{ e } \ c < \mathrm{Im}(z) < d\} .$$

Dados $z, w \in R$ e $u = z + t(w - z)$ com $t \in [0, 1]$ temos

$$\mathrm{Re}(u) = (1 - t)\,\mathrm{Re}(z) + t\,\mathrm{Re}(w) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(u) = (1 - t)\,\mathrm{Im}(z) + t\,\mathrm{Im}(w).$$

Como é

$$a = (1 - t)\, a + ta < (1 - t)\,\mathrm{Re}(z) + t\,\mathrm{Re}(w) < (1 - t)\, b + tb = b,$$

resulta $a < \mathrm{Re}(u) < b$. Analogamente se deduz a relação $c < \mathrm{Im}(u) < d$ pelo que $u \in R$ e isto mostra que R é convexo.

Exemplo 5.13 - *O fecho e o interior de um conjunto convexo $E \subseteq \mathbb{C}$ são conjuntos convexos.*

Efectivamente, dados $z, w \in \overline{E}$ existem sucessões (z_n) e (w_n) de pontos de E tais que $z_n \to z$ e $w_n \to w$. Tomando $t \in [0, 1]$, como $z_n + t\,(w_n - z_n)$ é uma sucessão de pontos de E com limite $z + t(w - z)$ segue-se que $z + t(w - z) \in \overline{E}$ e isto mostra que $\overline{E}$ é convexo.

Analogamente, sejam $z, w \in E^\circ$ e considere-se $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subseteq E$ e $B(w, \varepsilon) \subseteq E$. Dado $t \in [0, 1]$ seja agora $u = z + t(w - z)$ e tome-se $v \in B(u, \varepsilon)$. Como $|v - u| < \varepsilon$ segue-se que os pontos $a = z + v - u$ e $b = w + v - u$ pertencem ambos a E, e o mesmo sucede então com o ponto

$$a + t\,(b - a) = z + v - u + t(w - z) = v.$$

Conclui-se assim que $B(u, \varepsilon) \subseteq E$ pelo que $u \in E^\circ$, e a inclusão $[z, w] \subseteq E^\circ$ mostra que E° é convexo.

Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *em estrela relativamente a um ponto $a \in E$* se for válida a inclusão $[a, z] \subseteq E$ para cada $z \in E$. Em particular um conjunto convexo é um conjunto em estrela relativamente a qualquer dos seus pontos.

Exemplo 5.14 - *Todo o subconjunto de $\mathbb{C}$ em estrela é conexo.*

Efectivamente, se $E \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto em estrela relativamente a a temos

$$E = \bigcup_{z \in D} [a, z]$$

e o teorema 5.4 mostra que E é conexo.

Exemplo 5.15 - $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ *é um conjunto em estrela relativamente a qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^+$.*

Efectivamente, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, se $z \in \mathbb{R}^+$ o segmento de extremos x e z está contido em $\mathbb{R}^+$ e se $z \notin \mathbb{R}$ é $[x, z] \cap \mathbb{R} = \{x\}$ pelo que $[x, z] \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Dado $E \subseteq \mathbb{C}$, um conjunto não vazio $C \subseteq E$ diz-se uma *componente conexa* de E se for conexo e se para cada conjunto conexo $X \subseteq E$ a condição $C \subseteq X$ exigir $X = C$. Assim, as componentes conexas de um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ são os subconjuntos conexos maximais de E.

O teorema seguinte mostra que as componentes conexas de um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ são disjuntas e que a sua união é E.

Teorema 5.16 - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, cada ponto de E pertence a uma e uma só componente conexa de E.*

Demonstração. Dado $z \in E$ seja $C(z)$ a união dos subconjuntos conexos de E que contêm o ponto z. Se $X \subseteq E$ for um conjunto conexo tal que $C(z) \subseteq X$, segue-se que $z \in X$ e isto exige $X \subseteq C(z)$. É então $X = C(z)$ e como o teorema 5.4 mostra que $C(z)$ é conexo, conclui-se que $C(z)$ é uma componente conexa de E à qual pertence z. Finalmente, se C for uma componente conexa de E e $z \in C$, da definição de $C(z)$ resulta $C \subseteq C(z)$ e por C ser uma componente conexa de E conclui-se $C = C(z)$.

■

Corolário - *Dado um conjunto não vazio $E \subseteq \mathbb{C}$, cada subconjunto conexo de E está contido nalguma componente conexa de E.*

Demonstração. Seja $X \neq \varnothing$ um subconjunto conexo de E e tome-se $z \in X$. Sendo C a componente conexa de E à qual pertence z, como $C \cup X$ é conexo segue-se que $C \cup X \subseteq C$ pelo que $X \subseteq C$.

■

Teorema 5.17 - *O complementar em $\mathbb{C}$ de um conjunto limitado tem uma e uma só componente conexa ilimitada.*

Demonstração. Sejam $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto limitado e $D = \mathbb{C} \backslash E$. Dado $r > 0$ tal que $E \subseteq \overline{B}(0,r)$, segue-se que $\mathbb{C} \backslash \overline{B}(0,r) \subseteq D$. Como $\mathbb{C} \backslash \overline{B}(0,r)$ é conexo (cf. exemplo 5.7) este conjunto está contido nalguma componente conexa de D que é necessariamente ilimitada. Além disso as restantes componentes conexas de D são disjuntas de $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,r)$ pelo que estão contidas em $\overline{B}(0,r)$ e são limitadas.

■

Teorema 5.18 - *Se $E \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto em estrela as componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus E$ são ilimitadas.*

Demonstração. Suponha-se que E é um conjunto em estrela relativamente a um ponto $a \in E$ e seja $z \in \mathbb{C} \setminus E$. Dado $w = a + t(z - a)$ com $t \geq 1$, temos $z = a + (1/t)(w - a)$ pelo que $z \in [a, w]$. Como a hipótese $w \in E$ conduz a $[a, w] \subseteq E$, segue-se que $w \notin E$ e isto mostra que o conjunto

$$L = \{a + t(z - a) : t \geq 1\}$$

é disjunto de E. Dado que $z \in L$ e que L é conexo por ser a imagem do intervalo $[1, +\infty[$ por uma função contínua, a componente conexa de $\mathbb{C}\setminus E$ à qual pertence z contém necessariamente L e é portanto ilimitada.

■

Corolário - *Se $E \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto limitado e em estrela, então $\mathbb{C} \setminus E$ é conexo.*

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior atendendo ao teorema 5.17.

■

Teorema 5.19 - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, as suas componentes conexas são abertas se E for aberto e são fechadas se E for fechado.*

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade $E \neq \varnothing$, seja C uma componente conexa de E. Se E é aberto, dado $z \in C$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z,\varepsilon) \subseteq E$. Como $z \in C \cap B(z,\varepsilon)$ e os conjuntos C e $B(z,\varepsilon)$ são ambos conexos, do teorema 5.4 resulta que $C \cup B(z,\varepsilon)$ é conexo e isto exige $B(z,\varepsilon) \subseteq C$. Então z é ponto interior a C pelo que C é aberto.

Supondo agora que E é fechado, como $\overline{C} \subseteq E$ e o teorema 5.9 mostra que $\overline{C}$ é conexo, de $C \subseteq \overline{C}$ deduz-se $C = \overline{C}$ e conclui-se que C é fechado.

■

Dois conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{C}$ dizem-se *separados* se $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$.

Exemplo 5.20 - *Dois subconjuntos de $\mathbb{C}$ fechados e disjuntos são separados.*

Efectivamente, sendo $A, B \subseteq \mathbb{C}$ fechados e disjuntos, temos $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$ pelo que A e B são separados.

Exemplo 5.21 - *Dois subconjuntos de $\mathbb{C}$ abertos e disjuntos são separados.*

Efectivamente, sejam $A, B \subseteq \mathbb{C}$ abertos e disjuntos. Então cada ponto $z \in A$ é interior a A pelo que $z \notin \overline{B}$ e isto implica $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Analogamente tem-se $\overline{A} \cap B = \varnothing$ e conclui-se que A e B são separados.

O teorema seguinte mostra que a definição de conjunto conexo pode ser feita, alternativamente, em termos do conceito de conjuntos separados.

Teorema 5.22 - *Um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é desconexo sse for a união de dois conjuntos separados não vazios.*

Demonstração. Sendo $E = A \cup B$ com A e B separados e não vazios, pode definir-se uma função $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e não constante, o que mostra que E é desconexo. Pondo efectivamente $f(z) = 0$ se $z \in A$ e $f(z) = 1$ se $z \in B$, tome-se $c \in E$ e suponha-se por exemplo que $c \in A$. Como $c \notin \overline{B}$, existe então

$\varepsilon > 0$ tal que $B(c,\varepsilon) \cap B = \varnothing$ e f é constante em $B(c,r) \cap E$ pelo que f é contínua no ponto c.

Reciprocamente, suponha-se que E é desconexo e seja $f : E \longrightarrow \{0,1\}$ uma função contínua não constante. Fixado $c \in E$ sejam

$$A = \{z \in E : f(z) = f(c)\}$$

e $B = X \setminus A \neq \varnothing$. Dado $z \in \overline{B}$ existe uma sucessão (z_n) de pontos de B tal que $z_n \to z$, e a continuidade de f em z exige $\lim f(z_n) = f(z)$. Como $|f(z_n) - f(c)| = 1$ para todo o índice n, é então $f(z) \neq f(c)$ pelo que $z \notin A$ e isto mostra que $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Analogamente se estabelece a relação $\overline{A} \cap B = \varnothing$ e conclui-se que A e B são conjuntos separados e não vazios, tais que $E = A \cup B$.

■

Corolário 1 - *Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{C}$ ambos fechados ou ambos abertos, disjuntos e não vazios. Então $A \cup B$ é desconexo.*

Demonstração. Atendendo aos exemplos 5.20 e 5.21 os conjuntos A e B são separados. O enunciado resulta agora directamente do teorema anterior.

■

Nota 5.23 - O corolário anterior permite uma demonstração alternativa do corolário do Teorema 4.11. Efectivamente, se $E \subseteq \mathbb{C}$ é tal que $\partial E = \varnothing$ segue-se que $E = E^\circ = \overline{E}$ pelo que E é aberto e também fechado. Como $\mathbb{C}$ é conexo e é a união dos conjuntos abertos E e $\mathbb{C} \setminus E$, o corolário anterior mostra que se tem necessariamente $E = \varnothing$ ou $E = \mathbb{C}$.

Exemplo 5.24 - *Seja $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e não vazio. Se ∂E for um conjunto discreto então $E \cup \partial E = \mathbb{C}$.*

Efectivamente, pondo $D = \mathbb{C} \setminus (E \cup \partial E)$ segue-se que D é aberto, $D \cap E = \varnothing$ e $D \cup E = \mathbb{C} \setminus \partial E$. Como $\mathbb{C} \setminus \partial E$ é conexo (cf. exemplo 5.8) e $E \neq \varnothing$, do corolário anterior resulta $D = \varnothing$ pelo que $E \cup \partial E = \mathbb{C}$.

Corolário 2 - *Sejam D e E dois subconjuntos de $\mathbb{C}$ separados. Dado um conjunto conexo $C \subseteq D \cup E$ então $C \subseteq D$ ou $C \subseteq E$.*

Demonstração. Temos $C = (C \cap D) \cup (C \cap E)$ e como $C \cap D$ e $C \cap E$ são conjuntos separados o teorema 5.22 mostra que um deles é vazio.

■

Corolário 3 - *Dado $E \subseteq \mathbb{C}$ seja $C \subseteq E$ um conjunto conexo e não vazio. Se C e $E \setminus C$ forem separados então C é uma componente conexa de E.*

Demonstração. Se D é um conjunto conexo tal que $C \subseteq D \subseteq E$, então $D \subseteq C \cup (E \setminus C)$ e o corolário anterior mostra que $D \subseteq C$.

■

Exemplo 5.25 - *Dados $E \subseteq \mathbb{C}$ e $a \in E$, se a for ponto isolado então $\{a\}$ é uma componente conexa de E. Em particular as componentes conexas de $\mathbb{Z}$ são conjuntos singulares.*

Efectivamente, como $a \notin \overline{E \setminus \{a\}}$ e $\{a\}$ é fechado segue-se que $\{a\}$ e $E \setminus \{a\}$ são separados.

Corolário 4 - *Sejam $D, E \subseteq \mathbb{C}$ tais que $D \cap E \neq \varnothing$ e $D \cap \partial E = \varnothing$. Se D for conexo então $D \subseteq E$.*

Demonstração. Como $D \cap \partial E = \varnothing$, então $D \subseteq E^\circ \cup \left(\mathbb{C} \setminus \overline{E}\right)$ e o corolário 2 exige $D \subseteq E^\circ \subseteq E$ ou $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{E} \subseteq \mathbb{C} \setminus E$. No entanto a condição $D \cap E \neq \varnothing$ exclui a segunda hipótese e conclui-se que $D \subseteq E$.

■

Exemplo 5.26 (Teorema da passagem das fronteiras) - Sejam $D, E \subseteq \mathbb{C}$. Se D é conexo, $D \cap E \neq \varnothing$ e $D \cap (\mathbb{C} \setminus E) \neq \varnothing$, então $D \cap \partial E \neq \varnothing$.

Resulta imediatamente do corolário anterior pois neste caso a condição $D \subseteq E$ é falsa.

Um conjunto $L \subseteq \mathbb{C}$ diz-se uma *linha poligonal* se existir uma sucessão finita $(z_0, ..., z_n)$ de pontos de $\mathbb{C}$ tal que $L = [z_0, z_1] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n]$, e diz-se então que L liga os pontos z_0 e z_n.

Teorema 5.27 - *Se o conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ é aberto e conexo, dados dois pontos $a, b \in E$ existe uma linha poligonal contida em E que liga a e b.*

Demonstração. Fixado um ponto $c \in E$ seja A o conjunto dos pontos $z \in E$ para os quais existe uma linha poligonal contida em E que liga c e z, e ponha-se $B = X \setminus A$. Dado $z \in E$ existe $r > 0$ tal que $B(z, r) \subseteq E$ e para cada $w \in B(z, r)$ tem-se $[z, w] = [w, z] \subseteq B(z, r) \subseteq E$. De $z \in A$ deduz-se então $B(z, r) \subseteq A$, e de $z \in B$ resulta $B(z, r) \subseteq B$, pelo que A e B são ambos abertos. Atendendo agora a que A e B são disjuntos, E é conexo e $c \in A$, do corolário 1 do teorema 5.22 deduz-se $B = \varnothing$ o que estabelece o enunciado.

■

Teorema 5.28 - *Sejam D e E dois subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$. Se D e E não forem separados então $D \cup E$ é conexo.*

Demonstração. Suponha-se por exemplo $D \cap \overline{E} \neq \varnothing$ e seja X o conjunto $E \cup \left(D \cap \overline{E}\right)$. Como $E \subseteq X \subseteq \overline{E}$, o teorema 5.9 mostra que X é conexo, e da definição de X resulta $D \cap X = D \cap \overline{E} \neq \varnothing$. Atendendo ao teorema 5.4 segue-se que $D \cup X$ também é conexo, e as inclusões $E \subseteq X \subseteq D \cup E$ implicam $D \cup E = D \cup X$.

■

Corolário - *Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, as suas componentes conexas são separadas duas a duas.*

Demonstração. Sejam A e B componentes conexas de E e suponha-se que os conjuntos A e B não são separados. Então o teorema anterior mostra que o conjunto $A \cup B$ é conexo, o que exige $A \cup B = A$ e $A \cup B = B$, ou seja, $A = B$.
■

Teorema 5.29 - *Dado $E \subseteq \mathbb{C}$ seja C uma componente conexa de E. Então $\partial C = \overline{C} \cap \partial E$.*

Demonstração. Vejamos em primeiro lugar que é válida a inclusão $\partial C \subseteq \partial E$. Se $z \in \partial C$ e $z \notin \partial E$ então $z \in E^{\circ}$ e existia $\delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subseteq E$. Como $B(z, \delta) \cap C \neq \varnothing$ e $B(z, \delta)$ é conexo, então também $C \cup B(z, \delta)$ era conexo e isto exigia $B(z, \delta) \subseteq C$ o que contraria a hipótese $z \in \partial C$. Temos assim $\partial C \subseteq \overline{C} \cap \partial E$ e a inclusão oposta resulta de ser $\overline{C} \cap \partial E \subseteq \overline{C} \setminus E^{\circ} \subseteq \overline{C} \setminus C^{\circ} = \partial C$.
■

Teorema 5.30 - *Sejam D e E dois subconjuntos separados de $\mathbb{C}$. Existem então conjuntos abertos $G, H \subseteq \mathbb{C}$ tais que $D \subseteq G$, $E \subseteq H$ e $G \cap H = \varnothing$.*

Demonstração. Supondo por exemplo $D = \varnothing$, pode tomar-se $G = \varnothing$ e $H = \mathbb{C}$. Se D e E não são vazios seja $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(z) = d(z, D) - d(z, E)$ e considerem-se os conjuntos

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \varphi(z) < 0\} \quad \text{e} \quad H = \{z \in \mathbb{C} : \varphi(z) > 0\}.$$

Então $G \cap H = \varnothing$, e como φ é contínua o corolário do teorema 3.7 mostra que estes conjuntos são abertos. Dado $z \in D$ é $d(z, D) = 0$, e como $z \notin \overline{E}$ o corolário 2 do teorema 4.10 implica $d(z, E) > 0$. Daqui resulta a inclusão $D \subseteq G$ e do mesmo modo se verifica que $E \subseteq H$.
■

Corolário 1 - *Dado um conjunto desconexo $E \subseteq \mathbb{C}$, existem conjuntos abertos e disjuntos $G, H \subseteq \mathbb{C}$ tais que $E \subseteq G \cup H$, $E \cap G \neq \varnothing$ e $E \cap H \neq \varnothing$.*

Demonstração. Como E é desconexo o teorema 5.22 mostra que se tem $E = A \cup B$ com A e B separados e não vazios. Atendendo ao teorema anterior existem agora conjuntos abertos disjuntos $G, H \subseteq \mathbb{C}$ tais que $A \subseteq G$ e $B \subseteq H$. Então os conjuntos G e H verificam as condições do enunciado pois tem-se $E \cap G = A \neq \varnothing$ e $E \cap H = B \neq \varnothing$.
■

Corolário 2 - *Seja (K_n) uma sucessão de subconjuntos de $\mathbb{C}$, compactos e conexos, tal que $K_{n+1} \subseteq K_n$ para cada n. Então a intersecção dos K_n também é um conjunto conexo.*

Demonstração. Se a intersecção dos K_n for um conjunto desconexo K, o corolário anterior mostra que existem conjuntos abertos disjuntos $G, H \subseteq \mathbb{C}$ tais que $K \subseteq G \cup H$, $K \cap G \neq \varnothing$ e $K \cap H \neq \varnothing$. Por outro lado, como $G \cup H$ é aberto, do corolário do teorema 4.6 resulta que para algum índice n se tem $K_n \subseteq G \cup H$. É então $K_n \cap G \neq \varnothing$ e $K_n \cap H \neq \varnothing$, pelo que o corolário 2 do teorema 5.22 implica que K_n não seja conexo.
■

O corolário seguinte traduz um resultado análogo ao corolário 3 do teorema 4.14 para conjuntos fechados mas não necessariamente compactos.

Corolário 3 - *Sejam $E, D \subseteq \mathbb{C}$ tais que E é fechado, D é aberto e $E \subseteq D$. Existe então um conjunto aberto G tal que*

$$E \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq D.$$

Demonstração. Como $\mathbb{C} \setminus D$ é fechado e $E \cap (\mathbb{C} \setminus D) = \varnothing$, segue-se que E e $\mathbb{C} \setminus D$ são separados. Pelo teorema anterior existem conjuntos abertos G e H tais que $E \subseteq G$, $\mathbb{C} \setminus D \subseteq H$ e $G \cap H = \varnothing$. Temos então $G \subseteq \mathbb{C} \setminus H \subseteq D$, e como $\mathbb{C} \setminus H$ é fechado temos também $\overline{G} \subseteq \mathbb{C} \setminus H$ pelo que $\overline{G} \subseteq D$.
■

Dado um conjunto aberto E, para cada componente conexa C de E os conjuntos C e $E \setminus C$ são separados por serem abertos e disjuntos. Se E não for aberto esta condição é em geral falsa como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 5.31 - *Sejam $E = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ e C a componente conexa de E a que pertence o ponto 0. Então C e $E \setminus C$ não são separados.*

Efectivamente, como para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ os conjuntos $A_m = \{1/n : 1 \leq n \leq m\}$ e $B_m = E \setminus A_m$ são separados, o corolário 2 do teorema 5.22 mostra que $C \subseteq B_m$. É então $C = \{0\}$ e como 0 é aderente a $E \setminus \{0\}$ segue-se que C e $E \setminus C$ não são separados.

No entanto, se E for fechado é válida uma propriedade de separação importante que iremos estabelecer à custa de dois lemas.

Lema 5.32 - *Sejam $K \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto compacto e $C \subseteq K$. Seja ainda $\mathcal{F}$ a colecção dos subconjuntos fechados de K que contêm C e cujos complementares em K são fechados. Dado um conjunto aberto D tal que $\cap \mathcal{F} \subseteq D$, existe então um membro de $\mathcal{F}$ contido em D.*

Demonstração. Como os complementares dos membros de $\mathcal{F}$ formam uma cobertura de $\mathbb{C} \setminus D$ e portanto do conjunto compacto $K \cap (\mathbb{C} \setminus D)$, pelo lema de Heine-Borel existe uma colecção finita $\{F_1, ..., F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$$K \cap (\mathbb{C} \setminus D) \subseteq (\mathbb{C} \setminus F_1) \cup ... \cup (\mathbb{C} \setminus F_n).$$

Pondo $F = F_1 \cap ... \cap F_n$ temos então

$$F \subseteq (\mathbb{C} \setminus K) \cup D$$

e a inclusão $F \subseteq K$ implica $F \subseteq D$. Ora F é um subconjunto fechado de K que contém C, e como a relação

$$K \setminus F = (K \setminus F_1) \cup ... \cup (K \setminus F_n)$$

mostra que $K \setminus F$ também é fechado, conclui-se que $F \in \mathcal{F}$.

■

Lema 5.33 - *Sejam $K \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto compacto e C uma componente conexa de K. Então C é a intersecção dos subconjuntos fechados de K que contêm C e cujos complementares em K também são fechados.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ a colecção dos subconjuntos fechados de K que contêm C e cujos complementares em K também são fechados. Em particular $K \in \mathcal{F}$ pelo que $\mathcal{F}$ é não vazia, e pondo $E = \cap\mathcal{F}$ segue-se que $C \subseteq E \subseteq K$. Como C é uma componente de K, para estabelecer o teorema basta agora mostrar que E é conexo pois isso exige $E = C$.

Supondo por absurdo que E não é conexo, pelo corolário 1 do teorema 5.30 existem conjuntos abertos disjuntos G_1 e G_2 tais que $E \subseteq G_1 \cup G_2$, $E \cap G_1 \neq \varnothing$ e $E \cap G_2 \neq \varnothing$. Como $G_1 \cup G_2$ é aberto o lema anterior mostra que existe ainda um conjunto $C_0 \in \mathcal{F}$ tal que $C_0 \subseteq G_1 \cup G_2$, e da relação $E \subseteq C_0$ resultam as inclusões

$$C \subseteq E \subseteq (C_0 \cap G_1) \cup (C_0 \cap G_2)\,.$$

Dado que G_1 e G_2 são separados o mesmo sucede com $C_0 \cap G_1$ e $C_0 \cap G_2$, e o corolário 2 do teorema 5.22 mostra que C está necessariamente contido num destes conjuntos. Supondo $C \subseteq C_0 \cap G_1$ temos por outro lado

$$C_0 \cap \overline{G_1} = C_0 \cap (G_1 \cup G_2) \cap \overline{G_1} = \left(C_0 \cap G_1 \cap \overline{G_1}\right) \cup \left(C_0 \cap G_2 \cap \overline{G_1}\right)$$

e como G_1 e G_2 são separados é $C_0 \cap G_2 \cap \overline{G_1} = \varnothing$ pelo que

$$C_0 \cap \overline{G_1} = C_0 \cap G_1 \cap \overline{G_1} = C_0 \cap G_1.$$

Então $C_0 \cap G_1$ é fechado e como o conjunto

$$K \setminus (C_0 \cap G_1) = (K \setminus C_0) \cup (K \setminus G_1)$$

também é fechado, segue-se que $C_0 \cap G_1 \in \mathcal{F}$. No entanto daqui resulta a inclusão $E \subseteq C_0 \cap G_1$ o que implica $E \cap G_2 = \varnothing$, contrariamente à hipótese.

■

Podemos agora provar o seguinte resultado sobre as componentes conexas limitadas de conjuntos fechados:

Teorema 5.34 - *Sejam $F \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto fechado e C uma componente conexa limitada de F. Existe então um conjunto compacto $K \subseteq F$, cujo complementar em F é fechado, e tal que $C \subseteq K$.*

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $C \subseteq B(0, r)$ e ponha-se $M = \overline{B}(0, r) \cap F$. Como C é uma componente conexa do conjunto compacto M, o lema anterior mostra que C é a intersecção da colecção $\mathcal{F}$ dos subconjuntos fechados de M que contêm C e cujos complementares em M também são fechados. Então, do lema 5.32 resulta agora que existe um conjunto compacto $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \subseteq B(0, r)$, e o enunciado fica provado se se mostrar que $F \setminus K$ é fechado. Temos efectivamente $F \setminus K = (F \setminus M) \cup (M \setminus K)$ e, dado que $M \setminus B(0, r) \subseteq M \setminus K$, é

$$F \setminus K = (F \setminus M) \cup (M \setminus B(0, r)) \cup (M \setminus K) = (F \setminus B(0, r)) \cup (M \setminus K)\,.$$

Como $M \setminus K$ é fechado o mesmo sucede então com $F \setminus K$.
■

O corolário seguinte amplia a conclusão do lema 5.33 e caracteriza as componentes conexas limitadas de qualquer conjunto fechado.

Corolário (Šura-Bura, 1941) - *Sejam $F \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto fechado e C uma componente conexa limitada de F. Então C é a intersecção dos subconjuntos compactos de F que contêm C e cujos complementares em F são fechados.*

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior existe um conjunto compacto K tal que $C \subseteq K \subseteq F$ e $F \setminus K$ é fechado. O lema 5.33 mostra então que C é a intersecção da colecção $\mathcal{F}_K$ dos conjuntos fechados $M \subseteq K$ para os quais $C \subseteq M$ e $K \setminus M$ é fechado. No entanto, como $F \setminus M = (F \setminus K) \cup (K \setminus M)$, segue-se que os complementares em F dos membros de $\mathcal{F}_K$ também são fechados. Sendo $\mathcal{F}$ a colecção dos subconjuntos compactos de F que contêm C e cujos complementares em F são fechados, da inclusão $\mathcal{F}_K \subseteq \mathcal{F}$ resulta agora

$$C \subseteq \bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{F}_K = C$$

e conclui-se $C = \cap \mathcal{F}$.
■

O teorema 5.34 permite-nos estabelecer um resultado cuja importância se revelará posteriormente (cf. demonstração do teorema 13.16).

Teorema 5.35 - *Dado um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ são equivalentes as seguintes condições:*

1 - $\mathbb{C} \setminus D$ tem alguma componente conexa limitada.
2 - Existe um conjunto compacto $K \neq \varnothing$ tal que $K \subseteq \mathbb{C} \setminus D$ e $D \cup K$ é aberto.

Demonstração. Se $\mathbb{C} \setminus D$ tem alguma componente conexa limitada C, o teorema anterior mostra que existem um conjunto compacto K e um conjunto fechado F tais que $C \subseteq K$, $K \cap F = \varnothing$ e $\mathbb{C} \setminus D = K \cup F$. Então o conjunto $D \cup K = \mathbb{C} \setminus F$ é aberto e a condição 2 é satisfeita.

Reciprocamente, se esta condição for verificada, $\mathbb{C} \setminus D$ é a união de K e $\mathbb{C} \setminus (D \cup K)$ que são conjuntos fechados e disjuntos. Dado um ponto $a \in K$ e sendo C a componente conexa de $\mathbb{C} \setminus D$ a que ele pertence, o corolário 2 do teorema 5.22 mostra então que $C \subseteq K$ pelo que C é limitada.

■

Um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *simplesmente conexo* se for conexo e $\mathbb{C} \setminus D$ não tiver componentes conexas limitadas.

Exemplo 5.36 - *Todo o subconjunto de $\mathbb{C}$ aberto e em estrela é simplesmente conexo.*

Efectivamente isto resulta da definição atendendo ao exemplo 5.14 e ao teorema 5.18.

O conceito de conjunto simplesmente conexo traduz a ideia intuitiva de conjunto conexo sem lacunas e esta ideia pode formalizar-se definindo *lacuna* de um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ como uma componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus D$.

6 - Derivação

Dados $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, diz-se que f é *diferenciável* num ponto $c \in D \cap D'$ se existir e for finito o limite

$$\lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}.$$

Neste caso o valor do limite representa-se por $f'(c)$ e diz-se a *derivada* de f em c.

Exemplo 6.1 - *Dado $D \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável num ponto c sse as funções $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ e $f_2 = \mathrm{Im}(f)$ forem ambas diferenciáveis em c e tem-se então*

$$f'(c) = f_1'(c) + i f_2'(c).$$

Efectivamente temos

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \frac{f_1(t) - f_1(c)}{t - c} + i \frac{f_2(t) - f_2(c)}{t - c} \quad \text{se} \quad t \in D \setminus [c\}$$

pelo que a existência de $f'(c)$ equivale à existência de ambas as derivadas $f_1'(c)$ e $f_2'(c)$, e é então $f'(c) = f_1'(c) + i f_2'(c)$.

Da definição resulta imediatamente que se f é uma função constante em D ou a função identidade de D, então f é diferenciável em cada ponto $c \in D'$ e tem-se respectivamente $f'(c) = 0$ ou $f'(c) = 1$.

Dada uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e sendo E o conjunto dos pontos onde f é diferenciável, a função definida em E por $z \mapsto f'(z)$ chama-se a *função derivada* de f e representa-se por f'. Se as funções f e f' forem ambas diferenciáveis em D diz-se que f é *duas vezes diferenciável* em D e a derivada f'' de f' diz-se a *derivada de segunda ordem* de f. Em geral, para cada inteiro $n \geq 0$ define-se a *derivada de ordem* n de f através das relações de recorrência $f^{(0)} = f$ e $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$. Se f tiver derivada de ordem n em D diz-se que f é *n vezes diferenciável* em D, e se isto suceder para todo o n diz-se que f é *infinitamente diferenciável* em D.

Teorema 6.2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f é diferenciável num ponto c existe uma função $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$, contínua e nula no ponto c, tal que*

$$f(z) = f(c) + (f'(c) + \rho(z))(z - c) \quad \textit{se} \quad z \in D.$$

Demonstração. Sendo ρ a função definida em D por $\rho(c) = 0$ e

$$\rho(z) = \frac{f(z) - f(c)}{z - c} - f'(c) \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{c\},$$

a identidade do enunciado é válida. Temos ainda $\lim_{z\to c}\rho(z)=0=\rho(c)$ e isto mostra que ρ é contínua no ponto c.

∎

Corolário - *Sejam $D\subseteq\mathbb{C}$ e $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$. Se f é diferenciável num ponto então f é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior atendendo à continuidade de ρ no ponto c.

∎

Dados $D\subseteq\mathbb{C}$, $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ e um ponto c interior a D, diz-se que f é *holomorfa* em c se for diferenciável nalguma vizinhança de c. Em particular, se D for aberto e f for diferenciável em D, então f é holomorfa em cada ponto de D e diz-se que f é uma *função holomorfa*.

Das definições resulta que uma função constante em $\mathbb{C}$ e a função identidade de $\mathbb{C}$ são holomorfas.

Nota 6.3 - A função definida em $\mathbb{C}$ por $z\mapsto|z|^2$ é diferenciável no ponto 0 mas não é holomorfa nesse ponto pois não é diferenciável em nenhum outro ponto de $\mathbb{C}$. Também a restrição desta função a $\mathbb{R}$ é diferenciável como função de variável real mas não é holomorfa em nenhum ponto pois $\mathbb{R}$ não tem pontos interiores relativamente a $\mathbb{C}$.

Teorema 6.4 - *Sejam $D\subseteq\mathbb{C}$, $f,g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Se f e g são ambas diferenciáveis num ponto c então a função $\alpha f+\beta g$ também é diferenciável em c e tem-se*

$$(\alpha f+\beta g)'(c)=\alpha f'(c)+\beta g'(c).$$

Demonstração. Para cada $z\in D\setminus\{c\}$ temos

$$\frac{\alpha f(z)+\beta g(z)-\alpha f(c)-\beta g(c)}{z-c}=\alpha\frac{f(z)-f(c)}{z-c}+\beta\frac{g(z)-g(c)}{z-c}$$

e o enunciado resulta directamente fazendo $z\to c$.

∎

Corolário - *Dados um conjunto aberto $D\subseteq\mathbb{C}$, duas funções holomorfas $f,g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ e constantes $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, a função $\alpha f+\beta g$ também é holomorfa.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e da definição de função holomorfa.

∎

Teorema 6.5 - *Sejam $D\subseteq\mathbb{C}$ e $f,g:D\longrightarrow\mathbb{C}$. Se f e g são ambas diferenciáveis num ponto c então a função fg também é diferenciável em c e tem-se*

$$(fg)'(c)=f(c)g'(c)+f'(c)g(c).$$

Demonstração. Para cada ponto $z \in D \setminus \{c\}$ temos

$$\frac{f(z)\,g(z) - f(c)g(c)}{z - c} = f(z)\,\frac{g(z) - g(c)}{z - c} + \frac{f(z) - f(c)}{z - c}\,g(c)\,.$$

O enunciado resulta agora fazendo $z \to c$ e notando que do corolário de teorema 6.2 se deduz $\lim_{z \to c} f(z) = f(c)$.

■

Corolário 1 - *Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e duas funções holomorfas $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, então fg também é holomorfa.*

■

Corolário 2 - *Para cada inteiro positivo n a função definida em $\mathbb{C}$ por $z \mapsto z^n$ é holomorfa e tem-se*

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad se \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do corolário anterior por indução em n.

■

Em particular, combinando o corolário anterior com o corolário do teorema 6.4 e usando indução, conclui-se que toda a função polinomial de variável complexa é holomorfa.

Corolário 3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f_1, ..., f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ funções diferenciáveis num ponto c e $f = f_1 ... f_n$. Se f não se anula em c tem-se*

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(c)}{f_k(c)}.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior por indução em n.

■

Dada uma função f diferenciável num ponto c e tal que $f(c) \neq 0$, chama-se *derivada logarítmica* de f em c ao quociente $f'(c)/f(c)$. O corolário anterior traduz assim que a derivada logarítmica de um produto de funções é a soma das derivadas logarítmicas dos factores.

Teorema 6.6 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f é diferenciável num ponto c e $f(c) \neq 0$ então a função $1/f$ também é diferenciável no ponto c e tem-se*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = -\frac{f'(c)}{f^2(c)}.$$

Demonstração. Como f é contínua em c e $f(c) \neq 0$, existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in B(c,r) \cap D$. Então, sendo

$$E = \{z \in D : f(z) \neq 0\}$$

o domínio de $1/f$, segue-se que $B(c,r) \cap D \subseteq E$ e como $c \in D'$ conclui-se que c é também ponto de acumulação de E. O enunciado resulta agora de fazer $z \to c$ na identidade

$$\frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(c)}}{z - c} = -\frac{1}{f(z)\,f(c)} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \quad \text{se} \quad z \in E \setminus \{c\}\,.$$

■

Corolário 1 - *Para cada inteiro positivo n a função definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $z \mapsto z^{-n}$ é holomorfa e tem-se*

$$\left(z^{-n}\right)' = -nz^{-n-1} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior usando o corolário 2 do teorema 6.5.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f e g são ambas diferenciáveis num ponto c e $g(c) \neq 0$ então a função f/g também é diferenciável em c e tem-se*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior usando o teorema 6.5.

■

Corolário 3 - *Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e duas funções holomorfas $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, se g não for idênticamente nula a função f/g é holomorfa.*

Demonstração. Como g é contínua o teorema 3.7 mostra que o conjunto

$$\{z \in D : g(z) \neq 0\}$$

é aberto. Então o domínio de $1/g$ é aberto e o enunciado resulta agora do corolário anterior.

■

Em particular toda a função racional de variável complexa é holomorfa.

Teorema 6.7 - *Sejam $D, E \subseteq \mathbb{C}$, $g : D \longrightarrow E$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. Se g é diferenciável num ponto c e f é diferenciável no ponto $g(c)$ então $f \circ g$ é diferenciável no ponto c e tem-se*

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Demonstração. Aplicando o teorema 6.2 à função f no ponto $g(c)$ temos

$$f(g(z)) - f(g(c)) = (f'(g(c)) + \rho(g(z)))\,(g(z) - g(c)) \quad \text{se} \quad z \in D,$$

em que ρ é uma função contínua e nula em $g(c)$. O enunciado resulta então fazendo $z \to c$ na identidade

$$\frac{f\,(g\,(z)) - f(g(c))}{z-c} = (f'(g(c)) + \rho\,(g\,(z)))\,\frac{g\,(z) - g(c)}{z-c} \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{c\}$$

e atendendo à continuidade de g em c.

■

Corolário - *Sejam $D, E \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos abertos, $g : D \longrightarrow E$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f e g são holomorfas o mesmo sucede com a função $f \circ g$.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e da definição de função holomorfa.

■

Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simétrico relativamente à origem. Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se *par* ou *ímpar* consoante forem válidas as relações $f(-z) = f(z)$ ou $f(-z) = -f(z)$, para todo o $z \in D$. Se uma função f for par ou ímpar diz-se ainda que f tem *paridade definida*.

Exemplo 6.8 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, simétrico relativamente à origem, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com paridade definida. Então a função f' tem paridade oposta à de f.*

Efectivamente do teorema anterior resulta, para todo $c \in D$,

$$(f(-z))'_{z=c} = -f'(-c).$$

Basta agora notar que é $(f(-z))'_{z=c} = f'(c)$ se f for par e $(f(-z))'_{z=c} = -f'(c)$ se f for ímpar.

Teorema 6.9 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função injectiva. Se f é diferenciável num ponto c, $f'(c) \neq 0$ e f^{-1} é contínua no ponto $f(c)$, então f^{-1} é diferenciável em $f(c)$ e tem-se*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Demonstração. Dada uma sucessão (z_n) de pontos de $D\setminus\{c\}$ tal que $z_n \to c$, os pontos $f\,(z_n)$ formam uma sucessão de $f\,[D] \setminus \{f(c)\}$ com limite $f(c)$ e isto mostra que $f(c)$ é ponto de acumulação de $f[D]$. Seja então (w_n) uma sucessão de pontos de $f\,[D]\setminus\{f(c)\}$ com limite $f(c)$. Pondo $z_n = f^{-1}\,(w_n)$, da continuidade de f^{-1} em $f(c)$ resulta $\lim z_n = f^{-1}(f(c)) = c$, e como $f(z_n) = w_n$ para cada n, segue-se que (z_n) é uma sucessão de pontos de $D \setminus \{c\}$. Temos assim

$$\lim \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(f(c))}{w_n - f(c)} = \lim \frac{z_n - c}{f(z_n) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)},$$

o que estabelece o enunciado.

■

Teorema 6.10 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função com derivada identicamente nula. Se D for um intervalo de $\mathbb{R}$ ou um conjunto aberto e conexo então f é constante.*

Demonstração. Se D for um intervalo de $\mathbb{R}$ o exemplo 6.1 mostra que as funções $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ têm ambas derivada identicamente nula. Como isto exige que estas funções sejam constantes segue-se que f também é constante.

Suponha-se agora que D é um conjunto aberto e conexo. Dado um ponto $z \in D$ seja $r > 0$ tal que $B(z,r) \subseteq D$, e para cada $w \in B(z,r)$ considere-se a função $\varphi_w : [0,1] \longrightarrow D$ definida por $\varphi_w(t) = z + t(w-z)$. Para todo o $t \in [0,1]$ é então

$$(f \circ \varphi_w)'(t) = (f' \circ \varphi_w)(t)\,\varphi_w'(t) = (f' \circ \varphi_w)(t)\,(w-z) = 0$$

e da parte já demonstrada do teorema resulta que $f \circ \varphi_w$ é constante em $[0,1]$. Temos assim $f(w) = f(\varphi_w(1)) = f(\varphi_w(0)) = f(z)$ pelo que f é constante em $B(z,r)$. Fixado $a \in D$ isto implica que os conjuntos

$$A = \{z \in D : f(z) = f(a)\} \quad \text{e} \quad B = \{z \in D : f(z) \neq f(a)\}$$

sejam ambos abertos. Então o conjunto conexo D é a união dos conjuntos abertos e disjuntos $A \neq \varnothing$ e B, e do corolário 1 do teorema 5.22 resulta $B = \varnothing$. É pois $D = A$ e conclui-se que f é constante.

■

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, chama-se *primitiva* de f a qualquer função $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in D$. Uma função diz-se *primitivável* se tiver alguma primitiva.

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função primitivável e $F_0 : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma primitiva de f. Se D for um intervalo de $\mathbb{R}$ ou um conjunto aberto e conexo, as primitivas de f são as funções da forma $F_0 + c$ com $c \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Para cada função $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ da forma $F = F_0 + c$ temos $F' = F_0' = f$ e F é uma primitiva de f. Reciprocamente, se F é uma primitiva de f, para cada $z \in D$ temos $(F(z) - F_0(z))' = f(z) - f(z) = 0$ e o teorema anterior mostra que $F - F_0$ é constante. ■

Exemplo 6.11 - *Dado um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ toda a função contínua $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ é primitivável.*

Efectivamente as funções $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ são ambas primitiváveis, e sendo F_1 e F_2 duas primitivas respectivas segue-se que $F_1 + iF_2$ é uma primitiva de f.

Exemplo 6.12 - *Dado $a \in \mathbb{C}$, para cada inteiro $m \neq -1$ a função definida por $(z-a)^m$ é primitivável e as suas primitivas são as funções da forma*

$$\frac{(z-a)^{m+1}}{m+1} + c \quad \textit{com} \quad c \in \mathbb{C}.$$

O estudo da primitivação das funções da forma $(z-a)^{-1}$ envolve a noção de logaritmo complexo e forma uma parte essencial do núcleo da teoria das funções de variável complexa.

Uma função de variável complexa z pode ser tratada como uma função de duas variáveis reais $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$. Com esta interpretação, dada uma função de variável complexa f vamos ver como se traduz para as funções de duas variáveis reais $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$ o facto de f ser diferenciável num dado ponto interior ao seu domínio.

Sabe-se da Análise Real que uma função φ de duas variáveis reais é diferenciável num ponto (a, b) interior ao domínio sse existirem as duas derivadas parciais de φ nesse ponto e existir uma função r, definida no domínio de φ, tal que

$$\varphi(x,y) - \varphi(a,b) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)\,(y-b) + r(x,y)$$

com

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Podemos agora estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 6.13 (Cauchy-Riemann) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $c \in D^\circ$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a = \mathrm{Re}(c)$, $b = \mathrm{Im}(c)$, $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$. Então f é diferenciável no ponto c sse as funções de duas variáveis reais u e v forem diferenciáveis em (a, b) e verificarem as relações*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\,. \tag{6.1}$$

Nestas condições tem-se

$$f'(c) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\,. \tag{6.2}$$

Demonstração. Se f é diferenciável no ponto $c = a + ib$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{u(x,y) - u(a,b) + i\,(v(x,y) - v(a,b))}{x - a + i(y-b)} = f'(c)$$

pelo que

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x,b) - u(a,b) + i\,(v(x,b) - v(a,b))}{x-a} = f'(c)$$

e

$$\lim_{y\to b} \frac{u(a,y) - u(a,b) + i\,(v(a,y) - v(a,b))}{i(y-b)} = f'(c)$$

Estas duas condições implicam a existência das derivadas parciais de u e v no ponto (a,b) e ainda as relações

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \operatorname{Re}(f'(c))\,, \; \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = \operatorname{Im}(f'(c))$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y}(a,b) = \operatorname{Re}(f'(c))\,, \; \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\operatorname{Im}(f'(c))\,,$$

o que estabelece as identidades do enunciado.

Se f é diferenciável no ponto c o teorema 6.2 mostra também que existe uma função $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) - f(c) = f'(c)(z-c) + \rho(z)\,(z-c) \tag{6.3}$$

e $\lim_{z\to c} \rho(z) = \rho(0) = 0$. Pondo $r_x(x,y) = \operatorname{Re}(\rho(z)\,(z-c))$ e tomando a parte real desta identidade obtém-se agora

$$u(x,y) - u(a,b) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\,(y-b) + r_x(x,y)$$

e como

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r_x(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \operatorname{Re}\left(\lim_{z\to c} \frac{\rho(z)\,(z-c)}{|z-c|}\right) = 0$$

conclui-se que a função u é diferenciável no ponto (a,b). Analogamente, tomando a parte imaginária da identidade (6.3) resulta que v também é diferenciável em (a,b).

Reciprocamente, suponha-se que as funções u e v são ambas diferenciáveis em (a,b) e que as derivadas parciais respectivas verificam as condições (6.1). Temos então

$$\begin{aligned} f(z) - f(c) &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\,(y-b) \\ &\quad + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)\,(y-b)\right) + r(z) \end{aligned}$$

com

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r\,(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

Usando as condições (6.1) a expressão de $f(z)-f(c)$ pode transformar-se em

$$f(z)-f(c) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\right)(z-c) + r(z)$$

e como

$$\lim_{z\to c}\left|\frac{r(z)}{z-c}\right| = 0$$

resulta

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c} = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

pelo que f é diferenciável no ponto c.

■

As identidades (6.1) são conhecidas por *condições de Cauchy-Riemann.*

Corolário 1 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo. Então uma função holomorfa $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante.*

Demonstração. Como a função $v = \mathrm{Im}(f)$ é identicamente nula, as condições (6.1) impõem que o mesmo suceda com as derivadas parciais de $u = \mathrm{Re}(f)$. Então f' é identicamente nula em D e o enunciado resulta do teorema 6.10.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $|f|$ for constante então também f é constante.*

Demonstração. Se $|f|$ for identicamente nula o mesmo sucede com f. Supondo $|f| = a \neq 0$, como $\overline{f} = a^2/f$ é holomorfa, as funções

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{f+\overline{f}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{f-\overline{f}}{2i}$$

saõ ambas holomorfas e o corolário anterior mostra que elas são constantes.

■

7 - Convergência uniforme

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma sucessão de funções $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, diz-se que esta sucessão *converge uniformemente* para uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ se para cada $\delta > 0$ existir uma ordem k tal que

$$\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < \delta \text{ sempre que } n \geq k.$$

Diz-se que a sucessão (f_n) é uniformemente convergente num conjunto $E \subseteq D$ se a restrição a E das funções f_n for uniformente convergente.

Exemplo 7.1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções. Se existir uma colecção finita de conjuntos $\{D_1, ..., D_m\}$ tal que $D = D_1 \cup ... \cup D_m$ e (f_n) convergir uniformemente em cada D_j, então (f_n) também converge uniformemente em D.*

Efectivamente, atendendo à definição de convergência uniforme, para cada $\delta > 0$ existem ordens $k_1, ..., k_m$ tais que $\sup_{z \in D_j} |f_n(z) - f(z)| < \delta$ sempre que $n \geq k_j$. Pondo $k = \max \{k_1, ..., k_m\}$ e

$$\mu_n = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{z \in D_j} |f_n(z) - f(z)|,$$

é então $\mu_n < \delta$ para cada $n \geq k$. Basta agora notar que se tem $|f_n(z) - f(z)| \leq \mu_n$ para todo o $z \in D$, pelo que

$$\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \leq \mu_n < \delta \text{ se } n \geq k.$$

Exemplo 7.2 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$, uma sucessão de funções $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ converge uniformente para a função f sse existirem uma ordem p e uma sucessão $(\varepsilon_n)_{n \geq p}$ em $\mathbb{R}_0^+$ tais que $\lim \varepsilon_n = 0$ e*

$$\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon_n \text{ se } n \geq p.$$

Efectivamente, se (f_n) verifica esta condição é imediato que a sucessão converge uniformemente para f. Reciprocamente, supondo que (f_n) converge uniformemente para f existe uma ordem p tal que $\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < +\infty$ para cada $n \geq p$. Pondo agora

$$\varepsilon_n = \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \text{ se } n \geq p,$$

define-se uma sucessão $(\varepsilon_n)_{n \geq p}$ em $\mathbb{R}_0^+$ nas condições exigidas.

Exemplo 7.3 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$, uma sucessão de funções $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ converge uniformente sse as sucessões $\mathrm{Re}\,(f_n)$ e $\mathrm{Im}\,(f_n)$ forem uniformemente convergentes.*

Efectivamente basta antender ao exemplo anterior e às desigualdades

$$|\mathrm{Re}\,(f_n) - \mathrm{Re}\,(f)| \leq |f_n - f|\,,\ |\mathrm{Im}\,(f_n) - \mathrm{Im}\,(f)| \leq |f_n - f|$$

e

$$|f_n - f| \leq |\mathrm{Re}\,(f_n) - \mathrm{Re}\,(f)| + |\mathrm{Im}\,(f_n) - \mathrm{Im}\,(f)|\,.$$

Exemplo 7.4 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ sejam $f_n, g_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ duas sucessões de funções uniformemente convergentes. Se as respectivas funções limite forem limitadas então a sucessão produto $(f_n g_n)$ também é uniformemente convergente.*

Sejam efectivamente $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$, L um majorante de $|f|$ e M um majorante de $|g|$. Atendendo ao exemplo 7.2 existem um ordem p e sucessões (ε_n) e (δ_n) tais que

$$\lim \varepsilon_n = \lim \delta_n = 0,\ \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon_n \text{ e } \sup_{z \in D} |g_n(z) - g(z)| \leq \delta_n \text{ se } n \geq p.$$

Dados $z \in D$ e $n \geq p$ temos então

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &\leq |f_n(z)g_n(z) - f(z)g_n(z)| + |f(z)g_n(z) - f(z)g(z)| \\ &\leq \varepsilon_n\,|g_n(z)| + L\delta_n. \end{aligned}$$

Como é também

$$|g_n(z)| \leq |g_n(z) - g(z)| + |g(z)| \leq \varepsilon_n + M$$

basta agora aplicar de novo o exemplo 7.2, notando que

$$\lim\,(\varepsilon_n\,(\varepsilon_n + M) + L\delta_n) = 0.$$

Exemplo 7.5 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para uma função f. Se as funções f_n nunca se anulam e $\inf_{z \in D} |f(z)| > 0$, então a sucessão $(1/f_n)$ também é uniformemente convergente.*

Efectivamente, sendo $\lambda = \inf_{z \in D} |f(z)|$ e tomando uma sucessão (ε_n) nas condições do exemplo 7.2, temos

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\lambda\,|f_n(z)|} \quad \text{se} \quad z \in D \quad \text{e} \quad n \geq p.$$

Como é também $|f_n(z)| \geq |f(z)| - |f_n(z) - f(z)| \geq \lambda - \varepsilon_n$ se $n \geq p$, escolhendo uma ordem $k \geq p$ tal que $\varepsilon_n < \lambda$ para cada $n \geq k$, resulta

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\lambda\,(\lambda - \varepsilon_n)} \quad \text{se} \quad z \in D \quad \text{e} \quad n \geq k,$$

e basta aplicar de novo o exemplo 7.2.

Teorema 7.6 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$, uma sucessão de funções $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é uniformemente convergente sse para cada $\delta > 0$ existir uma ordem k tal que $|f_m(z) - f_n(z)| < \delta$ sempre que $m, n \geq k$ e $z \in D$.*

Demonstração. Se a sucessão (f_n) convergir uniformemente para f, dado $\delta > 0$ existe uma ordem k tal que $\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < \delta/2$ para cada $n \geq k$. Dado $z \in D$ temos por outro lado

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f(z)| + |f(z) - f_n(z)| \\ &\leq \sup_{z \in D} |f_m(z) - f(z)| + \sup_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| \end{aligned}$$

e resulta

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

sempre que $m, n \geq k$.

Reciprocamente, se a condição do enunciado se verifica, para cada $z \in D$ a sucessão $(f_n(z))$ é convergente. Pondo $f(z) = \lim f_n(z)$ existe uma ordem k tal que $|f_m(z) - f_n(z)| < \delta/2$ sempre que $z \in D$ e $m, n \geq k$. Fixando n e tomando o limite quando $m \to +\infty$ resulta assim $|f(z) - f_n(z)| \leq \delta/2$ se $n \geq k$, pelo que

$$\sup_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| \leq \delta/2 < \delta \quad \text{se} \quad n \geq k,$$

e a sucessão (f_n) converge uniformemente para f.

■

O teorema seguinte traduz uma aplicação característica do conceito de convergência uniforme.

Teorema 7.7 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para uma função f. Seja ainda (z_m) uma sucessão de pontos de D e suponha-se que para cada índice n o $\lim_{m \to +\infty} f_n(z_m)$ existe e é finito. Então, pondo $c_n = \lim_{m \to +\infty} f_n(z_m)$, a sucessão (c_n) é convergente e tem-se $\lim c_n = \lim_{m \to +\infty} f(z_m)$, ou seja,*

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} f_n(z_m) = \lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(z_m).$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior, para cada $\delta > 0$ existe uma ordem k tal que $|f_p(z_m) - f_q(z_m)| < \delta/2$ para cada m, sempre que $p, q \geq k$. Fazendo $m \to +\infty$ resulta $|c_p - c_q| \leq \delta/2 < \delta$ sempre que $p, q \geq k$ e isto mostra que a sucessão (c_n) é convergente. Pondo $\lambda = \lim c_n$, para todos os valores de m e n temos agora

$$|f(z_m) - \lambda| \leq |f(z_m) - f_n(z_m)| + |f_n(z_m) - c_n| + |c_n - \lambda|.$$

Fixado n tal que $|c_n - \lambda| < \delta/3$ e

$$\sup_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| < \delta/3,$$

para cada m é $|f(z_m) - f_n(z_m)| < \delta/3$ e portanto

$$|f(z_m) - \lambda| < \frac{2\delta}{3} + |f_n(z_m) - c_n| \ .$$

Por outro lado, como $\lim_{m \to +\infty} f_n(z_m) = c_n$ pode escolher-se uma ordem k tal que $|f_n(z_m) - c_n| < \delta/3$ sempre que $m \geq k$. Resulta assim

$$|f(z_m) - \lambda| < \delta \ \text{ se } \ m \geq k$$

pelo que $\lim_{m \to +\infty} f(z_m) = \lambda$.

■

Corolário 1 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para uma função f. Sejam ainda $E \subseteq D$ e $a \in \overline{E}$, e suponha-se que para todo o n existe e é finito o $\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f_n(z)$. Então também existe e é finito o $\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z)$ e tem-se*

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f_n(z).$$

Demonstração. Nas condições do enunciado, para cada sucessão (z_m) de pontos de E com limite a existe e é finito o limite

$$\lim_{m \to +\infty} f_n(z_m) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f_n(z).$$

De acordo com o teorema anterior temos então

$$\lim_{m \to +\infty} f(z_m) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} f_n(z_m),$$

o que equivale a

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f(z) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{\substack{z \to a \\ z \in E}} f_n(z).$$

■

Corolário 2 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para uma função f. Se todas as funções f_n forem contínuas num ponto, então f também é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior tomando $E = D$.

■

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma sucessão $(u_n)_{n \geq p}$de aplicações de D em $\mathbb{C}$, diz-se que a *série* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ *é uniformemente convergente* se a respectiva sucessão das somas parciais

$$s_m(z) = \sum_{n=p}^{m} u_n(z)$$

for uniformemente convergente.

É agora imediato adaptar às séries uniformemente convergentes alguns dos resultados já obtidos para sucessões uniformemente convergentes de funções.

Exemplo 7.8 - *Dados $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma sucessão $(u_n)_{n \geq p}$de aplicações de D em $\mathbb{C}$, a série $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ é uniformemente convergente sse para cada $\delta > 0$ existir uma ordem k tal que*

$$\left| \sum_{n=m+1}^{N} u_n(z) \right| < \delta \quad \textit{quando} \quad N \geq m \geq k \quad \textit{e} \quad z \in D.$$

Efectivamente a condição anterior equivale a $|s_N(z) - s_m(z)| < \delta$ sempre que $N \geq m \geq k$ e $z \in D$. Então, dados m, $n \geq k$ e pondo $N = \max\{m, n\}$, isto traduz que a sucessão das somas parciais da série verifica a condição do teorema 7.6.

Teorema 7.9 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, (z_m) uma sucessão de pontos de D e $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ uma série uniformemente convergente de aplicações de D em $\mathbb{C}$. Se para cada $n \geq p$ existir e for finito o limite $\lambda_n = \lim_{m \to +\infty} u_n(z_m)$, então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} \lambda_n$ converge e tem-se*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \lambda_n = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z_m),$$

ou seja,

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z_m) = \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{m \to +\infty} u_n(z_m).$$

Demonstração. Pondo

$$s_N(z) = \sum_{n=p}^{N} u_n(z) \quad \text{se} \quad N \geq p$$

temos

$$\sum_{n=p}^{N} \lambda_n = \sum_{n=p}^{N} \lim_{m \to +\infty} u_n(z_m) = \lim_{m \to +\infty} s_N(z_m).$$

Aplicando agora o teorema 7.7 à sucessão (s_N) resulta então que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} \lambda_n$ converge e que

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \lambda_n = \lim_{N\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} s_N(z_m) = \lim_{m\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} s_N(z_m) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z_m).$$

■

Corolário 1 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ uma série uniformemente convergente de aplicações de D em $\mathbb{C}$. Sejam ainda $E \subseteq D$ e $a \in \overline{E}$, e suponha-se que para todo o n existe e é finito o limite de $u_n(z)$ quando $z \to a$ por valores em E. Então, para a função soma da série também existe e é finito esse limite, e tem-se*

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} \sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} u_n(z).$$

Demonstração. Pondo

$$s_N(z) = \sum_{n=p}^{N} u_n(z) \quad \text{se} \quad N \geq p$$

temos

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} s_N(z) = \sum_{n=p}^{N} \lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} u_n(z),$$

e como a sucessão (s_N) converge uniformemente para a função soma da série, do corolário 1 do teorema 7.7 resulta

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} \sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z) = \lim_{N\to+\infty} \lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} s_N(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{\substack{z\to a\\ z\in E}} u_n(z).$$

■

Corolário 2 - *Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ uma série uniformemente convergente de aplicações de D em $\mathbb{C}$. Se cada função u_n for contínua num ponto então a soma da série também é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior tomando $E = D$.
■

O teorema seguinte traduz o critério mais comum para a convergência uniforme de séries.

Teorema 7.10 (Critério de Weierstrass) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $(u_n)_{n\geq p}$ uma sucessão de aplicações de D em $\mathbb{C}$. Se existirem uma ordem $q \geq p$ e uma série convergente $\sum_{n=q}^{+\infty} c_n$, de termos não negativos, tais que*

$$|u_n(z)| \leq c_n \text{ sempre que } n \geq q \text{ e } z \in D,$$

então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ *é uniformemente convergente.*

Demonstração. Como

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=m+1}^{+\infty} c_n = 0,$$

dado $\delta > 0$ existe uma ordem $k \geq q$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} c_n < \delta \quad \text{se} \quad m \geq k.$$

Temos então

$$\left|\sum_{n=m+1}^{N} u_n(z)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{N} |u_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{N} c_n \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} c_n < \delta \quad \text{se} \quad N \geq m \geq k$$

e a convergência uniforme da série resulta directamente do exemplo 7.8.

■

Para séries cujo termo geral envolve uma sucessão dupla de complexos podemos agora estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 7.11 - *Dada uma sucessão dupla de complexos* $(u_{mn})_{m,n\geq p}$ *suponha-se que existem uma ordem* $q \geq p$ *e uma série convergente* $\sum_{n=q}^{+\infty} c_n$*, de termos não negativos, tais que*

$$|u_{mn}| \leq c_n \quad se \quad m \geq p \quad e \quad n \geq q.$$

Se para cada $n \geq p$ *existir e for finito o limite* $\lambda_n = \lim_{m\to+\infty} u_{mn}$ *então a série* $\sum_{n=p}^{+\infty} \lambda_n$ *converge e tem-se*

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} u_{mn} = \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} u_{mn}.$$

Demonstração. Sendo $(u_n)_{n\geq p}$ a sucessão de funções definidas no conjunto

$$D = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq p\}$$

por $u_n(m) = u_{mn}$, o critério de Weierstrass mostra que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(m)$ é uniformemente convergente. Pondo agora $z_m = m$ se $m \geq p$, a sucessão (z_m) é uma sucessão de pontos de D e tem-se $u_n(z_m) = u_{mn}$. O enunciado resulta então directamente do teorema 7.9.

■

Exemplo 7.12 - Se $m \in \mathbb{Z}^+$ *e* $m \geq 2$ *tem-se*

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = 1.$$

Efectivamente, para cada inteiro $m \geq 2$ é

$$\frac{1}{n^m} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{se} \quad n \geq 1.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$converge, aplicando o teorema anterior temos então

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{n^m} = 1$$

O teorema anterior conduz a um resultado sobre a permutação dos símbolos de série que é análogo ao teorema de Fubini para integrais.

Teorema 7.13 - *Seja* $(u_{mn})_{m,n\geq p}$ *uma sucessão dupla de complexos e suponha-se que*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \sum_{m=p}^{+\infty} |u_{mn}| < +\infty.$$

Então as séries $\sum_{m=p}^{+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} u_{mn}$ *e* $\sum_{n=p}^{+\infty} \sum_{m=p}^{+\infty} u_{mn}$ *são ambas convergentes e tem-se*

$$\sum_{m=p}^{+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} u_{mn} = \sum_{n=p}^{+\infty} \sum_{m=p}^{+\infty} u_{mn}.$$

Demonstração. Pondo

$$s_{Mn} = \sum_{m=p}^{M} u_{mn}$$

e

$$c_n = \sum_{m=p}^{+\infty} |u_{mn}|\,,$$

para cada $M \geq p$ temos

$$|s_{Mn}| \leq \sum_{m=p}^{M} |u_{mn}| \leq \sum_{m=p}^{+\infty} |u_{mn}| = c_n$$

Como a série $\sum_{n=p}^{+\infty} c_n$ converge, aplicando o teorema anterior à série $\sum_{n=p}^{+\infty} s_{Mn}$ resulta então

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} \sum_{m=p}^{M} u_{mn} = \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=p}^{M} u_{mn} = \sum_{n=p}^{+\infty} \sum_{m=p}^{+\infty} u_{mn}$$

e basta agora notar que

$$\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=p}^{+\infty}\sum_{m=p}^{M}u_{mn}=\lim_{M\to+\infty}\sum_{m=p}^{M}\sum_{n=p}^{+\infty}u_{mn}=\sum_{m=p}^{+\infty}\sum_{n=p}^{+\infty}u_{mn}.$$

■

Ainda como aplicação do teorema 7.11 provaremos um resultado geral sobre o produto de séries.

Teorema 7.14 (Mertens) - *Dadas duas séries complexas convergentes* $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$*, seja* (w_n) *a sucessão definida por*

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\quad se\quad n\geq 0.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ *for absolutamente convergente então também* $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n$ *converge e tem-se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right).$$

Demonstração. Pondo $V_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ para cada $n\geq 0$, temos

$$\sum_{n=0}^{m}w_n=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{k+n\leq m}u_kv_n=\sum_{k=0}^{m}u_k\sum_{n=0}^{m-k}v_n=\sum_{k=0}^{m}u_kV_{m-k}$$

e portanto

$$\sum_{n=0}^{m}w_n=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\tau_{mk}$$

com

$$\tau_{mk}=V_{m-k}\ \text{ se }\ 0\leq k\leq m\ \text{ e }\ \tau_{mk}=0\ \text{ se }\ k>m.$$

Sendo L um majorante da sucessão $(|V_n|)$ é então

$$|u_k\tau_{mk}|\leq L\,|u_k|\,,$$

e como $\sum_{k=0}^{+\infty}L\,|u_k|$ converge, do teorema 7.11 resulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\tau_{mk}=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\lim_{m\to+\infty}\tau_{mk}=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\lim_{m\to+\infty}V_{m-k}.$$

Temos finalmente

$$\lim_{m\to+\infty}V_{m-k}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m-k}v_n=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.\quad ■$$

Nota 7.15 - No teorema anterior não se pode dispensar a convergência absoluta de uma das séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Efectivamente, tomando

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{se} \quad n \geq 0,$$

para o termo geral da série produto $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ é

$$(-1)^n\, w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1$$

o que implica a divergência desta série.

8 - Séries de potências

Dado um número complexo a chama-se *série de potências* de $z-a$ a toda a série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$$

em que (c_n) é uma sucessão de números complexos que se dizem os *coeficientes da série*. Pondo

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$$

define-se uma função da variável complexa z cujo domínio é o conjunto dos valores de z para os quais a série converge.

Exemplo 8.1 - *Um polinómio em z cujo grau não excede m é uma série de potências de z que tem nulos todos os coeficientes de ordem superior a m.*

Exemplo 8.2 - *A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ define a função f de domínio $B(0,1)$ dada por*

$$f(z)=\frac{1}{1-z}.$$

Efectivamente, se $|z|\geq 1$ então $|z|^n \nrightarrow 0$ logo $z^n \nrightarrow 0$ e a série diverge. Supondo $|z|<1$ temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m} z^n=\lim_{m\to+\infty}\frac{1-z^{m+1}}{1-z}.$$

Como $\left|z^{m+1}\right|=|z|^{m+1}\to 0$ é $\lim_{m\to+\infty} z^{m+1}=0$ e obtém-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\frac{1}{1-z}. \tag{8.1}$$

Exemplo 8.3 - *Dado $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tem-se*

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n \quad se \quad |z-a|<|a|\,. \tag{8.2}$$

Efectivamente, tomando z tal que $|z-a|<|a|$, do exemplo anterior deduz-se

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+(z-a)}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z-a}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-a}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n.$$

Atendendo ao exemplo 8.1 vemos que as funções representadas por séries de potências de z constituem uma generalização das funções polinomiais. O teorema seguinte dá informação sobre o domínio deste tipo de funções.

Teorema 8.4 - *Dados $a\in\mathbb{C}$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\,(z-a)^n$, seja*

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\,|c_n|^{1/n}}\in[0,+\infty]. \tag{8.3}$$

Então a série é absolutamente convergente se $|z-a|<R$ e divergente se $|z-a|>R$.

Demonstração. Dado $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z-a|<R$ é

$$\overline{\lim}\left(|c_n|^{1/n}\,|z-a|\right)=|z-a|\,\overline{\lim}\,|c_n|^{1/n}<1$$

e tomando r que verifique a condição

$$\overline{\lim}\left(|c_n|^{1/n}\,|z-a|\right)<r<1$$

existe uma ordem k tal que

$$|c_n|^{1/n}\,|z-a|\le r\quad\text{se}\quad n\ge k.$$

Temos então

$$|c_n\,(z-a)^n|\le r^n\quad\text{se}\quad n\ge k,$$

e como a série $\sum_{n=0}^{+\infty}r^n$ converge segue-se que $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\,(z-a)^n$ é absolutamente convergente.

Se z é tal que $|z-a|>R$ temos

$$\overline{\lim}\left(|c_n|^{1/n}\,|z-a|\right)>1$$

e existe uma sucessão da forma

$$|c_{\alpha_n}|^{1/\alpha_n}\,|z-a|$$

cujo limite excede 1. A partir de uma certa ordem é então

$$|c_{\alpha_n}\,(z-a)^{\alpha_n}|\ge 1$$

pelo que $c_n\,(z-a)^n$ não tem limite nulo e $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\,(z-a)^n$ diverge. ■

A relação (8.3) é conhecida por *fórmula de Cauchy-Hadamard*. O parâmetro R diz-se o *raio de convergência* da série de potências e o conjunto $B(a, R)$ diz-se o *círculo de convergência* desta série. No caso particular $R = +\infty$ a série é absolutamente convergente para todo o $z \in \mathbb{C}$ e a função que ela define tem domínio $\mathbb{C}$.

O teorema seguinte permite determinar o raio de convergência de uma série de potências em muitos casos de interesse prático.

Teorema 8.5 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma sucessão (c_n) de complexos não nulos, se existir o limite*

$$\lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

o raio de convergência R da série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ é dado por

$$R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \tag{8.4}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z-a| < \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

ou é $z = a$ e a série converge, ou então

$$1 < \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}(z-a)} \right| = \lim \left| \frac{c_n (z-a)^n}{c_{n+1}(z-a)^{n+1}} \right|$$

pelo que

$$\lim \left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n (z-a)^n} \right| < 1$$

e o critério da razão mostra que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n (z-a)^n|$ converge. Por outro lado, se z verifica a condição

$$|z-a| > \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

existe uma ordem k tal que

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| < |z-a| \quad \text{se} \quad n \geq k.$$

Temos assim

$$|c_n (z-a)^n| < \left| c_{n+1} (z-a)^{n+1} \right| \quad \text{se} \quad n \geq k$$

pelo que a sucessão $|c_n(z-a)^n|$ é estritamente crescente para $n \geq k$. Então $c_n(z-a)^n \nrightarrow 0$ e a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ diverge.

■

Nota 8.6 - O teorema anterior resulta directamente do teorema 8.4 se se souber que a existência de $\lim |c_n/c_{n+1}|$ implica a relação

$$\lim |c_n|^{1/n} = \lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Efectivamente, dado $\lambda > \lim |c_{n+1}/c_n|$ existe uma ordem k tal que

$$\left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| < \lambda \quad \text{se} \quad m \geq k.$$

Multiplicando estas desigualdades com $k \leq m < n$ obtém-se $|c_n/c_k| < \lambda^{n-k}$ pelo que

$$|c_n|^{1/n} < \lambda \left(\frac{|c_k|}{\lambda^k}\right)^{1/n},$$

e fazendo $n \to +\infty$ resulta $\overline{\lim}\, |c_n|^{1/n} \leq \lambda$. Como $\lambda > \lim |c_{n+1}/c_n|$ é arbitrário, isto exige

$$\overline{\lim}\, |c_n|^{1/n} \leq \lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Um raciocínio análogo tomando $\lambda < \lim |c_{n+1}/c_n|$ conduz a

$$\underline{\lim}\, |c_n|^{1/n} \geq \lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

e conclui-se a relação $\lim |c_n|^{1/n} = \lim |c_{n+1}/c_n|$.

O teorema seguinte descreve o comportamento assimptótico da função representada por uma série de potências de $z-a$ nas vizinhanças do ponto a.

Teorema 8.7 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ com raio de convergência positivo. Para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n(z-a)^n + O\left((z-a)^{m+1}\right) \qquad (z \to a).$$

Demonstração. Sendo R o raio de convergência da série temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n(z-a)^n + (z-a)^{m+1} \sum_{n=m+1}^{+\infty} c_n(z-a)^{n-m-1} \quad \text{se} \quad z \in B(a,R)$$

e escolhendo r tal que $0 < r < R$ é também

$$\left|\sum_{n=m+1}^{+\infty} c_n(z-a)^{n-m-1}\right| \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} |c_n|\, r^{n-m-1} \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{se} \quad z \in B(a,r)$$

o que estabelece o enunciado.

■

Corolário - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$. Para cada inteiro $m \geq 0$ tal que $c_{m+1} \neq 0$ tem-se*

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m} c_n\,(z-a)^n \sim c_{m+1}\,(z-a)^{m+1} \quad (z \to a)\ .$$

Demonstração. Aplicando o teorema anterior com $m+1$ no lugar de m, quando $z \to a$ temos

$$\begin{aligned} f(z) - \sum_{n=0}^{m} c_n\,(z-a)^n &= c_{m+1}\,(z-a)^{m+1} + O\Big((z-a)^{m+2}\Big) \\ &= c_{m+1}\,(z-a)^{m+1}\left(1 + \frac{O(z-a)}{c_{m+1}}\right), \end{aligned}$$

e como $\lim_{z\to a} O(z-a) = 0$ é então

$$\lim_{z\to a}\left(1 + \frac{O(z-a)}{c_{m+1}}\right) = 1.$$

■

Teorema 8.8 - *Uma série de potências é uniformemente convergente em todo o conjunto compacto contido no interior do seu círculo de convergência.*

Demonstração. Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$, seja $K \subseteq B(a,R)$ um conjunto compacto. Pondo

$$r = \max\{|z-a| : z \in K\}$$

é $r < R$ pelo que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|\, r^n$converge. Atendendo à relação

$$|c_n\,(z-a)^n| \leq |c_n|\, r^n \quad \text{se} \quad z \in K,$$

o enunciado resulta agora directamente do critério de Weierstrass.

■

O teorema anterior associado ao corolário 2 do teorema 7.9 mostra que as funções definidas por séries de potências são contínuas no interior do respectivo círculo de convergência. Estas funções apresentam no entanto propriedades de regularidade muito mais fortes que iremos agora estabelecer.

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, derivando o seu termo geral obtém-se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)c_{n+1} (z-a)^n$$

que se chama a *série das derivadas* da série inicial. É válido o seguinte resultado:

Teorema 8.9 - *Uma série de potências e a respectiva série das derivadas têm o mesmo raio de convergência.*

Demonstração. Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, a respectiva série das derivadas tem a mesma natureza da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nc_n (z-a)^n .$$

Como é

$$\overline{\lim} |nc_n|^{1/n} = \lim n^{1/n} \overline{\lim} |c_n|^{1/n} = \overline{\lim} |c_n|^{1/n}$$

o enunciado resulta agora da relação (8.3).

■

Corolário - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência R, para cada inteiro $m \geq 1$ a série*

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)...(n-m+1)c_n (z-a)^{n-m}$$

tem também raio de convergência R.

Demonstração. O enunciado é imediato por indução em m, notando que a série das derivadas da série de potências

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)...(n-m+1)c_n (z-a)^{n-m}$$

é a série

$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} n(n-1)...(n-m)c_n (z-a)^{n-m-1} .$$

■

O teorema seguinte traduz que a derivada de uma série de potências é representada pela respectiva série das derivadas como se de uma soma finita se tratasse. De um modo geral, quando uma série de funções tem esta propriedade diz-se que a sua derivada se pode calcular por *derivação termo a termo.*

Teorema 8.10 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$. Então f é diferenciável em todo o ponto interior ao seu círculo de convergência e tem-se*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n (z-a)^{n-1} \quad \textit{se} \quad |z-a| < R.$$

Demonstração. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0 - a| < R$, o teorema anterior mostra que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n (z_0 - a)^{n-1}$$

é convergente. Tomando $r > 0$ que verifique a condição $r < R - |z_0 - a|$, para cada $h \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |h| < r$ é

$$|z_0 + h - a| < |z_0 - a| + r < R$$

e f está definida no ponto $z_0 + h$. Sendo

$$\varphi(z_0, h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n (z_0 - a)^{n-1}$$

temos então

$$\varphi(z_0, h) \;\; = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(\frac{(z_0 - a + h)^n - (z_0 - a)^n}{h} - n(z_0 - a)^{n-1} \right) \text{ se } 0 < |h| < r,$$

e pondo $w_0 = z_0 - a$ deduz-se

$$|\varphi(z_0, h)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \left| \frac{(w_0 + h)^n - w_0^n}{h} - nw_0^{n-1} \right| \;\text{ se }\; 0 < |h| < r. \tag{8.5}$$

Temos por outro lado

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(w_0 + h)^n - w_0^n}{h} - nw_0^{n-1} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} w_0^{n-k} - nw_0^{n-1} \right| \\
&= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} w_0^{n-k} \right| \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-1} |w_0|^{n-k} \\
&\le |h| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} r^{k-2} |w_0|^{n-k} \le \frac{|h|}{r^2} (|w_0| + r)^n .
\end{aligned}$$

Como $|w_0| + r < R$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n w^n$converge absolutamente quando $w = |w_0| + r$. De (8.5) resulta então

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{r^2} \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| (|w_0| + r)^n$$

se $0 < |h| < r$, e tomando o limite quando $h \to 0$ obtém-se o enunciado.

■

Corolário 1 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$, seja f a função que ela define no interior do seu círculo de convergência. Então f é primitivável e as primitivas de f são as funções F da forma*

$$F(z) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1} \quad se \quad |z-a| < R,$$

em que $c \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Como a série inicial é a série das derivadas da série que define F, segue-se que esta última série tem também raio de convergência R. Atendendo ao teorema anterior temos então $F'(z) = f(z)$ para cada z tal que $|z-a| < R$ e basta agora aplicar o corolário do teorema 6.10, notando que o interior do círculo de convergência da série é um conjunto aberto e conexo.

■

Corolário 2 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$. Então f é infinitamente diferenciável no interior do círculo de convergência da série, e para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se*

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)...(n-m+1) c_n (z-a)^{n-m} \quad se \quad |z-a| < R.$$

Demonstração. O enunciado resulta imediatamente por indução em m usando o teorema anterior e o corolário do teorema 8.9.

■

Corolário 3 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência positivo. Para cada $n \geq 0$ tem-se então necessariamente*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Demonstração. Atendendo ao corolário anterior, para cada inteiro $m \geq 0$ a expressão de $f^{(m)}$ conduz directamente a

$$f^{(m)}(a) = m!c_m.$$

■

Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma função complexa f infinitamente diferenciável em a, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

diz-se a *série de Taylor de f relativa ao ponto a*, ou *em torno do ponto a*. No caso particular $a = 0$ esta série diz-se a *série de Maclaurin* de f.

O corolário anterior mostra assim que a única série de potências de $z-a$ que pode representar uma função nalguma vizinhança de a é a sua série de Taylor relativa a esse ponto.

Exemplo 8.11 - *Dado um polinómio complexo P cujo grau não excede m, para cada $a \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$P(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad se \quad z \in \mathbb{C}. \tag{8.6}$$

Efectivamente, partindo de uma expressão de $P(z)$ na forma

$$P(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$$

e fazendo a mudança de variável $w = z - a$, verifica-se que existem constantes $c_0, ..., c_m$ tais que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n w^n = \sum_{n=0}^{m} c_n (z-a)^n.$$

Como esta última soma é uma série de potências de $z - a$ com todos os coeficientes nulos a partir da ordem $m+1$, o corolário 3 do teorema anterior mostra que se tem necessariamente

$$c_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

para cada $n \in \{0, ..., m\}$. Este resultado é conhecido por *fórmula de Taylor para polinómios.*

Dadas duas séries de potências de $z - a$ que tomem os mesmos valores numa certa vizinhança de a, o corolário 3 do teorema 8.10 mostra que elas são necessariamente idênticas pois coincidem ambas com a série de Taylor relativa ao ponto a da função que elas representam nessa vizinhança. Este resultado pode ainda ser substancialmente generalizado.

Teorema 8.12 (Princípio das identidades) - *Sejam* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ *duas séries de potências. Se a igualdade*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$$

for válida em todos os pontos de um conjunto que tenha a *por ponto de acumulação, as sucessões* (a_n) *e* (b_n) *são idênticas.*

Demonstração. Seja E o conjunto dos pontos onde as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ têm o mesmo valor. Como a é ponto de acumulação de E existe uma sucessão (z_m) de pontos de $E \setminus \{a\}$ tal que $\lim z_m = a$. Suponha-se agora que para algum $n \geq 0$ se tem $a_n \neq b_n$ e seja k o menor inteiro nestas condições. Temos então

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)(z_m - a)^n = \sum_{n=k}^{+\infty} (a_n - b_n)(z_m - a)^n$$

pelo que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} (a_n - b_n)(z_m - a)^{n-k} = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+k} - b_{n+k})(z_m - a)^n = 0.$$

Sendo f a função definida pela série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+k} - b_{n+k})(z - a)^n$$

é assim $f(z_m) = 0$ para todo o $m \geq 0$ donde vem, atendendo à continuidade de f em a,

$$f(a) = \lim f(z_m) = 0.$$

No entanto, da definição de f resulta $f(a) = a_k - b_k$ e isto exige $a_k = b_k$, contrariamente à hipótese.

■

Corolário - *Seja* f *a função definida por uma série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ *com raio de convergência* $R > 0$. *Para cada índice* $m \geq 0$ *tem-se então* $c_{2m+1} = 0$ *se* f *for uma função par e* $c_{2m} = 0$ *se* f *for uma função ímpar.*

Demonstração. Como é

$$f(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-1)^n z^n \quad \text{se} \quad z \in B(0, R),$$

supondo f par temos então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-1)^n z^n$$

para todo o $z \in B(0, R)$ e do teorema anterior deduz-se $c_n = (-1)^n c_n$, o que implica $c_n = 0$ se o índice n for ímpar.

Analogamente, se f for ímpar deduz-se $-c_n = (-1)^n c_n$ e portanto $c_n = 0$ para cada índice n par.

■

Dada uma função f definida por uma série de potências de $z - a$ com raio de convergência positivo, para cada ponto w interior ao círculo de convergência pode formar-se a correspondente série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^n ,$$

e põe-se o problema de saber se f ainda é representada por esta série nalguma vizinhança de w. O teorema seguinte mostra que esta questão tem uma resposta afirmativa.

Teorema 8.13 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ com raio de convergência $R > 0$. Para cada ponto w interior ao círculo de convergência da série tem-se*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z - w)^k \quad se \quad |z - w| + |w - a| < R.$$

Demonstração. Dado um ponto $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w - a| < R$ e atendendo ao corolário 2 do teorema 8.10, para cada inteiro $k \geq 0$ temos

$$f^{(k)}(w) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1) c_n (w - a)^{n-k} .$$

Tomando z tal que $|z - w| + |w - a| < R$ e pondo $h = z - w$ é então

$$\frac{f^{(k)}(w)}{k!} h^k = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n \binom{n}{k} h^k (w - a)^{n-k}, \tag{8.7}$$

ou seja,

$$\frac{f^{(k)}(w)}{k!}h^k = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varepsilon_{kn}$$

com $\varepsilon_{kn} = 0$ se $0 \leq n < k$ e

$$\varepsilon_{kn} = \binom{n}{k} h^k (w-a)^{n-k} \quad \text{se} \quad n \geq k.$$

Temos agora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |c_n \varepsilon_{kn}| = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |h|^k |w-a|^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \left(|h| + |w-a|\right)^n$$

e como $|h| + |w-a| < R$, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \left(|h| + |w-a|\right)^n$$

converge. O teorema 7.13 permite então escrever

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varepsilon_{kn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} c_n \varepsilon_{kn}$$

e de (8.7) resulta

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} h^k = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \left(w-a\right)^{n-k},$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z-w)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(h + w - a\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n = f(z).$$

■

Corolário - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$. Para cada $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w-a| < R$ seja ainda $\rho(w)$ o raio de convergência da série de Taylor de f em torno de w. Temos então $\rho(w) = +\infty$ se $R = +\infty$ e*

$$R - |w-a| \leq \rho(w) \leq R + |w-a| \quad \textit{se} \quad R < +\infty.$$

Demonstração. Se $R = +\infty$ o teorema anterior mostra que a série de Taylor de f relativa a w converge para todo o $z \in \mathbb{C}$, pelo que $\rho(w) = +\infty$. Supondo

$R < +\infty$ o teorema anterior mostra ainda que se tem $\rho(w) \geq R - |w-a|$. Além disso, ou é $\rho(w) \leq |w-a| \leq R + |w-a|$, ou o ponto a pertence ao círculo de convergência da série de Taylor de f relativa a w. Neste último caso, aplicando de novo o teorema anterior com w no lugar de a deduz-se $R \geq \rho(w) - |w-a|$ e a desigualdade $\rho(w) \leq R + |w-a|$ permanece válida.

■

O teorema seguinte mostra como produto de duas séries de potências dá origem a uma nova série de potências.

Teorema 8.14 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ duas séries de potências com raios de convergência positivos R_1 e R_2. Sendo (c_n) a sucessão definida por*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad se \quad n \geq 0,$$

tem-se então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad se \quad |z-a| < \min\{R_1, R_2\}.$$

Demonstração. Como ambas as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ são absolutamente convergentes quando $|z-a| < \min\{R_1, R_2\}$, o enunciado resulta directamente do teorema 7.14.

■

Corolário 1 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Para cada inteiro $m \geq 1$ temos então*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{mn} (z-a)^n \quad se \quad |z-a| < R,$$

com

$$p_{mn} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} c_{k_1} ... c_{k_m}.$$

Demonstração. Resulta do teorema anterior por indução em m, notando que se tem

$$p_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} p_{mk} c_{n-k} = \sum_{k+j=n} p_{mk} c_j.$$

■

Corolário 2 - *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \geq 1$. Pondo $A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ para cada $m \geq 0$, temos*

$$\frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n \quad se \quad |z| < 1.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior usando o resultado do exemplo 8.2.

■

O corolário anterior pode ser usado na demonstração de um resultado central da teoria das séries de potências, conhecido por teorema de Abel.

Teorema 8.15 (Abel) - *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ uma série de potências com raio de convergência $R = 1$ e suponha-se que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Se $t \in\,]0, 1[$ tem-se então*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{t \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Demonstração. Para cada $m \geq 0$ ponha-se

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$$

e seja $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Temos então $\alpha - r_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ e do corolário anterior resulta

$$\frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha - r_n)\, t^n = \frac{1}{1-t}\alpha - \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n \quad \text{se} \quad t \in\,]0, 1[\,.$$

Obtém-se assim

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n - \alpha = -(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$$

e portanto

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n - \alpha\right| \leq (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} |r_n|\, t^n. \tag{8.8}$$

Por outro lado, como $\lim r_n = 0$, para cada $\delta > 0$ existe uma ordem p tal que $|r_n| < \delta/2$ se $n > p$. Temos então

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} |r_n|\, t^n \leq \frac{\delta}{2}\sum_{n=p+1}^{+\infty} t^n < \frac{\delta}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{\delta}{2(1-t)}$$

e resulta

$$(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty}|r_n|\,t^n < (1-t)\sum_{n=0}^{p}|r_n|\,t^n + \frac{\delta}{2} \leq (1-t)\sum_{n=0}^{p}|r_n| + \frac{\delta}{2}.$$

Pondo

$$\lambda = \sum_{n=0}^{p}|r_n|\,,$$

de (8.8) deduz-se agora

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n - \alpha\right| < (1-t)\lambda + \frac{\delta}{2}$$

pelo que

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n - \alpha\right| < \delta \ \text{ se } \ 1-\frac{\delta}{2\lambda} < t < 1,$$

o que estabelece o resultado pretendido.

■

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e $a \in D$, e suponha-se que existe uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n \quad \textit{se} \quad |z-a| < R.$$

Se f for contínua num ponto $z_0 \in C(a,R) \cap D$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z_0-a)^n$ for convergente, tem-se então também

$$f\,(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z_0-a)^n\,.$$

Demonstração. Pondo $w_0 = z_0 - a$ é $|w_0| = R$ pelo que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(c_n w_0^n\right) z^n$$

tem raio de convergência 1. Atendendo à continuidade f no ponto z_0 e ao teorema anterior é então

$$f(z_0) = \lim_{t\to 1^-} f(a+w_0t) = \lim_{t\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}c_nw_0^nt^n = \sum_{n=0}^{+\infty}c_nw_0^n = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z_0-a)^n.$$

■

Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma função f definida por uma série de potências de $z - a$, o teorema seguinte mostra como a função $1/f$ se pode desenvolver numa série de potências do mesmo tipo.

Teorema 8.16 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$ e tal que $a_0 \neq 0$. Sendo (b_n) a sucessão definida por*

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \quad e \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \quad se \quad n \geq 1,$$

e

$$\lambda = \sup_{n \geq 1} \left(\left| \frac{a_n}{a_0} \right|^{1/n} \right) < +\infty$$

tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n} \quad se \quad |z-a| < \frac{1}{2\lambda}.$$

Demonstração. Dado $r \in]0, R[$, como a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{a_n}{a_0} \right| r^n$$

converge, a partir de uma certa ordem m é

$$\left| \frac{a_n}{a_0} \right| r^n \leq 1$$

pelo que

$$\left| \frac{a_n}{a_0} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{r} \quad \text{se} \quad n \geq m$$

e isto mostra que a sucessão $|a_n/a_0|^{1/n}$ é limitada. Sendo λ o supremo do conjunto dos termos desta sucessão temos assim

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right| |b_{n-k}| \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^k |b_{n-k}| \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

e por indução resulta imediatamente

$$\left| \frac{b_n}{b_0} \right| \leq (2\lambda)^n \quad \text{se} \quad n \geq 0.$$

É então

$$|b_n (z-a)^n| \leq |b_0| (2\lambda |z-a|)^n$$

e dado que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_0| (2\lambda |z-a|)^n$$

converge se $2\lambda |z-a| < 1$, conclui-se que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$$

é absolutamente convergente se $|z-a| < 1/2\lambda$.

Como da definição dos b_n resulta

$$a_0 b_0 = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \quad \text{se} \quad n \geq 1,$$

o teorema 8.14 mostra que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n = 1 \quad \text{se} \quad |z-a| < \min\{R, 1/2\lambda\}.$$

Temos no entanto $R > 1/2\lambda$ pois da desigualdade

$$|a_n|^{1/n} \leq |a_0|^{1/n} \lambda \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

resulta

$$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} \leq \lambda$$

e do teorema 8.4 conclui-se $R \geq 1/\lambda$.

■

O resultado seguinte é uma consequência directa deste teorema:

Corolário - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida por uma série de potências de $z-a$ com raio de convergência positivo. Supondo $f(a) \neq 0$, existem $R > 0$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ tais que*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| < R.$$

■

O teorema seguinte mostra como se pode fazer a composição de funções definidas por séries de potências.

Teorema 8.17 - *Dados $a, b \in \mathbb{C}$ sejam f e φ as funções definidas respectivamente por duas séries de potências da forma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-b)^n,$$

com raios de convergência positivos R_1 *e* R_2*. Supondo* $f(a) = b$*, para cada ponto* $z \in \mathbb{C}$ *que verifique as condições*

$$|z-a| < R_1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,|z-a|^n < R_2$$

tem-se

$$\varphi\left(f(z)\right) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n} b_m p_{mn}\right)(z-a)^n,$$

em que

$$p_{mn} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_1,\cdots,k_m\geq 1}} a_{k_1}...a_{k_m} \quad se \quad 1 \leq m \leq n.$$

Demonstração. Tomando $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z-a| < R_1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,|z-a|^n < R_2$$

temos

$$f(z) - b = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

donde se deduz

$$|f(z)-b| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,|z-a|^n < R_2.$$

Como é também

$$\varphi(w) = b_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m (w-b)^m \quad \text{se} \quad |w-b| < R_2$$

resulta então

$$\varphi(f(z)) = b_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m (f(z)-b)^m.$$

Atendendo ao corolário 1 do teorema 8.14, para cada inteiro $m \geq 1$ temos ainda

$$(f(z)-b)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{mn} (z-a)^n$$

com

$$p_{mn} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_1,\cdots,k_m\geq 1}} a_{k_1}...a_{k_m} \quad \text{se} \quad 1 \leq m \leq n$$

e $p_{mn} = 0$ se $0 \leq n < m$. Substituindo na expressão de $\varphi(f(z))$ obtém-se assim

$$\varphi(f(z)) = b_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sum_{n=0}^{+\infty} p_{mn} (z-a)^n . \tag{8.9}$$

Seja agora $u = a + |z-a|$ e ponha-se

$$r = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (u-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z-a|^n < R_2.$$

Para cada inteiro $m \geq 1$ temos, como anteriormente,

$$r^m = \sum_{n=0}^{+\infty} q_{mn} (u-a)^n$$

em que

$$q_{mn} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_1,\cdots,k_m \geq 1}} |a_{k_1} ... a_{k_m}| \ \geq |p_{mn}| \quad \text{se} \quad 1 \leq m \leq n$$

e $q_{mn} = 0 = p_{mn}$ se $0 \leq n < m$. É então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |p_{mn}| |z-a|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |p_{mn}| (u-a)^n \leq r^m$$

e como a relação $r < R_2$ implica a convergência da série $\sum_{m=1}^{+\infty} |b_m| r^m$, segue-se que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |b_m| |p_{mn}| |z-a|^n \leq \sum_{m=1}^{+\infty} |b_m| r^m < +\infty.$$

Aplicando agora o teorema 7.13, de (8.9) deduz-se finalmente

$$\varphi(f(z)) = b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} b_m p_{mn} (z-a)^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} b_m p_{mn} \right) (z-a)^n .$$

■

Corolário - *Dados $a, b \in \mathbb{C}$ sejam f e φ as funções definidas respectivamente por duas séries de potências da forma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-b)^n ,$$

com raios de convergência positivos. Supondo $f(a) = b$ existem $R > 0$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ tais que

$$\varphi(f(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad se \quad |z-a| < R.$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior, e sendo R_1 e R_2 os raios de convergência respectivamente das séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, (z-a)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, (z-b)^n \, ,$$

basta mostrar que existe $R > 0$ para o qual

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \, |z-a|^n < R_2 \quad \text{se} \quad |z-a| < R.$$

Seja então h a função definida por

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \, (z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| < R_1.$$

Como h é contínua e $h(a) = 0$, existe $R > 0$ tal que $|h(z)| < R_2$ sempre que $|z-a| < R$. Em particular, dado $r \in [0, R[$ e pondo $z = a + r$, temos

$$|h(z)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \, r^n < R_2$$

pelo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \, |z-a|^n < R_2 \quad \text{se} \quad |z-a| = r < R.$$

■

9 - Funções analíticas

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e um ponto a interior a D diz-se que uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é *analítica em* a se f for representada por uma série de potências de $z - a$ nalguma vizinhança de a. Diz-se que f é uma *função analítica* se D for um conjunto aberto e f for analítica em todos os pontos de D. Diz-se ainda que f é *analítica num conjunto* $E \subseteq \mathbb{C}$ se existir um conjunto aberto D tal que $E \subseteq D$ e f for analítica em todos os pontos de D.

Os resultados já obtidos sobre séries de potências conduzem imediatamente a diversas propriedades das funções analíticas. Assim, do corolário 2 do teorema 8.10 resulta:

Exemplo 9.1 - *Toda a função analítica num ponto é infinitamente diferenciável nalguma vizinhança desse ponto.*

Em particular uma função analítica num ponto é holomorfa nesse ponto. Um resultado fundamental e característico da Análise Complexa é o de que, reciprocamente, toda a função holomorfa num ponto é analítica nesse ponto. Este é um teorema profundo que estabeleceremos posteriormente usando métodos baseados em integração no plano complexo.

Exemplo 9.2 - *Toda a função polinomial de variável complexa é analítica em* $\mathbb{C}$.

Efectivamente basta atender ao exemplo 8.11 e à definição de função analítica.

Exemplo 9.3 - *A função definida por uma série de potências com raio de convergência positivo é analítica em todos os pontos interiores ao respectivo círculo de convergência.*

Efectivamente basta aplicar o teorema 8.13 e a definição de função analítica.

Notando que a soma de duas séries de potências de $z - a$ é uma série de potências do mesmo tipo e aplicando ainda os teoremas 8.14 e o corolário do teorema 8.16 resulta:

Exemplo 9.4 - *Dado* $a \in \mathbb{C}$ *sejam* f *e* g *duas funções analíticas em* a. *Então* $f + g$ *e* fg *são analíticas em* a, *e o mesmo sucede com* f/g *se* $g(a) \neq 0$.

Como uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais e o seu domínio é o conjunto dos pontos de $\mathbb{C}$ onde o denominador não se anula, do exemplo 9.2 conclui-se agora:

Exemplo 9.5 - *Toda a função racional é analítica no seu domínio.*

O resultado seguinte é consequência directa do corolário do teorema 8.17.

Exemplo 9.6 - *Dado* $a \in \mathbb{C}$ *sejam* f *uma função analítica em* a *e* φ *uma função analítica no ponto* $f(a)$*. Então* $\varphi \circ f$ *é analítica no ponto* a*.*

Do teorema 8.10 deduz-se:

Exemplo 9.7 - *A derivada de uma função analítica num ponto é também analítica nesse ponto.*

Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e a um ponto interior a D. Se existirem $r > 0$ e uma função $F : B(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in B(a,r)$, diz-se que F é uma *primitiva local* de f em a e que f é *localmente primitivável* neste ponto. Do corolário 1 do teorema 8.10 resulta então:

Exemplo 9.8 - *Sejam* $a \in \mathbb{C}$ *e* f *uma função analítica em* a*. Então* f *é localmente primitivável em* a *e as primitivas locais de* f *em* a *também são analíticas em* a*.*

Exemplo 9.9 - *Sejam* $D \subseteq \mathbb{C}$ *um conjunto aberto e* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica. Se* f *é primitivável então as primitivas de* f *também são analíticas em* D*.*
Efectivamente, se F for uma primitiva de f então F também é uma primitiva local de f em cada ponto de D, pelo que o enunciado resulta do exemplo anterior.

O teorema seguinte traduz uma propriedade fundamental das funções analiticas que resulta do princípio das identidades para séries de potências.

Teorema 9.10 (Princípio do prolongamento analítico) - *Sejam* $D \subseteq \mathbb{C}$ *um conjunto aberto e conexo, e* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *duas funções analíticas. Se* f *e* g *coincidirem nos pontos de um conjunto que tenha algum ponto de acumulação em* D *é então* $f = g$*.*

Demonstração. Seja E o conjunto dos pontos onde f e g coincidem e tome-se $a \in E' \cap D$. Aplicando o teorema 8.12 verifica-se que as séries de Taylor de f e g relativas ao ponto a são idênticas, pelo que f e g coincidem nalguma vizinhança de a. Isto mostra que $E' \cap D \subseteq E$ e também que a é ponto interior a $E' \cap D$. Então $E' \cap D$ é aberto e como E' é fechado segue-se que o conjunto $D \setminus E'$ também é aberto. Atendendo agora a que D é conexo, o corolário 1 do teorema 5.22 exige $E' \cap D = D$, e como $E' \cap D \subseteq E \subseteq D$ conclui-se $E = D$.
∎

Corolário - *Sejam* $D \subseteq \mathbb{C}$ *um conjunto aberto e conexo e* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica. Se o conjunto dos zeros de* f *tiver algum ponto de acumulação em* D *então* f *é identicamente nula.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior, tomando para g a função identicamente nula.

■

O corolário anterior mostra que cada zero de uma função analítica e não identicamente nula nalguma componente conexa do seu domínio, é ponto isolado do conjunto dos zeros da função. Para estudar a natureza dos zeros destas funções vamos começar pelo caso particular das funções polinomiais.

Exemplo 9.11 - *Dados um polinómio P de grau $m > 0$ e um ponto $a \in \mathbb{C}$ onde P se anula, existem um inteiro positivo p e um polinómio Q tais que*

$$P(z) = (z-a)^p Q(z) \quad e \quad Q(a) \neq 0.$$

Efectivamente, partindo do desenvolvimento de $P(z)$ em potências de $z - a$ na forma

$$P(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n\,(z-a)^n$$

temos $c_0 = P(a) = 0$. Sendo c_p o primeiro dos c_n que não se anula é então $P(z) = (z-a)^p Q(z)$ com

$$Q(z) = \sum_{n=p}^{m} c_n (z-a)^{n-p}$$

pelo que $Q(a) = c_p \neq 0$.

O teorema seguinte mostra agora que os zeros das funções analíticas têm propriedades semelhantes às dos zeros dos polinómios.

Teorema 9.12 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, a um ponto interior a D, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em a tal que $f(a) = 0$, e suponha-se que f não é identicamente nula nalguma vizinhança de a. Existem então um inteiro positivo p e uma função $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica em a, tais que $g(a) \neq 0$ e*

$$f(z) = (z-a)^p\, g(z) \quad se \quad z \in D.$$

Além disso, p é a ordem do primeiro termo não nulo do desenvolvimento de f em série de potências de $z - a$ e tem-se

$$g(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}.$$

Demonstração. Por hipótese existem $r > 0$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| < r.$$

Temos então $c_0 = f(a) = 0$ mas como f não é identicamente nula em $B(a,r)$ os coeficientes c_n não são todos nulos. Representando por c_p o primeiro dos c_n que não se anula, resulta assim

$$f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} c_n \, (z-a)^n = (z-a)^p \sum_{n=p}^{+\infty} c_n \, (z-a)^{n-p} \quad \text{se} \quad |z-a| < r \; .$$

Pondo agora $g(z) = f(z) / \, (z-a)^p$ se $z \in D \setminus B(a,r)$ e

$$g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} c_n \, (z-a)^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+p} \, (z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| < r,$$

define-se uma função $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ que é analítica no ponto a. Como se tem ainda

$$g(a) = c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} \neq 0$$

e $f(z) = (z-a)^p \, g(z)$ para cada $z \in D$, conclui-se que g verifica as condições do enunciado. Finalmente, supondo que para todo o $z \in D$ é válida uma relação da forma $f(z) = (z-a)^m \, h(z)$ com m inteiro, h analítica em a e $h(a) \neq 0$, tem-se

$$\lim_{z \to a} \, (z-a)^{m-p} = \frac{g(a)}{h(a)} \neq 0$$

o que exige $m = p$.

■

O inteiro p que figura no enunciado anterior diz-se a *ordem* ou o *grau de multiplicidade* do zero a de f. Em particular, no caso $p = 1$ diz-se que a é um *zero simples* de f.

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, a um ponto interior a D, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em a, e p um inteiro positivo. Então o ponto a é um zero de ordem p de f sse $f^{(p)}(a) \neq 0$ e $f^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k < p$.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior notando que as condições $f^{(p)}(a) \neq 0$ e $f^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k < p$ traduzem que p é o primeiro termo não nulo do desenvolvimento de f em série de potências de $z - a$.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, a um ponto interior a D, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em a, e p um inteiro positivo. Então o ponto a é um zero de ordem p de f sse*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \, .$$

Demonstração. Se a é zero de ordem p de f o teorema anterior mostra que $\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^{-p} = g(a) \neq 0$. Reciprocamente, se a condição se

verifica a função f não pode ser identicamente nula numa vizinhança de a e de $p > 0$ resulta $f(a) = 0$. Sendo então m a ordem de a como zero de f, tem-se $\lim_{z\to a} f(z)\,(z-a)^{-m} \neq 0$ pelo que $\lim_{z\to a} (z-a)^{m-p} \neq 0$ e isto exige $m = p$.
■

Exemplo 9.13 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simétrico em relação à origem, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com paridade definida. Se f tiver um zero de ordem p no ponto 0 então p é par ou ímpar consoante f for uma função par ou ímpar.*

Efectivamente o corolário do teorema 8.12 mostra que a ordem p do primeiro termo não nulo do desenvolvimento de f em série de potências de z é par ou ímpar consoante f for uma função par ou uma função ímpar. Como $f^{(p)}(0) \neq 0$ e $f^{(k)}(0) = 0$ se $0 \leq k < p$, do corolário 1 do teorema anterior conclui-se que 0 é um zero de ordem p de f.

Exemplo 9.14 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simétrico em relação à origem, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com paridade definida. Se f tiver um zero de ordem p num ponto a então f também tem um zero de ordem p em $-a$.*

Efectivamente, fazendo $w = -z$ e aplicando o corolário 2 do teorema anterior temos

$$\lim_{z\to -a} \frac{f(z)}{(z+a)^p} = \lim_{w\to a} \frac{f(-w)}{(-1)^p\,(w-a)^p} = \pm \lim_{w\to a} \frac{f(w)}{(w-a)^p} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,.$$

Muitas das funções analíticas mais comuns tomam valores reais sobre a recta real. O teorema seguinte traduz uma propriedade característica destas funções.

Teorema 9.15 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, conexo e simétrico em relação à recta real. Dada uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ são então equivalentes as condições:*

1 - $f(z) \in \mathbb{R}$ se $z \in D \cap \mathbb{R}$.

2 - $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para cada $z \in D$.

Demonstração. Se $D \neq \varnothing$ os conjuntos

$$\{z \in D :\ \operatorname{Im}(z) > 0\} \quad \text{e} \quad \{z \in D :\ \operatorname{Im}(z) < 0\}$$

são ambos abertos e não vazios pelo que a sua união não é conexa e isto mostra que $D \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$.

Suponha-se agora que f verifica a condição 1 e seja $a \in D\cap\mathbb{R}$. Existe então $h > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| < h$$

o que implica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(x-a)^n \quad \text{se} \quad x \in \,]a-h, a+h[\,,$$

e os c_n são reais por serem os coeficientes da série de Taylor de uma função real.

Seja agora g a função definida em D por

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Dado $a \in D$, como $\overline{a} \in D$ e f é analítica em $\overline{a}$, existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-\overline{a})^n \quad \text{se} \quad |z-\overline{a}| < r$$

e é então

$$f\,(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(\overline{z}-\overline{a})^n \quad \text{se} \quad |\overline{z}-\overline{a}| < r.$$

Notando que $|\overline{z}-\overline{a}| = |z-a|$ temos assim

$$g(z) = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(\overline{z}-\overline{a})^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{c_n}\,(z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| < r$$

e isto mostra que g é analítica em D. Se $a \in \mathbb{R}$ é $\overline{c_n} = c_n$ e $\overline{a} = a$ pelo que estas relações mostram ainda que f e g coincidem em $B(a,r)$. Do princípio do prolongamento analítico resulta agora que as duas funções coincidem em D, e como

$$f\,(\overline{z}) = g\,(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

conclui-se que f verifica a segunda condição do enunciado.

Finalmente, a condição 2 implica

$$f(z) = \overline{f(z)} \quad \text{se} \quad z \in D \cap \mathbb{R},$$

pelo que a condição 1 é verificada.

■

O princípio do prolongamento analítico 9.10 permite tirar algumas conclusões básicas sobre a representação de uma função analítica em termos da sua série de Taylor relativa a um dado ponto.

Teorema 9.16 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Dado $a \in D$ sejam R o raio de convergência da série de Taylor de f relativa ao ponto a e g a função definida por esta série. Então f e g coincidem na componente conexa de $D \cap B(a,R)$ a que pertence o ponto a.*

Demonstração. Seja C a componente conexa de $D \cap B(a, R)$ a que pertence o ponto a. Como f e g são funções analíticas que coincidem numa certa vizinhança $B(a, r)$ de a e $B(a, r) \subseteq C$, o princípio do prolongamento analítico 9.10 mostra então que f e g coincidem em C.

■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e R o raio de convergência da série de Taylor de f relativa a um ponto $a \in D$. Então, dado $r \in \,]0, R]$ tal que $B(a, r) \subseteq D$, esta série representa f em $B(a, r)$.*

Demonstração. Nas condições do enunciado é $D \cap B(a, r) = B(a, r)$ e a conclusão resulta directamente do teorema anterior.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se a série de Taylor de f relativa a um ponto $a \in D$ tiver raio de convergência R e se $D \cap B(a, R)$ for conexo, existe um prolongamento analítico de f a $D \cup B(a, R)$.*

Demonstração. Sendo g a função definida por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad \text{se} \quad z \in B(a, R),$$

o teorema anterior mostra que g coincide com f em $D \cap B(a, R)$. Então, o prolongamento $\widetilde{f}$ de f a $D \cup B(a, R)$ definido por $\widetilde{f}\,(z) = g(z)$ se $z \in B(a, R) \setminus D$ é uma função analítica pois coincide com a função analítica g em $B(a, R)$.

■

Se D for um conjunto aberto e convexo, todo o conjunto da forma $D \cap B(a, R)$ é convexo e vale a conclusão do corolário anterior. Neste caso pode no entanto estabelecer-se um resultado muito mais preciso e para o obter começaremos por provar o seguinte lema:

Lema 9.17 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e convexo e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Sejam ainda f_1 e f_2 as funções definidas pelas séries de Taylor de f respectivamente em torno de dois pontos a_1, $a_2 \in D$, e D_1, D_2 os interiores dos domínios correspondentes. Então f_1 e f_2 coincidem em $D_1 \cap D_2$.*

Demonstração. Sejam $D_1 = B\,(a_1, r_1)$ e $D_2 = B\,(a_2, r_2)$. Se $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ vamos começar por verificar que é também $D \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ e podemos para isso supôr $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$. Dado $z \in B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$ temos

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - z| + |z - a_2| < r_1 + r_2$$

pelo que, pondo

$$w = \frac{r_1 a_2 + r_2 a_1}{r_1 + r_2},$$

resulta $|w - a_1| = r_1 |a_1 - a_2| / (r_1 + r_2) < r_1$ e também $|w - a_2| < r_2$. Como w pertence ao segmento $[a_1, a_2] \subseteq D$ segue-se que $w \in D \cap D_1 \cap D_2$ e conclui-se que $D \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$.

Atendendo agora a que $D \cap D_1$ é conexo, o teorema 9.16 mostra que f_1 coincide com f em $D \cap D_1$ e, analogamente, f_2 coincide com f em $D \cap D_2$. Então f_1 e f_2 coincidem no conjunto aberto $D \cap D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ e do princípio do prolongamento analítico 9.10 resulta que f_1 e f_2 coincidem também no conjunto aberto e conexo $D_1 \cap D_2$.

■

Teorema 9.18 - *Dado um conjunto aberto e convexo $D \subseteq \mathbb{C}$, seja*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma função analítica. Para cada $w \in D$ seja ainda $\rho(w)$ o raio de convergência da série de Taylor de f em torno de w. Existe então um prolongamento analítico de f ao conjunto

$$E = \bigcup_{w \in D} B\left(w, \rho(w)\right).$$

Demonstração. Para cada ponto $w \in D$ seja f_w a função definida em $B\left(w, \rho(w)\right)$ pela série de Taylor de f em torno de w, e ponha-se

$$P = \bigcup_{w \in D} \left\{(z, f_w(z)) : z \in B\left(w, \rho(w)\right)\right\}.$$

Dados $(z, u) \in P$ e $(z, v) \in P$ existem pontos w_1, $w_2 \in D$ tais que

$$z \in B(w_1, \rho\,(w_1)) \cap B(w_2, \rho\,(w_2)), \quad u = f_{w_1}(z) \quad \text{e} \quad v = f_{w_2}(z).$$

Do lema anterior resulta então $u = v$ e isto mostra que para cada $z \in E$ existe um e um só ponto $u \in \mathbb{C}$ tal que $(z, u) \in P$. Pode portanto definir-se uma função $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo $\varphi(z) = u$ se $(z, u) \in P$. Para cada $w \in D$ esta função coincide com f_w em $B\left(w, \rho(w)\right)$ e tem-se $\varphi(w) = f_w(w) = f(w)$, pelo que φ é um prolongamento analítico de f.

■

Os resultados sobre funções analíticas que obtivemos até agora são consequência directa das propriedades das séries de potências anteriormente estabelecidas. Estas funções têm no entanto outras propriedades mais profundas cujo estudo exige uma abordagem diferente, e das quais destacamos desde já as seguintes:

1 - Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e $a \in D$. Se f é holomorfa em a também é analítica em a.

2 - Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se f é analítica em $D \setminus \{a\}$ e contínua em a então f também é analítica em a.

3 - Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in D$. Então a série de Taylor de f relativa ao ponto a tem raio de convergência $R \geq d(a, \mathbb{C} \setminus D)$.

4 - Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e (f_n) uma sucessão de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ que converge para uma função f, uniformemente em cada subconjunto compacto de D. Então f também é analítica e tem-se $\lim f_n^{(m)} = f^{(m)}$ para cada inteiro $m \geq 1$, sendo a convergência de $\left(f_n^{(m)}\right)$ uniforme em cada subconjunto compacto de D.

O método mais directo para estabelecer estes resultados usa técnicas de integração no plano complexo que serão desenvolvidas a partir da secção 11.

10 - As funções exponencial e logaritmo no plano complexo

O conhecido desenvolvimento em série de potências da *função exponencial* real sugere que se procure ampliar esta função ao campo complexo através da definição

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{10.1}$$

Usando o teorema 8.5 verifica-se que esta série tem efectivamente raio de convergência $R = +\infty$ e o exemplo 9.3 mostra que a função assim definida é analítica em $\mathbb{C}$. Pode ainda ver-se que esta é a única função analítica em $\mathbb{C}$ que prolonga a exponencial real. Efectivamente, como $\mathbb{C}$ é conexo e $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$, do princípio do prolongamento analítico 9.10 resulta que duas função analíticas em $\mathbb{C}$ que coincidam em $\mathbb{R}$ são necessariamente idênticas.

O teorema seguinte traduz algumas propriedades desta função que resultam directamente de (10.1).

Teorema 10.1 - *Tem-se*

$$e^z - 1 \sim z \quad se \quad z \to 0. \tag{10.2}$$

$$(e^z)' = e^z \quad se \quad z \in \mathbb{C}. \tag{10.3}$$

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad se \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{10.4}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad se \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{10.5}$$

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z} \quad se \quad z \in \mathbb{C}. \tag{10.6}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0 \quad se \quad z \in \mathbb{C}. \tag{10.7}$$

$$e^z = 1 \quad sse \quad z = 2k\pi i \quad com \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10.8}$$

Demonstração. De (10.1) e do corolário do teorema 8.7 resulta imediatamente a relação assimptótica (10.2). Dado $z \in \mathbb{C}$ e aplicando o teorema 8.10 temos

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

o que estabelece (10.3). A relação (10.4) pode obter-se usando o teorema 8.14 para multiplicar os desenvolvimentos de e^z e e^w. Alternativamente, fixando $w \in \mathbb{C}$ e considerando a função f definida em $\mathbb{C}$ por $f(z) = e^{-z}e^{z+w}$, para cada $z \in \mathbb{C}$ temos

$$f'(z) = e^{-z}e^{z+w} - e^{-z}e^{z+w} = 0$$

e o teorema 6.10 mostra que f é constante. Deduz-se assim

$$e^{-z}e^{z+w} = f(0) = e^w \tag{10.9}$$

e fazendo $w = 0$ resulta $e^{-z}e^z = e^0 = 1$. A identidade (10.4) obtém-se agora multiplicando ambos os membros de (10.9) por e^z.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, de (10.1) resulta

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{2m+1} \frac{i^n\theta^n}{n!} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{i^{2k}\theta^{2k}}{(2k)!} + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{i^{2k+1}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

e a relação (10.5) é válida. Como a função exponencial é real em $\mathbb{R}$ a relação (10.6) resulta directamente do teorema 9.15. Sendo $z = a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$ temos ainda

$$|e^z| = |e^a|\left|e^{ib}\right| = e^a\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = e^a = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$$

o que estabelece (10.7).

Finalmente, dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = 1$, é $|e^z| = 1$ e o resultado anterior mostra que $\mathrm{Re}(z) = 0$. Pondo $\theta = \mathrm{Im}(z)$ temos então $1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ o que equivale a $\theta = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

■

Mudando θ em $-\theta$ em (10.5) resulta $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ e obtêm-se as *identidades de Euler*

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{se} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Estas relações sugerem que se ampliem as funções *seno* e *coseno* ao campo complexo sob a forma de funções analíticas em $\mathbb{C}$, através das definições

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{10.10}$$

De (10.1) resultam então os desenvolvimentos em série de potências de z

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{e} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{10.11}$$

análogos aos que já eram válidos no campo real.

Como no campo real as restantes funções circulares definem-se agora por

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \text{e} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z},$$

e todas elas são funções analíticas nos respectivos domínios.

O teorema seguinte generaliza ao campo complexo algumas relações básicas que envolvem as funções seno e coseno.

Teorema 10.2 - *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\sin z \sim z \quad e \quad \cos z - 1 \sim -\frac{z^2}{2} \quad se \quad z \to 0. \tag{10.12}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{10.13}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1. \tag{10.14}$$

$$\sin(-z) = -\sin z \quad e \quad \cos(-z) = \cos z. \tag{10.15}$$

$$(\sin z)' = \cos z \quad e \quad (\cos z)' = -\sin z. \tag{10.16}$$

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w. \tag{10.17}$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w. \tag{10.18}$$

$$\sin z = 0 \quad sse \quad z = k\pi \quad com \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10.19}$$

$$\cos z = 0 \quad sse \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad com \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10.20}$$

Demonstração. As relações assimptóticas (10.12) resultam de aplicar o corolário do teorema 8.7 aos desenvolvimentos (10.11), e as identidades (10.13) a (10.16) deduzem-se directamente de (10.10).

As relações (10.17) e (10.18) podem obter-se usando ainda (10.10) para desenvolver os segundos membros respectivos. Alternativamente, fixando $w \in \mathbb{C}$ e considerando as funções $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$f(z) = -\sin z \cos(z + w) + \cos z \sin(z + w)$$

e

$$g(z) = \cos z \cos(z + w) + \sin z \sin(z + w),$$

verifica-se que as suas derivadas são idênticamente nulas em $\mathbb{C}$. Resulta assim $f(z) = f(0) = \sin w$ e $g(z) = g(0) = \cos w$ donde se obtêm as identidades (10.17) e (10.18).

Finalmente, as relações (10.19) e (10.20) podem deduzir-se a partir de (10.8) notando que as condições $\sin z = 0$ e $\cos z = 0$ equivalem, respectivamente, a $e^{2zi} = 1$ e a $e^{2zi} = -1 = e^{i\pi}$.

■

As funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico* generalizam-se também ao campo complexo através das relações

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{10.21}$$

Teorema 10.3 - *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\sin iz = i \sinh z \quad e \quad \cos iz = \cosh z, \tag{10.22}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \tag{10.23}$$

$$\sin(z + iw) = \sin z \cosh w + i \cos z \sinh w, \tag{10.24}$$

e

$$\cos(z + iw) = \cos z \cosh w - i \sin z \sinh w. \tag{10.25}$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ é também

$$|\sin(a + ib)| = \sqrt{\sin^2 a + \sinh^2 b}, \tag{10.26}$$

e

$$|\cos(a + ib)| = \sqrt{\cos^2 a + \sinh^2 b} \tag{10.27}$$

Demonstração. Estas identidades resultam directamente das definições usando as propriedades já estabelecidas para as funções seno e coseno.

■

Para generalizar o conceito de logaritmo ao campo complexo é necessário estudar a possibilidade de inverter uma relação do tipo $z = e^w$ em que z e w são complexos arbitrários. Começaremos por estabelecer um resultado que conduz à definição de argumento de um número complexo.

Teorema 10.4 - *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe um e um só número real $\theta(z) \in]-\pi, \pi]$ tal que*

$$e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}$$

e a função $\theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow]-\pi, \pi]$ assim definida é contínua em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Demonstração. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ seja

$$\theta(z) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right).$$

É então $0 \leq \theta(z) \leq \pi$ e $\cos\theta(z) = \operatorname{Re}(z)/|z|$, donde se deduz

$$\sin\theta(z) = \sqrt{1 - \cos^2\theta(z)} = \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|},$$

e obtém-se

$$e^{i\theta(z)} = \cos\theta(z) + i\sin\theta(z) = \frac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{z}{|z|} \quad \text{se} \quad \operatorname{Im}(z) \geq 0.$$

Supondo agora que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\operatorname{Im}(z) < 0$, temos $\operatorname{Im}(-z) > 0$ pelo que $\theta(-z) \in]0, \pi[$. Pondo neste caso $\theta(z) = \theta(-z) - \pi$ segue-se que $\theta(z) \in]-\pi, 0[$ e obtém-se ainda

$$e^{i\theta(z)} = e^{i\theta(-z) - i\pi} = \frac{z}{|z|}\ .$$

Por outro lado, dados $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tais que $e^{i\alpha} = z/|z|$, temos $e^{i(\alpha - \theta(z))} = 1$ com $|\alpha - \theta(z)| < 2\pi$, e (10.8) mostra que isto exige $\alpha = \theta(z)$.

Quanto à continuidade, da definição de θ resulta directamente que esta função é contínua em todo o $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Supondo agora $\operatorname{Re}(z) > 0$, é $\cos\theta(z) > 0$ pelo que $|\theta(z)| < \pi/2$ e portanto

$$\theta(z) = \arcsin\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right).$$

Então θ é contínua em todo o z tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$ e em particular conclui-se que θ também é contínua em cada ponto $z \in \mathbb{R}^+$.

■

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ chama-se *argumento* de z a todo o número real α tal que

$$e^{i\alpha} = \frac{z}{|z|}.$$

Em particular o número $\theta(z)$ definido no teorema anterior diz-se o *argumento principal* de z e será aqui representado por $\arg z$. De acordo com (10.8) resulta então que os argumentos de z são os números da forma $\arg z + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Por analogia com o caso real, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ chama-se *logaritmo de* z a todo o número $w \in \mathbb{C}$ tal que $e^w = z$. Como esta condição equivale a

$$e^{\operatorname{Re}(w)} = |z| \quad \text{e} \quad e^{i\operatorname{Im}(z)} = \frac{z}{|z|},$$

vemos que w é um logaritmo de z sse $w = \ln|z| + i\alpha$ em que α é um argumento de z. Em particular, escolhendo para α o argumento principal de z, o logaritmo assim obtido diz-se o *logaritmo principal* de z e será aqui representado por $\ln z$. Temos então

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,. \tag{10.28}$$

Exemplo 10.5 - *Dado* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tem-se*

$$\ln(-z) = \ln z + i\pi \quad \textit{se} \quad \arg z \leq 0 \quad \textit{e} \quad \ln(-z) = \ln z - i\pi \quad \textit{se} \quad \arg z > 0.$$

Efectivamente, sendo $\theta = \arg z$ segue-se que $\theta \pm i\pi$ é um argumento de $-z$. Atendendo à definição de argumento principal temos então $\arg(-z) = \theta + i\pi$ se

$\theta \leq 0$ e $\arg(-z) = \theta - i\pi$ se $\theta > 0$. As identidades anteriores resultam agora da definição (10.28).

Exemplo 10.6 - *Tem-se*

$$\ln \overline{z} = \overline{\ln z} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-. \tag{10.29}$$

Efectivamente, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ e sendo $\theta = \arg z$, de (10.6) resulta que $-\theta$ é um argumento de $\overline{z}$. Como $|\arg \overline{z}| < \pi$ e $|-\theta| < \pi$, é então $\arg \overline{z} = -\theta = -\arg z$ pelo que $\ln \overline{z} = \ln |\overline{z}| + i \arg \overline{z} = \ln |z| - i \arg z$ como se pretende.

Exemplo 10.7 - *Dados* $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tem-se*

$$\ln zw = \ln z + \ln w \quad se \quad -\pi < \arg z + \arg w \leq \pi, \tag{10.30}$$

$$\ln \frac{z}{w} = \ln z - \ln w \quad se \quad -\pi < \arg z - \arg w \leq \pi \tag{10.31}$$

e em particular

$$\ln rz = \ln r + \ln z \quad se \ r \in \mathbb{R}^+, \tag{10.32}$$

$$\ln \frac{r}{z} = \ln r - \ln z \quad se \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-. \tag{10.33}$$

Efectivamente, sendo $\alpha = \arg z$ e $\beta = \arg w$ segue-se que $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ são argumentos respectivamente de zw e de z/w. As identidades anteriores resultam então directamente da definição (10.28).

Teorema 10.8 - *A função logaritmo principal é uma aplicação injectiva de* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *sobre a faixa horizontal* $D_e = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi\}$, *é analítica em* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ *e tem-se*

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Demonstração. Da definição (10.28) resulta directamente que o domínio de ln é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e sendo $w = \ln z$, da definição resulta também que $w \in D_e$ e $z = \exp(w)$ pelo que ln é uma aplicação injectiva de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em D_e. Reciprocamente, dado $w \in D_e$ e sendo $z = \exp(w)$, tem-se $\ln z = w$ pois as condições

$$e^{\mathrm{Re}(w)} = |z| \quad \text{e} \quad e^{i\,\mathrm{Im}(w)} = \frac{z}{|z|}$$

implicam $\mathrm{Re}(w) = \ln |z|$ e $\mathrm{Im}(w) = \arg z$, o que equivale a $w = \ln z$.

Como o teorema 10.4 mostra que a função arg é contínua em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, o mesmo sucede com o logaritmo principal. Seja agora f a função definida em D_e por $f(w) = e^w$. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ e sendo $z = f(w)$, pelo teorema 6.9 temos então

$$(\ln z)' = \left(f^{-1}\right)'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Vemos assim que o logaritmo principal é uma primitiva de $1/z$ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ e como esta função é analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, do exemplo 9.9 resulta que o mesmo sucede com a função ln.

■

Corolário - *A função logaritmo principal é a única função analítica em* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ *que prolonga a função real* ln *definida em* $\mathbb{R}^+$.

Demonstração. O conjunto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ é aberto, e é conexo por ser um conjunto em estrela relativamente ao ponto 1 (cf. exemplo 5.15). Como todo o ponto de $\mathbb{R}^+$ é ponto de acumulação deste conjunto, o princípio do prolongamento analítico 9.10 mostra que duas função analíticas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ que coincidam em $\mathbb{R}^+$ são necessariamente idênticas.

■

O teorema seguinte amplia ao campo complexo um desenvolvimento válido em Análise Real.

Teorema 10.9 - *Tem-se*

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad se \quad |z| \leq 1 \quad e \quad z \neq -1. \tag{10.34}$$

Demonstração. Mudando z em $-z$ no desenvolvimento (8.1) resulta

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \quad \text{se} \quad |z| < 1$$

e por primitivação obtém-se uma relação do tipo

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad \text{se} \quad |z| < 1,$$

em que F é uma primitiva de $1/(1+z)$ em $B(0,1)$. Como $\ln(1+z)$ é também uma primitiva de $1/(1+z)$ em $B(0,1)$, segue-se que existe uma constante c tal que $F(z) = \ln(1+z) + c$ para todo o $z \in B(0,1)$. Tomando $z = 0$ conclui-se que $c = 0$, e o desenvolvimento do enunciado é válido quando $|z| < 1$.

Dado $z \neq -1$ tal que $|z| = 1$, como $1 + z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, o corolário do teorema 8.15 mostra que o desenvolvimento se mantém válido neste caso desde que a série correspondente seja convergente. Pondo $w = -z \neq 1$ a série dada transforma-se em

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) w^n$$

e aplicando o corolário 2 do teorema 1.11 com $a_n = 1/n$ concluímos que ela é efectivamente convergente. ■

Corolário 1 - *Tem-se*

$$\ln(1+z) \sim z \quad (z \to 0)\,. \tag{10.35}$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior usando o corolário do teorema 8.7.

■

Corolário 2 - *Dado* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tal que* $\mathrm{Re}(a) \geq 0$ *tem-se*

$$\ln z = \ln a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(z-a)^n \quad \textit{se} \quad |z-a| \leq |a| \quad \textit{e} \quad z \neq 0.$$

Demonstração. Mudando z em $(z-a)/a$ no teorema anterior obtém-se

$$\ln \frac{z}{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a| \leq |a| \quad \text{e} \quad z \neq 0,$$

e o enunciado fica provado se for válida a igualdade

$$\ln z = \ln \frac{z}{a} + \ln a.$$

Como

$$1 - \mathrm{Re}\left(\frac{z}{a}\right) \leq \left|1 - \frac{z}{a}\right| \leq 1$$

e $z/a \neq 0$, é $\mathrm{Re}(z/a) > 0$ o que implica $|\arg(z/a)| < \pi/2$. Temos ainda $|\arg a| \leq \pi/2$ pelo que $-\pi < \arg a + \arg(z/a) < \pi$, e a igualdade pretendida resulta agora de (10.30).

■

Em Análise Complexa são importantes outras generalizações do conceito de logaritmo. Assim, dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ chama-se *ramo do logaritmo em* E a toda a função contínua $\lambda : E \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$e^{\lambda(z)} = z \quad \text{se} \quad z \in E.$$

Da definição resulta que a função logaritmo principal é um ramo do logaritmo em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. Resulta também que existe um ramo do logaritmo em E sse existir uma função contínua $\theta : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(z)$ é um argumento de z para cada $z \in E$. Efectivamente, dadas duas funções $\lambda : E \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\theta : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lambda(z) = \ln|z| + i\theta(z)$, a continuidade de λ equivale à continuidade de θ e são equivalentes as condições

$$e^{\lambda(z)} = z \quad \text{e} \quad e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

A parte imaginária de um ramo do logaritmo em E diz-se um *ramo do argumento em E.*

O resultado seguinte implica a inexistência de ramos do logaritmo em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Teorema 10.10 - *Não existem ramos do logaritmo na circunferência $C(0,1)$.*

Demonstração. Supondo que λ é um ramo do logaritmo em $C\,(0,1)$ e considerando a função f definida por

$$f(\theta) = \frac{\lambda\left(e^{i\theta}\right) + \lambda\left(e^{-i\theta}\right)}{2\pi i} \quad \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

temos

$$e^{2\pi i f(\theta)} = e^{\lambda\left(e^{i\theta}\right)} e^{\lambda\left(e^{-i\theta}\right)} = 1.$$

Existe então $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi i f(\theta) = 2k\pi i$ e daqui resulta $f(\theta) \in \mathbb{Z}$ para todo o $\theta \in [0, 2\pi]$. Como f é uma função contínua, ela transforma $[0, 2\pi]$ num subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$, e atendendo ao exemplo 5.25 deduz-se que f é constante. Em particular tem-se $f(0) = f(\pi)$ donde vem $\lambda(1) = \lambda(-1)$ o que é absurdo, pois $e^{\lambda(1)} = 1$ e $e^{\lambda(-1)} = -1$.

■

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma função contínua $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, chama-se *ramo do logaritmo de f* a toda a função contínua $\lambda : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$e^{\lambda(z)} = f(z) \quad \text{se} \quad z \in D.$$

Se λ é um ramo do logaritmo de f então a função $\theta = \operatorname{Im}(\lambda)$ é contínua e verifica a condição

$$e^{i\theta(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Por este motivo diz-se que uma função $\theta : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é um *ramo do argumento de f* se for a parte imaginária de um ramo do logaritmo de f.

De acordo com as definições, dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, um ramo do logaritmo em D é um ramo do logaritmo da função identidade de D. Mais geralmente, dados $D \subseteq \mathbb{C}$ e um função contínua $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se λ for um ramo do logaritmo no conjunto $f[D]$ então $\lambda \circ f$ é um ramo do logaritmo de f.

É importante contudo notar que pode existir um ramo do logaritmo de f sem que exista um ramo do logaritmo no contradomínio de f. Assim, pondo $f(\theta) = e^{i\theta}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$, a função λ definida em $[0, 2\pi]$ por $\lambda(\theta) = i\theta$ é um ramo do logaritmo de f mas o teorema anterior mostra que não existem ramos do logaritmo em $C\,(0,1)$ que é o contradomínio de f.

Teorema 10.11 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto conexo e $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função contínua. Então dois ramos do logaritmo de f diferem por uma constante da forma $2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Sendo λ e μ dois ramos do logaritmo de f temos efectivamente $e^{\lambda(t)-\mu(t)} = 1$ se $t \in D$. Pondo então

$$\varphi(t) = \frac{\lambda(t) - \mu(t)}{2\pi i} \quad \text{se} \quad t \in D$$

segue-se que φ é uma aplicação contínua do conjunto conexo D em $\mathbb{Z}$ e do exemplo 5.25 resulta que φ é constante.

■

Exemplo 10.12 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto conexo e $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função contínua. Suponha-se ainda que $D \cap \mathbb{R}^+$ é um intervalo não vazio e que*

$$f\left[D \cap \mathbb{R}^+\right] \subseteq \mathbb{R}^+.$$

Então, se existir algum ramo do logaritmo de f existe um e um só ramo do logaritmo de f que coincide com a função real $\ln f$ *em $D \cap \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Sendo λ um ramo do logaritmo de f, a restrição de λ ao intervalo $I = D \cap \mathbb{R}^+$ é um ramo do logaritmo de $f|I$. Como a função real $\ln f$ também é um ramo do logaritmo de $f|I$ e I é conexo, de acordo com o teorema anterior existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda(x) - \ln f(x) = 2k\pi i$ para todo o $x \in I$. Pondo $\lambda_0 = \lambda - 2k\pi i$ obtém-se então um ramo do logaritmo de f que coincide com a função real $\ln f$ em I, e como D é conexo o teorema anterior mostra que λ_0 é a única função nestas condições.

Teorema 10.13 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função contínua e λ um ramo do logaritmo de f. Se f é diferenciável num ponto $c \in D$ o mesmo sucede com λ e tem-se*

$$\lambda'(c) = \frac{f'(c)}{f(c)}.$$

Demonstração. Pondo $a = \lambda(c)$ e atendendo à diferenciabilidade da função exponencial em a, o teorema 6.2 mostra que existe uma função $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$, contínua e nula no ponto a, tal que

$$e^w - e^a = (w - a)\left(e^a + \rho(w)\right) \quad \text{se} \quad w \in \mathbb{C}.$$

Tomando $w = \lambda(z)$ e pondo $\varphi = \rho \circ \lambda$, para cada $z \in D$ temos então

$$f(z) - f(c) = (\lambda(z) - \lambda(c))\,(f(c) + \varphi(z)).$$

Como $f(c) \neq 0$ e φ é contínua e nula no ponto c, existe ainda $r > 0$ tal que $f(c) + \varphi(z) \neq 0$ se $z \in B(c, r) \cap D$. Resulta assim

$$\frac{\lambda(z) - \lambda(c)}{z - c} = \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \frac{1}{f(c) + \varphi(z)} \quad \text{se} \quad z \in B(c, r) \cap (D \setminus \{c\})$$

e fazendo $z \to c$ obtém-se o resultado pretendido. ■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função analítica e λ um ramo do logaritmo de f. Então a função λ também é analítica.*

Demonstração. Nas condições do enunciado o teorema anterior mostra que λ é uma primitiva de f'/f. Basta agora aplicar o exemplo 9.9 notando que f'/f também é analítica em D.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um conjunto aberto e $\lambda : D \longrightarrow \mathbb{C}$ um ramo do logaritmo em D. Então λ é analítica e tem-se*

$$\lambda'(z) = \frac{1}{z} \quad \textit{se} \quad z \in D.$$

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior tomando para f a função identidade de D.

■

Teorema 10.14 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um intervalo de $\mathbb{R}$ ou um conjunto aberto e conexo. Dada uma função diferenciável $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe um ramo do logaritmo de f sse f'/f for primitivável.*

Demonstração. Se λ é um ramo do logaritmo de f o teorema anterior mostra que λ é uma primitiva de f'/f. Reciprocamente, supondo que F é uma primitiva de f'/f, para todo o $z \in D$ temos

$$\left(\frac{e^{F(z)}}{f(z)}\right)' = \frac{f(z)F'(z)e^{F(z)} - f'(z)e^{F(z)}}{f^2(z)} = 0$$

e o teorema 6.10 mostra que e^F/f é constante. Existe então $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$e^{F(z)} = cf(z) \ \text{ se } \ z \in D$$

e a função definida em D por $F(z) - \ln c$ é um ramo do logaritmo de f.

■

Provaremos agora um resultado que será posteriormente utilizado no estudo da integração de funções de variável complexa.

Teorema 10.15 - *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função contínua e suponha-se que existe uma decomposição $\{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ tal que a restrição de f a cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tem derivada contínua. Existe então um ramo do logaritmo de f.*

Demonstração. No caso $n = 1$ a função f'/f é contínua e o teorema anterior associado ao exemplo 6.11 mostra que existe um ramo do logaritmo de f.

Indutivamente admita-se agora que o enunciado é válido para um certo inteiro $n \geq 1$ e suponha-se que existe uma decomposição $\{t_0, ..., t_{n+1}\}$ de $[a, b]$ tal que a restrição de f a cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tem derivada contínua. Por hipótese de indução existe um ramo λ_n do logaritmo da restrição de f a $[t_0, t_n]$ e o teorema anterior mostra que existe também um ramo λ_{n+1}do logaritmo da restrição de f a $[t_n, t_{n+1}]$. Pondo $\lambda(t) = \lambda_n(t)$ se $t \in [t_0, t_n]$ e

$$\lambda(t) = \lambda_{n+1}(t) + \lambda_n(t_n) - \lambda_{n+1}(t_n) \quad \text{se} \quad t \in]t_n, t_{n+1}],$$

a função λ é contínua e da relação

$$e^{\lambda_n(t_n)} = f(t_n) = e^{\lambda_{n+1}(t_n)}$$

resulta que λ é um logaritmo de f.

■

Dados $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$ define-se o *valor principal da potência de base z e expoente w* por

$$z^w = e^{w \ln z}. \tag{10.36}$$

Da definição resultam directamente as relações

$$z^u z^v = z^{u+v} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \text{ e } \ u, v \in \mathbb{C}, \tag{10.37}$$

$$z^{-w} = \frac{1}{z^w} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \text{ e } \ w \in \mathbb{C} \tag{10.38}$$

e

$$(r^a)^w = r^{aw} \quad \text{se} \quad r \in \mathbb{R}^+, \, a \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ w \in \mathbb{C}. \tag{10.39}$$

De (10.32) e (10.33) resultam ainda, respectivamente,

$$(rz)^w = r^w z^w \quad \text{se} \quad r \in \mathbb{R}^+, \, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \text{ e } \ w \in \mathbb{C} \tag{10.40}$$

e

$$\left(\frac{r}{z}\right)^w = \frac{r^w}{z^w} \quad \text{se} \quad r \in \mathbb{R}^+, \, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \ \text{ e } \ w \in \mathbb{C}. \tag{10.41}$$

Nota 10.16 - Outras regras de cálculo com potências reais deixam de ser válidas neste contexto, como sucede com as relações

$$(z^u)^v = z^{uv} \quad \text{e} \quad (zu)^w = z^w u^w.$$

Temos por exemplo

$$\left(e^{2\pi i}\right)^i = 1^i = 1 \quad \text{e} \quad e^{(2\pi i)i} = e^{-2\pi},$$

e também

$$((-i)\,(-i))^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(-1)} = i \quad \text{e} \quad (-i)^{\frac{1}{2}}\,(-i)^{\frac{1}{2}} = (-i)^{1} = -i.$$

Da definição resulta ainda que as funções $w \mapsto z^w$ e $z \mapsto z^w$ são analíticas respectivamente em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, com derivadas

$$\frac{\partial z^w}{\partial w} = z^w \ln z \quad \text{e} \quad \frac{\partial z^w}{\partial z} = w z^{w-1}.$$

Atendendo a que os coeficientes binomiais

$$\binom{w}{n}$$

com $w \in \mathbb{C}$ são dados por

$$\binom{w}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{w}{n} = \frac{w\,(w-1)\cdots(w-n+1)}{n!} \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

derivando sucessivamente no ponto $z = 0$ a função f definida por

$$f(z) = (1+z)^w \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \tag{10.42}$$

obtém-se

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{w}{n} \quad \text{se} \quad n \geq 0. \tag{10.43}$$

Se w for um inteiro não negativo m, é $f^{(n)}(0) = 0$ quando $n > m$ e a fórmula de Taylor para polinómios (8.6) traduz-se pela *identidade binomial* ou *fórmula do binómio*

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^n \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e}\ m \in \mathbb{Z}_0^+, \tag{10.44}$$

algumas vezes designada impropriamente como "binómio de Newton".

Provaremos agora um desenvolvimento que foi obtido por Newton no caso de z e w serem reais, e que representa uma generalização substancial da fórmula do binómio.

Teorema 10.17 (Teorema binomial) - *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$(1+z)^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w}{n} z^n \quad \textit{se} \quad |z| < 1. \tag{10.45}$$

Demonstração. A relação (10.43) mostra que a série do enunciado é a série de Maclaurin da função f definida por (10.42). Supondo sem perda de generalidade $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^+$, os coeficientes

$$\binom{w}{n}$$

nunca se anulam. Aplicando então o teorema 8.5 vemos que o raio de convergência desta série é

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\binom{w}{n}}{\binom{w}{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{|w-n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{\left|1-\frac{w}{n}\right|} = 1,$$

e como a função f é analítica em $B(0,1)$ o enunciado resulta do Corolário 1 do teorema 9.16.

■

Corolário - *Dado* $w \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$(1+z)^w = 1 + wz + O\left(z^2\right) \quad (z \to 0)\,. \tag{10.46}$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior usando o teorema 8.7.

■

Para estudar a validade do desenvolvimento (10.45) quando $|z| = 1$ vamos começar por analisar o comportamento da função definida por $z \mapsto z^w$ quando $z \to 0$.

Exemplo 10.18 - *Dado* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, para a função definida por* $z \mapsto z^w$ *o limite no ponto* $z = 0$ *existe e é finito sse* $\mathrm{Re}(w) > 0$ *e tem-se então*

$$\lim_{z\to0} z^w = 0.$$

Sejam efectivamente $a = \mathrm{Re}(w)$ e $b = \mathrm{Im}(w)$. Supondo $a > 0$ temos

$$|z^w| = |z|^a\, e^{-b \arg z} \le |z|^a\, e^{\pi|b|}$$

pelo que $\lim_{z\to0} z^w = 0$, e daqui resulta

$$\lim_{z\to0} z^w = \lim_{z\to0} \frac{1}{z^{-w}} = \infty \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(w) < 0.$$

Supondo agora $a = 0$, se $\lim_{z\to0} z^{ib}$ existisse com $b \neq 0$, existia também o limite

$$\lim_{r\to+\infty} \left(e^{-r}\right)^{ib} = \lim_{r\to+\infty} (\cos rb - i \sin rb)$$

o que é falso.

Com base no resultado anterior define-se

$$0^w = 0 \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(w) > 0$$

o que torna contínua no ponto $z = 0$ a função $z \mapsto z^w$.

Usaremos ainda o resultado seguinte que traduz uma propriedade geral das sucessões complexas:

Teorema 10.19 (Weierstrass) - *Seja* $(u_n)_{n\geq p}$ *uma sucessão complexa de termos não nulos tal que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + c_n$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$ *e* $\sum_{n=p}^{+\infty} |c_n| < +\infty$. *Tem-se então*

$$u_n = \frac{\lambda_n}{n^\alpha}$$

em que (λ_n) *é uma sucessão de variação limitada com limite não nulo.*

Demonstração. Pondo

$$\lambda_n = u_n n^\alpha \quad \text{se} \quad n \geq p$$

temos

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + c_n\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} &= \left(1 - \frac{\alpha}{n} + c_n\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(c_n\right)\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 + \varepsilon_n \quad \text{com} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} |\varepsilon_n| < +\infty. \tag{10.47}$$

Como é também

$$\left|\ln \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right| = \left|\ln\left(1 + \varepsilon_n\right)\right| \sim |\varepsilon_n|$$

verifica-se que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \ln \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$$

é absolutamente convergente, e das relações

$$\lambda_n = \lambda_p \prod_{k=p}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \lambda_p \exp\left(\sum_{k=p}^{n-1} \ln \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)$$

resulta

$$\lim \lambda_n = \lambda_p \exp\left(\sum_{k=p}^{+\infty} \ln \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right) \neq 0.$$

Sendo λ o limite de λ_n, da relação (10.47) deduz-se então

$$|\lambda_n - \lambda_{n+1}| \sim |\lambda|\,|\varepsilon_n|$$

e conclui-se que $\sum_{n=p}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}|$ converge.

■

Podemos agora completar o enunciado do teorema binomial.

Teorema 10.20 - *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| = 1$ *tem-se*

$$(1+z)^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w}{n} z^n$$

sse $w = 0$, *ou* $\mathrm{Re}(w) > 0$, *ou* $-1 < \mathrm{Re}(w) \leq 0$ *com* $z \neq -1$.

Demonstração. Se w for um inteiro não negativo a identidade (10.44) mostra que o desenvolvimento do enunciado é válido para todo o $z \in \mathbb{C}$. Suponha-se então $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^+$ e para cada $n \geq 0$ seja

$$u_n = (-1)^n \binom{w}{n} \neq 0.$$

Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-w}{n+1} = 1 - \frac{1+w}{n} + \frac{1+w}{n(n+1)} \quad \text{se } n \geq 1,$$

o teorema anterior mostra que u_n se pode representar na forma

$$u_n = \frac{\lambda_n}{n^{1+w}}, \tag{10.48}$$

em que (λ_n) converge para um limite não nulo λ. Temos então

$$\binom{w}{n} z^n \sim \frac{\lambda}{n^{1+w}} (-z)^n$$

e portanto

$$\left|\binom{w}{n} z^n\right| \sim \frac{|\lambda|}{n^{1+\mathrm{Re}(w)}} \quad \text{se} \quad |z| = 1.$$

Vemos assim que a série em estudo é absolutamente convergente se $\mathrm{Re}(w) > 0$ e diverge quando $\mathrm{Re}(w) \leq -1$, pois neste caso o seu termo geral não tem limite nulo. Como a função de z definida por $(1+z)^w$ é contínua em $C(0,1)$

quando $\mathrm{Re}(w) > 0$, o corolário do teorema 8.15 mostra que a identidade do enunciado é válida neste caso.

Supondo finalmente $-1 < \mathrm{Re}(w) \leq 0$, como $(1+z)^w$ é contínua em $C(0,1) \setminus \{-1\}$ e não está definida para $z = -1$, o enunciado fica estabelecido se se provar que a série dada converge quando $z \neq -1$. Temos agora

$$|u_n - u_{n+1}| = |u_n| \left| 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |u_n| \left| \frac{1+w}{n+1} \right| \sim |\lambda| \frac{|1+w|}{n^{2+\mathrm{Re}(w)}}$$

pelo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n - u_{n+1}|$$

converge. Como

$$\binom{w}{n} z^n = u_n \, (-z)^n$$

e (10.48) mostra que $\lim u_n = 0$, do corolário 1 do teorema 1.11 resulta que a série dada também converge quando $z \neq -1$.

■

Nota 10.21 - O desenvolvimento (10.45) mostra que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w}{n} (-1)^n$$

diverge também quando $-1 < \mathrm{Re}\,(w) \leq 0$ e $w \neq 0$. Efectivamente, como

$$(1-z)^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w}{n} (-1)^n z^n \quad \text{se} \quad |z| < 1,$$

se aquela série fosse convergente o teorema de Abel 8.15 implicava

$$\lim_{t \to 1^-} (1-t)^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w}{n} (-1)^n .$$

No entanto este limite é ∞ se $\mathrm{Re}(w) < 0$ e, como no exemplo 10.18, verifica-se que ele não existe se $\mathrm{Re}(w) = 0$ e $w \neq 0$.

Vamos agora estudar a inversão da função seno no campo complexo e começaremos por estabelecer um resultado auxiliar.

Lema 10.22 - *Sendo D_s o conjunto definido por*

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(w)| < \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(w)| = \frac{\pi}{2} \ \textit{e} \ \mathrm{Re}(w)\,\mathrm{Im}(w) \leq 0 \right\}$$

e dado $w \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\mathrm{Re}(w)| \leq \pi$*, tem-se*

$$\cos w = \left(1 - \sin^2 w\right)^{1/2}$$

sse $w \in D_s$*.*

Demonstração. Atendendo a (10.36) vemos que se tem $\cos w = \left(\cos^2 w\right)^{1/2}$ sse $\cos w = 0$ ou $\arg\left(\cos^2 w\right) = 2\arg\left(\cos w\right)$. Como esta última condição equivale a $-\pi/2 < \arg(\cos w) \leq \pi/2$, da identidade (10.14) resulta que a relação

$$\cos w = \left(1 - \sin^2 w\right)^{1/2}$$

é válida sse $\mathrm{Re}\left(\cos w\right) > 0$ ou

$$\mathrm{Re}\left(\cos w\right) = 0 \;\text{ e }\; \mathrm{Im}\left(\cos w\right) \geq 0.$$

Seja agora $w = a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $|a| \leq \pi$. Atendendo a (10.25) e notando que $\cosh b > 0$, a condição $\mathrm{Re}\left(\cos w\right) > 0$ equivale a $\cos a > 0$ e portanto a $|a| < \pi/2$. Por outro lado, atendendo de novo a (10.25), a condição $\mathrm{Re}\left(\cos w\right) = 0$ e $\mathrm{Im}\left(\cos w\right) \geq 0$ equivale a $|a| = \pi/2$ e $\sin a \sinh b \leq 0$. Como $\sin a$ tem o sinal de a e $\sinh b$ o sinal de b, esta última condição traduz-se por $ab \leq 0$ o que acaba de estabelecer o enunciado.
■

Podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 10.23 - *Seja* D_s *o conjunto definido no lema anterior. Então, dado* $z \in \mathbb{C}$ *existe um e um só* $w \in D_s$ *tal que* $\sin w = z$*, e tem-se*

$$w = \frac{1}{i} \ln\left(\left(1 - z^2\right)^{1/2} + iz\right).$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ a relação

$$\sin w = z$$

equivale a

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

e é verificada se

$$e^{iw} = \left(1 - z^2\right)^{1/2} + iz.$$

Notando que $\left(1 - z^2\right)^{1/2} + iz$ nunca se anula conclui-se que a condição $\sin w = z$ é satisfeita por

$$w = \frac{1}{i} \ln\left(\left(1 - z^2\right)^{1/2} + iz\right).$$

Para vermos que $w \in D_s$ começamos por notar que a relação

$$iw = \ln\left(\left(1-z^2\right)^{1/2} + iz\right)$$

exige $|\mathrm{Im}(iw)| \leq \pi$, ou seja, $|\mathrm{Re}(w)| \leq \pi$. Temos ainda

$$e^{iw} - iz = \left(1-z^2\right)^{1/2}$$

e como é também

$$e^{iw} - iz = e^{iw} - i\sin w = \cos w,$$

resulta

$$\cos w = \left(1-z^2\right)^{1/2} = (1-\sin w)^{1/2}.$$

Do lema anterior conclui-se agora que $w \in D_s$.

Quanto à unicidade, se $\sin w_1 = \sin w_2$ com $w_1, w_2 \in D_s$, atendendo ao lema anterior é também $\cos w_1 = \cos w_2$ pelo que $e^{iw_1} = e^{iw_2}$. É então $e^{i(w_1-w_2)} = 1$ o que exige $w_1 - w_2 = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, e como $|\mathrm{Re}\,(w_1) - \mathrm{Re}\,(w_2)| \leq \pi$ conclui-se $w_1 = w_2$.

■

Definindo a função *arcoseno* por

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln\left(\left(1-z^2\right)^{1/2} + iz\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}, \tag{10.49}$$

o teorema anterior mostra que se tem

$$w = \arcsin z \quad \text{sse} \quad \sin w = z \;\; \text{e} \;\; w \in D_s,$$

pelo que esta função é uma aplicação injectiva de $\mathbb{C}$ sobre D_s.

Teorema 10.24 - *A função arcoseno é analítica em $\mathbb{C}\backslash(]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$, contínua nos pontos ± 1, e tem-se*

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\left(1-z^2\right)^{1/2}} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)\,.$$

Demonstração. Seja $D = \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$ e considere-se a função φ definida em D por

$$\varphi(z) = \left(1-z^2\right)^{1/2} + iz.$$

Como a condição $1 - z^2 \in \mathbb{R}_0^-$ equivale a $z \in\,]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, segue-se que φ é analítica em D. Dado $z \in D$ seja agora $w = \arcsin z = a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Temos então $|a| \leq \pi/2$, $\sin w = z$ e $\cos w = \left(1-z^2\right)^{1/2}$, donde se deduz

$$\varphi(z) = \cos w + i\sin w = e^{iw} = e^{-b}(\cos a + i\sin a),$$

o que implica $\operatorname{Re}(\varphi(z)) \geq 0$ e $\varphi(z) \neq 0$. Então $\varphi(z) \notin \mathbb{R}_0^-$, pelo que $\ln \varphi$ é analítica no ponto z e o mesmo sucede com a função arcoseno. Como φ é contínua nos pontos ± 1 e a função ln é contínua nos pontos $\varphi(\pm 1) = \pm i$, segue-se que arcsin é também contínua nestes pontos.

A expressão da derivada de arcsin pode obter-se derivando o segundo membro de (10.49) mas é mais directo invocar o teorema 6.9. Sejam D_s o conjunto definido no lema 10.22 e $f : D_s \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(w) = \sin w$. Dado $z \in D$ é então $z = f(w)$ com $w \in D_s$ e pelo teorema 6.9 tem-se

$$(\arcsin z)' = \left(f^{-1}\right)'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\left(1 - \sin^2 w\right)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}.$$

■

Como $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ é conexo (é um conjunto em estrela relativamente à origem), o teorema anterior e o princípio do prolongamento analítico 9.10 mostram que a função arcoseno assim definida é a única função analítica neste conjunto que prolonga a função real arcsin de domínio $]-1, 1[$.

Para exprimir o desenvolvimento da função arcoseno em série de potências de z é conveniente usar o símbolo $n!!$ que se define para cada inteiro $n \geq -1$ por

$$n!! = \prod_{0 \leq 2k < n} (n - 2k)$$

com a convenção habitual de o produto vazio ser 1. É então válido o seguinte resultado:

Teorema 10.25 - *Tem-se*

$$\arcsin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} z^{2n+1} \quad \textit{se} \quad |z| \leq 1.$$

Demonstração. Como

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} = \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \quad \text{se} \quad |z| < 1,$$

o teorema 10.17 mostra que

$$(\arcsin z)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} z^{2n} \quad \text{se} \quad |z| < 1.$$

O termo geral desta série pode ainda transformar-se notando que

$$(-1)^n \binom{-1/2}{n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)\,(-1/2 - k)}{k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

O desenvolvimento toma assim a forma

$$(\arcsin z)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n} \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

e como $\arcsin 0 = 0$, por primitivação obtém-se

$$\arcsin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} z^{2n+1} \quad \text{se} \quad |z| < 1.$$

Seja agora $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ e tome-se $x \in]0,1[$. Para cada inteiro $m \geq 0$ é então

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} x^{2n+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} x^{2n+1} = \arcsin x < \frac{\pi}{2}$$

e fazendo $x \to 1$ obtém-se a majoração

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{se} \quad m \geq 0.$$

Isto mostra que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!}$$

converge, e conclui-se que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} z^{2n+1}$$

é absolutamente convergente para todo o z tal que $|z| = 1$. Como a função arcsin é contínua em $C(0,1)$, o corolário do teorema 8.15 permite concluir que o desenvolvimento também é válido quando $|z| = 1$.

■

Dado $z \in \mathbb{C}$ consideremos agora o problema de achar $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$\tan w = z.$$

Se $z = \pm i$ esta relação equivale a

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = \pm 1$$

e portanto a

$$e^{\pm iw} = 0$$

que é uma condição impossível. Se $z \neq \pm i$ é válido o seguinte resultado:

Teorema 10.26 - *Seja*

$$D_t = \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(w) \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } w \neq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Então, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ *existe um e um só* $w \in D_t$ *tal que* $\tan w = z$, *e tem-se*

$$w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ a relação $\tan w = z$ equivale a

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Como a expressão

$$\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

está definida e não se anula desde que $z \neq \pm i$, vemos que a relação $\tan w = z$ é efectivamente verificada por

$$w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Além disso, como da definição de logaritmo principal resulta

$$-\pi < \mathrm{Im} \left(\ln \frac{1 + iz}{1 - iz} \right) \leq \pi$$

e é necessariamente $w \neq \pi/2$, segue-se que $w \in D_t$. Quanto à unicidade, se $\tan w_1 = \tan w_2$ com $w_1, w_2 \in D_t$ temos

$$0 = \tan w_1 - \tan w_2 = \frac{\sin w_1 \cos w_2 - \cos w_1 \sin w_2}{\cos w_1 \cos w_2} = \frac{\sin (w_1 - w_2)}{\cos w_1 \cos w_2}$$

o que exige $\sin (w_1 - w_2) = 0$. Como $|\mathrm{Re}\,(w_1 - w_2)| < \pi$, de (10.19) resulta $w_1 = w_2$.

■

Definindo a função *arcotangente* por

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}, \tag{10.50}$$

do teorema anterior resulta que se tem

$$w = \arctan z \quad \text{sse} \quad z = \tan w \quad \text{e} \quad w \in D_t,$$

pelo que esta função é uma aplicação injectiva de $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ sobre D_t.

Teorema 10.27 - *A função arcotangente é analítica no conjunto*

$$\mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}(z) = 0 \ \textit{e} \ |\mathrm{Im}(z)| \geq 1\},$$

e em cada ponto deste conjunto tem-se

$$\arctan z = \frac{\ln(1 + iz) - \ln(1 - iz)}{2i} \tag{10.51}$$

e

$$(\arctan z)' = \frac{1}{1 + z^2}. \tag{10.52}$$

Demonstração. Como a condição

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} \in \mathbb{R}_0^-$$

exige $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$, da relação (10.50) resulta que a função arctan é analítica no conjunto

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}(z) = 0 \ \text{ e } \ |\mathrm{Im}(z)| \geq 1\}$$

e o mesmo argumento mostra que as funções definidas por

$$\ln \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad \text{e} \quad \ln(1 + iz) - \ln(1 - iz)$$

são ambas ramos do logaritmo de $(1 + iz) / (1 - iz)$ em D. Dado que estas funções coincidem no ponto $z = 0$ e que o conjunto D é conexo, do teorema 10.11 resulta que elas são idênticas. Então (10.51) deduz-se de (10.50) e derivando o segundo membro de (10.51) obtém-se (10.52).

■

O teorema anterior mostra em particular que a função arcotangente é única função analítica que prolonga ao conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}(z) = 0 \ \text{ e } \ |\mathrm{Im}(z)| \geq 1\}$ a função real arctan de domínio $\mathbb{R}$.

Teorema 10.28 - *Tem-se*

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n + 1} \quad \textit{se} \quad |z| \leq 1 \quad \textit{e} \quad z \neq \pm i.$$

Demonstração. Primitivando o desenvolvimento

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \text{se} \quad |z| < 1$$

e notando que $\arctan 0 = 0$, obtém-se o desenvolvimento pretendido quando $|z| < 1$. Temos agora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z \frac{\left(-z^2\right)^n}{2n+1}$$

e o corolário 2 do teorema 1.11 mostra que esta série converge quando $\left|-z^2\right| = 1$ e $-z^2 \neq 1$, o que equivale a $|z| = 1$ e $z \neq \pm i$. Como a função arctan é contínua em $C(0,1) \backslash \{-i, +i\}$, do corolário do teorema 8.15 resulta que o desenvolvimento também é válido nesses pontos.

■

11 - Integração no plano complexo

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $\mathrm{Re}\,(f)$ e $\mathrm{Im}\,(f)$ são ambas integráveis no sentido de Riemann (integráveis-R) em $[a, b]$. Define-se então o *integral de f em $[a, b]$* por

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,.$$

As propriedades dos integrais das funções reais que não envolvam ordenação conservam-se válidas neste contexto e resultam directamente da definição.

Exemplo 11.1 - *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, seja $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para uma função f. Se as funções f_n forem integráveis-R então o mesmo sucede com f e tem-se*

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Efectivamente o exemplo 7.3 mostra que a convergência das sucessões $\mathrm{Re}\,(f_n)$ e $\mathrm{Im}\,(f_n)$, respectivamente para $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}\,(f)$, também é uniforme. Então estas funções são integráveis-R em $[a, b]$ e tem-se

$$\lim \int_a^b f_n = \lim \int_a^b \mathrm{Re}\,(f_n) + i \lim \int_a^b \mathrm{Im}\,(f_n) = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}\,(f) = \int_a^b f.$$

Exemplo 11.2 - *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ integrável-R, então $|f|$ também é integrável-R.*

Efectivamente a integrabilidade-R das funções $\mathrm{Re}\,(f)$ e $\mathrm{Im}\,(f)$ garante a integrabilidade-R de $\left(\mathrm{Re}^2\,(f) + \mathrm{Im}^2\,(f)\right)^{1/2}$.

A desigualdade dos módulos para integrais mantém-se válida mas a demonstração é menos directa:

Teorema 11.3 - *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ integrável-R, tem-se*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade que o integral não é nulo, seja

$$\lambda = \frac{\left|\int_a^b f\right|}{\int_a^b f}.$$

Temos então

$$\left|\int_a^b f\right| = \mathrm{Re}\left(\left|\int_a^b f\right|\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda \int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(\lambda f) \leq \int_a^b |\lambda f|,$$

e a desigualdade pretendida resulta agora de ser $|\lambda| = 1$.

■

Os conceitos de integral de Riemann impróprio e de convergência simples e absoluta dos integrais deste tipo de generalizam-se directamente às funções complexas de variável real. O resultado do exemplo 11.1 generaliza-se a integrais de Riemann impróprios na seguinte forma:

Teorema 11.4 - *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo de extremos a e b com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, (f_n) uma sucessão de funções $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente integráveis, e suponha-se que (f_n) converge para uma função f, uniformemente em cada intervalo compacto de I. Se existir uma função $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $\int_a^b g$ converge e $|f_n| \leq g$ para cada n, então os integrais $\int_a^b f_n$ e $\int_a^b f$ são absolutamente convergentes e tem-se*

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Demonstração. As relações $|f_n| \leq g$ mostram que os integrais $\int_a^b f_n$ são absolutamente convergentes. Por outro lado, de 11.1 resulta que a função limite f é localmente integrável, e como $|f| = \lim |f_n| \leq g$ conclui-se ainda a convergência absoluta de $\int_a^b f$. Dado $\delta > 0$ sejam agora $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $a < \alpha < \beta < b$ e

$$\int_a^b g - \int_\alpha^\beta g < \frac{\delta}{3}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f - \int_\alpha^\beta f\right| &= \left|\int_a^\alpha f + \int_\beta^b f\right| \leq \int_a^\alpha |f| + \int_\beta^b |f| \\ &\leq \int_a^\alpha g + \int_\beta^b g = \int_a^b g - \int_\alpha^\beta g < \frac{\delta}{3}\end{aligned}$$

e analogamente, para cada índice n,

$$\left|\int_a^b f_n - \int_\alpha^\beta f_n\right| < \frac{\delta}{3}.$$

Como a sucessão (f_n) converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$, do exemplo 11.1 resulta

$$\lim \int_\alpha^\beta f_n = \int_\alpha^\beta f$$

e existe uma ordem k tal que

$$\left| \int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f \right| < \frac{\delta}{3} \quad \text{se} \quad n \geq k.$$

Para cada $n \geq k$ temos assim

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \left| \int_a^b f - \int_\alpha^\beta f \right| + \left| \int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta f_n \right| + \left| \int_\alpha^\beta f_n - \int_a^b f_n \right| < \delta$$

e isto mostra que

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

■

Nota 11.5 - No quadro do integral de Lebesgue a convergência uniforme de (f_n) nos intervalos compactos de I pode ser substituída pela convergência pontual em I sem que a conclusão do teorema seja alterada. Efectivamente, da condição $|f_n| \leq g$ resulta $|\mathrm{Re}\,(f_n)| \leq g$ e $|\mathrm{Im}\,(f_n)| \leq g$, pelo que o teorema da convergência dominada conduz directamente à convergência de $\int_a^b |f|$ e à relação $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, uma função contínua $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se um *caminho em* $\mathbb{C}$ e o domínio de γ diz-se o *intervalo de parametrização* desse caminho. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ dizem-se respectivamente os *pontos inicial e final* do caminho γ e diz-se ainda que γ liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ ou que é um caminho de $\gamma(a)$ para $\gamma(b)$. Um caminho diz-se *fechado* se os seus pontos inicial e final coincidirem.

O contradomínio de um caminho γ é uma curva que se representa por $[\gamma]$. Diz-se então que $[\gamma]$ é a imagem de γ ou a curva descrita por γ, e que γ é uma parametrização da curva $[\gamma]$. Se γ for um caminho constante diz-se também que γ é um *caminho pontual.* Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e um caminho γ, diz-se que γ é um caminho em D se $[\gamma] \subseteq D$.

Exemplo 11.6 - *Se γ é um caminho em $\mathbb{C}$ então a curva $[\gamma]$ é um conjunto compacto e conexo.*

Efectivamente $[\gamma]$ é a imagem de um conjunto compacto e conexo pela função contínua γ.

Exemplo 11.7 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, o caminho γ definido por*

$$\gamma(t) = a + re^{it} \quad \textit{se} \quad t \in [0, 2\pi]$$

descreve a circunferência $C(a,r)$.

Exemplo 11.8 - *O caminho* $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ *definido por* $\gamma(t)=z+t(w-z)$ *liga* z *a* w *e a sua imagem é o segmento* $[z,w]$.

Um caminho $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ diz-se *linear* se tiver a forma

$$\gamma(t)=z+tw \quad \text{com } z,w\in\mathbb{C}.$$

Exemplo 11.9 - *Um caminho linear* $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ *definido por*

$$\gamma(t)=z+tw$$

liga o ponto $z_1=z+aw$ *ao ponto* $z_2=z+bw$, *e a sua imagem é o segmento* $[z_1,z_2]$.

Temos efectivamente

$$\gamma(t)=z_1+\frac{t-a}{b-a}(z_2-z_1) \quad \text{com } a\leq t\leq b.$$

Diz-se que um caminho $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ é a *junção* dos caminhos $\gamma_1,...,\gamma_n$ e escreve-se

$$\gamma=\gamma_1\dotplus\cdots\dotplus\gamma_n$$

se existir uma decomposição $\{t_0,...,t_n\}$ de $[a,b]$ tal que cada γ_k é a restrição de γ ao intervalo $[t_{k-1},t_k]$.

Um caminho diz-se *poligonal* se for uma junção de caminhos lineares. Mais precisamente, dada uma sucessão finita $(z_0,...,z_n)$ de pontos de $\mathbb{C}$ diz-se que γ é um caminho poligonal da forma $(z_0,...,z_n)$ se

$$\gamma=\gamma_1\dotplus\cdots\dotplus\gamma_n$$

em que cada γ_k é um caminho linear que liga z_{k-1} a z_k . Tem-se neste caso

$$[\gamma]=[z_0,z_1]\cup...\cup[z_{n-1},z_n]$$

pelo que γ descreve a linha poligonal $[z_0,z_1]\cup...\cup[z_{n-1},z_n]$. Os pontos z_k dizem-se então os *vértices* de γ.

Dado um caminho $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ chama-se *caminho oposto a* γ ao caminho γ^-definido por

$$\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t) \quad \text{se} \quad t\in[a,b].$$

Temos então $\gamma^-(b)=\gamma(a)$ e $\gamma^-(a)=\gamma(b)$, e como a função φ definida por $\varphi(t)=a+b-t$ aplica $[a,b]$ sobre $[a,b]$ temos também $[\gamma^-]=[\gamma\circ\varphi]=[\gamma]$. Diz-se por isso que γ^- descreve a curva $[\gamma]$ em sentido oposto ao de γ. Como $\varphi\circ\varphi$ é a função identidade de $[a,b]$, da definição resulta ainda $(\gamma^-)^-=\gamma$.

Exemplo 11.10 - *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, se γ é um caminho linear que liga z a w então γ^- é um caminho linear que liga w a z.*

Efectivamente, se $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ é um caminho linear, da definição resulta que o caminho γ^- também é linear.

Um caminho $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se *regular* se tiver derivada contínua ou for uma junção de caminhos com derivada contínua. Sejam agora $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ um caminho regular e $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Define-se então o integral de f ao longo de γ por

$$\int_\gamma f = \int_a^b (f \circ \gamma)\, \gamma'.$$

Nota 11.11 - De acordo com a definição de caminho regular a função γ' que figura no integral do segundo membro desta relação pode não estar definida num conjunto finito de pontos de $[a, b]$. Sabe-se no entanto que isso é irrelevante do ponto de vista da existência ou do valor do integral.

Exemplo 11.12 - *Se um caminho regular γ é uma junção de caminhos regulares $\gamma_1, ..., \gamma_n$, para toda a função contínua $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se*

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f.$$

Efectivamente, sendo $[a, b]$ o domínio de γ, existe uma decomposição $\{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ tal que cada γ_k é a restrição de γ a $[t_{k-1}, t_k]$. Temos então

$$\int_\gamma f = \int_a^b (f \circ \gamma)\, \gamma' = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \gamma)\, \gamma' = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \gamma_k)\, \gamma_k' = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f.$$

Teorema 11.13 - *Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $c < d$, sejam φ uma aplicação linear de $[c, d]$ sobre $[a, b]$ e $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ um caminho regular. Dada uma função contínua $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se então*

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f = \operatorname{sgn}(\varphi') \int_\gamma f.$$

Demonstração. Atendendo ao exemplo anterior e à definição de caminho regular, basta provar o enunciado no caso em que γ tem derivada contínua. É então

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f = \int_c^d (f \circ (\gamma \circ \varphi))\, (\gamma \circ \varphi)' = \int_c^d ((f \circ \gamma) \circ \varphi)\, (\gamma' \circ \varphi)\, \varphi'$$

pelo que, pondo $g = (f \circ \gamma)\, \gamma'$ e usando a fórmula de mudança de variável, obtemos

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f = \int_c^d (g \circ \varphi)\, \varphi' = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} g.$$

Notando agora que é $\varphi(c) = a$ e $\varphi(c) = b$ ou $\varphi(c) = b$ e $\varphi(c) = a$ consoante φ for estritamente crescente ou descrescente, resulta

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} g = \operatorname{sgn}(\varphi') \int_a^b g = \operatorname{sgn}(\varphi') \int_\gamma f.$$

■

Dado um caminho $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se que um caminho $\sigma : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ é *equivalente a* γ se existir uma aplicação linear estritamente crescente φ de $[c, d]$ sobre $[a, b]$ tal que $\sigma = \gamma \circ \varphi$. Como existe uma única função φ que verifica esta condição, segue–se que existe um só caminho σ equivalente a γ com domínio $[c, d]$. Diz-se então que σ é o caminho que resulta de γ substituindo o intervalo de parametrização $[a, b]$ por $[c, d]$.

Corolário 1 - *Sejam γ um caminho regular em $\mathbb{C}$ e σ um caminho equivalente. Dada uma função contínua $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ é então*

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior notando que o caminho σ também é regular e que a função linear φ é agora estritamente crescente.

■

Nota 11.14 - Dado um caminho $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, seja $\sigma : [c, c + h]$ um caminho tal que $\sigma(c) = \gamma(b)$. Substituindo então σ pelo caminho equivalente σ_0 com intervalo de parametrização $[b, b + h]$ pode formar-se a junção $\gamma \dot{+} \sigma_0$. Como o corolário anterior mostra que o intervalo de parametrização é irrelevante no cálculo de integrais ao longo de caminhos, por um abuso cómodo de notação e de linguagem representa-se habitualmente esta junção por $\gamma \dot{+} \sigma$ e diz-se ainda que ela é a junção dos caminhos γ e σ.

Corolário 2 - *Sejam γ um caminho regular em $\mathbb{C}$ e $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Tem-se então*

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior pois $\gamma^- = \gamma \circ \varphi$ em que φ é uma função linear estritamente decrescente.

■

Exemplo 11.15 - *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ seja $f : [z, w] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Se γ e σ são caminhos lineares que ligam z a w tem-se*

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f.$$

Sejam efectivamente $[a, b]$ e $[c, d]$ os domínios respectivos de γ e de σ, e φ a função linear estritamente crescente que aplica $[c, d]$ sobre $[a, b]$. Como $\gamma \circ \varphi$ também é uma função linear, das relações

$$(\gamma \circ \varphi)(c) = z = \sigma(c) \quad \text{e} \quad (\gamma \circ \varphi)(d) = w = \sigma(d)$$

resulta $\gamma \circ \varphi = \sigma$ e conclui-se que γ e σ são caminhos equivalentes.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ e uma função contínua $f : [z, w] \longrightarrow \mathbb{C}$, representa-se pelo símbolo

$$\int_z^w f.$$

o valor comum dos integrais

$$\int_\gamma f$$

em que γ é um caminho linear que liga z a w.

Nota 11.16 - Se $z, w \in \mathbb{R}$, a função γ definida por $\gamma(t) = t$ com $t \in [z, w]$ é um caminho linear que liga z a w. Temos então

$$\int_z^w f = \int_z^w f(t)dt$$

pelo que a notação aqui usada é uma generalização da que se utiliza em Análise Real.

Exemplo 11.17 - *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, $u \in [z, w]$ e $f : [z, w] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Tem-se então*

$$\int_u^u f = 0 \ , \quad \int_w^z f = -\int_z^w f \quad e \quad \int_z^w f = \int_z^u f + \int_u^w f.$$

Efectivamente um caminho linear γ que ligue u a u é necessariamente constante pelo que $\gamma' = 0$ e o integral correspondente é nulo. Se γ é um caminho linear que liga z a w então γ^- é um caminho linear que liga w a z pelo que

$$\int_w^z f = \int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f = -\int_z^w f.$$

Finalmente, supondo sem perda de generalidade $u \neq z$ e $u \neq w$, seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ um caminho linear que liga z a w. Tomando $c \in]a, b[$ tal que $\gamma(c) = u$ e sendo γ_1 e γ_2 as restrições de γ respectivamente a $[a, c]$ e a $[c, b]$ temos

$$\int_z^w f = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_z^u f + \int_u^w f.$$

Dado um caminho regular $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, define-se o *comprimento de* γ por

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'| \,.$$

Exemplo 11.18 - *Se γ e σ são caminhos em $\mathbb{C}$ regulares e equivalentes, tem-se $L(\gamma) = L(\sigma)$.*

Suponha-se efectivamente que $[a,b]$ e $[c,d]$ são os domínios respectivos de γ e de σ. Sendo φ a aplicação linear estritamente crescente de $[c,d]$ sobre $[a,b]$ temos então

$$\int_c^d |\sigma'| = \int_c^d |(\gamma' \circ \varphi)\, \varphi'| = \int_c^d |(\gamma' \circ \varphi)|\, \varphi' = \int_a^b |\gamma'| \,.$$

Exemplo 11.19 - *Dado um caminho regular γ em $\mathbb{C}$ é $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.*

Efectivamente, sendo $[a,b]$ o domínio de γ e φ a função definida por $\varphi(t) = a + b - t$ se $t \in [a,b]$, temos

$$L\left(\gamma^-\right) = \int_a^b |(\gamma' \circ \varphi)\, \varphi'| = -\int_a^b |(\gamma' \circ \varphi)|\, \varphi' = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} |\gamma'| = \int_a^b |\gamma'| \,.$$

Exemplo 11.20 - *Se γ é um caminho linear que liga z a w, temos*

$$L(\gamma) = |w - z| \,.$$

Efectivamente, atendendo ao exemplo 11.18 e tomando o caminho γ definido por $\gamma(t) = z + t\,(w - z)$ se $t \in [0,1]$, temos

$$L(\gamma) = \int_0^1 |w - z|\, dt = |w - z| \,.$$

É válida a seguinte estimativa:

Teorema 11.21 - *Sejam γ um caminho regular em $\mathbb{C}$ e $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Temos então*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq L(\gamma) \sup \{ |f(z)| : z \in [\gamma] \} \,.$$

Demonstração. Sendo $[a,b]$ o domínio de γ e pondo $M = \sup\{|f(z)| : z \in [\gamma]\}$, temos efectivamente

$$\left| \int_\gamma f \right| = \left| \int_a^b f\left(\gamma(t)\right) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f\left(\gamma(t)\right) \gamma'(t)|\, dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = M L(\gamma).$$

■

Podemos agora generalizar o exemplo 11.1 aos integrais ao longo de caminhos regulares.

Teorema 11.22 - *Sejam γ um caminho regular em $\mathbb{C}$, $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e (f_n) uma sucessão de funções contínuas $f_n : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$. Se (f_n) convergir uniformemente para f tem-se*

$$\lim \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

Demonstração. Pondo

$$\varepsilon_n = \sup_{z\in[\gamma]} |f_n(z) - f(z)|,$$

de acordo com o teorema anterior temos

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \leq \varepsilon_n L(\gamma)$$

e o enunciado resulta então de ser $\lim \varepsilon_n = 0$.
■

O teorema seguinte generaliza a fórmula de Barrow aos integrais ao longo de caminhos regulares.

Teorema 11.23 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e suponha-se que f admite uma primitiva F. Se γ é um caminho regular em D com ponto inicial z e ponto final w, tem-se*

$$\int_\gamma f = F(w) - F(z).$$

Demonstração. Seja $\{t_0, ..., t_n\}$ uma decomposição de $[a, b]$ tal que a restrição de γ a cada $[t_{k-1}, t_k]$ é um caminho γ_k com derivada contínua. Temos então

$$\int_{\gamma_k} f = \int_{\gamma_k} F' = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F' \circ \gamma_k)\, \gamma_k' = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma_k)' = F(\gamma_k(t_k)) - F(\gamma_k(t_{k-1}))$$

e resulta

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(w) - F(z).$$

■

Nota 11.24 - O teorema anterior permite dar uma nova demonstração da segunda parte do teorema 6.10. Supondo D aberto e conexo, seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$

uma função com derivada identicamente nula. Fixado um ponto $z_0 \in D$, o teorema 5.27 mostra que para cada ponto $w \in D$ existe uma linha poligonal $[z_0, z_1] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n]$ contida em D e tal que $z_n = w$. Tomando para γ um caminho poligonal da forma $(z_0, ..., z_n)$, a conclusão $f(w) = f(z_0)$ resulta então de ser

$$f(w) - f(z_0) = \int_\gamma f' = \int_\gamma 0 = 0.$$

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e primitivável, e $z, w \in D$. Se γ_1 e γ_2 são dois caminhos regulares em D que ligam z a w, tem-se*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e primitivável. Para cada caminho γ em D, regular e fechado, tem-se então*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Demonstração. Efectivamente neste caso os pontos inicial e final de γ coincidem.

■

Corolário 3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função com derivada contínua. Dados $z, w \in D$ tais que $[z, w] \subseteq D$, tem-se*

$$|f(w) - f(z)| \leq \sup_{\zeta \in [z,w]} |f'(\zeta)| \, |w - z| \, .$$

Demonstração. É efectivamente

$$|f(w) - f(z)| = \left| \int_z^w f'(\zeta) d\zeta \right|$$

pelo que basta agora aplicar o exemplo 11.20 e o teorema 11.21.

■

Exemplo 11.25 - *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$ tem-se*

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{1}{\left(1 - \zeta^2\right)^{1/2}} d\zeta.$$

Efectivamente o teorema 10.24 mostra que a função arcsin é uma primitiva da função integranda no conjunto $D = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. Como este é um conjunto em estrela relativamente ao ponto 0, o integral ao longo do segmento

$[0, z]$ está definido para todo o $z \in D$. Finalmente, se $z = \pm 1$ a identidade traduz um resultado conhecido da Análise Real.

Exemplo 11.26 - *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \{\text{Re}(z) = 0 \text{ e } |\text{Im}(z)| \geq 1\}$ *tem-se*

$$\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta.$$

Efectivamente o teorema 10.27 mostra que a função arctan é uma primitiva da função integranda no conjunto referido, e este é um conjunto em estrela relativamente ao ponto 0.

Exemplo 11.27 - *Dados um caminho* γ *em* $\mathbb{C}$*, fechado e regular, e um ponto* $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$*, tem-se*

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = 0 \quad \textit{se} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Efectivamente basta aplicar o corolário 2 do teorema 11.23 notando que

$$\left(\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \right)' = (z-a)^n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \quad \text{e} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}.$$

O estudo do caso $n = -1$ no enunciado do exemplo anterior é fundamental em Análise Complexa. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 11.28 - *Sejam* γ *um caminho em* $\mathbb{C}$ *fechado e regular, e* Ind_γ *a função definida por*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma].$$

Então esta função só toma valores inteiros, é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$*, é nula na componente ilimitada de* $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$*, e tem-se*

$$Ind_{\gamma^-}(z) = -Ind_\gamma(z).$$

Demonstração. Fixado $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ seja $[a, b]$ o domínio de γ e f a função definida neste intervalo por $f(t) = \gamma(t) - z$. O teorema 10.15 mostra então que existe um ramo λ do logaritmo de f, e sendo $\{t_0, ..., t_n\}$ uma decomposição de $[a, b]$ tal que a restrição γ_k de γ a cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tem derivada contínua, do teorema 10.13 resulta

$$\lambda'(t) = \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t) - z} \quad \text{se} \quad t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Temos assim

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t) - z} dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda'(t)dt = \lambda\left(t_k\right) - \lambda\left(t_{k-1}\right)$$

e portanto

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda\left(t_k\right) - \lambda\left(t_{k-1}\right)\right) = \lambda(b) - \lambda(a).$$

Como $f(a) = f(b)$ segue-se que $\lambda\left(a\right)$ e $\lambda\left(b\right)$ são logaritmos do mesmo número complexo e isso exige que exista um inteiro m tal que $\lambda(b) - \lambda(a) = 2m\pi i$. É então $Ind_\gamma(z) = m$ o que prova a primeira parte do enunciado.

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ consideremos agora uma sucessão (z_n) de pontos de $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ com limite z. Pondo $f\left(\zeta\right) = \zeta - z$ e $f_n(\zeta) = \zeta - z_n$ se $\zeta \in [\gamma]$, como a convergência de f_n para f é trivialmente uniforme em $[\gamma]$, do exemplo 7.5 resulta que $1/f_n$ também converge uniformemente para $1/f$ em $[\gamma]$. Então o teorema 11.22 permite concluir que $\lim Ind_\gamma\left(z_n\right) = Ind_\gamma\left(z\right)$ e isto prova a continuidade de Ind_γ no ponto z.

Como a função Ind_γ é contínua e as componentes conexas de $\mathbb{Z}$ são conjuntos singulares, ela é necessariamente constante em cada componente conexa de $\mathbb{C}\setminus [\gamma]$. Por outro lado, como o teorema 5.17 mostra que $\mathbb{C}\setminus [\gamma]$ tem uma só componente conexa ilimitada, dado $R > 0$ tal que $[\gamma] \subseteq B(0, R)$ o conjunto conexo $\mathbb{C} \setminus B(0, R)$ está necessariamente contido nessa componente. Em particular, escolhendo $z \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$ tal que $|z| > R + L(\gamma)/2\pi$, do teorema 11.21 deduz-se

$$|Ind_\gamma(z)| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z| - R)} < 1$$

pelo que $Ind_\gamma(z) = 0$.

Finalmente a relação $Ind_{\gamma^-}(z) = -Ind_\gamma(z)$ resulta directamente do corolário 2 do teorema 11.13.

■

O inteiro $Ind_\gamma(z)$ definido no teorema anterior diz-se o *índice de z relativamente ao caminho γ*, e um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ diz-se *interior* ou *exterior* a γ consoante se tiver respectivamente $Ind_\gamma(z) \neq 0$ ou $Ind_\gamma(z) = 0$. De acordo com o teorema anterior todos os pontos da componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ são exteriores a γ. Dado um caminho γ em $\mathbb{C}$ fechado e regular, diz-se ainda que o conjunto dos pontos interiores a γ é o o *interior do caminho γ*.

O conceito de índice de um ponto z relativamente ao caminho γ pode interpretar-se geometricamente de um modo particularmente sugestivo. Na demonstração anterior viu-se que sendo $[a, b]$ o domínio de γ, $f = \gamma - z$ e λ um ramo do logaritmo de f, se tem

$$Ind_\gamma(z) = \frac{\lambda(b) - \lambda(a)}{2\pi i}.$$

Como $\lambda(a)$ e $\lambda(b)$ são logaritmos do mesmo número complexo, representando por θ um ramo do argumento de f esta relação equivale então a

$$Ind_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Dado que $\theta(b) - \theta(a)$ é a variação do argumento de $f(\zeta) = \zeta - z$ quando ζ percorre o caminho γ, verifica-se assim que $Ind_\gamma(z)$ indica o número de voltas descritas por γ em torno de z, desde que a cada volta se atribua o sinal $+$ ou $-$ consoante o sentido do percurso.

Exemplo 11.29 - *Se um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ for tal que $\mathbb{C} \setminus E$ não tem componentes conexas limitadas então E contém o interior de todo o caminho em E, fechado e regular.*

Efectivamente, dado um caminho em E fechado e regular γ e um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus E$, seja C a componente conexa de $\mathbb{C} \setminus E$ a que pertence z. Como $\mathbb{C} \setminus E \subseteq \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ resulta que C está contido nalguma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ e esta componente é necessariamente ilimitada. Pelo teorema anterior é então $Ind_\gamma(z) = 0$ e conclui-se que z é exterior a γ.

Exemplo 11.30 - *Um conjunto em estrela $E \subseteq \mathbb{C}$ contém o interior de qualquer caminho em E, fechado e regular.*

Efectivamente isto resulta do exemplo anterior aplicando o teorema 5.18.

Exemplo 11.31 - *Dado um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$, se as suas componentes conexas forem simplesmente conexas então D contém o interior de qualquer caminho em E, fechado e regular.*

Efectivamente, dado um caminho γ em D, como o conjunto $[\gamma]$ é conexo ele está necessariamente contido nalguma componente conexa C de D. Então γ é um caminho em C e basta agora aplicar o exemplo 11.29 e a definição de conjunto simplesmente conexo.

Exemplo 11.32 - *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Im}(z) < 0$ e $\operatorname{Im}(w) > 0$. Seja ainda $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ em que γ_1 é um caminho regular que liga z a w sem intersectar $\mathbb{R}_0^-$, e γ_2 um caminho regular que liga w a z sem intersectar $\mathbb{R}_0^+$. É então $Ind_\gamma(0) = 1$.*

Efectivamente, como $\ln\zeta$ é uma primitiva de $1/\zeta$ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ e $\ln(-\zeta)$ é uma primitiva de $1/\zeta$ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$, temos

$$\begin{aligned} Ind_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\ln w - \ln z + \ln(-z) - \ln(-w)\right). \end{aligned}$$

Basta agora notar que do exemplo 10.5 resulta

$$\ln(-z) = \ln z + i\pi \quad \text{e} \quad \ln(-w) = \ln w - i\pi.$$

Nos casos de maior interesse prático o interior de γ tem uma só componente e para cada ponto z interior a γ é $Ind_\gamma(z) = 1$ ou $Ind_\gamma(z) = -1$. Nesta situação diremos que γ é um *caminho fechado elementar*, orientado positivamente ou negativamente consoante os seus pontos interiores tiverem índice 1 ou -1.

Os exemplos seguintes são geometricamente bastante intuitivos.

Exemplo 11.33 - *Dados $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, o caminho γ definido por*

$$\gamma(t) = c + re^{i(\alpha+t)} \quad se \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

é um caminho fechado elementar, orientado positivamente, cujo interior é o círculo $B(c,r)$.

Efectivamente o complementar de $[\gamma]$ é a união dos conjuntos conexos $B(c,r)$ e $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(c,r)$. Notando ainda que

$$Ind_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{i(\alpha+t)}}{re^{i(\alpha+t)}}dt = 1,$$

deduz-se

$$Ind_\gamma(z) = 1 \quad \text{se} \quad z \in B(c,r).$$

Caminhos fechados da forma definida no exemplo anterior dizem-se *caminhos circulares* de centro c e raio r, orientados positivamente.

Exemplo 11.34 - *Dados $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $c < d$, seja R o rectângulo fechado de $\mathbb{C}$ definido por*

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [a,b] \;\; e \;\; \operatorname{Im}(z) \in [c,d]\}.$$

Sendo ainda

$$z_1 = a + ic,\ z_2 = b + ic,\ z_3 = b + id \quad e \quad z_4 = a + id,$$

todo o caminho poligonal γ da forma $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_1)$ é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é $R \setminus [\gamma]$.

Efectivamente, como R é convexo o exemplo 11.30 mostra que se tem $Ind_\gamma(z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus R$. Dado $z \in R \setminus [\gamma]$ ponha-se ainda $w_i = z_i - z$ para $i \in \{1,2,3,4\}$ e seja $\varphi = \gamma - z$. Então φ é um caminho poligonal da forma $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_1)$, e sendo $[\alpha, \beta]$ o domínio de γ temos

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = Ind_\varphi(0).$$

Notando agora que é $\operatorname{Im}(w_1) < 0$, $\operatorname{Im}(w_3) > 0$, e que as linhas poligonais $[w_1, w_2] \cup [w_2, w_3]$ e $[w_3, w_4] \cup [w_4, w_1]$ não intersectam respectivamente $\mathbb{R}_0^-$ e $\mathbb{R}_0^+$, o exemplo 11.32 permite concluir a relação $Ind_\varphi(0) = 1$.

Caminhos fechados da forma definida no exemplo anterior dizem-se *caminhos rectangulares* orientados positivamente.

Exemplo 11.35 - *Sejam* $R > 0$, θ_1, θ_2 *tais que* $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, γ_1 *um caminho linear da forma* $(0, Re^{i\theta_1})$, γ_2 *o caminho definido por* $\gamma_2(t) = Re^{it}$ *com* $t \in [\theta_1, \theta_2]$, *e* γ_3 *um caminho linear da forma* $\left(0, Re^{i\theta_2}\right)$. *Então o caminho* $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3^-$ *é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o sector circular*

$$S = \left\{re^{it} : 0 < r < R \text{ e } \theta_1 < t < \theta_2\right\}.$$

Efectivamente, como

$$S \cup [\gamma] = \left\{re^{it} : 0 \leq r \leq R \text{ e } \theta_1 \leq t \leq \theta_2\right\}$$

é um conjunto em estrela relativamente ao ponto 0, de 11.30 resulta que todo o ponto de $\mathbb{C} \setminus (S \cup [\gamma])$ é exterior a γ.

Sejam agora ρ_1, ρ_2 e ρ_3 os caminhos definidos respectivamente por $\rho_1 = \gamma_3$, $\rho_2(t) = Re^{it}$ com $t \in [\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ e $\rho_3 = \gamma_1^-$, e ponha-se $\rho = \rho_1 \dot{+} \rho_2 \dot{+} \rho_3$. Aplicando a conclusão anterior a ρ com θ_2 no lugar de θ_1 e $\theta_1 + 2\pi$ no lugar de θ_2, conclui-se então que cada ponto de S é exterior a ρ. Pondo ainda $\sigma = \gamma \dot{+} \rho$, para cada $w \in S$ temos assim

$$\begin{aligned} Ind_\gamma(w) &= Ind_\gamma(w) + Ind_\rho(w) = Ind_\sigma(w) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_2} \frac{1}{z}dz = Ind_{\gamma_2 \dot{+} \rho_2}(w) \\ &= 1 \end{aligned}$$

uma vez que $\gamma_2 \dot{+} \rho_2$ é um caminho circular de centro em 0 e raio R orientado positivamente.

Exemplo 11.36 - *Sejam* R_1, R_2 tais que $0 < R_1 < R_2$, θ_1, θ_2 *tais que* $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, γ_1 *um caminho linear da forma* $(R_1e^{i\theta_1}, R_2e^{i\theta_1})$, γ_2 *o caminho definido por* $\gamma_2(t) = R_2e^{it}$ *com* $t \in [\theta_1, \theta_2]$, γ_3 *um caminho linear da forma* $\left(R_1e^{i\theta_2}, R_2e^{i\theta_2}\right)$ *e* γ_4 *o caminho definido por* $\gamma_4(t) = R_1e^{it}$ *com* $t \in [\theta_1, \theta_2]$. *Então o caminho* $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3^- \dot{+} \gamma_4^-$ *é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o conjunto*

$$T = \left\{re^{it} : R_1 < r < R_2 \text{ e } \theta_1 < t < \theta_2\right\}$$

Sejam efectivamente ρ_1 um caminho linear da forma $\left(0, R_1e^{i\theta_1}\right)$, ρ_2 um caminho linear da forma $\left(0, R_1e^{i\theta_2}\right)$ e considerem-se os caminhos

$$\rho = \rho_1 \dot{+} \gamma_4 \dot{+} \rho_2^- \text{ e } \sigma = \rho_1 \dot{+} \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3^- \dot{+} \rho_2^-.$$

Então ρ e σ são ambos caminhos do tipo considerado no exemplo anterior e dado $w \in T$ tem-se $Ind_\rho(w) = 0$ e $Ind_\sigma(w) = 1$. Por outro lado, atendendo às definições é

$$Ind_\sigma(w) = Ind_\gamma(w) + Ind_\rho(w) \quad \text{se} \quad w \in \mathbb{C} \setminus ([\gamma] \cup [\rho]) \,.$$

pelo que

$$Ind_\gamma(w) = Ind_\sigma(w) - Ind_\rho(w) = 1.$$

Finalmente, representando por G o conjunto dos pontos exteriores a σ temos $\mathbb{C} \setminus (T \cup [\gamma]) = G \cup B\,(0, R_1)$. Como G e $B\,(0, R_1)$ são conjuntos conexos e

$$G \cap B\,(0, R_1) = \left\{re^{i\theta} : 0 < r < R_1 \text{ e } \theta_2 < \theta < \theta_1 + 2\pi\right\} \neq \varnothing$$

segue-se que $\mathbb{C} \setminus (T \cup [\gamma])$ também é conexo. Então $\mathbb{C} \setminus (T \cup [\gamma])$ é um conjunto conexo ilimitado contido em $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ pelo que todos os seus pontos são exteriores a γ e conclui-se que T é efectivamente o interior de γ.

12 - O lema de Goursat

Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma função contínua $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é importante saber em que condições f é primitivável. O teorema seguinte dá uma condição suficiente para que isso aconteça.

Teorema 12.1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Se existir uma função $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\int_z^w f = F(w) - F(z) \quad \textit{sempre que} \quad [z, w] \subseteq D,$$

então F é uma primitiva de f.

Demonstração. Fixado um ponto $a \in D$ e tomando $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq D$, para cada $z \in B(a, r)$ temos

$$F(z) - F(a) = \int_a^z f(\zeta)\, d\zeta.$$

Por outro lado, como $f(a)z$ é uma primitiva de $f(a)$ temos também

$$\int_a^z f(a) d\zeta = f(a)(z - a)$$

e daqui resulta

$$\frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) = \frac{\int_a^z (f(\zeta) - f(a))\, d\zeta}{z - a} \quad \text{se} \quad 0 < |z - a| < r. \tag{12.1}$$

Atendendo ao teorema 11.21 e ao exemplo 11.20 é ainda

$$\left| \int_a^z (f(\zeta) - f(a))\, d\zeta \right| \leq |z - a| \sup_{\zeta \in [a,z]} |f(\zeta) - f(a)|$$

e de (12.1) vem

$$\left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| \leq \sup_{\zeta \in [a,z]} |f(\zeta) - f(a)| \quad \text{se} \quad 0 < |z - a| < r.$$

Como f é contínua em a, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(a)| < \delta/2$ se $\zeta \in B(a, \varepsilon_0) \cap D$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, r\}$ temos assim

$$\sup_{\zeta \in [a,z]} |f(\zeta) - f(a)| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{se} \quad 0 < |z - a| < \varepsilon$$

pelo que

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a}-f(a)\right|<\delta \quad \text{se} \quad 0<|z-a|<\varepsilon$$

e portanto

$$\lim_{z\to a}\frac{F(z)-F(a)}{z-a}=f(a).$$

É então $F'(a)=f(a)$ e conclui-se que F é uma primitiva de f.

■

Corolário - *Sejam $D\subseteq\mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ uma função contínua. Se para todo o caminho poligonal fechado γ em D for*

$$\int_\gamma f=0$$

então f é primitivável.

Demonstração. Fixado $a\in D$ seja C a componente conexa de D tal que $a\in C$. Como C é aberto, o teorema 5.27 mostra que para cada $z\in C$ existe um caminho poligonal γ_z em C que liga a a z. Seja então F a função definida em C por

$$F(z)=\int_{\gamma_z} f$$

e considerem-se dois pontos $z,w\in C$ tais que $[z,w]\subseteq C$. Representando por σ um caminho linear que ligue z a w e pondo $\gamma=\gamma_z\dotplus\sigma\dotplus\gamma_w^-$, como γ é um caminho poligonal fechado em D resulta

$$0=\int_\gamma f=\int_{\gamma_z} f+\int_z^w f+\int_{\gamma_w^-}.$$

Temos assim

$$\int_z^w f=\int_{\gamma_w} f-\int_{\gamma_z} f=F(w)-F(z)$$

e o teorema anterior mostra que F é uma primitiva de f em C. Conclui-se deste modo que f tem uma primitiva em cada componente conexa de D pelo que f é primitivável.

■

Podemos agora provar as seguintes equivalências:

Teorema 12.2 - *Dados um conjunto aberto $D\subseteq\mathbb{C}$ e uma função contínua $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ são equivalentes as condições:*

1 - f é primitivável.

2 - Existe uma função $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que, para todo o par de pontos $z, w \in D$ e para todo o caminho regular γ em D com ponto inicial z e ponto final w, é

$$\int_\gamma f = F(w) - F(z).$$

3 - Para todo o caminho γ em D, fechado e regular, é

$$\int_\gamma f = 0.$$

Demonstração. O teorema 11.23 mostra que a condição 1 implica a condição 2. Como num caminho fechado o ponto inicial e o ponto final coincidem, segue-se que a condição 2 implica a condição 3. Finalmente o corolário do teorema anterior mostra que a condição 3 implica a condição 1.

■

Se a função f for holomorfa, Goursat mostrou que é nulo o integral de f ao longo da fronteira de qualquer triângulo contido no seu domínio. Para obter este resultado fundamental começaremos com algumas definições.

Dados três pontos $u, v, w \in \mathbb{C}$ chamamos *triângulo de vértices* u, v e w ao conjunto convexo T gerado por esses pontos, ou seja, à intersecção dos conjuntos convexos que contêm $\{u, v, w\}$. Em particular os três segmentos definidos pelos vértices estão contidos em T e dizem-se os lados de T.

Sendo (z_1, z_2, z_3) uma permutação de (u, v, w) e γ um caminho poligonal da forma (z_1, z_2, z_3, z_1) diremos que γ é um *caminho associado ao triângulo* T ou um *caminho triangular de vértices* u, v, w. Atendendo ao exemplo 11.20 temos então

$$L(\gamma) = |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + |z_1 - z_3|,$$

pelo que $L(\gamma)$ é a soma dos comprimentos dos lados de T, ou seja, o perímetro de T.

Vamos agora estabelecer alguns resultados auxiliares.

Lema 12.3 - *Dado um triângulo $T \subseteq \mathbb{C}$ seja γ um caminho associado a T. Se $z, w \in T$ é então*

$$|z - w| \leq L(\gamma).$$

Demonstração. Sejam z_1, z_2, z_3 os vértices de T e γ um caminho associado a T. Supondo $|z_3 - z_1| \leq |z_2 - z_1|$ e sendo $r = |z_2 - z_1|$, o círculo fechado $\overline{B}(z_1, r)$ é um conjunto convexo que contém os vértices de T, pelo que $T \subseteq \overline{B}(z_1, r)$. Dados $z, w \in T$ é então $|z - w| \leq |z - z_1| + |z_1 - w| \leq 2r = 2|z_2 - z_1|$, e de $|z_2 - z_1| \leq |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$ resulta

$$|z - w| \leq |z_2 - z_1| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| = L(\gamma). \qquad ■$$

Lema 12.4 - *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e sendo T o triângulo de vértices z_1, z_2, z_3 tem-se*

$$T = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Demonstração. Pondo

$$A = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

vejamos em primeiro lugar que $T \subseteq A$. Tomando dois pontos $z, w \in A$, o segmento $[z, w]$ é o conjunto dos pontos da forma $\alpha z + \beta w$ com $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Fixados α e β nestas condições, sejam $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$ e $w = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3$. Temos então

$$\alpha z + \beta w = \sum_{k=1}^{3} (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) z_k$$

e como

$$\sum_{k=1}^{3} (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) = \alpha \sum_{k=1}^{3} \lambda_k + \beta \sum_{k=1}^{3} \mu_k = \alpha + \beta = 1,$$

segue-se que $\alpha z + \beta w \in A$. Isto mostra que $[z, w] \subseteq A$ pelo que A é convexo, e como $z_1, z_2, z_3 \in A$ conclui-se que $T \subseteq A$.

Reciprocamente, para provar a inclusão $A \subseteq T$ tomamos

$$z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \in A$$

e verificamos que $z \in T$. Se $\lambda_3 = 1$ é $z = z_3 \in T$ e basta assim considerar o caso $\lambda_3 < 1$. Sendo então $\mu_1 = \lambda_1 / (1 - \lambda_3)$ e $\mu_2 = \lambda_2 / (1 - \lambda_3)$ temos $\mu_1 + \mu_2 = 1$ pelo que, pondo $w = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2$, vemos que $w \in [z_1, z_2] \subseteq T$. Como é $z = (1 - \lambda_3) w + \lambda_3 z_3$ resulta que $z \in [w, z_3] \subseteq T$.

■

Lema 12.5 - *Um triângulo em $\mathbb{C}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $T \subseteq \mathbb{C}$ um triângulo de vértices z_1, z_2, z_3. Dada uma sucessão (w_n) de pontos de T o lema anterior mostra que os w_n são da forma

$$w_n = p_n z_1 + q_n z_2 + (1 - p_n - q_n) z_3$$

em que $p_n, q_n \geq 0$ e $p_n + q_n \leq 1$. Pondo $u_n = p_n + i q_n$ define-se assim uma sucessão limitada (u_n) que tem uma subsucessão convergente (u_{α_n}). Então a sucessão (w_{α_n}) também converge e o seu limite é da forma

$$w = p z_1 + q z_2 + (1 - p - q) z_3$$

em que $p = \lim p_{\alpha_n}$ e $q = \lim q_{\alpha_n}$. Como $p, q \geq 0$ e $p + q \leq 1$, segue-se que $w \in T$ e isto mostra que T é compacto. ■

Lema 12.6 - *Sejam $T \subseteq \mathbb{C}$ um triângulo, $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e γ um caminho associado a T. Existem então um triângulo $S \subseteq T$ e um caminho σ associado a S tais que $L(\sigma) = L(\gamma)/2$ e*

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq 4 \left|\int_\sigma f\right|.$$

Demonstração. Seja (z_1, z_2, z_3) uma permutação dos vértices de T e suponha-se que γ é um caminho da forma (z_1, z_2, z_3, z_1). Pondo

$$a = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad b = \frac{z_2 + z_3}{2} \text{ e } c = \frac{z_3 + z_1}{2}$$

segue-se que a, b e c são os pontos médios respectivos dos segmentos $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ e $[z_3, z_1]$, e temos

$$|a - z_1| = |z_2 - a| = |b - c| = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|, \tag{12.2}$$

$$|b - z_2| = |z_3 - b| = |c - a| = \frac{1}{2}|z_3 - z_2|, \tag{12.3}$$

e

$$|c - z_3| = |z_1 - c| = |b - a| = \frac{1}{2}|z_1 - z_3|. \tag{12.4}$$

Sejam agora γ_1,γ_2,γ_3 e γ_4 caminhos respectivamente da forma (z_1, a, c, z_1), (a, z_2, b, a), (b, z_3, c, b) e (a, b, c, a). Como os vértices destes caminhos são pontos de T, a convexidade de T mostra que todos os γ_k são caminhos em T. Temos então

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{z1}^a f + \int_a^c f + \int_c^{z_1} f\ , \ \int_{\gamma_2} f = \int_a^{z_2} f + \int_{z_2}^b f + \int_b^a f,$$

$$\int_{\gamma_3} f = \int_b^{z_3} f + \int_{z_3}^c f + \int_c^b f \ \text{ e } \int_{\gamma_4} f = \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f,$$

e atendendo ao exemplo 11.17 resulta

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f = \int_{z_1}^a f + \int_a^{z2} f + \int_{z_2}^b f + \int_b^{z_3} f + \int_{z_3}^c f + \int_c^{z_1} f,$$

identidade que se reduz a

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f = \int_{z_1}^{z_2} f + \int_{z_2}^{z_3} f + \int_{z_3}^{z_1} f,$$

ou seja, a

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f. \tag{12.5}$$

Por outro lado, atendendo a (12.2), (12.3) e (12.4) temos

$$L(\gamma_1) = |a - z_1| + |c - a| + |z_1 - c| = \frac{1}{2}(|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + |z_1 - z_3|) = \frac{1}{2}L(\gamma)$$

e obtém-se identidades análogas para os restantes caminhos γ_k, pelo que

$$L(\gamma_k) = \frac{1}{2}L(\gamma) \quad \text{se} \quad 1 \leq k \leq 4. \tag{12.6}$$

Sendo agora σ um dos caminhos γ_k para o qual

$$\left| \int_{\gamma_k} f \right|$$

atinge o valor máximo, de (12.5) resulta

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left| \int_{\gamma_k} f \right| \leq 4 \left| \int_{\sigma} f \right|.$$

Representando então por S o triângulo cujos vértices são os vértices do caminho triangular σ, a convexidade de T mostra que $S \subseteq T$. Atendendo a (12.6) temos também $L(\sigma) = L(\gamma)/2$ o que acaba de estabelecer o enunciado.
■

Estamos agora em condições de demonstrar o resultado obtido por Goursat.

Teorema 12.7 (Lema de Goursat) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e T um triângulo contido em D. Para cada caminho γ associado a T tem-se*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Demonstração. Aplicando indutivamente o lema 12.6 obtém-se uma sucessão $(T_n)_{n \geq 0}$ de triângulos e uma correspondente sucessão (γ_n) de caminhos associados tais que $T_0 = T$, $\gamma_0 = \gamma$, $T_{n+1} \subseteq T_n$, $L(\gamma_n) = L(\gamma)/2^n$ e

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f \right|. \tag{12.7}$$

Atendendo a que os T_n são conjuntos compactos, o teorema 4.6 garante a existência de um ponto c que pertence a todos os T_n. Como f é holomorfa em c existe também uma função contínua $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(c) = 0$ e

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + \varphi(z)(z - c) \quad \text{se} \quad z \in D.$$

Definindo agora uma função $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(z) = f(c)\, z + \frac{1}{2} f'(c)\, (z-c)^2$$

segue-se que F é uma primitiva de $f(z) - \varphi(z)\,(z-c)$. Para cada $n \geq 0$ é então

$$\int_{\gamma_n} (f(z) - \varphi(z)\,(z-c))\, dz = 0$$

pelo que

$$\int_{\gamma_n} f = \int_{\gamma_n} \varphi(z)\,(z-c)\, dz$$

e do teorema 11.21 resulta

$$\left| \int_{\gamma_n} f \right| \leq L(\gamma_n) \sup_{z \in [\gamma_n]} |\varphi(z)\,(z-c)| \,. \tag{12.8}$$

Como $[\gamma_n] \subseteq T_n$ e $c \in T_n$, pondo

$$\mu_n = \sup_{z \in T_n} |\varphi(z)|$$

temos agora, atendendo ainda ao lema 12.3,

$$\sup_{z \in [\gamma_n]} |\varphi(z)\,(z-c)| \leq \sup_{z \in [T_n]} |\varphi(z)\,(z-c)| \leq \mu_n L(\gamma_n)$$

e de (12.8) deduz-se

$$\left| \int_{\gamma_n} f \right| \leq L^2(\gamma_n)\, \mu_n = \frac{L^2(\gamma)}{4^n} \mu_n.$$

Da relação (12.7) resulta assim

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L^2(\gamma) \mu_n \quad \text{se} \quad n \geq 0$$

pelo que o enunciado fica estabelecido se se provar que $\lim \mu_n = 0$.

Atendendo agora a que a função φ é contínua e nula no ponto c, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| < \delta/2$ se $|z - c| < \varepsilon$. Por outro lado, como $\lim L(\gamma_n) = 0$ existe também uma ordem k tal que se tem $L(\gamma_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq k$. Tomando então $n \geq k$ e $z \in T_n$, temos $|z - c| \leq L(\gamma_n) < \varepsilon$, pelo que $|\varphi(z)| < \delta/2$ e portanto $\mu_n \leq \delta/2 < \delta$, o que estabelece a relação $\lim \mu_n = 0$.

■

Associando o lema de Goursat e o teorema 12.1 chegamos a um resultado decisivo sobre a existência de primitivas de funções holomorfas. Usaremos ainda o seguinte lema:

Lema 12.8 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto em estrela relativamente a um ponto $c \in D$. Dados $z, w \in D$ tais que $[z, w] \subseteq D$, então o triângulo de vértices c, z, w está contido em D.*

Demonstração. Seja T o triângulo de vértices c, z, w. Tomando $\zeta \in T$, o lema 12.4 mostra que $\zeta = \lambda c + \mu z + \nu w$ com $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ e $\lambda + \mu + \nu = 1$. Se $\zeta \neq c$ tem-se ainda $\lambda < 1$ e pondo então $a = \mu/(1-\lambda)z + \nu/(1-\lambda)w$ segue-se que $a \in [z, w] \subseteq D$, pelo que $\zeta = \lambda c + (1-\lambda)\, a \in [c, a] \subseteq D$.

■

Podemos agora provar o teorema fundamental.

Teorema 12.9 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e em estrela. Então toda a função holomorfa $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é primitivável.*

Demonstração. Se D é um conjunto em estrela relativamente ao ponto c, seja $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$F(z) = \int_c^z f.$$

Dados $z, w \in D$ tais que $[z, w] \subseteq D$ consideremos um caminho triangular γ da forma (c, z, w, c). Como o triângulo de vértices c, z, w está contido em D, do lema de Goursat resulta então

$$0 = \int_\gamma f = \int_c^z f + \int_z^w f + \int_w^c f$$

pelo que

$$\int_z^w f = \int_c^w f - \int_c^z f = F(w) - F(z)$$

e o teorema 12.1 mostra que F é uma primitiva de f.

■

Como aplicação do teorema anterior vamos estabelecer alguns resultados úteis no cálculo de certos integrais. Provaremos primeiro um lema que será também utilizado posteriormente.

Lema 12.10 - *Dado $\lambda > 0$ tem-se*

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \sin t} dt < \frac{\pi}{2\lambda}.$$

Demonstração. Mudando t em $\pi/2 - t$ obtém-se directamente a identidade

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \sin t} dt.$$

Por outro lado, para cada $t \in]0, \pi/2[$ é

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)' = \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} = (t - \tan t)\,\frac{\cos t}{t^2} < 0$$

pelo que

$$\frac{\sin t}{t} > \left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$

e resulta

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \sin t} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda t/\pi} dt = \frac{\pi}{2\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) < \frac{\pi}{2\lambda}.$$

■

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Teorema 12.11 - *Seja $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que*

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Se o integral $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx$ for convergente, para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathrm{Re}(w) \geq 0$ *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx = w \int_0^{+\infty} f\left(wx\right) e^{-wx}dx.$$

Demonstração. Dados ε, R tais que $0 < \varepsilon < R$ e sendo $\alpha = \arg w$, consideremos os caminhos $\gamma, \rho_R, \rho_\varepsilon, \sigma$, definidos respectivamente por $\gamma(t) = t$ com $t \in [\varepsilon, R]$, $\rho_R(t) = Re^{i\alpha t}$ com $t \in [0,1]$, $\rho_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i\alpha t}$ com $t \in [0,1]$, e $\sigma(t) = te^{i\alpha}$ com $t \in [\varepsilon, R]$. Então os caminhos $\gamma \dotplus \rho_R$ e $\rho_\varepsilon \dotplus \sigma$ ligam ambos o ponto ε ao ponto $Re^{i\alpha}$. Como a função definida por $f(z)e^{-z}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ e este é um conjunto em estrela relativamente ao ponto 1, usando o teorema anterior e o corolário 1 do teorema 11.23 obtém-se

$$\int_\gamma f(z)e^{-z}dz + \int_{\rho_R} f(z)e^{-z}dz = \int_{\rho_\varepsilon} f(z)e^{-z}dz + \int_\sigma f(z)e^{-z}dz,$$

ou seja,

$$\int_\varepsilon^R f(t)e^{-t}dt + \int_{\rho_R} f(z)e^{-z}dz = \int_{\rho_\varepsilon} f(z)e^{-z}dz + \int_\varepsilon^R f(te^{i\alpha})e^{-te^{i\alpha}}e^{i\alpha}dt \quad (12.9)$$

Pondo agora, para cada $r > 0$,

$$M(r) = \sup_{\theta \in [-|\alpha|, |\alpha|]} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$$

temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\rho_\varepsilon} f(z)e^{-z}dz\right| &= \left|\int_0^1 f\left(\varepsilon e^{i\alpha t}\right) e^{-\varepsilon e^{i\alpha t}} i\alpha\varepsilon e^{i\alpha t}dt\right| \\
&\leq |\alpha|\,\varepsilon M(\varepsilon)\int_0^1 e^{-\varepsilon\cos\alpha t}dt \leq |\alpha|\,\varepsilon M(\varepsilon)
\end{aligned}$$

e da condição $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ resulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho_\varepsilon} f(z)e^{-z}dz = 0.$$

Temos também, do mesmo modo,

$$\left|\int_{\rho_R} f(z)e^{-z}dz\right| \leq |\alpha|\,RM(R)\int_0^1 e^{-R\cos\alpha t}dt$$

e como

$$\int_0^1 e^{-R\cos\alpha t}dt = \int_0^1 e^{-R\cos|\alpha|t}dt \leq \int_0^1 e^{-R\cos\pi t/2}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-R\cos u}du,$$

do lema anterior deduz-se

$$\int_0^1 e^{-R\cos\alpha t}dt \leq \frac{1}{R}. \tag{12.10}$$

Obtém-se assim a majoração

$$\left|\int_{\rho_R} f(z)e^{-z}dz\right| \leq |\alpha|\,M(R)$$

e da condição $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ resulta

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\rho_R} f(z)e^{-z}dz = 0.$$

Fazendo sucessivamente $\varepsilon\to 0$ e $R\to+\infty$ em (12.9) temos então

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx = e^{i\alpha}\int_0^{+\infty} f(te^{i\alpha})e^{-te^{i\alpha}}dt$$

e a mudança de variável $t = |w|\,x$ no integral do segundo membro conduz à identidade do enunciado.

■

Exemplo 12.12 - *Dado* $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *tal que* $\mathrm{Re}(w)\geq 0$, *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} e^{-wx^2}dx = w^{-1/2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Efectivamente, fazendo $t = x^2$ temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$$

e a função definida por $f(z) = z^{-1/2}$ verifica as condições

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Aplicando o teorema anterior é então

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{w^{1/2}}{2} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-wt} dt$$

e regressando à variável x obtém-se a fórmula anunciada.

Combinando o exemplo anterior com a relação

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(cf. corolário 2 do teorema 22.14) podem obter-se dois resultados notáveis sobre integrais reais, devidos a Euler.

Exemplo 12.13 - *Tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Efectivamente, aplicando o exemplo anterior com $w = i$ deduz-se

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx - i \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx &= \int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-i}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 12.14 - *Dado* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin \lambda x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2+1}-1}{\lambda^2+1}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \lambda x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{\lambda^2+1}}.$$

Efectivamente, aplicando o exemplo 12.12 com $w = 1 + i\lambda$ temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left(\cos \lambda x^2 - i \sin \lambda x^2\right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\lambda)x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(1+i\lambda)^{1/2}}$$

Como é $1 + i\lambda = \sqrt{\lambda^2 + 1} e^{i\theta}$ com

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}},$$

temos ainda

$$\frac{1}{(1+i\lambda)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda^2+1}} e^{-i\theta/2} = \frac{\cos \theta/2 - i \sin \theta/2}{\sqrt[4]{\lambda^2+1}}$$

e as identidades referidas resultam agora das relações

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2+1} - 1}{2\sqrt{\lambda^2+1}}$$

e

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2+1} + 1}{2\sqrt{\lambda^2+1}}.$$

O teorema seguinte mostra como a relação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

pode ser generalizada.

Teorema 12.15 - *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+z)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Demonstração. Sendo $z = a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$ temos

$$\left| e^{-(x+z)^2} \right| = e^{-(x+a)^2 + b^2}$$

e como o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+a)^2} dx$$

converge, vemos que o mesmo sucede com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+z)^2} dx.$$

Além disso, como a mudança de variável $t = x + a$ não altera o valor deste integral podemos sem perda de generalidade supôr $a = 0$.

Seja então f a função definida por

$$f(w) = e^{-w^2} \quad \text{se} \quad w \in \mathbb{C}.$$

Como f é holomorfa em $\mathbb{C}$, dado $r > 0$ e aplicando o teorema 12.9 e o corolário 2 do teorema 11.23, temos

$$\int_{-r}^{r} f + \int_{r}^{r+ib} f + \int_{r+ib}^{-r+ib} f + \int_{-r-ib}^{-r} f = 0. \tag{12.11}$$

É agora

$$\int_{r}^{r+ib} f = ib \int_{0}^{1} e^{-(r+itb)^2} dt$$

e como

$$\left| e^{-(r+itb)^2} \right| = e^{-r^2+t^2b^2} \leq e^{-r^2+b^2} \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

temos

$$\left| \int_{r}^{r+ib} f \right| \leq |b| \, e^{-r^2+b^2}$$

pelo que

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{r}^{r+ib} f = 0.$$

Analogamente se verifica que

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r-ib}^{-r} f = 0,$$

e de (12.11) obtém-se

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f = - \lim_{r \to +\infty} \int_{r+ib}^{-r+ib} f = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r+ib}^{r+ib} f,$$

ou seja,

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} e^{-(x+ib)^2} dx$$

o que estabelece o enunciado.

■

Exemplo 12.16 - *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \cos \lambda x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\lambda^2/4}.$$

Efectivamente basta fazer $z = i\lambda/2$ no corolário anterior e atender à paridade das funções envolvidas.

Uma técnica semelhante à que foi usada na demonstração do teorema 12.11 permite determinar o valor de outra classe importante de integrais.

Teorema 12.17 - *Dado* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tal que* $\mathrm{Re}\,(w) \geq 0$ *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-wx}}{x} dx = \ln w.$$

Demonstração. Dados ε, R tais que $0 < \varepsilon < R$ e sendo $\alpha = \arg w$, consideremos de novo os caminhos $\gamma, \rho_R, \rho_\varepsilon, \sigma$ definidos na demonstração do teorema 12.11. Como a função definida por e^{-z}/z é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ obtém-se a relação

$$\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_{\rho_R} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_\sigma \frac{e^{-z}}{z} dz.$$

Pondo $w_0 = w/\left|w\right| = e^{i\alpha}$ temos então

$$\int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\rho_R} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{-w_0 t}}{t} dt$$

pelo que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-w_0 x}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z}}{z} dz - \lim_{R \to +\infty} \int_{\rho_R} \frac{e^{-z}}{z} dz. \qquad (12.12)$$

Como é

$$\int_{\rho_R} \frac{e^{-z}}{z} dz = i\alpha \int_0^1 e^{-Re^{i\alpha t}} dt,$$

temos

$$\left| \int_{\rho_R} \frac{e^{-z}}{z} dz \right| \leq \left|\alpha\right| \int_0^1 e^{-R\cos \alpha t} dt$$

e de (12.10) resulta

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\rho_R} \frac{e^{-z}}{z} dz = 0.$$

É também

$$\int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_{\rho_\varepsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z} - 1}{z} dz$$

e aplicando teorema 11.21 temos

$$\left| \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z} - 1}{z} dz \right| \leq \varepsilon \left|\alpha\right| \sup_{|z| = \varepsilon} \left| \frac{e^{-z} - 1}{z} \right|$$

Como $|e^{-z}-1| \sim |z|$ quando $z \to 0$, a função $(e^{-z}-1)/z$ é limitada na região $0 < |z| \leq 1$ e isto implica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z}-1}{z} dz = 0.$$

Notando que

$$\int_{\rho_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 i\alpha dt = i\alpha,$$

é então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\rho_\varepsilon} \frac{e^{-z}}{z} dz = i\alpha$$

e de (12.12) resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-w_0 x}}{x} dx = i \arg w$$

Mudando agora $|w|\, x$ em x temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-|w|x}-e^{-wx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-w_0 x}}{x} dx$$

pelo que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-wx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-|w|x}}{x} dx + i \arg w. \tag{12.13}$$

Por outro lado, para cada $\varepsilon > 0$ temos

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-|w|x}}{x} dx = \int_{|w|\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

e obtém-se assim

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-|w|x}}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{|w|\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{|w|\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_\varepsilon^{|w|\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx = e^{-\mu(\varepsilon)} \int_\varepsilon^{|w|\varepsilon} \frac{1}{x} dx = e^{-\mu(\varepsilon)} \ln |w|$$

em que $\mu(\varepsilon)$ é um ponto do intervalo de extremos ε e $|w|\, \varepsilon$, resulta então

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-|w|x}}{x} dx = \ln |w|$$

e de (12.13) conclui-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-wx}}{x} dx = \ln|w| + i \arg w = \ln w.$$

■

Exemplo 12.18 - *Dados $a \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 > 0$ tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e em particular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Efectivamente basta fazer $w = a + ib$ no teorema anterior e tomar a parte imaginária da identidade obtida.

Exemplo 12.19 - *Dados $a \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 > 0$ tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax} \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \left(a^2 + b^2\right)$$

e em particular

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx = 0.$$

Efectivamente basta fazer $w = a + ib$ no teorema anterior e tomar a parte real da identidade obtida.

Exemplo 12.20 - *Dados $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin^2 bx}{x} dx = \frac{1}{4} \ln \left(1 + 4\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Temos efectivamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin^2 bx}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-ax} \cos 2bx}{x}$$

e mudando ax em x neste último integral o exemplo anterior conduz ao resultado pretendido.

13 - A fórmula integral de Cauchy

O teorema 12.9 e o conceito de índice de um ponto relativamente a um caminho regular estão na base de um resultado chave da integração no plano complexo, conhecido por fórmula integral de Cauchy. Começaremos por provar dois lemas, o primeiro dos quais é geometricamente intuitivo.

Lema 13.1 - *Seja $T \subseteq \mathbb{C}$ um triângulo de vértices z_1, z_2, z_3. Se $z_3 \notin [z_1, z_2]$ então o conjunto $T \setminus \{z_3\}$ é convexo.*

Demonstração. Dados $z, w \in T \setminus \{z_3\}$ basta provar que $z_3 \notin [z, w]$ pois daqui resulta $[z, w] \subseteq T \setminus \{z_3\}$. Atendendo ao lema 12.4 temos

$$z = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k z_k \quad \text{e} \quad w = \sum_{k=1}^{3} \mu_k z_k,$$

com

$$\lambda_k, \mu_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{3} \lambda_k = \sum_{k=1}^{3} \mu_k = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3, \mu_3 < 1.$$

Dado $u \in [z, w]$ é $u = \alpha z + \beta w$ com $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$, pelo que

$$u = \sum_{k=1}^{3} \nu_k z_k$$

com $\nu_k = \alpha\lambda_k + \beta\mu_k$. Em particular temos $\nu_3 = \alpha\lambda_3 + \beta\mu_3 < \alpha + \beta = 1$ e a condição $u = z_3$ exigia $(1 - \nu_3)\, z_3 = \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2$, ou seja,

$$z_3 = \frac{\nu_1}{1 - \nu_3} z_1 + \frac{\nu_2}{1 - \nu_3} z_2.$$

Como $\nu_1 + \nu_2 = 1 - \nu_3$ resultava então $z_3 \in [z_1, z_2]$ o que contraria a hipótese.
■

O lema seguinte traduz uma versão formalmente mais forte do teorema 12.9.

Lema 13.2 - *Sejam D um conjunto aberto e em estrela relativamente a um ponto c, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $D \setminus \{c\}$ e contínua em c. Então f é primitivável.*

Demonstração. Definindo uma função $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_c^z f$$

e atendendo ao teorema 12.1, basta mostrar que para cada par de pontos $z, w \in D$ tais que $[z, w] \subseteq D$ se tem

$$\int_z^w f = \int_c^w f - \int_c^z f. \tag{13.1}$$

Se $c \in [z, w]$ esta relação resulta directamente do exemplo 11.17. Suponha-se então que $c \notin [z, w]$ e tome-se $\varepsilon \in]0, 1[$. Pondo

$$a = (1-\varepsilon)\, c + \varepsilon z \quad \text{e} \quad b = (1-\varepsilon)\, c + \varepsilon w$$

sejam T o triângulo de vértices c, z, w, R o triângulo de vértices a, z, w e S o triângulo de vértices a, w, b. Como $a, b, z, w \in T \setminus \{c\}$ o lema anterior mostra que R e S estão ambos contidos em $T \setminus \{c\}$ e portanto em $D \setminus \{c\}$. Aplicando o lema de Goursat a f em $D \setminus \{c\}$ temos então

$$\int_a^z f + \int_z^w f + \int_w^a f = \int_a^w f + \int_w^b f + \int_b^a f = 0$$

e somando estas identidades resulta

$$\int_a^z f + \int_z^w f + \int_w^b f + \int_b^a f = 0. \tag{13.2}$$

Como é também

$$\int_a^z f = \int_c^z f - \int_c^a f \quad \text{e} \quad \int_w^b f = \int_w^c f - \int_b^c f$$

a relação (13.2) transforma-se em

$$\int_c^z f - \int_c^a f \; + \int_z^w f + \int_w^c f - \int_b^c f \; + \int_b^a f = 0.$$

Pondo agora

$$I(\varepsilon) = \int_c^a f + \int_a^b f + \int_b^c f,$$

para cada $\varepsilon \in]0, 1[$ é então

$$\int_z^w f = \int_c^w f - \int_c^z f + I(\varepsilon) \tag{13.3}$$

Por outro lado, sendo M o máximo de $|f|$ em T temos

$$|I(\varepsilon)| \le M\left(|a-c| + |b-a| + |c-b|\right) = M\varepsilon\left(|z-c| + |w-z| + |c-w|\right)$$

e como daqui resulta $\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = 0$, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (13.3) obtém-se (13.1). ■

Podemos agora estabelecer a *fórmula integral de Cauchy* na seguinte forma:

Teorema 13.3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e em estrela relativamente a um ponto c, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e γ um caminho em $D \setminus \{c\}$, fechado e regular. Temos então*

$$f(c)Ind_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-c}dz.$$

Demonstração. Seja g a função definida em D por $g(c) = f'(c)$ e

$$g(z) = \frac{f(z) - f(c)}{z-c} \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{c\}.$$

Como g é holomorfa em $D \setminus \{c\}$ e contínua em c, o lema 13.2 mostra que g é primitivável. Temos então

$$\int_\gamma g = 0$$

e dado que $c \notin [\gamma]$ obtém-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-c}dz = f(c)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-c}dz,$$

o que equivale ao enunciado.

■

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e convexo, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e γ um caminho em D, fechado e regular. Para todo o $z \in D \setminus [\gamma]$ é então*

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior notando que D é um conjunto em estrela relativamente a qualquer dos seus pontos.

■

Apesar de esta ser apenas uma versão preliminar da fórmula integral de Cauchy, ela permite já estabelecer muitas propriedades profundas das funções analíticas, nomeadamente todas as que foram mencionadas no fim da secção 9. Usaremos para isso o teorema seguinte:

Teorema 13.4 - *Sejam γ um caminho regular em $\mathbb{C}$ e $f : [\gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Então a função φ definida por*

$$\varphi(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$$

é analítica. Além disso, dados $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ *e* $r > 0$ *tais que* $B(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus [\gamma]$, *tem-se*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad se \quad z \in B(c,r),$$

com

$$c_n = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Demonstração. Fixado $z \in B(a,r)$ e sendo $\rho = |z-a| < r$, temos

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| \leq \frac{\rho}{r} < 1 \quad \text{se} \quad \zeta \in [\gamma]$$

e o critério de Weierstrass mostra que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

converge uniformemente em $[\gamma]$, como função de ζ. Dado que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n = \left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^{-1} = \frac{\zeta-a}{\zeta-z},$$

usando o teorema 11.22 resulta

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n d\zeta. \end{aligned}$$

Pondo agora

$$c_n = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

obtemos então o desenvolvimento

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

válido para cada $z \in B(a,r)$.

■

A fórmula integral de Cauchy 13.3 e o teorema anterior conduzem directamente à conclusão de que os termos "função holomorfa" e "função analítica" são sinónimos. Mais precisamente é válido o seguinte resultado:

Teorema 13.5 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f é analítica, e para cada ponto $a \in D$ a série de Taylor respectiva representa f em todo o círculo $B(a,r)$ contido em D. Para cada $n \geq 0$ tem-se ainda*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad se \quad n \geq 0, \tag{13.4}$$

em que γ é qualquer caminho circular de centro a e raio $\rho < r$, orientado positivamente.

Demonstração. Dado $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq D$ seja γ é um caminho circular de centro a e raio $\rho \in \,]0, r[$, orientado positivamente. Como $Ind_\gamma(a) = 1$ (cf. exemplo 11.33) e $B(a,r)$ é convexo, da fórmula integral de Cauchy 13.3 resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad z \in B(a, \rho).$$

Aplicando o teorema 13.4 à função φ definida por

$$\varphi(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad |z - a| \neq \rho$$

obtemos então o desenvolvimento

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{se} \quad z \in B(c, \rho) \tag{13.5}$$

com

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Como a série que figura em (13.5) é a série de Taylor de f em torno do ponto a, as derivadas $f^{(n)}(a)$ são necessariamente dadas por (13.4) e isto mostra também que a expressão de c_n não depende do raio $\rho < r$ do caminho circular γ. Finalmente, atendendo a que o desenvolvimento (13.5) é válido para todo o $\rho \in \,]0, r[$, conclui-se que ele é válido em $B(a,r)$.

■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f' é analítica.*

Demonstração. Efectivamente, como f é uma função analítica ela tem derivadas de todas as ordens e isto implica que f' seja holomorfa.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função primitivável. Então f é analítica.*

Demonstração. Efectivamente, como uma primitiva de f é necessariamente holomorfa, o corolário anterior mostra que f é analítica.

■

Corolário 3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $E \subseteq D$ um conjunto discreto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em $D \setminus E$. Se f for contínua em E então f é analítica em D.*

Demonstração. Dado $a \in E$ seja $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq D$ e $B(a,r) \cap E = \{a\}$. Então $B(a,r) \setminus \{a\} \subseteq D \setminus E$ pelo que f é analítica em $B(a,r) \setminus \{a\}$ e contínua em a. Como $B(a,r)$ é convexo, o lema 13.2 mostra que f admite uma primitiva em $B(a,r)$ e do corolário anterior resulta que f é analítica em $B(a,r)$. Em particular conclui-se que f é também analítica no ponto a.

■

O corolário anterior mostra que o lema 13.2 não implica um reforço real do teorema 12.9 pois as hipóteses respectivas são de facto equivalentes.

Corolário 4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Para cada ponto $a \in D$ a série de Taylor de f relativa a esse ponto tem raio de convergência $R \geq d(a, \mathbb{C} \setminus D)$.*

Demonstração. Dados $a \in D$ e $r < d(a, \mathbb{C} \setminus D)$, o teorema anterior mostra que a série de Taylor de f relativa ao ponto a converge em $B(a,r)$. É então $R \geq r$ para todo o $r < d(a, \mathbb{C} \setminus D)$, o que exige $R \geq d(a, \mathbb{C} \setminus D)$.

■

Corolário 5 (Desigualdades de Cauchy) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, $a \in D$ e $r > 0$ tal que $\overline{B}(a,r) \subseteq D$. Pondo*

$$M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|,$$

para cada $n \geq 0$ tem-se

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}.$$

Demonstração. Como $\overline{B}(a,r) \subseteq D$ e $\mathbb{C} \setminus D$ é fechado, tem-se necessariamente $d(a, \mathbb{C} \setminus D) > r$. Existe então $r' > r$ tal que $B(a,r') \subseteq D$, e a relação (13.4) é válida se γ for um caminho circular de raio r. Aplicando o teorema 11.21 resulta agora, para cada $n \geq 0$,

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n! M(r)}{2\pi r^{n+1}} L(\gamma) = \frac{n! M(r)}{r^n}.$$

■

Corolário 6 (Teorema de Liouville) - *Uma função limitada e analítica em $\mathbb{C}$ é constante.*

Demonstração. Sejam $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica e limitada, e M um majorante de $|f|$. Dados $z \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, do corolário anterior deduz-se

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

e como r é arbitrário isto exige $f'(z) = 0$. O enunciado resulta agora do teorema 6.10.
■

Uma função analítica em $\mathbb{C}$ diz-se *inteira.*

Corolário 7 (Teorema fundamental da Álgebra) - *Todo o polinámio não constante tem algum zero em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $P(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n$ um polinómio de grau $m > 0$ e suponha-se que ele nunca se anula. Partindo da relação $P(z) \sim c_m z^m$ quando $z \to \infty$ deduz-se $\lim_{z \to \infty} 1/P(z) = 0$ pelo que a função $1/P$ é limitada nalgum conjunto da forma $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(a, r)$ com $r > 0$. Por outro lado, como $|1/P|$ é contínua no conjunto compacto $\overline{B}(a, r)$ segue-se que $1/P$ também é limitada em $\overline{B}(a, r)$. A função $1/P$ seria assim limitada e analítica em $\mathbb{C}$ pelo que o teorema de Liouville exigia que fosse constante. Então também o polinómio P seria constante o que contraria a hipótese.
■

Exemplo 13.6 - *Se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial não constante tem-se $f[\mathbb{C}] = \mathbb{C}$.*

Efectivamente, dado $a \in \mathbb{C}$ o polinómio $f(z) - a$ anula-se nalgum ponto $c \in \mathbb{C}$, pelo que $f(c) = a$.

O teorema seguinte é o recíproco do lema de Goursat 12.7.

Teorema 13.7 (Morera) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Se para cada triângulo $T \subseteq D$ for nulo o integral de f ao longo de um caminho associado a T, então f é analítica.*

Demonstração. Dado $c \in D$ seja $r > 0$ tal que $B(c, r) \subseteq D$ e tomem-se dois pontos $z, w \in B(c, r)$. Como o triângulo de vértices c, z, w está contido em D, considerando um caminho associado a este triângulo obtém-se

$$\int_z^w f = \int_c^w f - \int_c^z f$$

e o teorema 12.1 mostra que a função F definida por

$$F(z) = \int_c^z f \quad \text{se} \quad z \in B(c,r)$$

é uma primitiva de f em $B(c,r)$. Do corolário 2 do teorema 13.5 resulta então que f é analítica em $B(c,r)$ e portanto no ponto c.

■

Com base no teorema de Morera pode provar-se um resultado que amplia o corolário 3 do teorema 13.5.

Teorema 13.8 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $L \subseteq \mathbb{C}$ uma recta e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em $D \setminus L$. Se f for contínua em $D \cap L$ então f é analítica.*

Demonstração. Supondo $D \cap L \neq \varnothing$ sejam u e v pontos distintos deste conjunto. Como a função φ definida por $\varphi(z) = u + z\,(v-u)$ transforma a recta real em L, substituindo f por $f \circ \varphi$ podemos sem perda de generalidade supôr $L = \mathbb{R}$. Dado um triângulo $T \subseteq D$ de vértices a, b, c e sendo γ um caminho triangular da forma (a, b, c, a) vamos provar que o integral de f ao longo de γ é nulo.

Se T estiver contido nalgum dos semiplanos abertos

$$H_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \quad \text{ou} \quad H_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

esta conclusão resulta do lema de Goursat. Suponha-se agora que os vértices b e c estão em semiplanos distintos e seja d o ponto onde o segmento $[b,c]$ intersecta $\mathbb{R}$. Se se souber que os integrais de f ao longo dos caminhos triangulares (a,b,d,a) e (a,d,c,a) são ambos nulos, como o integral de f ao longo de γ é a soma destes dois integrais segue-se que também ele é nulo. Vemos assim que o teorema fica estabelecido se se provar que o integral de f ao longo de γ é nulo quando algum dos vértices de γ está em $\mathbb{R}$.

Suponha-se então que $a \in \mathbb{R}$. Se os vértices b e c estiverem no mesmo semiplano, a demonstração do lema 13.2 estabelece que o integral de f ao longo de γ ainda é nulo. Para tratar o caso $b \in \mathbb{R}$ tomamos $z \in [b,c]$ e representamos por σ_z o caminho definido por $\sigma_z(t) = a + t\,(z-a)$ com $t \in [0,1]$. Se $z \neq b$ então $[z,c]$ está contido no semiplano a que pertence c pelo que o integral de f ao longo do caminho (a,z,c,a) é nulo. Temos assim

$$\int_a^z f + \int_z^c f + \int_c^a f = 0 \quad \text{se} \quad z \in [b,c] \quad \text{e} \quad z \neq b. \tag{13.6}$$

Como f é uniformemente contínua no triangulo T, para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(\sigma_z(t)) - f(\sigma_b(t))| < \delta \quad \text{se} \quad t \in [0,1] \quad \text{e} \quad |\sigma_z(t) - \sigma_b(t)| < \varepsilon.$$

Dado que $|\sigma_z(t) - \sigma_b(t)| = t\,|(z-b)| \leq |z-b|$, pondo

$$\mu(z) = \max_{t\in[0,1]} |f(\sigma_z(t)) - f(\sigma_b(t))|$$

temos então

$$\mu(z) < \delta \text{ se } |z-b| < \varepsilon$$

e isto significa que $\lim_{z\to b}\mu(z) = 0$. Como

$$\left|\int_0^1 f(\sigma_z(t)) - \int_0^1 f(\sigma_b(t))\right| \leq \mu(z)$$

segue-se que

$$\lim_{z\to b}\int_0^1 f(\sigma_z(t)) = \int_0^1 f(\sigma_b(t)),$$

e por ser

$$\int_a^z f = \int_0^1 f(\sigma_z(t))\,\sigma_z'(t)dt = (z-a)\int_0^1 f(\sigma_z(t))\,dt,$$

resulta

$$\lim_{z\to b}\int_a^z f = \int_a^b f.$$

Por outro lado, como $z \in [b,c]$ temos também

$$\left|\int_b^c f - \int_z^c f\right| = \left|\int_b^z f\right| \leq |z-b| \max_{w\in[b,c]} |f(w)|,$$

o que implica

$$\lim_{z\to b}\int_z^c f = \int_b^c f.$$

Fazendo $z \to b$ em (13.6) conclui-se então que é nulo o integral de f ao longo de γ quando $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha-se finalmente que b e c estão em semiplanos distintos e seja d o ponto de intersecção de $[b,c]$ com $\mathbb{R}$. Então o resultado acabado de provar mostra que são nulos os integrais de f ao longo dos caminhos (a,b,d,a) e (a,d,c,a) pelo que o integral de f ao longo de γ também é nulo.

■

Corolário (Princípio da reflexão de Schwarz) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simétrico em relação à recta real, $D_+ = \{z \in D : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e $L = D \cap \mathbb{R}$. Seja ainda $f : D_+ \cup L \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D_+ e contínua em L. Se $f[L] \subseteq \mathbb{R}$ existe então um prolongamento analítico de f a D.*

Demonstração. Sejam $D_- = \{z \in D : \mathrm{Im}(z) < 0\}$ e F o prolongamento de f definido em D_- por

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Dado $a \in D_-$, como f é analítica em $\overline{a}$ existem $r > 0$ e uma série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(z - \overline{a}\right)^n$$

tais que

$$f\left(\overline{z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(\overline{z} - \overline{a}\right)^n \quad \text{se} \quad \left|\overline{z} - \overline{a}\right| < r.$$

Como $\left|\overline{z} - \overline{a}\right| = |z - a|$ é então

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{c_n} \left(z - a\right)^n \quad \text{se} \quad |z - a| < r$$

e isto mostra que F é analítica em D_-.

Dados $a \in L$ e $\delta > 0$, pela continuidade de f em a existe $\varepsilon > 0$ tal que $|F(z) - F(a)| < \delta$ se $z \in B(a, \varepsilon) \cap (D_+ \cup L)$. Como

$$|F(z) - f(a)| = \left|\overline{f(\overline{z}) - f(a)}\right| = |f(\overline{z}) - f(a)| \quad \text{se} \quad z \in D_-,$$

segue-se que é também $|F(z) - f(a)| < \delta$ se $z \in B(a, \varepsilon) \cap D_-$ e conclui-se que F é contínua em a. Do teorema anterior resulta agora que F é analítica.

■

O teorema de Morera 13.7 conduz também a uma demonstração simples do seguinte resultado fundamental sobre sucessões de funções analíticas:

Teorema 13.9 (Weierstrass) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e (f_n) uma sucessão de funções analíticas $f_n : D \to \mathbb{C}$ que converge para uma função f, uniformemente em cada subconjunto compacto de D. Então f é analítica e tem-se $\lim f_n^{(m)} = f^{(m)}$para cada inteiro $m \geq 1$, sendo a convergência de $\left(f_n^{(m)}\right)$ uniforme em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Sejam T um triângulo contido em D e γ um caminho associado a T. Como $[\gamma]$ é compacto, do teorema 11.22 e do lema de Goursat resulta

$$\int_\gamma f = \lim \int_\gamma f_n = 0$$

e o teorema de Morera permite concluir que f é analítica.

Fixados um inteiro $m \geq 1$ e um conjunto compacto $K \subseteq D$ vejamos agora que a sucessão $\left(f_n^{(m)}\right)$ converge uniformemente para $f^{(m)}$ em K. Atendendo ao corolário 3 do teorema 4.14 existe um conjunto aberto e limitado G tal que $K \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq D$. Então $\overline{G}$ é compacto e sendo $r = d(K, \mathbb{C} \setminus G)$ o corolário 1 do teorema 4.14 mostra que é $r > 0$. Dado $z \in K$, a inclusão $B(z, r) \subseteq G$ implica

$\overline{B}(z,r) \subseteq \overline{G} \subseteq D$ e aplicando as desigualdades de Cauchy às funções $f_n - f$ obtém-se

$$\left|f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)\right| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{|\zeta - z| = r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{\zeta \in \overline{G}} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \, .$$

Temos assim

$$\sup_{z \in K} \left|f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)\right| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{\zeta \in \overline{G}} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$$

e como (f_n) converge uniformemente para f em $\overline{G}$ conclui-se que também $\left(f_n^{(m)}\right)$ converge uniformemente para $f^{(m)}$ em K.
■

É interessante comparar o teorema anterior com a situação prevalecente em Análise Real. De acordo com um conhecido teorema de Weierstrass sabe-se que toda a função real contínua num intervalo compacto $[a,b]$ é o limite de uma sucessão de polinómios uniformemente convergente em $[a,b]$. Assim, em Análise Real existem sucessões de funções analíticas que convergem uniformemente para funções cuja única regularidade consiste no facto de serem contínuas e que podem não ter derivada em qualquer ponto do seu domínio (!).

Corolário - *Dado um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$ uma série de funções analíticas $u_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D. Então a função f definida em D por*

$$f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n(z)$$

também é analítica. Além disso, para cada inteiro positivo k tem-se

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n^{(k)}(z)$$

e a série $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n^{(k)}(z)$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de D.

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior notando que as funções s_m definidas em D por

$$s_m(z) = \sum_{n=p}^{m} u_n(z)$$

são todas analíticas e que se tem

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n^{(k)}(z) = \lim_{m \to +\infty} s_m^{(k)}(z)$$

para cada $k > 0$.

■

No que diz respeito a funções definidas por integrais paramétricos provaremos o seguinte resultado:

Teorema 13.10 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $\varphi : D \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Suponha-se que para cada $t \in [a, b]$ a função $z \mapsto \varphi(z, t)$ é analítica e que para cada $z \in D$ a função $t \mapsto \varphi(z, t)$ é integrável-R em $[a, b]$. Se φ for limitada em cada conjunto da forma $K \times [a, b]$ com $K \subseteq D$ compacto, então a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt$$

é analítica. Além disso, para cada inteiro positivo m e para cada $z \in D$ a função definida por

$$t \mapsto \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z, t)$$

é integrável-R em $[a, b]$ e tem-se

$$f^{(m)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z, t)\, dt. \tag{13.7}$$

Demonstração. Dado $z \in D$ seja (z_n) uma sucessão de pontos de $D \setminus \{z\}$ com limite z e tome-se $r > 0$ tal que $\overline{B}(z, r) \subseteq D$. Existe então uma ordem k para a qual $|z_n - z| < r/2$ se $n \geq k$, e sendo γ um caminho circular de centro em z e raio r orientado positivamente, a fórmula integral de Cauchy 13.3 dá

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta \;\text{ e }\; \varphi(z_n, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta - z_n} d\zeta \;\text{ se } n \geq k \;\text{ e } t \in [a, b].$$

De (13.4) resulta ainda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta, t)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

pelo que

$$\frac{\varphi(z_n, t) - \varphi(z, t)}{z_n - z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) = \frac{z_n - z}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta, t)}{(\zeta - z_n)(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Sendo M o supremo de $|\varphi|$ em $\overline{B}(z, r) \times [a, b]$ e notando que para cada $\zeta \in [\gamma]$ é $|\zeta - z_n| \geq |\zeta - z| - |z_n - z| > r/2$ deduz-se então

$$\left| \frac{\varphi(z_n, t) - \varphi(z, t)}{z_n - z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) \right| \leq 2M \frac{|z_n - z|}{r^2} \;\text{ se }\; n \geq k \;\text{ e }\; t \in [a, b].$$

Isto mostra que a sucessão de funções (ψ_n) definidas em $[a, b]$ por

$$\psi_n(t) = \frac{\varphi(z_n, t) - \varphi(z, t)}{z_n - z} \quad \text{se} \quad t \in [a, b]$$

converge uniformemente para a função

$$t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t)\,,$$

pelo que esta última função é também integrável-R em $[a, b]$ e vale a fórmula

$$\lim \int_a^b \psi_n(t)dt = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t)\,dt.$$

Como é também

$$\lim \int_a^b \psi_n(t)dt = \lim \int_a^b \frac{\varphi(z_n, t) - \varphi(z, t)}{z_n - z}dt = \lim \frac{f\,(z_n) - f(z)}{z_n - z}$$

conclui-se que $f'(z)$ existe e é dada por

$$f'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,(z, t)\,dt,$$

pelo que f é analítica. A relação (13.7) é pois válida quando $m = 1$.

Suponha-se agora, indutivamente, que para um certo inteiro $m \geq 1$ e para todo o $z \in D$ a função definida por

$$t \mapsto \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}\,(z, t)$$

é integrável-R em $[a, b]$, e que se tem

$$f^{(m)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}\,(z, t)\,dt.$$

Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$ tome-se um conjunto aberto e limitado G tal que $K \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq D$. Pondo $r = d(K, \mathbb{C} \setminus G) > 0$ e dado $z \in K$, como na demonstração do teorema 13.9 as desigualdades de Cauchy (corolário 5 do teorema 13.5) conduzem a

$$\left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}\,(z, t)\right| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{|\zeta - z| = r} |\varphi(\zeta, t)| \quad \text{se} \quad z \in K \quad \text{e} \quad t \in [a, b].$$

Como $\overline{G}$ é compacto, a função φ é limitada em $\overline{G} \times [a, b]$ e verifica-se assim que a função $\partial^m \varphi / \partial z^m$ também é limitada em $K \times [a, b]$. Aplicando agora a $f^{(m)}$ a parte do enunciado já estabelecida, da hipótese de indução resulta que a função

$$t \mapsto \frac{\partial^{m+1} \varphi}{\partial z^{m+1}}\,(z, t)$$

é também integrável-R em $[a,b]$ e que

$$f^{(m+1)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial z^{m+1}}(z,t)\,dt$$

como se pretende.

■

Corolário - *Sejam* $D, E \subseteq \mathbb{C}$ *dois conjuntos abertos,* $\varphi : D \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *e* γ *um caminho regular em* E*. Suponha-se que para cada* $z \in D$ *a função definida em* E *por* $\zeta \mapsto \varphi(z,\zeta)$ *é contínua e que para cada* $\zeta \in E$ *a função definida em* D *por* $z \mapsto \varphi(z,\zeta)$ *é analítica. Se* φ *for limitada em cada conjunto da forma* $K \times [\gamma]$ *com* $K \subseteq D$ *compacto, então é analítica a função* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(z) = \int_\gamma \varphi(z,\zeta)d\zeta$$

Demonstração. Sendo $[a,b]$ o domínio de γ temos

$$f(z) = \int_a^b \varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Nas condições do enunciado, para cada $t \in [a,b]$ a função definida por $z \mapsto \varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t)$ é analítica, e para cada $z \in D$ a função definida por $t \mapsto \varphi(z,\gamma(t))$ é contínua. Como γ' é limitada podemos então aplicar o teorema anterior pois a função $\varphi(z,\gamma(t))\gamma'(t)$ é limitada em cada conjunto da forma $K \times [a,b]$ com $K \subseteq D$ compacto.

■

A fórmula integral de Cauchy traduzida pelo teorema 13.3 permanece válida em condições muito mais gerais. Para deduzirmos esta generalização vamos começar com algumas definições.

Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ chama-se *cadeia* em D a todo o conjunto finito de caminhos regulares em D. Dada uma cadeia $\Gamma = \{\gamma_1, ...\gamma_n\}$ põe-se por definição

$$[\Gamma] = [\gamma_1] \cup ... \cup [\gamma_n]$$

e para toda a função contínua $f : [\Gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ define-se o integral de f ao longo de Γ por

$$\int_\Gamma f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f.$$

Se todos os caminhos de Γ forem fechados diz-se que Γ é um *ciclo.* Neste caso define-se o índice de um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ relativamente a Γ por

$$Ind_\Gamma(z) = \sum_{k=1}^n Ind_{\gamma_k}(z)$$

e tem-se então

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus[\Gamma].$$

Como Ind_Γ é uma função contínua que só toma valores inteiros, ela é ainda constante em cada componente conexa de $\mathbb{C}\setminus[\Gamma]$ e é nula na componente ilimitada, pois esta componente está contida em todas as componentes conexas ilimitadas dos caminhos γ_k.

Dada uma cadeia $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ define-se a *cadeia oposta* Γ^- por $\Gamma^- = \left\{\gamma_1^-, ..., \gamma_n^-\right\}$. Para cada função contínua $f : [\Gamma] \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se então

$$\int_{\Gamma^-} f = -\int_\Gamma f.$$

No caso de Γ ser um ciclo, Γ^- é também um ciclo e da relação anterior deduz-se

$$Ind_{\Gamma^-}(z) = -Ind_\Gamma(z) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus[\Gamma].$$

Provaremos agora um resultado auxiliar.

Lema 13.11 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, γ um caminho regular em D e $\varphi : D\times D \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por*

$$\varphi(z,\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \quad \textit{se} \quad z \neq \zeta, \quad \textit{e} \quad \varphi(\zeta,\zeta) = f'(\zeta).$$

Então é analítica a função h definida por

$$h(z) = \int_\gamma \varphi(z,\zeta)d\zeta \quad \textit{se} \quad z \in D.$$

Demonstração. O corolário 3 do teorema 13.5 mostra que a função definida por $z \mapsto \varphi(z,\zeta)$ é analítica em D para cada $\zeta \in D$, pois ela é analítica em $D\setminus\{\zeta\}$ e contínua no ponto $z = \zeta$. Como a função definida por $\zeta \mapsto \varphi(z,\zeta)$ é contínua em D para cada $z \in D$, atendendo ao corolário do teorema 13.10 basta então provar que φ é limitada nos conjuntos da forma $K \times [\gamma]$ com $K \subseteq D$ compacto.

Tome-se $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $r < d(K, \mathbb{C}\setminus D)$ e seja

$$E = \{z \in \mathbb{C} : d(z,K) \leq r\}.$$

Pondo $\mu = \max\{|z| : z \in K\}$, para cada $z \in E$ é $|z| \leq \mu + r$ e como E é fechado segue-se que E é um subconjunto compacto de D. Sejam então

$$M = \max_{z\in[\gamma]\cup K} |f(z)| \text{ e } L = \max_{z\in E} |f'(z)|.$$

Dados dois pontos $z \in K$ e $\zeta \in [\gamma]$, se $|\zeta - z| \geq r$ temos

$$|\varphi(z,\zeta)| \leq \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{r} \leq \frac{2M}{r},$$

e é também $|\varphi(z,z)| = |f'(z)| \leq L$. Na hipótese $0 < |\zeta - z| < r$, das inclusões $[\zeta, z] \subseteq B(z,r) \subseteq E$ resulta ainda

$$|\varphi(z,\zeta)| = \frac{1}{|\zeta - z|}\left|\int_z^\zeta f'(w)dw\right| \leq L. \qquad \blacksquare$$

A demonstração do lema anterior é habitualmente feita invocando o facto de uma função contínua de duas variáveis complexas ser limitada nos subconjuntos compactos de $D \times D$. Estes conceitos parecem no entanto estranhos ao âmbito das funções de uma variável complexa que constituem aqui o nosso objecto de estudo.

Podemos agora estabelecer uma generalização substancial da fórmula integral de Cauchy 13.3.

Teorema 13.12 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e Γ um ciclo em D tal que $Ind_\Gamma(z) = 0$ para todo o $z \in \mathbb{C} \backslash D$. Dada uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se então*

$$f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad se \quad z \in D \setminus [\Gamma].$$

Demonstração. (Dixon, 1971). Dado um ciclo Γ que verifique as condições do enunciado, o conjunto

$$E = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma] : Ind_\Gamma(z) = 0\}$$

é aberto por ser uma união de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$. Sendo φ a função definida no lema anterior considerem-se agora as funções h_0 e h_1 definidas por

$$h_0(z) = \int_\Gamma \varphi(z,\zeta)d\zeta \quad \text{se} \quad z \in D$$

e

$$h_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \text{se} \quad z \in E.$$

O lema 13.11 e o teorema 13.4 mostram então que h_0 e h_1 são analíticas nos respectivos domínios D e E. Por outro lado, como em cada ponto $z \in D \cap E$ se tem

$$h_1(z) = h_0(z) + f(z)\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = h_0(z) + 2\pi i Ind_\Gamma(z)f(z) = h_0(z),$$

pode definir-se uma função analítica $h : D \cup E \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo $h(z) = h_0(z)$ se $z \in D$ e $h(z) = h_1(z)$ se $z \in E \setminus D$. Como a hipótese do enunciado mostra que $\mathbb{C} \setminus D \subseteq E$ segue-se que $D \cup E = \mathbb{C}$ e h é então uma função inteira.

Tomando $R > 0$ tal que $[\Gamma] \subseteq B(0,R)$, cada ponto $z \in \mathbb{C} \setminus B(0,R)$ é exterior a todos os caminhos de Γ pelo que $Ind_\Gamma(z) = 0$, e isto mostra que

$\mathbb{C} \setminus B(0,R) \subseteq E$. Sendo M o máximo de $|f|$ em $[\Gamma]$ e representando por $L(\Gamma)$ a soma dos comprimentos dos caminhos de Γ, dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq 2R$ é então

$$|h(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{ML(\Gamma)}{|z| - R} \leq \frac{ML(\Gamma)}{R}$$

pelo que h é limitada e

$$\lim_{z \to \infty} h(z) = 0.$$

Do teorema de Liouville (corolário 6 do teorema 13.5) resulta agora que h é identicamente nula e para cada $z \in D$ tem-se assim

$$\int_\Gamma \varphi(z,\zeta) d\zeta = 0,$$

donde se deduz

$$f(z) Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad z \in D \setminus [\Gamma].$$

■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e γ um caminho fechado elementar em D, orientado positivamente, cujo interior está contido em D. Para cada ponto z interior a γ tem-se então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Demonstração. Neste caso todos os pontos de $\mathbb{C} \setminus D$ são exteriores a γ e tem-se $Ind_\gamma(z) = 1$ se z é interior a γ pelo que a fórmula resulta de aplicar o teorema anterior à cadeia $\Gamma = \{\gamma\}$.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e Γ um ciclo em D. Tem-se então*

$$\int_\Gamma f = 0$$

para toda a função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, sse for $Ind_\Gamma(z) = 0$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus D$, a função f definida por

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$$

é analítica em D e a relação

$$\int_\Gamma f = 0$$

implica efectivamente $Ind_\Gamma(z) = 0$.

Suponha-se agora que é $Ind_\Gamma(z) = 0$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Dada uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tome-se $z \in D \setminus [\Gamma]$ e seja g a função definida em D por $g(\zeta) = (\zeta - z)\, f(\zeta)$. Como g é analítica e $g\,(z) = 0$, do teorema anterior resulta então

$$\int_\Gamma f = \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i g\,(z)\, Ind_\Gamma\,(z) = 0.$$

■

.

Corolário 3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e γ um caminho em D, fechado e regular. Tem-se então*

$$\int_\gamma f = 0$$

para toda a função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, sse o interior de γ estiver contido em D.

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior tomando a cadeia $\Gamma = \{\gamma\}$, pois o interior de γ é formado pelos pontos $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ para os quais $Ind_\gamma(z) \neq 0$.

■

Corolário 4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e Γ_1, Γ_2 dois ciclos em D tais que $Ind_{\Gamma_1}(z) = Ind_{\Gamma_2}(z)$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Dada uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se então*

$$\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f.$$

Demonstração. Pondo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus D$ temos efectivamente $Ind_\Gamma(z) = Ind_{\Gamma_1}(z) + Ind_{\Gamma_2^-}(z) = Ind_{\Gamma_1}(z) - Ind_{\Gamma_2}(z) = 0$ e do corolário 2 deduz-se

$$\int_\Gamma f = 0$$

O enunciado resulta então de ser

$$\int_\Gamma f = \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f.$$

■

O resultado seguinte é conhecido por fórmula integral de Cauchy para uma coroa circular.

Teorema 13.13 - *Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $0 < r < s$, $c \in \mathbb{C}$ e $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto que contém a coroa circular*

$$\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - c| \leq s\}.$$

Dada uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e representando respectivamente por γ_r e γ_s os caminhos circulares de centro c e raios r e s, orientados positivamente, tem-se

$$\int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \left\{ \begin{array}{l} 2\pi i f(z) \quad se \quad r < |z - c| < s \\ \\ 0 \quad se \quad |z - a| < r \quad ou \quad |z - c| > s \end{array} \right. .$$

Demonstração. Nas condições do enunciado é $Ind_{\gamma_r}(z) = 1$ se $|z - c| < r$, $Ind_{\gamma_r}(z) = 0$ se $|z - c| > r$, $Ind_{\gamma_s}(z) = 1$ se $|z - c| < s$ e $Ind_{\gamma_s}(z) = 0$ se $|z - c| > s$. Pondo $\Gamma = \{\gamma_r^-, \gamma_s\}$ é então

$$Ind_\Gamma(z) = 0 \;\text{ se }\; |z - c| < r \;\text{ ou }\; |z - c| > s,$$

e

$$Ind_\Gamma(z) = 1 \;\text{ se }\; r < |z - c| < s.$$

Tem-se em particular $Ind_\Gamma(z) = 0$ se $z \in \mathbb{C} \setminus D$, pelo que a fórmula resulta directamente do teorema anterior.

■

Se um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ for simplesmente conexo a fórmula integral de Cauchy é válida, pois no exemplo 11.31 mostrou-se que D contém o interior de qualquer caminho em D, fechado e regular. Reciprocamente, se D for conexo pode provar-se que esta última condição implica que D seja simplesmente conexo. Para estabelecer este resultado vamos começar com algumas definições.

Duas cadeias Φ e Ψ em $\mathbb{C}$ dizem-se *equivalentes* se $[\Phi] = [\Psi]$ e se para toda a função contínua $f : [\Phi] \longrightarrow \mathbb{C}$ for

$$\int_\Phi f = \int_\Psi f.$$

Uma cadeia Φ em $\mathbb{C}$ diz-se *equilibrada* se para cada $z \in \mathbb{C}$ o número de caminhos de Φ com ponto final z for igual ao número de caminhos de Φ que têm ponto inicial z. Em particular, se Φ for um ciclo todos os caminhos de Φ são fechados pelo que Φ é uma cadeia equilibrada. Reciprocamente, se Φ for uma cadeia equilibrada vamos provar que existe um ciclo equivalente a Φ.

Lema 13.14 - *Todo a cadeia equilibrada em $\mathbb{C}$ é equivalente a algum ciclo em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Dado um inteiro $n \geq 1$ seja Φ uma cadeia equilibrada em $\mathbb{C}$ com n caminhos, e suponha-se que o enunciado é válido para toda a cadeia equilibrada com menos de n caminhos.

Para cada caminho $\gamma \in \Phi$ existe necessariamente um caminho em Φ cujo ponto inicial é o ponto final de γ. Tomando então um caminho $\gamma \in \Phi$ e pondo $\gamma_1 = \gamma$, pode formar-se uma sucessão de caminhos (γ_k) tal que o ponto final z_k de cada γ_k coincida com o ponto inicial de γ_{k+1}. Supondo que z_j e z_{j+m} são o primeiros termos que se repetem na sucessão (z_k) segue-se que a sucessão $\left(\gamma_{j+1}, ..., \gamma_{j+m}\right)$ é formada por m caminhos distintos e tais que o caminho

$$\varphi = \gamma_{j+1} \dotplus ... \dotplus \gamma_{j+m}$$

é fechado. Então a cadeia $\left\{\gamma_{j+1}, ..., \gamma_{j+m}\right\}$ é equivalente ao ciclo $\{\varphi\}$, e como é uma cadeia equilibrada o mesmo sucede com a cadeia (que pode ser vazia) formada pelos restantes $n - m$ caminhos de Φ. Por hipótese de indução esta cadeia é equivalente a um certo ciclo Γ_0 em $\mathbb{C}$ e pondo $\Gamma = \Gamma_0 \cup \{\varphi\}$ obtém-se um ciclo Γ equivalente a Φ.

■

O teorema seguinte traduz uma propriedade topológica importante do plano complexo.

Teorema 13.15 - *Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e um conjunto compacto $K \subseteq D$, existe um ciclo Γ em $D \setminus K$ tal que*

$$Ind_\Gamma(w) = 1 \quad se \quad w \in K \quad e \quad Ind_\Gamma(w) = 0 \quad se \quad w \in \mathbb{C} \setminus D.$$

Demonstração. Como K é limitado existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, $c < d$, e K está contido no interior do rectângulo

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\,(z) \in [a, b] \text{ e } \text{Im}\,(z) \in [c, d]\}.$$

Como K é compacto e $K \cap (\mathbb{C} \setminus D) = \varnothing$, é $d(K, \mathbb{C} \setminus D) > 0$ e pode escolher-se $\varepsilon > 0$ tal que $\sqrt{2}\varepsilon < d(K, \mathbb{C} \setminus D)$. Sejam então $\{x_0, ..., x_m\}$ uma decomposição de $[a, b]$ e $\{y_0, ..., y_n\}$ uma decomposição de $[c, d]$ tais que a distância entre dois pontos consecutivos de cada decomposição não excede ε. Para cada par de índices k, l tais que $0 \leq k \leq m$ e $0 \leq l \leq n$ seja agora $z_{kl} = x_k + iy_l$, e se $k < m$ e $l < n$ ponha-se

$$R_{kl} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\,(z) \in [x_k, x_{k+1}] \text{ e } \text{Im}\,(z) \in [y_l, y_{l+1}]\}.$$

A cada rectângulo R_{kl} associem-se ainda os quatro caminhos lineares $\gamma_{kl}^{(1)}$, $\gamma_{kl}^{(2)}$, $\gamma_{kl}^{(3)}$e $\gamma_{kl}^{(4)}$definidos para $t \in [0, 1]$ por

$$\gamma_{kl}^{(1)}(t) = (1 - t)\, z_{kl} + t z_{k+1,l}, \quad \gamma_{kl}^{(2)}(t) = (1 - t)\, z_{k+1,l} + t z_{k+1,l+1},$$

$$\gamma_{kl}^{(3)}(t) = (1 - t)\, z_{k+1,l+1} + t z_{k,l+1} \text{ e } \gamma_{kl}^{(4)}(t) = (1 - t)\, z_{k,l+1} + t\ z_{kl}.$$

Seja agora $\mathcal{C}$ a colecção dos rectângulos R_{kl} que intersectam K, Φ a cadeia formada pelos caminhos lineares associados aos rectângulos de $\mathcal{C}$, e Ψ a cadeia obtida de Φ removendo todos os pares de caminhos opostos presentes em Φ. Dados um rectângulo $R_{kl} \in \mathcal{C}$ e um ponto $z \in R_{kl}$, tomando $w \in R_{kl} \cap K$ temos

$$|z-w| \leq \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + (y_{l+1}-y_l)^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon < d\,(K, \mathbb{C} \setminus D)$$

pelo que $z \in D$. Verifica-se assim que cada rectângulo de $\mathcal{C}$ está contido em D e resulta em particular que Φ é uma cadeia em D.

Para provar que Ψ é uma cadeia em $D \setminus K$ tome-se um caminho $\gamma \in \Phi$ e suponha-se que $[\gamma]$ intersecta K. Como K não intersecta qualquer dos segmentos $[z_{00}, z_{m0}]$, $[z_{m0}, z_{mn}]$, $[z_{0n}, z_{mn}]$ ou $[z_{00}, z_{0n}]$, segue-se que $[\gamma]$ é um segmento da forma $[z_{kl}, z_{k+1,l}]$ com $1 \leq l \leq n-1$ ou $[z_{kl}, z_{k,l+1}]$ com $1 \leq k \leq m-1$. No primeiro caso só pode ter-se

$$\gamma = \gamma_{kl}^{(1)} \text{ ou } \gamma = \gamma_{k,l-1}^{(3)} = \gamma_{kl}^{(1)-},$$

e como os rectângulos R_{kl} e $R_{k,l-1}$ intersectam ambos K segue-se que estes dois caminhos são caminhos opostos de Φ, pelo que $\gamma \notin \Psi$. Analogamente, se $[\gamma] = [z_{kl}, z_{k,l+1}]$ com $1 \leq k \leq m-1$, é

$$\gamma = \gamma_{kl}^{(4)} \text{ ou } \gamma = \gamma_{k-1,l}^{(2)} = \gamma_{kl}^{(4)-}$$

e resulta ainda que $\gamma \notin \Psi$. Vemos assim que os segmentos descritos pelos caminhos de Ψ não intersectam K e isto mostra que Ψ é efectivamente uma cadeia em $D \setminus K$.

Por outro lado, como Φ é uma união de cadeias da forma

$$\lambda_{kl} = \left\{\gamma_{kl}^{(1)}, \gamma_{kl}^{(2)}, \gamma_{kl}^{(3)}, \gamma_{kl}^{(4)}\right\}$$

e cada uma destas cadeias é equilibrada, segue-se que Φ também é equilibrada e o mesmo sucede portanto com Ψ. Atendendo ao lema 13.14 conclui-se assim que existe um ciclo Γ em $D \setminus K$ que é equivalente a Ψ. Como Ψ resulta de Φ por remoção de pares de caminhos opostos, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus [\Phi]$ é então

$$\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} d = \int_\Psi \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_\Phi \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{\lambda_{kl} \in \mathcal{C}} \int_{\lambda_{kl}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

pelo que

$$Ind_\Gamma(z) = \sum_{\lambda_{kl} \in \mathcal{C}} Ind_{\lambda_{kl}}(z). \tag{13.8}$$

Notando agora que $\mathcal{C}$ é uma cobertura de K, segue-se que cada ponto $z \in K \setminus [\Phi]$ pertence a algum dos conjuntos $R_{kl} \setminus [\lambda_{kl}] = R_{kl}^\circ$ tais que $R_{kl} \in \mathcal{C}$. Além disso, como todos os membros de $\mathcal{C}$ estão contidos em D, cada rectângulo

$R_{kl} \in \mathcal{C}$ é disjunto de $\mathbb{C} \setminus D$. Atendendo ao exemplo 11.34, de (13.8) resulta assim

$$Ind_\Gamma(z) = 1 \text{ se } z \in K \setminus [\Phi] \quad \text{e} \quad Ind_\Gamma(z) = 0 \text{ se } z \in \mathbb{C} \setminus D.$$

Finalmente, se $z \in K \cap [\Phi]$ existe algum rectângulo $R_{kl} \in \mathcal{C}$ tal que $z \in R_{kl}$. Como $z \notin [\Gamma]$ a função Ind_Γ é contínua no ponto z, e dado que ela toma o valor 1 em R_{kl}° é então também $Ind_\Gamma(z) = 1$.

■

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $K \subseteq D$ um conjunto compacto e $c \in K$. Existe então um caminho fechado e regular γ em $D \setminus K$ tal que $Ind_\gamma(c) \neq 0$.*

Demonstração. O teorema anterior mostra que existe um ciclo Γ em $D \setminus K$ para o qual $Ind_\Gamma(c) = 1$. Então existe necessariamente algum caminho fechado $\gamma \in \Gamma$ para o qual $Ind_\gamma(c) \neq 0$.

■

Estamos agora em condições de caracterizar completamente os subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ cujas componentes conexas são simplesmente conexas.

Teorema 13.16 - *Dado um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ são equivalentes as seguintes condições:*

1 - As componentes conexas de D são simplesmente conexas.
2 - Todo o caminho em D, fechado e regular, tem o seu interior contido em D.
3 - *Para toda a função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é nulo o integral ao longo de qualquer caminho em D, fechado e regular.*
4 - Toda a função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é primitivável.
5 - Para toda a função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe um ramo do logaritmo.
6 - Para cada $c \in \mathbb{C} \setminus D$ existe um ramo do logaritmo da função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z - c$.
7 - Para cada $c \in \mathbb{C} \setminus D$, a função definida por $f(z) = 1/(z-c)$ é primitivável.

Demonstração. No exemplo 11.31 mostrou-se que a condição 1 implica a condição 2. Supondo que a condição 2 se verifica, para cada ponto $z \in \mathbb{C} \setminus D$ e para cada caminho γ em D, fechado e regular, tem-se $Ind_\gamma(z) = 0$. Dada uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, do corolário 3 do teorema 13.12 resulta então que a condição 3 é válida.

Como o teorema 12.2 mostra que a condição 3 implica a condição 4, vamos agora supôr que se verifica esta última condição. Dada uma função analítica

$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a função f'/f é primitivável por também ser analítica. Do teorema 10.14 resulta então que existe um ramo do logaritmo de f em cada componente conexa de D e portanto também em D.

Para cada $c \in \mathbb{C} \setminus D$ a função f definida em D por $f(z) = z - c$ é analítica e nunca se anula pelo que a condição 5 implica directamente a condição 6. Por outro lado, se esta condição se verifica e sendo λ um ramo do logaritmo de $z-c$, do teorema 10.13 resulta $\lambda'(z) = 1/(z-c)$ para cada $z \in D$ e isto mostra que λ é uma primitiva de $1/(z-c)$ em D.

Supondo finalmente que D tem uma componente conexa C que não é simplesmente conexa, o teorema 5.35 mostra que existe um conjunto compacto $K \neq \varnothing$ tal que $K \subseteq \mathbb{C} \setminus C$ e $C \cup K$ é aberto. Fixado um ponto $c \in K$ e aplicando o corolário do teorema 13.15 ao conjunto $C \cup K$ verifica-se então que existe um caminho γ em C, fechado e regular, para o qual

$$\int_\gamma \frac{1}{z-c} dz = 2\pi i Ind_\gamma(c) \neq 0.$$

Como γ é um caminho em D, do teorema 12.2 conclui-se que a condição 7 também não se verifica.

■

Outros aspectos relevantes da fórmula integral de Cauchy dizem respeito ao conceito de *homotopia* que vamos agora definir.

Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ sejam φ e ψ dois caminhos fechados em E com intervalo de parametrização $[a, b]$. Diz-se que φ e ψ são *homotópicos em E* se existir uma função contínua

$$H : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow E$$

tal que, para todo o $t \in [a, b]$ e todo o $s \in [0, 1]$ se tenha

$$H(t, 0) = \varphi(t), \;\; H(t, 1) = \psi(t) \;\text{ e }\; H(a, s) = H(b, s),$$

e diz-se então que a função H estabelece uma *homotopia* entre os caminhos φ e ψ. Nesta definição as duas primeiras condições exprimem que o caminho φ vai ser contínuamente deformado até se transformar em ψ. A terceira condição traduz que durante a transformação os pontos inicial e final se mantém comuns pelo que todos os caminhos intermédios são fechados.

Exemplo 13.17 - *Dados dois caminhos fechados $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow E \subseteq \mathbb{C}$ e dois caminhos equivalentes $\varphi_0, \psi_0 : [c, d] \longrightarrow E$, se φ e ψ são homotópicos em E o mesmo sucede com φ_0, ψ_0.*

Efectivamente, sendo $H : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow E$ uma função contínua que estabelece uma homotopia entre φ e ψ, e h a função linear crescente que aplica $[c, d]$ sobre $[a, b]$, a função

$$H_0 : [c, d] \times [0, 1] \longrightarrow E$$

definida por $H_0(t,s) = H\left(h(t),s\right)$ estabelece uma homotopia entre φ_0 e ψ_0.

Exemplo 13.18 - *Seja $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto em estrela relativamente a um ponto w. Dado um caminho fechado $\gamma : [a,b] \longrightarrow E$, a função*

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow E$$

definida por

$$H(t,s) = (1-s)\,\gamma(t) + sw$$

estabelece uma homotopia em E entre γ e o caminho pontual de imagem $\{w\}$.

Efectivamente, com $t \in [a,b]$ fixo, $H(t,s)$ é um caminho linear que liga $\gamma(t)$ a w pelo que $H(t,s) \in E$. Tem-se ainda $H(a,s) = H(b,s)$ e $H(t,1)$ é um caminho pontual de imagem $\{w\}$.

O conceito de caminhos homotópicos num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ dá uma condição suficiente para que dois caminhos φ e ψ em D, fechados e regulares, verifiquem a relação $Ind_\psi(z) = Ind_\varphi(z)$, qualquer que seja o ponto $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Começaremos por estabelecer um resultado auxiliar.

Lema 13.19 - *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dois caminhos fechados regulares que verificam a condição*

$$|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_1(t)| \quad \textit{se} \quad t \in [a,b].$$

Tem-se então

$$Ind_{\gamma_2}(z) = Ind_{\gamma_1}(z).$$

Demonstração. A condição do enunciado exige efectivamente $z \notin [\gamma_1]$ e $z \notin [\gamma_2]$, pelo que estão definidos os índices de z relativamente a γ_1 e a γ_2. Pondo agora

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_2(t) - z}{\gamma_1(t) - z} \quad \text{se} \quad t \in [a,b],$$

γ é ainda um caminho regular fechado, e no complementar em $[a,b]$ de um conjunto finito tem-se

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t) - z} - \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z}.$$

É então

$$\begin{aligned}
2\pi i \left(Ind_{\gamma_2}(z) - Ind_{\gamma_1}(z)\right) &= \int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \int_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t) - z} dt - \int_a^b \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} dt \\
&= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta \\
&= 2\pi i Ind_\gamma(0),
\end{aligned}$$

pelo que
$$Ind_{\gamma_2}(z) = Ind_{\gamma_1}(z) + Ind_{\gamma}(0).$$

Como para cada $t \in [a,b]$ é $|\gamma(t) - 1| < 1$ segue-se que $[\gamma] \subseteq B(1,1)$ e daqui resulta
$$Ind_{\gamma}(0) = 0.$$

■

Usando as versões dos teoremas 4.4 e 4.5 que são válidas em $\mathbb{R}^2$ podemos agora provar o resultado central relativo à homotopia de caminhos fechados.

Teorema 13.20 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e φ e ψ dois caminhos fechados regulares, homotópicos em D. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus D$ tem-se então*
$$Ind_{\varphi}(z) = Ind_{\psi}(z).$$

Demonstração. Atendendo ao exemplo 13.17 e substituindo se necessário φ e ψ por caminhos equivalentes podemos supôr que o intervalo de parametrização de φ e ψ é $[0,1]$. Seja então $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D$ uma função contínua tal que
$$H(t,0) = \varphi(t),\ \ H(t,1) = \psi(t) \ \text{ e } \ H(0,s) = H(1,s) \ \text{ se } \ t,s \in [0,1]\,.$$

A versão real do teorema 4.4 mostra que a imagem de $[0,1] \times [0,1]$ por H é um conjunto compacto, e dado um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus D$ existe então $\varepsilon > 0$ tal que
$$|z - H(t,s)| > 2\varepsilon \ \text{ se } \ t,s \in [0,1]\,. \tag{13.9}$$

Por outro lado, da versão real do teorema 4.5 resulta que H é uniformemente contínua, pelo que existe um inteiro $n > 0$ verificando a condição
$$|H(t,s) - H(t',s')| < \varepsilon \ \text{ se } \ |t - t'| \leq 1/n \ \text{ e } \ |s - s'| \leq 1/n.$$

Consideremos agora uma decomposição do intervalo $[0,1]$ em n intervalos
$$I_j = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \quad \text{com } j \in \{1,...,n\}\,,$$
e os $n+1$ caminhos poligonais $\gamma_0, ..., \gamma_n$ definidos para $t \in [0,1]$ por
$$\gamma_k(t) = H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(nt + 1 - j) + H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j - nt) \ \text{ se } \ t \in I_j \ \text{ e } \ 0 \leq k \leq n.$$

Como para cada $k \in \{0,...,n\}$ é $\gamma_k(0) = H(0,k/n)$ e $\gamma_k(1) = H(1,k/n)$, a condição $H(0,s) = H(1,s)$ mostra que os γ_k são caminhos fechados.

Dado $t \in [0,1]$ e tomando $j \in \{1,...,n\}$ tal que $t \in I_j$, temos $nt + 1 - j \geq 0$ e $(j - nt) \geq 0$. Para cada $k \in \{0,...,n\}$ resulta assim
$$\begin{aligned} \left|\gamma_k(t) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\gamma_k(t) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)(nt + 1 - j) - H\left(t, \frac{k}{n}\right)(j - nt)\right| \\ &< \varepsilon\,(nt + 1 - j) + \varepsilon\,(j - nt) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $k \leq n-1$ deduz-se do mesmo modo

$$\begin{aligned}
\left|\gamma_{k+1}(t)-\gamma_k(t)\right| &\leq \left|H\left(\frac{j}{n},\frac{k+1}{n}\right)-H\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)\right|(nt+1-j) \\
&\quad+\left|H\left(\frac{j-1}{n},\frac{k+1}{n}\right)-H\left(\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right)\right|(j-nt) \\
&< \varepsilon\,(nt+1-j)+\varepsilon\,(j-nt)=\varepsilon.
\end{aligned}$$

É pois

$$\left|\gamma_k(t)-H\left(t,\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon \ \text{ se } \ t\in[0,1] \ \text{ e } \ 0\leq k\leq n, \tag{13.10}$$

e

$$\left|\gamma_{k+1}(t)-\gamma_k(t)\right|<\varepsilon \ \text{ se } \ t\in[0,1] \ \text{ e } \ 0\leq k\leq n-1. \tag{13.11}$$

Fazendo agora sucessivamente $k=0$ e $k=n$ em (13.10) obtém-se ainda

$$|\gamma_0(t)-\varphi(t)|<\varepsilon \ \text{ e } \ |\gamma_n(t)-\psi(t)|<\varepsilon \ \text{ se } \ t\in[0,1]. \tag{13.12}$$

Por outro lado, de (13.9) e (13.10) resulta, para cada $k\in\{0,...,n\}$,

$$|z-\gamma_k(t)|\geq\left|z-H\left(t,\frac{k}{n}\right)\right|-\left|H\left(t,\frac{k}{n}\right)-\gamma_k(t)\right|>\varepsilon \ \text{ se } \ t\in[0,1]$$

e é também

$$|z-\varphi(t)|=|z-H(t,0)|>2\varepsilon \ \text{ se } \ t\in[0,1]\,.$$

De (13.11) e (13.12) deduz-se então, para cada $t\in[0,1]$,

$$|\gamma_0(t)-\varphi(t)|<|z-\varphi(t)|\,,$$

$$\left|\gamma_{k+1}(t)-\gamma_k(t)\right|<|z-\gamma_k(t)| \quad \text{se } \ 0\leq k\leq n-1$$

e

$$|\psi(t)-\gamma_n(t)|<|z-\gamma_n(t)|\,.$$

Aplicando agora o lema 13.19 aos pares de caminhos (φ,γ_0),(γ_0,γ_1),...,(γ_{n-1},γ_n) e (γ_n,ψ) obtém-se finalmente

$$Ind_{\varphi}(z)=Ind_{\gamma_0}(z)=\cdots=Ind_{\gamma_n}(z)=Ind_{\psi}(z)$$

que é o resultado pretendido.

■

Corolário 1 - *Sejam $D\subseteq\mathbb{C}$ um conjunto aberto e γ_1,γ_2 dois caminhos fechados regulares, homotópicos em D. Para cada função analítica $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ é então*

$$\int_{\gamma_1} f=\int_{\gamma_2} f.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e do corolário 4 do teorema 13.12.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e γ um caminho fechado e regular, homotópico em D a um caminho pontual. Para cada função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é então*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior pois o integral de f ao longo de um caminho pontual é nulo.

■

Corolário 3 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo. Se todo o caminho em D, fechado e regular, for homotópico em D a um caminho pontual então D é simplesmente conexo.*

Demonstração. Resulta directamente do corolário anterior e da condição 3 do teorema 13.16.

■

Veremos a propósito do teorema da aplicação de Riemann (teorema 19.23) que o recíproco do corolário anterior também é verdadeiro, pois em todo o conjunto simplesmente conexo qualquer caminho fechado e regular é homotópico a um caminho pontual.

O conceito de homotopia pode também definir-se para caminhos que não são necessariamente fechados. Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ sejam φ e ψ dois caminhos em E com intervalo de parametrização $[a, b]$, tais que $\varphi(a) = \psi(a)$ e $\varphi(b) = \psi(b)$. Diz-se que φ e ψ são *homotópicos em E com extremidades fixas* se existir uma função contínua

$$H : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow E$$

tal que, para todo o $t \in [a, b]$ e todo o $s \in [0, 1]$ se tenha

$$H(t, 0) = \varphi(t),\ H(t, 1) = \psi(t),\ H(a, s) = \varphi(a) \text{ e } H(b, s) = \varphi(b).$$

Como no exemplo 13.17, é imediato verificar que a homotopia de caminhos com extremidades fixas não se altera se os caminhos forem substituídos por caminhos equivalentes. Da definição resulta ainda que dois caminhos fechados que sejam homotópicos com extremidades fixas são também homotópicos de acordo com o conceito de homotopia de caminhos fechados introduzido inicialmente.

Exemplo 13.21 - *Sejam $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto convexo e φ e ψ dois caminhos em E, com intervalo de parametrização $[a, b]$ tais que $\varphi(a) = \psi(a)$ e $\varphi(b) = \psi(b)$. Então a função*

$$H : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow E$$

definida por

$$H(t,s) = (1-s)\varphi(t) + s\psi(t)$$

estabelece uma homotopia em E entre φ e ψ.

Lema 13.22 - *Sejam $E \subseteq \mathbb{C}$ e γ_1e γ_2 dois caminhos homotópicos em E com extremidades fixas. Se σ for um caminho em E cujo ponto inicial coincide com o ponto final de γ_1 e γ_2, então os caminhos $\gamma_1 \dot{+} \sigma$ e $\gamma_2 \dot{+} \sigma$ também são homotópicos em E com extremidades fixas.*

Demonstração. Suponha-se sem perda de generalidade que $[0,1]$ é o intervalo de parametrização de γ_1e γ_2, e $[1,2]$ é o intervalo de parametrização de σ. Se $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$ for a função que estabelece a homotopia entre γ_1e γ_2, aplicando a versão real do teorema 3.8 com $A_1 = [0,1] \times [0,1]$ e $A_2 = [1,2] \times [0,1]$ conclui-se que a função H_0 definida em $[0,2] \times [0,1]$ por

$$H_0(t,s) = \begin{cases} H(t,s) & \text{se} \quad t \in [0,1] \\ \sigma(t) & \text{se} \quad t \in [1,2] \end{cases}$$

é contínua, e daqui resulta que ela estabelece uma homotopia em E entre $\gamma_1 \dot{+} \sigma$ e $\gamma_2 \dot{+} \sigma$.

■

É válido o seguinte resultado:

Teorema 13.23 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e γ_1, γ_2 dois caminhos regulares em D com o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final. Se γ_1e γ_2 forem homotópicos em D com extremidades fixas, para cada função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Demonstração. Atendendo ao lema anterior os caminho fechados $\varphi = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2^-$ e $\psi = \gamma_2 \dot{+} \gamma_2^-$ são homotópicos com extremidades fixas. Então eles são também homotópicos como caminhos fechados, e do corolário 1 do teorema 13.20 resulta

$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$$

pelo que

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_2} f - \int_{\gamma_2} f = 0.$$

■

14 - Pontos singulares

Sejam $E \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Diz-se que f tem uma *singularidade isolada* num ponto $a \in \mathbb{C} \setminus E$ se a for ponto isolado de $\mathbb{C} \setminus E$, ou seja, se existir $r > 0$ tal que $B(a, r) \setminus \{a\} \subseteq E$. Em particular, se D é aberto, $a \in D$ e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica, então f tem uma singularidade isolada em a.

Teorema 14.1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $A \subseteq D$ um conjunto discreto. Então $D \setminus A$ é aberto sse $D \cap A' = \varnothing$, e dada uma função analítica $f : D \setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$ os pontos de A são singularidades isoladas de f.*

Demonstração. Se $D \setminus A$ é aberto todo o ponto de $D \setminus A$ tem alguma vizinhança disjunta de A. Então $(D \setminus A) \cap A' = \varnothing$ e por A ser discreto também $A \cap A' = \varnothing$. Reciprocamente suponha-se que $D \cap A' = \varnothing$. Como $D \cap (\overline{A} \setminus A) \subseteq D \cap A' = \varnothing$ segue-se que $D \setminus A = D \setminus \overline{A}$ e isto mostra que $D \setminus A$ é aberto.

Consideremos agora uma função analítica $f : D \setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$. Como todos os pontos de A são isolados e D é aberto, dado $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap A = \{a\}$ e $B(a, r) \subseteq D$. Então $B(a, r) \setminus \{a\} \subseteq D \setminus A$ e conclui-se que f tem uma singularidade isolada no ponto a.

■

Supondo que a função f tem uma singularidade isolada em a, se for possível prolongar f a este ponto de modo a obter uma função analítica em a diz-se que a singularidade de f em a é *removível.*

Se f tiver limite finito no ponto a, do corolário 3 do teorema 13.5 resulta que a é uma singularidade removível de f pois o prolongamento por continuidade de f ao ponto a é uma função analítica em a. Este resultado pode no entanto tornar-se substancialmente mais preciso.

Teorema 14.2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, a um ponto de D e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então f tem uma singularidade removível em a sse*

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0.$$

Demonstração. Se a for uma singularidade removível de f esta função é prolongável por continuidade ao ponto a e tem-se portanto

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0.$$

Reciprocamente, se a condição do enunciado se verifica, a função $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(a) = 0$ e

$$h(z) = (z - a)f(z) \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{a\}$$

é analítica em $D \setminus \{a\}$ e contínua em a. Então o corolário 3 do teorema 13.5 mostra que h também é analítica no ponto a pelo que nalguma vizinhança $B(a, r)$ de a ela é representável por uma série de potências de $z - a$. Sendo

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \, (z - a)^n \quad \text{se} \quad z \in B(a, r)$$

e definindo f no ponto a por $f(a) = c_1$ resulta assim

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \, (z - a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} \, (z - a)^n \quad \text{se} \quad z \in B(a, r)$$

e conclui-se que f é analítica em a.

■

Corolário (Riemann) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então o ponto a é uma singularidade removível de f sse esta função for limitada nalguma vizinhança de a.*

Demonstração. Se a for uma singularidade removível de f esta função é prolongável por continuidade ao ponto a pelo que é limitada nalguma vizinhança de a. Reciprocamente, se esta condição se verificar tem-se

$$\lim_{z \to a} (z - a)f(z) = 0$$

e o teorema anterior garante que f tem então uma singularidade removível em a.

■

Suponha-se agora que uma função analítica f tem uma singularidade isolada num ponto a e que existe um inteiro $p \geq 1$ tal que

$$\lim_{z \to a} (z - a)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

Então, como f não tem limite finito no ponto a a singularidade não é removível e diz-se que a é um *polo de ordem* p de f. Em particular, no caso $p = 1$ diz-se que a é um *polo simples*.

Exemplo 14.3 - *Seja $f = g/h$ em que g e h são analíticas num ponto a. Se $g(a) \neq 0$ e h tiver um zero de ordem p em a então f tem um polo de ordem p em a.*

Efectivamente, neste caso existe uma função h_0 analítica em a tal que

$$h(z) = (z-a)^p h_0(z) \quad \text{e} \quad h_0(a) \neq 0,$$

e tem-se assim

$$\lim_{z \to a} (z-a)^p f(z) = \frac{g(a)}{h_0(a)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Teorema 14.4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, a um ponto de D e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então f tem um polo em a sse*

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Demonstração. Se a é um polo de ordem p de f e

$$\lim_{z \to a} (z-a)^p f(z) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

então $f(z) \sim c(z-a)^{-p}$ quando $z \to a$ e resulta $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

Reciprocamente, se $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq D$ e f não se anula em $B(a, r) \setminus \{a\}$. Então a função h definida em $B(a, r)$ por

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \text{se} \quad z \neq a \quad \text{e} \quad h(0) = 0$$

é analítica, e sendo p a ordem do seu zero no ponto a o exemplo anterior mostra que a é um polo de ordem p de f.

■

Teorema 14.5 - *Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$, um ponto $a \in D$, um inteiro $p > 0$ e uma função analítica $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$, são equivalentes as seguintes condições:*

1 - f tem um polo de ordem p no ponto a.

2 - Existe uma função analítica $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(a) \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^p} \quad \textit{se} \quad z \in D \setminus \{a\}.$$

3 - *Existem p complexos $b_1, ..., b_p$, tais que $b_p \neq 0$ e a função definida por*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{p} \frac{b_k}{(z-a)^k}$$

tem uma singularidade removível no ponto a.

Demonstração. Supondo que f tem um polo de ordem p no ponto a, a função $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = f(z)(z-a)^p \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{a\} \quad \text{e} \quad h(a) = \lim_{z \to a} (z-a)^p f(z)$$

é analítica e satisfaz a condição 2.

Supondo agora que f verifica a condição 2, a função h é representável por uma série de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

nalguma vizinhança $B(a,r)$ de a. Temos então

$$f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{c_n}{(z-a)^{p-n}} = \sum_{n=p}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-p} \quad \text{se} \quad z \in B(a,r) \setminus \{a\}$$

e o ponto a é uma singularidade removível da função definida pelo primeiro membro desta identidade. Tomando $b_k = c_{p-k}$ para $1 \leq k \leq p$, é $b_p = c_0 = h(a)$ e a condição 3 é satisfeita.

Finalmente, se f verifica a condição 3 é

$$\lim_{z\to a} (z-a)^p f(z) = b_p \neq 0$$

pelo que f tem um polo de ordem p no ponto a.

■

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com um polo de ordem p no ponto a. Existe então um e um só polinómio P de grau p que se anula no ponto 0 e tal que a função definida em $D \setminus \{a\}$ por*

$$f(z) - P\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

tem uma singularidade removível no ponto a.

Demonstração. Atendendo à parte 3 do teorema anterior existem constantes $b_1, ..., b_p$ tais que a condição do enunciado se verifica com o polinómio P definido por

$$P(w) = b_1 w + \cdots + b_p w^p.$$

Por outro lado, se Q for outro polinómio que verifique as mesmas condições a função definida em $D \setminus \{a\}$ por

$$f(z) - P\left(\frac{1}{z-a}\right) - \left(f(z) - Q\left(\frac{1}{z-a}\right)\right) = Q\left(\frac{1}{z-a}\right) - P\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

tem uma singularidade removível no ponto a. Então o polinómio $Q - P$ é necessariamente constante e de $Q(0) - P(0) = 0$ resulta $Q = P$.

■

Se f tiver um polo de ordem p no ponto a chama-se *parte singular ou principal de f em a* à função S definida por

$$S(z) = P\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

em que P é o polinómio mencionado no corolário anterior. Em particular, se o polo for simples tem-se

$$S(z) = \frac{c}{z-a} \quad \text{com} \quad c = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e um conjunto discreto $A \subseteq D$ tal que $D \cap A' = \varnothing$, uma função $f : D \setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se *meromorfa em D* se for analítica e se os pontos de A forem polos de f. Em particular as funções racionais são meromorfas em $\mathbb{C}$.

Teorema 14.6 (Princípio do prolongamento analítico para funções meromorfas) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, f e g duas funções meromorfas em D, e P o conjunto dos pontos que são polos de f ou de g. Se f e g coincidirem nos pontos de um conjunto que tenha algum ponto de acumulação em $D \setminus P$ é então $f = g$.*

Demonstração. Como P é a união de dois conjuntos sem pontos de acumulação em D, segue-se que P tem a mesma propriedade pelo que é necessariamente discreto. Então do teorema 14.1 resulta que $D \setminus P$ é aberto e o exemplo 5.8 mostra que este conjunto é conexo. Por outro lado, sendo E o conjunto dos pontos onde f e g coincidem e dado $a \in E' \cap (D \setminus P)$, a condição $a \notin P'$ implica

$$a \in (E \setminus P)' \cap (D \setminus P).$$

Do princípio do prolongamento analítico 9.10 resulta então que as duas funções coincidem em $D \setminus P$ pois são ambas analíticas em $D \setminus P$ e coincidem em $E \setminus P$. Como isto implica que f e g tenham os mesmos polos conclui-se que ambas as funções têm domínio $D \setminus P$.
■

Teorema 14.7 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e f uma função meromorfa em D cujos polos formam um conjunto finito $\{a_1, ..., a_n\}$. Existem então uma função analítica $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e polinómios $P_1, ..., P_n$, nulos no ponto 0, tais que*

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \quad \textit{se} \quad z \in D \setminus \{a_1, ..., a_n\}$$

sendo o grau de cada P_k igual à ordem do respectivo polo a_k.

Demonstração. Sendo $S_1, ..., S_n$ as partes singulares de f em $a_1, ..., a_n$, a função $f - (S_1 + \cdots + S_n)$ tem singularidades removíveis nos pontos a_k e é analítica em $D \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. Então esta função pode prolongar-se por continuidade sucessivamente aos pontos $a_1, ..., a_n$ e obtém-se assim uma função analítica g tal que $f = g + S_1 + \cdots + S_n$. Finalmente, o corolário do teorema 14.5 mostra que cada S_k tem a forma

$$S_k(z) = P_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

em que P_k é um polinómio nulo no ponto 0 e cujo grau é a ordem do polo a_k.
■

Dados dois polinómios P e $Q \neq 0$, a função racional definida por P/Q diz-se *própria* se o grau de P for inferior ao grau de Q, o que equivale a ser

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0.$$

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e f uma função meromorfa em D cujos polos são um conjunto finito. Existem então uma função analítica $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e uma função racional própria h tais que $f = g + h$.*

Demonstração. Basta fazer

$$h(z) = \sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

na decomposição de f estabelecida no teorema anterior e notar que se tem

$$\lim_{z\to\infty} h(z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(0) = 0,$$

pelo que a função racional h é necessariamente própria.
■

Corolário 2 - *Se f é uma função racional e os seus polos ocorrem nos n pontos $a_1, ..., a_n$, existem n polinómios $P_1, ..., P_n$ nulos no ponto 0 e um polinómio P tais que*

$$f(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_n\}.$$

Demonstração. Basta notar que neste caso a função g definida no teorema anterior é polinomial pois é inteira e exprime-se como uma diferença de duas funções racionais. ■

Corolário 3 - *Se f é uma função racional própria e os seus polos ocorrem nos n pontos $a_1, ..., a_n$, existem n polinómios $P_1, ..., P_n$ nulos no ponto 0 tais que*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} P_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_n\}.$$

Demonstração. Se f é uma função racional própria tem-se $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Então o polinómio P referido no corolário anterior é nulo pois verifica a condição $\lim_{z\to\infty} P(z) = 0$.
■

O corolário anterior mostra que toda a fracção racional própria se decompõe numa soma de *fracções racionais simples*, que são fracções racionais da forma

$$P \left(\frac{1}{z - a} \right)$$

em que P é um polinómio nulo no ponto 0. No caso particular de todos os polos serem simples os polinómios P_k têm grau 1 e esta decomposição reduz-se assim à identidade

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z - a_k} \quad \text{com} \quad c_k = \lim_{z \to a_k} (z - a_k) f(z). \tag{14.1}$$

Uma singularidade isolada que não seja removível nem um polo diz-se uma *singularidade essencial.*

Exemplo 14.8 - *A função definida por $e^{1/z}$ tem uma singularidade essencial no ponto* 0.

Efectivamente, fixado um inteiro $m \geq 1$ e tomando a sucessão definida por $z_n = 1/n$ temos

$$\lim z_n^m e^{1/z_n} = \lim \frac{e^n}{n^m} = +\infty$$

pelo que não é finito o $\lim_{z\to 0} z^m e^{1/z}$.

Teorema 14.9 (Casaroti-Weierstrass) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com uma singularidade essencial no ponto a. Então, para cada $r > 0$ o conjunto*

$$f\left[(B(a, r) \setminus \{a\}) \cap D\right]$$

é denso em $\mathbb{C}$.

Demonstração. Se o enunciado for falso existem $w \in \mathbb{C}$ e $r, \delta > 0$ tais que

$$|f(z) - w| \geq \delta \quad \text{se} \quad z \in (B(a, r) \setminus \{a\}) \cap D.$$

Temos então
$$\left|\frac{1}{f(z)-w}\right| \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{se} \ \ z \in (B(a,r) \setminus \{a\}) \cap D$$
e o corolário do teorema 14.2 mostra que o ponto a é uma singularidade removível da função definida por
$$\frac{1}{f(z)-w}.$$
Existe assim uma função analítica $g : B(a,r) \cap D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que
$$g(z) = \frac{1}{f(z)-w} \quad \text{se} \ \ z \in (B(a,r) \setminus \{a\}) \cap D$$
e resulta
$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} \quad \text{se} \ \ z \in (B(a,r) \setminus \{a\}) \cap D.$$
No entanto esta relação mostra que o ponto a seria um polo ou uma singularidade removível de f consoante se tivesse $g(a) = 0$ ou $g(a) \neq 0$, o que contraria a hipótese.

■

Nota 14.10 - Nas condições do teorema anterior pode provar-se que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que se tem
$$\mathbb{C} \setminus \{c\} \subseteq f\left[(B(a,r) \setminus \{a\}) \cap D\right] \quad \text{se} \ \ r > 0.$$

Isto mostra que em qualquer vizinhança de uma singularidade essencial uma função analítica toma todos os valores complexos com uma possível excepção. Este reforço fundamental do teorema de Casaroti-Weierstrass é conhecido por "Grande Teorema de Picard". Será estabelecido na secção 21 e constitui um dos resultados chave da teoria das funções de variável complexa.

Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, diz-se que f tem uma s*ingularidade isolada no ponto* ∞ se a função definida por $f(1/z)$ tiver uma singularidade isolada no ponto zero. Esta condição equivale a $f(1/z)$ ser analítica nalgum conjunto da forma $B(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$, e pondo $r = 1/\varepsilon$ vemos que isto sucede sse $\mathbb{C} \setminus B(0,r) \subseteq D$.

Se f tiver uma singularidade isolada no ponto ∞ diz-se que esta singularidade é removível, um polo de ordem p ou uma singularidade essencial, se o mesmo suceder, respectivamente, com a singularidade de $f(1/z)$ no ponto 0.

Em particular resulta que ∞ é uma singularidade removível de f sse f for limitada nalguma vizinhança de ∞ e um polo de ordem p sse
$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Exemplo 14.11 - *Uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com uma singularidade isolada em ∞ tem apenas um conjunto finito de polos.*

Efectivamente, como a função é analítica num conjunto da forma $\mathbb{C} \setminus B(0,r)$ com $r > 0$, o conjunto P dos seus polos está contido em $B(0,r)$. Então P é limitado e como não tem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ conclui-se que é um conjunto finito.

Exemplo 14.12 - *Uma função polinomial de grau $p > 0$ tem um polo de ordem p em ∞.*

Efectivamente, sendo a_p o coeficiente do termo de maior grau de f, da relação $f(z) \sim a_p z^p$ $(z \to \infty)$ resulta

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Exemplo 14.13 - *Se f tiver um polo de ordem p em ∞ existe um polinómio P de grau p tal que $f - P$ tem uma singularidade removível em ∞.*

Efectivamente o corolário do teorema 14.5 mostra que neste caso existe um polinómio P de grau p tal que $f\,(1/z) - P(1/z)$ tem uma singularidade removível em 0.

Exemplo 14.14 - *Se f tiver uma singularidade isolada em ∞ e*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

então a função definida por $zf(z)$ é limitada nalguma vizinhança de ∞.

Efectivamente neste caso é $\lim_{w\to 0} f(1/w) = 0$ e pondo

$$g\,(w) = \frac{1}{w} f\left(\frac{1}{w}\right),$$

a relação $\lim_{w\to 0} wg(w) = 0$ mostra que g tem uma singularidade removível no ponto 0. Então g é limitada nalguma vizinhança de 0 pelo que a função definida por $zf(z)$ é limitada nalguma vizinhança de ∞.

Exemplo 14.15 - *Se f tem uma singularidade essencial em ∞ o conjunto dos valores assumidos por f em cada conjunto da forma $B(\infty,r) \cap D$ é denso em $\mathbb{C}$.*

Sejam efectivamente $E = \{1/z : z \in D \setminus \{0\}\}$ e g a função definida em E por $g(z) = f(1/z)$. Como g tem uma singularidade essencial no ponto 0 basta agora aplicar o teorema de Casaroti-Weierstrass 14.9, notando que

$$f\,[B(\infty,r) \cap D] = g\,[B\,(0,r) \cap E]\,.$$

Teorema 14.16 - *Uma função inteira é constante se tiver uma singularidade removível em ∞ e é uma função polinomial de grau p se tiver um polo de ordem p em ∞.*

Demonstração. Se f tiver uma singularidade removível em ∞ existe $r > 0$ tal que f é limitada em $\mathbb{C} \setminus B(0, r)$. Além disso, como f é contínua no conjunto compacto $\overline{B}(0, r)$, segue-se que f também é limitada neste conjunto. Então f é uma função limitada e o teorema de Liouville mostra que f é constante.

Se f tiver um polo de ordem p em ∞ o exemplo 14.13 mostra que f se pode escrever na forma $g + P$ em que P é um polinómio de grau p e g uma função inteira com uma singularidade removível em ∞. Então a parte do enunciado já estabelecida mostra que g é constante, pelo que f se reduz a uma função polinomial de grau p.

■

Exemplo 14.17 - *Dada uma função inteira f, se para algum $\lambda \in \mathbb{R}^+$ for*

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{|z|^\lambda} = 0$$

então f é uma função polinomial de grau $p < \lambda$.

Efectivamente neste caso a singularidade de f em ∞ é removível ou é um polo de ordem $p < \lambda$.

Corolário 1 - *Toda a função inteira e não polinomial tem uma singularidade essencial em ∞.*

■

Corolário 2 - *Toda a função inteira e não constante tem o contradomínio denso em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. De acordo com o teorema anterior uma função inteira é polinomial ou tem uma singularidade essencial em ∞. Se a função for polinomial e não constante o exemplo 13.6 mostra que o seu contradomínio é $\mathbb{C}$. Finalmente, se a função tiver uma singularidade essencial em ∞, do exemplo 14.15 resulta que o seu contradomínio é denso em $\mathbb{C}$.

■

Teorema 14.18 - *Se f é meromorfa em $\mathbb{C}$ e tem uma singularidade isolada, não essencial, em ∞ então f é uma função racional.*

Demonstração. Como o exemplo 14.11 mostra que o conjunto dos polos de f é finito, do corolário 1 do teorema 14.7 resulta que f se decompõe na soma de uma função inteira g com uma função racional h tal que $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Então a singularidade de g em ∞ também não é essencial e o teorema 14.16 implica que g seja uma função polinomial.

■

Recorrendo à fórmula integral de Cauchy para coroas circulares (teorema 13.13) é possível estabelecer um resultado que generaliza o corolário do teorema 14.5 de modo a englobar todas as singularidades isoladas.

Teorema 14.19 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e*

$$f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma função analítica. Existe então uma e uma só função inteira F que se anula no ponto 0 e tal que a função definida em $D \setminus \{a\}$ por

$$f(z) - F\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

tem uma singularidade removível no ponto a.

Demonstração. Seja $R > 0$ tal que $\overline{B}(a, R) \subseteq D$ e para cada $r \in \left]0, R\right[$ represente-se por γ_r o caminho circular de centro a e raio r orientado positivamente. Para cada $z \neq a$ ponha-se ainda

$$\rho(z) = \begin{cases} |z-a|/2 & \text{se } \ 0 < |z-a| < R \\ R/2 & \text{se } \ |z-a| \geq R \end{cases} .$$

Como para todo o $z \neq a$ é $|z-a| > \rho(z)$, segue-se que

$$z \notin \left[\gamma_{\rho(z)}\right]$$

pelo que fica definida uma função $\psi : \mathbb{C} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo

$$\psi(z) = \int_{\gamma_{\rho(z)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Dados $r \in \left]0, R\right[$ e z tal que $|z-a| > r$, como é também $|z-a| > \rho(z)$, do teorema 13.13 aplicada ao conjunto $B(a, R) \setminus \{a\}$ resulta

$$\int_{\gamma_{\rho(z)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

pelo que

$$\psi(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad r \in \left]0, R\right[\quad \text{e} \quad |z-a| > r. \tag{14.2}$$

O teorema 13.4 mostra agora que ψ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(a, r)$ para todo o $r \in \left]0, R\right[$, e daqui resulta que ψ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Além disso, fixado $r \in \left]0, R\right[$ e sendo M um majorante de $|f|$ em $[\gamma_r]$, da relação (14.2) deduz-se

$$|\psi(z)| \leq 2\pi r M \sup_{|\zeta - a| = r} \frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{2\pi r M}{|z-a| - r} \quad \text{se} \quad |z-a| > r$$

o que implica

$$\lim_{z \to \infty} \psi(z) = 0.$$

Seja agora F a função definida por $F(0) = 0$ e

$$F(w) = -\frac{1}{2\pi i}\psi\left(a + \frac{1}{w}\right) \quad \text{se} \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Como F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e contínua no ponto 0, segue-se que F é uma função inteira. Atendendo a (14.2) vemos também que F verifica a relação

$$F\left(\frac{1}{z-a}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad r \in \left]0, R\right[\quad \text{e} \quad |z-a| > r.$$

Por outro lado, dado $z \in B(a,R) \setminus \{a\}$ e tomando r tal que $0 < r < |z-a|$, atendendo de novo ao teorema 13.13 temos também

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

pelo que

$$f(z) - F\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{se} \quad z \in B(a,R) \setminus \{a\}\,.$$

Como a função definida pelo segundo membro desta relação é analítica em $B(a,R)$ conclui-se então que F verifica as condições do enunciado pois a singularidade de

$$f(z) - F\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

no ponto a é removível.

Finalmente, se G for outra função que verifique as mesmas condições, a função $H = G - F$ é inteira, anula-se no ponto 0, e

$$H\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

tem uma singularidade removível no ponto a. Então H tem uma singularidade removível em ∞ e o teorema 14.16 mostra que H é identicamente nula.

■

Se f tiver uma singularidade isolada no ponto a chama-se *parte singular ou principal de f em a* à função S dada por

$$S(z) = F\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

em que F é a função inteira definida no teorema anterior.

Atendendo à unicidade de F e ao corolário do teorema 14.5, resulta directamente que F é a função nula se a for uma singularidade removível, uma função polinomial de grau $p > 0$ se a for um polo de ordem p, e uma função não polinomial se a for uma singularidade essencial.

O teorema 14.7 pode agora ser generalizado.

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq D$ um conjunto finito e $f : D \setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Existem então uma função analítica $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ e funções inteiras $F_1, ..., F_n$, nulas no ponto 0, tais que*

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} F_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) \quad \textit{se} \quad z \in D \setminus A.$$

Demonstração. Basta raciocinar como na demonstração do teorema 14.7 usando agora o teorema anterior no lugar do corolário do teorema 14.5.

■

Corolário 2 (Laurent) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Existem então duas sucessões*

$$(c_n)_{n \geq 0} \quad e \quad (c_{-n})_{n \geq 1}$$

tais que o desenvolvimento

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \tag{14.3}$$

é válido em todo o conjunto da forma $B(a, r) \setminus \{a\} \subseteq D$, e sendo S a parte singular de f em a tem-se

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}. \tag{14.4}$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior existem uma função inteira F, nula no ponto 0, e uma função analítica $G : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f(z) = G(z) + F \left(\frac{1}{z - a} \right) \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{a\}.$$

O desenvolvimento (14.3) obtém-se então representando por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

a série de potências de G em torno de a e por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} w^n$$

a série de potências de F em torno do ponto 0. Da definição de $S(z)$ resulta agora directamente a identidade (14.4).

■

Representando uma soma do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

pela notação

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n,$$

o desenvolvimento (14.3) pode apresentar-se na forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

e diz-se o desenvolvimento de f em *série de Laurent* em torno do ponto a.

O coeficiente c_{-1} que figura neste desenvolvimento diz-se o *resíduo de f no ponto a* e será aqui representado por $Res(f;a)$.

Exemplo 14.20 - *Se a função analítica f tem um polo simples no ponto a, é*

$$Res(f;a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Efectivamente, sendo g o prolongamento analítico de $(z-a)\,f(z)$ ao ponto a, numa certa vizinhança deste ponto tem-se então

$$g(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+1}$$

e resulta $c_{-1} = g(a) = \lim_{z \to a}(z-a) f(z)$.

Exemplo 14.21 - *Seja $f = g/h$ em que g e h são ambas analíticas no ponto a. Se $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ e $h'(a) \neq 0$, então f tem um polo simples em a e é*

$$Res(f;a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Efectivamente, se $h'(a) \neq 0$ temos

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)} \neq 0$$

pelo que a é um polo simples de f e basta agora aplicar o exemplo anterior.

Exemplo 14.22 - *Se a função analítica f tem um zero de ordem m no ponto a então f'/f tem um polo simples nesse ponto com resíduo m.*

Efectivamente, de uma relação da forma

$$f(z) = g(z)(z-a)^m$$

com g analítica no ponto a e $g(a) \neq 0$, por derivação logarítmica resulta

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Exemplo 14.23 - *Se a função analítica f tem um polo de ordem p no ponto a então f'/f tem um polo simples nesse ponto com resíduo $-p$.*

Efectivamente, de uma relação da forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$$

com g analítica no ponto a e $g(a) \neq 0$, por derivação logarítmica resulta

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{p}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Exemplo 14.24 - *Se a função analítica f tem um polo de ordem p no ponto a é*

$$Res(f;a) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}.$$

Efectivamente neste caso a série de Laurent de f em torno do ponto a tem a forma

$$\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n\,.$$

Sendo g o prolongamento analítico de $(z-a)^p\ f(z)$ ao ponto a, numa certa vizinhança deste ponto é então

$$g(z) = c_{-p} + c_{-p+1}\,(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^{n+p}$$

e resulta

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{g^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} g^{(p-1)}(z) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}. \end{aligned}$$

Exemplo 14.25 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto simétrico relativamente à origem e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se f tem uma singularidade isolada num ponto a é*

$$Res(f(-z); -a) = -Res(f(z); a).$$

Efectivamente, partindo de um desenvolvimento da forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,(z-a)^n \quad \text{se} \quad 0 < |z-a| < r,$$

temos

$$f\,(-z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,(-z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n \,(z+a)^n \quad \text{se} \quad 0 < |z+a| < r$$

e o coeficiente respectivo de $(z+a)^{-1}$ é $-c_{-1}$.

Em Análise Complexa é necessário examinar certas situações em que uma função analítica não tem singularidades isoladas em pontos da fronteira do seu domínio.

Dado $a \in \mathbb{C}$ consideremos uma série de potências de $z-a$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Sendo f a função que ela define, esta função não é analítica nos pontos de $C(a,R)$ e não tem singularidades isoladas nesses pontos. Diz-se então que um ponto $u \in C(a,R)$ é *ponto regular* de f se existir um prolongamento analítico de f a um conjunto que inclua o ponto u. Os pontos de $C(a,R)$ que não são regulares dizem-se *pontos singulares de f.*

Exemplo 14.26 - *O ponto 1 é o único ponto singular da função f definida por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \textit{se} \quad z \in B(0,1).$$

Efectivamente, para cada $u \in C(0,1) \setminus \{1\}$ a função definida em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ por $1/(1-z)$ prolonga analiticamente f ao ponto u. Por outro lado, como $\lim_{z \to 1} f(z) = \infty$ a função f não é prolongavel analiticamente ao ponto 1.

O exemplo anterior mostra em particular que uma série de potências pode divergir em todos os pontos regulares da função que ela define. Provaremos posteriormente (cf. teorema 19.19) que esta situação só pode ocorrer em pontos onde o termo geral da série não tem limite nulo.

Dados $a \in \mathbb{C}$ e uma função f definida por uma série de potências de $z-a$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$, o corolário do teorema 8.13 ou o corolário 4 do teorema 13.5 mostram que o raio de convergência da série de Taylor de f relativa a um ponto $c \in B(a,R)$ não é inferior a $R-|c-a|$. O teorema seguinte especifica em que circunstâncias esse raio de convergência excede aquele valor.

Teorema 14.27 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja $f : B(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por uma série de potências de $z-a$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$, e seja ρ o raio de convergência da série de Taylor de f relativa a um ponto $a+re^{i\theta}$ com $0<r<R$ e $\theta \in \mathbb{R}$. É então $\rho > R-r$ sse o ponto $a+Re^{i\theta}$ for ponto regular de f.*

Demonstração. Sejam $c = a+re^{i\theta}$ e $u = a+Re^{i\theta}$. Supondo $\rho > R-r$, como $|u-c| = R-r < \rho$ segue-se que $u \in B\,(c,\rho)$ e u é ponto regular de f pois o corolário 2 do teorema 9.16 mostra que f admite um prolongamento analítico a $B(a,R) \cup B\,(c,\rho)$.

Reciprocamente, se u é ponto regular de f existe um prolongamento analítico de f a um conjunto aberto D que contém $B(a,R) \cup \{u\}$ e pode ver-se que $\overline{B}\,(c,R-r) \subseteq D$. Efectivamente, dado um ponto $z \in \overline{B}\,(c,R-r)$ é

$$|z-a| \leq |z-c| + |c-a| \leq R-r+r = R.$$

Como a relação $|z-a| = R$ exige $|(z-c)+(c-a)| = |z-c|+|c-a|$, o exemplo 1.2 mostra que é então necessariamente $z-c = \lambda\,(c-a)$ com $\lambda \in \mathbb{R}^+$, e isto implica $z-a = (1+\lambda)(c-a) = Re^{i\theta}$ pelo que $z = u$ (o que é geometricamente intuitivo). Podemos assim concluir que são válidas as inclusões

$$\overline{B}\,(c,R-r) \subseteq B(a,R) \cup \{u\} \subseteq D$$

e daqui resulta $d\,(c,\mathbb{C}\setminus D) > R-r$. Dado que ρ é o raio de convergência da série de Taylor relativa ao ponto c de uma função analítica em D, o corolário 4 do teorema 13.5 mostra que $\rho \geq d\,(c,\mathbb{C}\setminus D) > R-r$.

■

Teorema 14.28 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja $f : B(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por uma série de potências de $z-a$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Então f tem algum ponto singular na circunferência $C(a,R)$.*

Demonstração. Representando por $\rho(z)$ o raio de convergência da série de Taylor de f em torno de cada ponto $z \in B(a,R)$ e pondo

$$D = \bigcup_{z \in B(a,R)} B(z,\rho(z)),$$

o teorema 9.18 mostra que existe um prolongamento analítico φ da função f a D. Assim, na hipótese de f não ter pontos singulares em $C(a, R)$ concluía-se que $C(a, R) \subseteq D$ e portanto que $d(a, \mathbb{C} \setminus D) > R$. Atendendo ao corolário 4 do teorema 13.5 a série de Taylor de φ em torno de a teria então um raio de convergência superior a R o que é absurdo pois esta é também a série de Taylor de f relativa ao ponto a.

■

O teorema seguinte dá um critério simples para localizar pontos singulares de funções definidas por séries de potências.

Teorema 14.29 - *Dado $a \in \mathbb{C}$ seja f a função definida em $B(a, R)$ por uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se para cada $n \geq 0$ for $c_n \geq 0$, o ponto $a + R$ é ponto singular de f.*

Demonstração. De acordo com o teorema anterior a função f tem um ponto singular u em $C(a, R)$. Pondo $\theta = \arg(u - a)$ tome-se $r \in]0, R[$ e seja $c = a + re^{i\theta}$. Então o teorema 14.27 mostra que a série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n$$

tem raio de convergência $R - r$. Por outro lado, aplicando o corolário 2 do teorema 8.10, para cada inteiro $m \geq 0$ é

$$\frac{f^{(m)}(c)}{m!} = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} c_n (c-a)^{n-m}$$

donde se deduz

$$\left| \frac{f^{(m)}(c)}{m!} \right| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} c_n |c-a|^{n-m} = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} c_n r^{n-m} = \frac{f^{(m)}(a+r)}{m!}.$$

Vemos assim que a série de Taylor de f relativa ao ponto $a + r$ não pode ter raio de convergência superior a $R - r$ e o enunciado resulta agora do teorema 14.27.

■

Exemplo 14.30 - *A função definida em $B(0, 1)$ por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

tem um ponto singular em $z = 1$.

O exemplo anterior mostra em particular que um ponto onde uma série de potências converge pode ser ponto singular da função que ela define.

Corolário - *Dado* $a \in \mathbb{C}$ *seja* f *a função definida em* $B(a,R)$ *por uma série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$ *com raio de convergência* $R \in \mathbb{R}^+$*. Se a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(c_n)\,(z-a)^n$$

tiver o mesmo raio de convergência e para cada $n \geq 0$ *for* $\mathrm{Re}(c_n) \geq 0$*, o ponto* $a+R$ *é ponto singular de* f*.*

Demonstração. Sendo g a função definida em $B(a,R)$ por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(c_n)\,(z-a)^n$$

o teorema anterior mostra que o ponto $z = a+R$ é ponto singular de g. Dado $r \in \,]0,R[$, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(a+r)}{n!}\,(z-(a+r))^n$$

tem então raio de convergência $R-r$. Como $g(a+r) = \mathrm{Re}(f(a+r))$, para cada inteiro $n \geq 0$ é

$$g^{(n)}(a+r) = \mathrm{Re}\left(f^{(n)}(a+r)\right)$$

e daqui resulta

$$\left|g^{(n)}(a+r)\right| \leq \left|f^{(n)}(a+r)\right|.$$

Então o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a+r)}{n!}\,(z-(a+r))^n$$

também não pode exceder $R-r$ e o teorema 14.27 mostra que f tem um ponto singular em $z = a+R$.

■

15 - Desenvolvimentos de funções meromorfas

Se $f : \mathbb{C}\setminus \{a_1, ..., a_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica, o corolário 1 do teorema 14.19 mostra que a sua parte singular se pode escrever na forma

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right)$$

em que os F_k são funções inteiras que se anulam no ponto 0. Procurando um resultado semelhante para funções analíticas com uma infinidade de singularidades isoladas vamos começar por provar o seguinte teorema:

Teorema 15.1 (Mittag-Leffler) - *Sejam* (F_n) *uma sucessão de funções inteiras e nulas no ponto* 0, e (a_n) *uma sucessão de pontos distintos de* $\mathbb{C}$ *tal que* $\lim a_n = \infty$. *Existe então uma sucessão* (Q_n) *de polinómios para a qual a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - Q_n(z) \right)$$

define uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$ *e cuja parte singular em cada ponto* a_n *é*

$$F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right).$$

Demonstração. Fixado um inteiro $n \geq 1$ suponha-se $a_n \neq 0$ e seja

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_{kn} z^k$$

o desenvolvimento de $F_n\left(1/(z - a_n)\right)$ em série de potências de z. Temos então

$$F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{kn} z^k \quad \text{se} \quad |z| < |a_n|,$$

e como a série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_{kn} \left(a_n/2\right)^k$ é absolutamente convergente pode escolher-se um inteiro $\alpha_n \geq 0$ tal que

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{+\infty} |c_{kn}| \left| \frac{a_n}{2} \right|^k < \frac{1}{2^n}.$$

Pondo
$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{\alpha_n} c_{kn} z^k$$
e tomando ainda $Q_n = 0$ se $a_n = 0$, consideremos agora a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - Q_n(z) \right). \tag{15.1}$$

Dado um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$, seja $R > 0$ tal que $K \subseteq B(0, R)$ e escolha-se um inteiro $p > 0$ para o qual
$$|a_n| \geq 2R \text{ se } n \geq p.$$
Se $z \in K$ temos então $|z| \leq R \leq |a_n|/2$ para cada $n \geq p$, pelo que
$$\begin{aligned} \left| F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - Q_n(z) \right| &= \left| \sum_{k=\alpha_n+1}^{+\infty} c_{kn} z^k \right| \leq \sum_{k=\alpha_n+1}^{+\infty} |c_{kn}| \left| \frac{a_n}{2} \right|^k \\ &\leq \frac{1}{2^n} \text{ se } z \in K \text{ e } n \geq p. \end{aligned}$$

Como a série $\sum_{n=p}^{+\infty} 1/2^n$ converge, o critério de Weierstrass mostra que a série (15.1) é uniformemente convergente em K. De acordo com o teorema de Weierstrass 13.9 esta série define assim uma função f analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$.

Dado um inteiro $m \geq 1$ e mudando n em $n + m$ em (15.1) conclui-se ainda que a função definida por
$$\sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - Q_n(z) \right)$$
é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq m + 1\}$. Como para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$ é
$$\begin{aligned} f(z) - F_m \left(\frac{1}{z - a_m} \right) &= \sum_{n=1}^{m-1} \left(F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - Q_n(z) \right) - Q_m(z) \\ &+ \sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(F_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - Q_n(z) \right) \end{aligned}$$
e o segundo membro desta relação representa uma função analítica no ponto a_m, segue-se que a parte singular de f em a_m é dada por
$$F_m \left(\frac{1}{z - a_m} \right).$$

■

Deste teorema resulta imediatamente o seguinte corolário:

Corolário - *Sejam* (a_n) *uma sucessão de pontos distintos de* $\mathbb{C}$ *tal que* $\lim a_n = \infty$, *e* (F_n) *uma sucessão de funções inteiras e nulas no ponto* 0. *Existe então uma função analítica em* $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$, *cuja parte singular em cada ponto* a_n *é*

$$F_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

■

Sejam agora E um conjunto infinito discreto, (a_n) uma enumeração de E e $f : \mathbb{C} \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Como $\mathbb{C} \setminus E$ é aberto, o teorema 14.1 mostra que E não tem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ e isto implica $\lim a_n = \infty$ pois para cada $r > 0$ o conjunto $E \cap B(0, r)$ é finito. O teorema anterior conduz assim à seguinte generalização do corolário 1 do teorema 14.19:

Teorema 15.2 - *Sejam* E *um conjunto infinito discreto,* $f : \mathbb{C} \setminus E \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica e* (a_n) *uma enumeração de* E. *Então* f *é representável na forma*

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(F_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z)\right),$$

em que g *é uma função inteira, os* Q_n *são polinómios, e os* F_n *são funções inteiras, nulas no ponto* 0, *tais que* $F_n\left(1/\left(z - a_n\right)\right)$ *é a parte singular de* f *em cada ponto* a_n.

Demonstração. O teorema 14.19 mostra que a parte singular S_n de f em cada a_n se pode representar na forma

$$S_n(z) = F_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

em que F_n é uma função inteira que se anula no ponto a_n. De acordo com o teorema anterior podem então escolher-se polinómios Q_n de modo a que a função φ definida pela série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(S_n(z) - Q_n(z)\right)$$

seja analítica em $\mathbb{C} \setminus E$ e tenha parte singular S_n em cada ponto a_n. Resulta assim que a função $f - \varphi$ tem singularidades removíveis nos pontos de E e o enunciado verifica-se tomando para g o prolongamento por continuidade de $f - \varphi$ a $\mathbb{C}$.

■

Corolário - *Sejam* f *uma função meromorfa em* $\mathbb{C}$ *com um conjunto infinito* E *de polos, e* (a_n) *uma enumeração de* E. *Então* f *é representável na forma*

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z)\right),$$

em que g é uma função inteira, P_n e *Q_n são polinómios, e todos os P_n se anulam no ponto* 0.

Demonstração. Basta notar que se f é meromorfa o corolário do teorema 14.5 mostra que as funções F_n referidas no teorema anterior são polinómios.
■

A representação de uma função meromorfa f dada pelo corolário anterior é conhecida por *desenvolvimento em série de fracções parciais* ou *fracções racionais simples.* O teorema seguinte traduz uma situação em que neste desenvolvimento se podem escolher para Q_n polinómios constantes.

Teorema 15.3 - *Sejam f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com uma infinidade de polos, e (a_n) uma enumeração dos polos de f que ocorrem em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Suponha-se ainda que cada a_n é um polo simples com resíduo λ_n e que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{a_n^2}$$

é absolutamente convergente. Tem-se então

$$f(z) = g(z) + S_0(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_n}{z - a_n} + \frac{\lambda_n}{a_n} \right),$$

em que g é uma função inteira e S_0 é a parte singular de f no ponto 0.

Demonstração. Dado um conjunto compacto K contido em $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$, seja $R > 0$ tal que $K \subseteq B\,(0, R)$ e escolha-se um inteiro $p \geq 0$ para o qual

$$|a_n| \geq 2R \text{ se } n \geq p.$$

Se $z \in K$ e $n \geq p$ temos então $|z| \leq R \leq |a_n|/2$, pelo que

$$\left| \frac{\lambda_n}{z - a_n} + \frac{\lambda_n}{a_n} \right| = \left| \frac{\lambda_n z}{a_n\,(z - a_n)} \right| \leq \frac{2\,|\lambda_n|\,|z|}{|a_n^2|} \leq 2R \left| \frac{\lambda_n}{a_n^2} \right| \text{ se } z \in K \text{ e } n \geq p,$$

e isto mostra que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_n}{z - a_n} + \frac{\lambda_n}{a_n} \right)$$

é uniformemente convergente em K. Sendo φ a função definida por esta série, o teorema de Weierstrass 13.9 mostra então que φ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{a_n : n \geq 1\}$. Além disso, como a parte singular de φ em cada ponto a_n coincide com a parte singular de f nesse ponto, conclui-se que as singularidades de $f - S_0 - \varphi$ em cada polo de f são removíveis.
■

Usando o teorema anterior vamos agora estabelecer o desenvolvimento em série de fracções parciais da função definida por

$$\frac{1}{e^z - 1}$$

que pode ser considerada a função meromorfa mais simples com uma infinidade de polos.

Teorema 15.4 (Euler) - *Tem-se*

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{15.2}$$

Demonstração. A função f definida por $f(z) = 1/(e^z - 1)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ e o exemplo 14.21 mostra que ela tem polos simples com resíduo 1 nos pontos da forma $2k\pi i$. Pondo $z_{2n-1} = 2n\pi i$ e $z_{2n} = -2n\pi i$ para cada $n \geq 1$, do teorema anterior resulta então que f admite uma decomposição do tipo

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right)$$

em que g é uma função inteira. Temos ainda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) &= \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{2m} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - z_{2n-1}} + \frac{1}{z_{2n-1}} + \frac{1}{z - z_{2n}} + \frac{1}{z_{2n}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}
\end{aligned}$$

pelo que

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}.$$

É assim

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \tag{15.3}$$

e como a função definida por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}$$

é analítica e nula no ponto $z = 0$, deduz-se

$$g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0}\left(f(z) - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z - (e^z - 1)}{z\,(e^z - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

O enunciado fica então estabelecido se se provar que g é constante, e do teorema de Liouville resulta que basta para isso mostrar que g é limitada. Notando agora que f tem período $2\pi i$ e atendendo à identidade

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2} = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z + 2n\pi i},$$

de (15.3) resulta, para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\begin{aligned} g(z + 2\pi i) - g(z) &= \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z + 2n\pi i} - \sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z + 2\pi i + 2n\pi i}\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{z - 2m\pi i} - \frac{1}{z + 2\pi i + 2m\pi i}\right) = 0. \end{aligned}$$

Verifica-se assim que g também tem período $2\pi i$ e basta então mostrar que g é limitada na faixa $|\mathrm{Im}(z)| \le \pi$. Dado que g é necessariamente limitada no rectângulo definido por $|\mathrm{Re}(z)| \le \pi$ e $|\mathrm{Im}(z)| \le \pi$, pondo $z = x+iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ podemos restringir-nos a considerar $|x| \ge \pi$ e $|y| \le \pi$. Nestas condições temos

$$\left|\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}\right| \le \frac{1}{|x|} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,|x| + 2\,|y|}{|x^2 + 4n^2\pi^2 - y^2|} \le \frac{1}{|x|} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\,|x|}{x^2 + 4n^2\pi^2 - \pi^2}$$

e é portanto

$$\left|\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}\right| \le \frac{1}{\pi} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

Para cada inteiro $n \ge 1$ temos ainda

$$\frac{|x|}{x^2 + n^2\pi^2} \le \int_{n-1}^{n}\frac{|x|}{x^2 + \pi^2 u^2}du$$

pelo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|}{x^2 + n^2\pi^2} \le \int_0^{+\infty}\frac{|x|}{x^2 + \pi^2 u^2}du = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1 + t^2}dt = \frac{1}{2},$$

e a função definida por

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2 + (2n\pi)^2}$$

é limitada na região em estudo.

Como é ainda

$$|f(z)| = \frac{1}{|e^z - 1|} \leq \frac{1}{||e^z| - 1|} = \frac{1}{|e^x - 1|}$$

temos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{e^x - 1} \leq \frac{1}{e^\pi - 1} \quad \text{se} \quad x \geq \pi$$

e

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - e^x} \leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \quad \text{se} \quad x \leq -\pi.$$

Então f também é limitada nesta região, e atendendo a (15.3) conclui-se que o mesmo sucede com g.

■

Com base no resultado anterior podem agora deduzir-se facilmente os desenvolvimentos em fracções parciais das funções tangente, cotangente, secante e cosecante.

Corolário 1 - *Tem-se*

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{15.4}$$

Demonstração. Pondo $f(z) = 1/(e^z - 1)$, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ temos

$$\cot z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1} = i + 2if(2iz)$$

e o enunciado resulta directamente do teorema anterior.

■

Corolário 2 - *Tem-se*

$$\tan z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - z^2} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{15.5}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e usando o corolário anterior obtém-se sucessivamente

$$\tan z = -\cot\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{z - \pi/2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z - \pi/2 - n\pi} + \frac{1}{z - \pi/2 + n\pi}\right)$$

$$= -\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{z-\pi/2-n\pi}+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{z-\pi/2+n\pi}\right)$$

$$= -\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{z+\pi/2-n\pi}+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{z-\pi/2+n\pi}\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+\pi/2-n\pi}+\frac{1}{z-\pi/2+n\pi}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{(n-1/2)^2\,\pi^2-z^2}.$$

■

Corolário 3 - *Tem-se*

$$\csc z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}\quad se\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}. \tag{15.6}$$

Demonstração. Dado $z\in\mathbb{C}\setminus\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$ temos

$$\csc z-\cot z=\frac{1-\cos z}{\sin z}=\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}=\tan\frac{z}{2},$$

e atendendo aos corolários 1 e 2 resulta

$$\csc z=\cot z+\tan\frac{z}{2}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-k^2\pi^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4z}{z^2-(2k-1)^2z^2}.$$

Como é também

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-k^2\pi^2}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2z}{z^2-(2k)^2\,\pi^2}+\frac{2z}{z^2-(2k-1)^2\,\pi^2}\right),$$

obtém-se assim

$$\begin{aligned}\csc z-\frac{1}{z} &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2z}{z^2-(2k)^2\,\pi^2}-\frac{2z}{z^2-(2k-1)^2\,\pi^2}\right)\\ &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}.\end{aligned}$$

■

Corolário 4 - *Tem-se*

$$\sec z=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)\pi}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2}\quad se\quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\} \tag{15.7}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e usando o corolário anterior resulta, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\sec z = \csc\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{z+\pi/2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z+\pi/2-n\pi} + \frac{(-1)^n}{z+\pi/2+n\pi}\right) \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{z+\pi/2-n\pi} + \sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{z+\pi/2+n\pi}\right) \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{z+\pi/2-n\pi} - \sum_{n=1}^{m+1}\frac{(-1)^n}{z-\pi/2+n\pi}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z+\pi/2-n\pi} - \frac{(-1)^n}{z-\pi/2+n\pi}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)\pi}{(n-1/2)^2\,\pi^2 - z^2}.
\end{aligned}$$

■

Obtêm-se resultados interessantes comparando alguns dos desenvolvimentos anteriores com os desenvolvimentos em série de potências de z das funções correspondentes. Comecemos por considerar a função f definida em $B(0, 2\pi)$ por

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{se} \quad 0 < |z| < 2\pi \quad \text{e} \quad f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1.$$

Notando que f é analítica em $B(0, 2\pi)$ e pondo

$$B_n = f^{(n)}(0) \quad \text{se} \quad n \geq 0,$$

é válido o desenvolvimento de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \quad \text{se} \quad |z| < 2\pi. \tag{15.8}$$

Como é, por outro lado,

$$\frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

do teorema 8.16 resultam as relações $B_0 = 1$ e

$$\frac{B_n}{n!} = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!} \quad \text{se} \quad n \geq 1,$$

que se podem escrever na forma

$$B_0 = 1 \ \text{ e } \ B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \ \text{ se } \ n \geq 1. \tag{15.9}$$

Temos ainda

$$f(z) + \frac{z}{2} = 1 + \left(B_1 + \frac{1}{2}\right)z + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \ \text{ se } \ |z| < 2\pi, \tag{15.10}$$

e notando que $f(z) + z/2$ define uma função par, o corolário do teorema 8.12 mostra que é

$$B_1 = -1/2 \quad \text{e} \quad B_{2n+1} = 0 \ \text{ se } \ n \geq 1. \tag{15.11}$$

Os números B_n têm numerosas aplicações em diversas áreas da Matemática e são conhecidos por *números de Bernouilli.* Trata-se de números racionais que podem ser calculados recursivamente a partir de (15.9). Obtemos assim os valores

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \ B_8 = -\frac{1}{30}, \ B_{10} = \frac{5}{66}, \ ...$$

Teorema 15.5 - *Tem-se*

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n} \ \ \textit{se} \ \ 0 < |z| < 2\pi. \tag{15.12}$$

Demonstração. Resulta directamente de (15.10) atendendo às relações (15.11).
■

Partindo de (15.12) obtém-se directamente o desenvolvimento da função cotangente em série de Laurent relativa ao ponto 0, que por sua vez conduz aos desenvolvimentos da tangente e da cosecante em torno deste ponto.

Corolário 1 - *Tem-se*

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} \ \ \textit{se} \ \ 0 < |z| < \pi. \tag{15.13}$$

Demonstração. Resulta do desenvolvimento (15.12) notando que

$$z\cot z = iz\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} \ \text{ se } \ 0 < |z| < \pi.$$

■

Corolário 2 - *Tem-se*

$$\tan z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{n} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad se \quad |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{15.14}$$

Demonstração. Resulta do desenvolvimento anterior atendendo à relação

$$\tan z = \cot z - 2\cot 2z \ \text{ se } \ |z| < \frac{\pi}{2}\ .$$

■

Corolário 3 - *Tem-se*

$$\csc z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(2^{2n}-2\right)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad se \ \ 0 < |z| < \pi. \tag{15.15}$$

Demonstração. Resulta dos dois desenvolvimentos anteriores atendendo à identidade

$$\csc z = \cot z + \tan\frac{z}{2} \ \text{ se } \ 0 < |z| < \pi.$$

■

Comparando os desenvolvimentos (15.2) e (15.12) podemos estabelecer uma propriedade notável dos números B_n devida a Euler.

Teorema 15.6 (Euler) - *Para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}. \tag{15.16}$$

Demonstração. Dado $z \in B(0, 2\pi)$ e comparando (15.12) com (15.2) deduz-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z^2}{z^2 + (2n\pi)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m}\ . \tag{15.17}$$

Para cada $n \geq 1$ temos por outro lado

$$\frac{2z^2}{z^2 + (2n\pi)^2} = \frac{2z^2}{(2n\pi)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{2n\pi}\right)^2} = \frac{2z^2}{(2n\pi)^2} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{2n\pi}\right)^{2m}$$

donde vem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z^2}{z^2 + (2n\pi)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2z^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{n^{2m}}. \tag{15.18}$$

Se $|z| < 2\pi$ é no entanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|(-1)^{m-1}\frac{2z^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\frac{1}{n^{2m}}\right| &\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{|z|}{2\pi}\right)^{2m}\frac{1}{n^2}\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{|z|}{2\pi}\right)^{2m} < +\infty\end{aligned}$$

e o teorema 7.13 permite escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^{m-1}\frac{2z^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\frac{1}{n^{2m}} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{m-1}\frac{2z^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\frac{1}{n^{2m}}.$$

Atendendo a (15.17) e (15.18) resulta agora

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)z^{2m} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m} \quad \text{se} \quad |z| < 2\pi$$

e do princípio das identidades para séries de potências deduz-se

$$\frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right) = \frac{B_{2m}}{(2m)!} \quad \text{se} \quad m \geq 1,$$

o que equivale à fórmula do enunciado.

■

Obtém-se assim, em particular,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Do teorema anterior resulta também a relação

$$(-1)^{n-1}B_{2n} > 0 \quad \text{se} \quad n \geq 1, \tag{15.19}$$

que estabelece a alternância de sinal dos números de Bernoulli.

Definindo os chamados *números da tangente* T_n por

$$T_n = \tan^{(n)}(0) \quad \text{se} \quad n \geq 0,$$

o desenvolvimento (15.14) mostra que os T_n verificam as condições

$$T_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad T_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{n}. \tag{15.20}$$

Partindo agora da identidade $\sin z = \tan z \cos z$ e usando o teorema 8.14 para multiplicar os respectivos desenvolvimentos de Maclaurin obtém-se a relação

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}(-1)^{k-1}T_{2k-1} = 1.$$

Temos assim

$$T_1 = 1 \quad \text{e} \quad T_{2n-1} = (-1)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k-1} (-1)^{n+k} T_{2k-1},$$

e por indução verifica-se que os números da tangente são inteiros. As relações (15.19) e (15.20) mostram ainda que os T_{2n-1} são positivos.

Consideremos agora a função *secante hiperbólica* definida por

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = \sec iz$$

Como esta função é analítica em $B(0, \pi/2)$, pondo

$$E_n = \operatorname{sech}^{(n)}(0) \quad \text{se} \quad n \geq 0 \tag{15.21}$$

é válido o desenvolvimento

$$\operatorname{sech} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Atendendo a que a secante hiperbólica é uma função par resulta ainda

$$E_{2n+1} = 0 \quad \text{se} \quad n \geq 0$$

e obtém-se

$$\operatorname{sech} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{15.22}$$

Temos por outro lado

$$\frac{1}{\operatorname{sech} z} = \cos iz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2},$$

e do teorema 8.16 resultam as relações

$$E_0 = 1 \quad \text{e} \quad E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k} \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{15.23}$$

Os E_n são os chamados *números de Euler* e destas relações deduz-se por indução que são números inteiros. Calculando recursivamente obtém-se

$$E_2 = -1,\ E_4 = 5,\ E_6 = -61,\ \ E_8 = 1385,\ \ E_{10} = -50521,\ ...$$

Mudando z em iz em (15.22), o desenvolvimento de Maclaurin de $\sec z$ surge na forma

$$\sec z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2} \tag{15.24}$$

e por comparação com o desenvolvimento em fracções parciais (15.7) pode agora estabelecer-se uma importante propriedade dos números E_{2n}.

Teorema 15.7 (Euler) - *Para cada inteiro* $m \geq 0$ *tem-se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2m+1}} = (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \frac{E_{2m}}{2(2m)!}.$$

Demonstração. Dado $z \in B(0, \pi/2)$ e comparando os desenvolvimentos (15.24) e (15.7) deduz-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}\,(2n-1)\pi}{(2n-1)^2\pi^2 - (2z)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{E_{2m}}{(2m)!} z^{2m}. \tag{15.25}$$

Para cada $n \geq 1$ temos no entanto

$$\frac{(2n-1)^2\pi^2}{(2n-1)^2\pi^2 - (2z)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^{2m}$$

pelo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}\,(2n-1)\pi}{(2n-1)^2\pi^2 - (2z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^{2m}.$$

Destacando a parcela correspondente a $m = 0$ no segundo membro da igualdade anterior e atendendo a (15.25) obtém-se então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{E_{2m}}{(2m)!} z^{2m}. \tag{15.26}$$

Supondo ainda $|z| < \pi/2$ temos também

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^{2m} \right| &\leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{|2z|}{(2n-1)\pi}\right)^{2m} \\
&= \frac{16\,|z|^2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2 - |2z|^2} < +\infty
\end{aligned}$$

e como na demonstração do teorema anterior deduz-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^{2m} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^{2m} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2m+1}}\right) z^{2m}.
\end{aligned}$$

A identidade (15.26) pode agora escrever-se na forma

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2m+1}} \right) z^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{E_{2m}}{(2m)!} z^{2m} \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

e o enunciado resulta de identificar os coeficientes de z^{2m} em ambos os membros.
■

Em particular, fazendo $m = 0$, $m = 1$ e $m = 2$ obtém-se respectivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}.$$

Como é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2m+1}} > 0 \ \text{ se } \ m \geq 0,$$

do teorema anterior resulta

$$(-1)^m E_{2m} > 0 \ \text{ se } \ m \geq 0$$

pelo que, à semelhança dos números de Bernouilli, também os números de Euler E_{2n} alternam o sinal.

A relação entre os desenvolvimentos (15.14), (15.15) e (15.22) torna-se mais clara introduzindo os chamados *polinómios de Bernoulli* $B_n(w)$ que se podem definir através do desenvolvimento

$$\frac{ze^{wz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(w) \frac{z^n}{n!}. \tag{15.27}$$

Como é também

$$\frac{ze^{wz}}{e^z-1} = \frac{z}{e^z-1} e^{wz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k n!}{k!(n-k)!} w^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}$$

aplicando o princípio das identidades para séries de potências obtém-se

$$B_n(w) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k w^{n-k} \tag{15.28}$$

e esta relação mostra que $B_n(w)$ é um polinómio unitário de grau n. Temos em particular

$$B_0(w) = 1, \ B_1(w) = w - \frac{1}{2} \ \text{ e } B_2(w) = w^2 - w + \frac{1}{6}.$$

De (15.28) resulta ainda

$$B_n = B_n(0) \ \text{ se } \ n \geq 0 \tag{15.29}$$

e a regra de derivação

$$B'_{n+1}(w) = (n+1)B_n(w) \quad \text{se} \quad n \geq 0 \tag{15.30}$$

que se poderia também obter derivando em ordem a w a identidade (15.27).

Partindo da identidade

$$\frac{ze^{(w+1)z}}{e^z - 1} - \frac{ze^{wz}}{e^z - 1} = ze^{wz} = \sum_{n=1}^{+\infty} nw^{n-1} \frac{z^n}{n!},$$

a definição de $B_n(w)$ conduz-se à fórmula

$$B_n(w+1) - B_n(w) = nw^{n-1} \quad \text{se} \quad n \geq 1 \tag{15.31}$$

que dá, em particular,

$$B_n(1) = B_n(0) \quad \text{se} \quad n \geq 2. \tag{15.32}$$

Também da identidade

$$\frac{ze^{(1-w)z}}{e^z - 1} = \frac{-ze^{-wz}}{e^{-z} - 1}$$

resulta a relação

$$B_n(1-w) = (-1)^n B_n(w) \quad \text{se} \quad n \geq 0 \tag{15.33}$$

e obtém-se

$$B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{se} \quad n \geq 0. \tag{15.34}$$

Temos ainda

$$\frac{2ze^{2wz}}{e^z - 1} = \frac{2ze^{2wz}\left(1 + e^z\right)}{e^{2z} - 1} = \frac{2ze^{2wz}}{e^{2z} - 1} + \frac{2ze^{\left(w + \frac{1}{2}\right)2z}}{e^{2z} - 1}$$

e da definição de $B_n(w)$ deduz-se

$$B_n(2w) = 2^{n-1}\left(B_n\left(w\right) + B_n\left(w + \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{se} \quad n \geq 0. \tag{15.35}$$

Fazendo $w = 0$ nesta identidade obtém-se

$$B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2n}\left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \quad \text{se} \quad n \geq 0. \tag{15.36}$$

Como (15.33) implica $B_{2n}(3/4) = B_{2n}(1/4)$, fazendo ainda $w = 1/4$ em (15.35) obtém-se também

$$B_{2n}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2^{2n}} B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$B_{2n}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{B_{2n}}{2^{2n}}\left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right). \tag{15.37}$$

Os desenvolvimentos (15.14) e (15.15) podem agora interpretar-se em termos dos polinómios de Bernoulli. De (15.27) vem efectivamente

$$\frac{2z}{e^z - e^{-z}} = \frac{2ze^z}{e^{2z} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(2z)^n}{n!}$$

e atendendo à paridade da função ou a (15.34) resulta

$$\frac{2z}{e^z - e^{-z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

Como é

$$z\csc z = \frac{2iz}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

obtém-se assim

$$z\csc z = \sum_{n=0}^{+\infty} B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{se} \quad |z| < \pi$$

e a relação (15.36) conduz de novo o desenvolvimento (15.15).

Por outro lado, da identidade

$$\frac{1}{t+1} = \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2 - 1}$$

vem

$$\begin{aligned}
\frac{ze^{wz}}{e^z + 1} &= \frac{ze^{wz}}{e^z - 1} - \frac{2ze^{wz}}{e^{2z} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(B_n(w) - 2^n B_n\left(\frac{w}{2}\right)\right)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(B_n(w) - 2^n B_n\left(\frac{w}{2}\right)\right)\frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{e^{wz}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}(w) - 2^{n+1}B_{n+1}(w/2)}{n+1}\frac{z^n}{n!}. \tag{15.38}$$

Notando que $B_1(w) - 2B_1(w/2) = 1/2$ podemos ainda escrever

$$\frac{e^{wz}}{e^z + 1} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_{n+1}(w) - 2^{n+1}B_{n+1}(w/2)}{n+1}\frac{z^n}{n!}$$

e como é

$$\tan z = \frac{1}{i}\left(\frac{2e^{2iz}}{e^{2iz} + 1} - 1\right),$$

atendendo à paridade desta função obtemos o desenvolvimento

$$\tan z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\left(B_{2n} - 2^{2n} B_{2n}(1/2)\right)}{n} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Comparando agora com (15.14) vemos então que os números da tangente T_n verificam a identidade

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\left(B_{2n} - 2^{2n} B_{2n}(1/2)\right)}{n}$$

que se poderia também deduzir directamente de (15.20) atendendo a (15.36).

A identidade (15.38) permite ainda exprimir o desenvolvimento (15.22) de sech z em termos dos polinómios de Bernoulli. Temos efectivamente

$$\operatorname{sech} z = \frac{2e^z}{e^{2z}+1}$$

pelo que

$$\operatorname{sech} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}\left(B_{n+1}(1/2) - 2^{n+1} B_{n+1}(1/4)\right)}{n+1} \frac{z^n}{n!} \quad \text{se} \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

e a definição dos números de Euler E_n conduz então a

$$E_n = \frac{2^{n+1}\left(B_{n+1}(1/2) - 2^{n+1} B_{n+1}(1/4)\right)}{n+1}.$$

Como a paridade da função secante hiperbólica implica o anulamento de E_{2n-1} obtém-se de novo a relação (15.37). Atendendo a (15.34) obtemos ainda a identidade

$$E_{2n} = -\frac{4^{2n+1}}{2n+1} B_{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right),$$

que exprime os números de Euler em termos dos polinómios de Bernoulli.

16 - O teorema dos resíduos

O conceito de resíduo está na base do teorema seguinte que traduz um resultado extremamente geral sobre a integração no plano complexo.

Teorema 16.1 (Teorema dos resíduos) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $P \subseteq D$ um conjunto discreto e $f : D \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Dado um ciclo Γ em $D \setminus P$ tal que $Ind_\Gamma(w) = 0$ para cada $w \in \mathbb{C} \setminus D$, tem-se*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{w \in P} Res\,(f; w)\, Ind_\Gamma(w)$$

e a soma no segundo membro contém apenas um conjunto finito de parcelas não nulas.

Demonstração. Como $D \setminus P$ é aberto, o teorema 14.1 mostra que $P' \cap D = \varnothing$. Sendo agora $P_0 = \{z \in P : Ind_\Gamma(z) \neq 0\}$, é necessariamente $P_0' = \varnothing$ pois a condição $P_0' \subseteq \mathbb{C} \setminus D$ implica $Ind_\Gamma(z) = 0$ se $z \in P_0'$, o que contraria a continuidade da função Ind_Γ no ponto z. Por outro lado, tomando $R > 0$ tal que $[\Gamma] \subseteq B(0, R)$, para cada $w \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$ é $Ind_\Gamma(w) = 0$ pois o conjunto $\mathbb{C} \setminus B(0, R)$ está contido no exterior de todos os caminhos de Γ. Então $P_0 \subseteq B(0, R)$ pelo que P_0 é limitado e da condição $P_0' = \varnothing$ resulta que P_0 é um conjunto finito. A soma que figura no enunciado reduz-se assim a uma soma finita.

Pondo agora $P_0 = \{a_1, ..., a_n\}$, seja S_j a parte singular de f em cada singularidade a_j. Então a função $f - (S_1 + \cdots + S_n)$ tem singularidades removíveis nos pontos a_j e pode prolongar-se sucessivamente por continuidade aos pontos $a_1, ..., a_n$. Obtém-se assim uma função g que é analítica no conjunto $(D \setminus P) \cup P_0 = D \setminus (P \setminus P_0)$, em cujo complementar a função Ind_Γ é identicamente nula. Do corolário 2 do teorema 13.12 resulta então

$$\int_\Gamma g = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma S_j.$$

Atendendo agora ao corolário 2 do teorema 14.19, para cada função S_j é válido um desenvolvimento do tipo

$$S_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{-kj}}{(z - a_j)^k} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_j\}$$

e tomando $r_j > 0$ tal que $B(a_j, r_j) \subseteq \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ temos

$$\left| \frac{c_{-kj}}{(z-a_j)^k} \right| \leq \frac{|c_{-kj}|}{r_j^k} \quad \text{se} \quad z \in [\Gamma]$$

Como $\sum_{k=0}^{+\infty} c_{-kj} w^k$ tem raio de convergência $+\infty$ isto mostra que a série de S_j é uniformemente convergente em $[\Gamma]$. Aplicando o teorema 11.22 e o exemplo 11.27 a cada um dos caminhos de Γ resulta então

$$\int_\Gamma S_j = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-kj} \int_\Gamma \frac{1}{(z-a_j)^k} dz = c_{-1j} \int_\Gamma \frac{1}{z-a_j} dz,$$

ou seja

$$\int_\Gamma S_j = Res\,(f, a_j) \int_\Gamma \frac{1}{z-a_j} dz = Res\,(f; a_j)\, 2\pi i Ind_\Gamma\,(a_j)$$

e conclui-se

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\,(f; a_j)\, Ind_\Gamma\,(a_j)\,.$$

■

Em muitas situações concretas o teorema anterior é aplicado na seguinte forma:

Corolário - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $P \subseteq D$ um conjunto discreto e $f : D \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Dado um caminho fechado elementar γ em $D \setminus P$, orientado positivamente e cujo interior está contido em D, tem-se*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\,(f; a_j)$$

em que $\{a_1, ..., a_n\}$ é o conjunto dos pontos singulares de f interiores a γ.

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior ao ciclo $\Gamma = \{\gamma\}$ notando que para cada $a \in P$ é $Ind_\gamma\,(a) = 1$ ou $Ind_\gamma\,(a) = 0$ consoante o ponto a for interior ou exterior a γ.

■

O teorema dos resíduos 16.1 permite justificar um método que reduz ao cálculo de um único resíduo o cálculo da soma dos resíduos de uma função que tenha apenas um conjunto finito de singularidades.

Teorema 16.2 - *Sejam $S \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto finito e $f : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Tem-se então*

$$\sum_{c \in S} Res\,(f; c) = Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right).$$

Demonstração. Dado $R > 0$ tal que $S \subseteq B(0,R)$, sejam γ e ρ os caminhos definidos respectivamente por $\gamma(t) = Re^{it}$ e $\rho(t) = e^{-it}/R$ com $t \in [0, 2\pi]$. Atendendo ao teorema anterior temos

$$2\pi i \sum_{c\in S} Res\,(f;c) = \int_\gamma f(z)dz.$$

Por outro lado, como o ponto 0 é a única singularidade de $f(1/z)/z^2$ no interior do caminho ρ^- temos também

$$2\pi i Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = \int_{\rho^-} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = -\int_\rho \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

e o enunciado resulta agora de ser

$$-\int_\rho \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = \int_0^{2\pi} f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} dt = \int_\gamma f(z)dz.$$

■

Exemplo 16.3 - *Sejam $S \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto finito e $f : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se existir e for finito o $\lim_{z\to\infty} zf(z)$ tem-se*

$$\sum_{c\in S} Res\,(f;c) = \lim_{z\to\infty} zf(z).$$

Efectivamente, como

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right),$$

na hipótese do enunciado a função definida por $f(1/z)/z^2$ tem um polo simples ou uma singularidade removível no ponto 0 e em qualquer destes casos é

$$Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

O resultado seguinte mostra como o teorema dos resíduos 16.1 se pode aplicar à contagem dos zeros e dos polos de uma função meromorfa.

Teorema 16.4 (Princípio do argumento) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, f uma função meromorfa em D e γ um caminho fechado elementar em D, orientado positivamente, cujo interior está contido em D. Sejam ainda N_z e N_p respectivamente o número de zeros e o número de polos de f no interior de γ, contados de acordo com as suas ordens. Se f não tiver zeros nem polos em $[\gamma]$ então*

$$N_z - N_p = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Demonstração. Como f não é identicamente nula, sendo Z o conjunto dos zeros de f o princípio do prolongamente analítico para funções meromorfas mostra que $Z' \cap D = \varnothing$. Por outro lado, como f é meromorfa em D o conjunto P dos seus polos também não tem pontos de acumulação em D. Então $Z \cup P$ é um conjunto discreto e do teorema 14.1 resulta que $D \setminus (Z \cup P)$ é aberto, pelo que o teorema dos resíduos 16.1 se pode aplicar à função analítica definida em $D \setminus (Z \cup P)$ por f'/f.

Sendo a um zero de f com ordem p, o exemplo 14.22 mostra que o ponto a é um polo simples de f'/f com resíduo p. Análogamente, se f tiver um polo em a de ordem q, atendendo ao exemplo 14.23 vemos que o ponto a é um polo simples de f'/f com resíduo $-q$. O enunciado resulta agora directamente do corolário do teorema 16.1.

■

Nota 16.5 - No teorema anterior o nome "princípio do argumento" é justificado por $N_z - N_p$ ser o número de voltas que o ponto $f(z)$ descreve em torno da origem quando z percorre o caminho γ.

Sendo $[a, b]$ o domínio de γ temos efectivamente

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{(f' \circ \gamma)(t)}{(f \circ \gamma)(t)} \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Ind_{f \circ \gamma}(0).$$

O resultado seguinte traduz que o número de zeros (contados de acordo com a sua ordem) de duas funções analíticas no interior de um caminho fechado elementar γ é o mesmo, desde que os seus valores em $[\gamma]$ sejam suficientemente próximos.

Teorema 16.6 (Rouché) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ duas funções analíticas e γ um caminho fechado elementar em D, orientado positivamente, cujo interior está contido em D. Se para cada $z \in [\gamma]$ se verificar a condição*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

então f e g têm o mesmo número de zeros no interior de γ.

Demonstração. A condição

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{se} \quad z \in [\gamma]$$

exige que f e g não tenham zeros em $[\gamma]$. Pondo $h = f/g$ esta função não toma valores reais negativos em $[\gamma]$ pois se para algum $a \in [\gamma]$ fosse $h(a) < 0$ isso implicava

$$|f(a) - g(a)| = |g(a)| \left| \frac{f(a)}{g(a)} - 1 \right| = |f(a)| + |g(a)|,$$

contrariamente à hipótese.

Para cada ponto $z \in [\gamma]$ existe então uma vizinhança onde g não se anula e onde a função h não toma valores em $\mathbb{R}_0^-$. Sendo G a união destas vizinhanças segue-se que G é um conjunto aberto que contém $[\gamma]$ e onde a função $\ln h$ está definida e é analítica. Dado que $\ln h$ é uma primitiva de h'/h em G, pelo corolário 2 do teorema 11.23 temos

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0$$

e da relação $h'/h = f'/f - g'/g$ deduz-se

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Como f e g são ambas funções analíticas o enunciado resulta agora do teorema anterior.

■

Nota 16.7 - Na versão habitual do teorema de Rouché parte-se da hipótese mais restritiva $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ se $z \in [\gamma]$. A versão aqui apresentada pode encontrar-se em Remmert (1991): 390.

Exemplo 16.8 - *Seja φ uma função analítica em $\overline{B}(0,1)$ que aplica este conjunto em si próprio e tal que $\varphi(z) \neq z$ para cada $z \in C(0,1)$. Existe então um e um só ponto $c \in B(0,1)$ tal que $\varphi(c) = c$.*

Efectivamente, pondo $f(z) = \varphi(z) - z$ e $g(z) = -z$, para cada $z \in C(0,1)$ temos $|f(z) - g(z)| = |\varphi(z)| \leq 1 = |g(z)| < |g(z)| + |f(z)|$ pelo que f e g têm o mesmo número de zeros em $B(0,1)$. Como g só se anula para $z = 0$ e este zero é simples, conclui-se que a equação $\varphi(z) = z$ tem uma e uma só solução em $B(0,1)$.

Dada uma sucessão de funções analíticas que converge uniformemente nos subconjuntos compactos de um conjunto aberto e conexo, o teorema de Rouché permite obter um resultado importante sobre os zeros da respectiva função limite.

Teorema 16.9 (Hurwitz) - *Sejam D um conjunto aberto e conexo, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções analíticas uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D e suponha-se que a função $f = \lim f_n$ não é idênticamente nula. Dado um ponto $a \in D$ existe um círculo $B(a,r) \subseteq D$ e uma ordem k a partir da qual as funções f_n e f têm o mesmo número de zeros em $B(a,r)$.*

Demonstração. Como f não é identicamente nula existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(a,r) \subseteq D$ e f não se anula em $C(a,r)$. Sendo $\varepsilon > 0$ o mínimo de $|f|$ em

$C(a,r)$ e atendendo a que (f_n) converge uniformemente para f em $C(a,r)$, existe uma ordem k tal que

$$\sup_{z\in C(a,r)} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \text{ se } \ n \geq k.$$

Considerando agora o caminho γ definido por $\gamma(t) = a + re^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, para cada $z \in [\gamma]$ é então $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$ se $n \geq k$, e o teorema de Rouché mostra que f e f_n têm o mesmo número de zeros em $B(a,r)$.

■

Exemplo 16.10 - *Sejam D um conjunto aberto e conexo, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções analíticas uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D e suponha-se que a função $f = \lim f_n$ não é idênticamente nula. Então todo o zero de f é o limite de uma sucessão de zeros das funções f_n.*

Efectivamente, dado um zero a de f tome-se $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq D$, e para cada inteiro $m \geq 1$ seja $D_m = B(a, r/m)$. Aplicando o teorema anterior aos conjuntos D_m segue-se que para cada $m \geq 1$ existe uma função f_n que se anula nalgum ponto $z_m \in D_m$ e tem-se então $\lim z_m = a$.

Do teorema de Hurwitz resulta imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções analíticas uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D e suponha-se que a função $f = \lim f_n$ não é idênticamente nula. Se as funções f_n não tiverem zeros então o mesmo sucede com f.*

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções analíticas uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D e suponha-se que a função $f = \lim f_n$ não é constante. Se as funções f_n forem todas injectivas então a função $f = \lim f_n$ também é* injectiva.

Demonstração. Dado $c \in D$, a injectividade das f_n mostra que as funções $f_n - f_n(c)$ não se anulam em $D \setminus \{c\}$. Como $f - f(c)$ não é identicamente nula, aplicando o corolário anterior às funções $f_n - f(c)$ resulta que $f - f(c)$ também não se anula em $D \setminus \{c\}$. Temos assim $f(z) \neq f(c)$ para todo o $z \in D \setminus \{c\}$, o que mostra que f é injectiva.

■

Corolário 3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções analíticas uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D e suponha-se que a função $f = \lim f_n$ não é constante. Então, dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ que contenha os contradomínios de todas as funções f_n, o contradomínio de f também está contido em E.*

Demonstração. Nas condições do enunciado, para cada $w \in \mathbb{C} \setminus E$ as funções $f_n - w$ não se anulam em D. Como $f - w$ não é identicamente nula, aplicando o corolário 1 às funções $f_n - w$ segue-se que $f - w$ também não se anula em D. Conclui-se assim que $w \notin f[D]$ e isto mostra que $f[D] \subseteq E$.

■

O corolário seguinte generaliza o teorema de Hurwitz:

Corolário 4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções analíticas uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D e suponha-se que a função $f = \lim f_n$ não é identicamente nula. Então, sendo G um conjunto aberto e limitado tal que $\overline{G} \subseteq D$, existe uma ordem a partir da qual as funções f_n e f têm o mesmo número de zeros em G.*

Demonstração. Nas condições do enunciado o conjunto Z dos zeros de f em G é necessariamente finito pois não tem pontos de acumulação. Sendo $Z = \{a_1, ..., a_m\}$ escolham-se indutivamente círculos $B_1(a_1, r_1), ..., B_m(a_m, r_m)$, disjuntos dois a dois e contidos em G. Aplicando agora o teorema de Hurwitz a cada ponto a_j no conjunto $B_j(a_j, r_j)$, conclui-se que existem um conjunto aberto E e uma ordem q tais que $\{a_1, ..., a_m\} \subseteq E \subseteq G$ e o número de zeros de f e f_n em E é igual para todo o $n \geq q$.

Por outro lado, sendo $\mu > 0$ o mínimo de $|f|$ no conjunto compacto $H = \overline{G} \setminus E$, como (f_n) converge uniformemente para f em H existe uma ordem $k \geq q$ tal que $\sup_{z \in H} |f_n(z) - f(z)| < \mu$ se $n \geq k$. Então as funções f_n não se anulam em H quando $n \geq k$, e daqui resulta que o número de zeros de f_n e de f em G é igual sempre que $n \geq k$.

■

O teorema dos resíduos 16.1 está também na base de técnicas importantes para o cálculo de integrais de funções de variável real. A aplicação mais directa deste teorema diz respeito a integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

em que R é uma função racional. Como um integral deste tipo se pode também escrever na forma

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta$$

em que f é ainda uma função racional, considerando o caminho circular γ definido por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz.$$

Se f não tiver polos em $C(0,1)$, para calcular este integral basta então determinar os resíduos de $f(z)/z$ nos polos respectivos situados em $B(0,1)$.

Exemplo 16.11 - *Dado $a > 1$ tem-se*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Efectivamente temos

$$\frac{1}{a+\cos\theta} = \frac{2}{2a+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{e^{2i\theta}+2ae^{i\theta}+1}$$

e sendo γ o caminho definido por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ é então

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta = \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{1}{z^2+2az+1} dz.$$

A função a integrar tem polos nos pontos $-a \pm \sqrt{a^2-1}$ e apenas o ponto

$$z_0 = -a + \sqrt{a^2-1}$$

está situado em $B(0,1)$. Atendendo ao exemplo 14.21 o resíduo correspondente a este polo é dado por

$$\frac{1}{2z_0+2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

e o teorema dos resíduos 16.1 conduz ao resultado indicado.

Para aplicar o teorema dos resíduos 16.1 ao cálculo de integrais impróprios começaremos por estabelecer um resultado auxiliar.

Lema 16.12 - *Sejam $a \geq 0$, θ_1 e θ_2 tais que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$,*

$$E = \left\{re^{i\theta} : r > a \text{ e } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\right\},$$

e $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0.$$

Para cada $R > a$ seja ainda σ_R o caminho definido por

$$\sigma_R(t) = Re^{it} \text{ com } \theta_1 \leq t \leq \theta_2.$$

Tem-se então

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} f(z)dz = 0.$$

Demonstração. Como é

$$\int_{\sigma_R} f(z)dz = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f\left(Re^{it}\right) Re^{it} dt,$$

pondo
$$\lambda(R) = \max_{t\in[\theta_1,\theta_2]} \left|f\left(Re^{it}\right)\right|$$
obtém-se
$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)dz\right| \leq (\theta_2-\theta_1)\, R\lambda(R),$$
e basta agora observar que da condição $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$ resulta
$$\lim_{R\to+\infty} R\lambda(R) = 0.$$

■

Teorema 16.13 - *Sejam H_+ o semiplano superior $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)>0\}$, $D\subseteq\mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $H_+\cup\mathbb{R}\subseteq D$, $P\subseteq D\setminus\mathbb{R}$ um conjunto finito e $f : D\setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se f verificar a condição*
$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$
tem-se
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{c\in P\cap H_+} Res\,(f;c)\,.$$

Demonstração. Como P é um conjunto finito existe $R_0>0$ tal que $P\subseteq B\,(0,R_0)$. Para cada $R\geq R_0$ sejam agora ρ_R e σ_R os caminhos definidos por
$$\rho_R(t)=t \;\text{ com }\; t\in[-R,R] \quad\text{e}\quad \sigma_R(t)=Re^{it} \;\text{ com }\; t\in[0,\pi],$$
e ponha-se $\gamma_R=\rho_R\dotplus\sigma_R$.

O exemplo 11.35 mostra que cada γ_R é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o semicírculo aberto
$$S_R = \{z\in\mathbb{C} : |z|<R \;\text{ e }\; \mathrm{Im}(z)>0\}\,.$$
Atendendo às inclusões $P\cap H_+\subseteq S_R\subseteq D$ se $R\geq R_0$, do corolário do teorema dos resíduos 16.1 deduz-se então
$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{c\in P\cap H_+} Res\,(f;c) \quad\text{se}\quad R\geq R_0.$$
Temos por outro lado
$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_{\sigma_R} f(z)dz$$
donde vem
$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{c\in P\cap H_+} Res\,(f;c) - \int_{\sigma_R} f(z)dz$$

e o lema anterior mostra que é

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} f(z)dz = 0.$$

■

Exemplo 16.14 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3}.$$

Efectivamente a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

está nas condições do teorema anterior e tem polos simples nos pontos

$$a_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}i} \quad \text{com} \quad 0\le k\le 5.$$

Destes pontos apenas a_0, a_1 e a_2 estão situados no semiplano superior H_+, pelo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = 2\pi i\left(Res\left(f;a_0\right)+Res\left(f;a_1\right)+Res\left(f;a_2\right)\right).$$

Atendendo ao exemplo 14.21 temos agora

$$Res\left(f;a_0\right) = \frac{1}{6a_0^5} = \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi i}{6}} = -\frac{1}{6}e^{\frac{\pi i}{6}},$$

$$Res\left(f;a_1\right) = \frac{1}{6a_1^5} = \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi i}{2}} = -\frac{i}{6},$$

e

$$Res\left(f;a_2\right) = \frac{1}{6a_2^5} = \frac{1}{6}e^{-\frac{25\pi i}{6}} = \frac{1}{6}e^{-\frac{\pi i}{6}}.$$

Como o integral dado converge, do teorema anterior resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Exemplo 16.15 - *Dados* $a,b>0$ *tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+a^2\right)}{x^2+b^2}dx = \frac{2\pi}{b}\ln\left(a+b\right).$$

Efectivamente a função definida por $\ln(z+ia)$ é analítica na região $D=\{z:\mathrm{Im}(z)>-a\}$ e pondo

$$f(z)=\frac{\ln(z+ia)}{z^2+b^2} \ \text{ se } \ z\in D,$$

a única singularidade de f em H_+ é um polo simples no ponto $c=ib$. Temos por outro lado

$$|f(z)|\sim\frac{\ln|z+ia|}{|z|^2}\sim\frac{\ln|z|}{|z|^2} \quad (z\to\infty)$$

o que mostra que o teorema anterior é aplicável à função f, e também que o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

é absolutamente convergente. Atendendo ao exemplo 14.21 temos agora

$$Res\,(f;ib)=\frac{\ln i\,(a+b)}{2ib}=\frac{\pi}{4b}-i\frac{\ln(a+b)}{2b},$$

pelo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{\pi}{b}\ln(a+b)+i\frac{\pi^2}{2b}$$

e a fórmula anunciada resulta de ser

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+a^2\right)}{x^2+b^2}dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(|x+ia|)}{x^2+b^2}dx=2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Corolário - *Sejam H_+ o semiplano superior $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$, $D\subseteq\mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $H_+\cup\mathbb{R}\subseteq D$, $P\subseteq D\setminus\mathbb{R}$ um conjunto finito e $f:D\setminus P\longrightarrow\mathbb{C}$ uma função analítica. Se*

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=0,$$

para cada $\lambda>0$ tem-se

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x}f(x)dx=2\pi i\sum_{c\in P\cap H_+} Res\left(e^{i\lambda z}f(z);c\right).$$

Demonstração. Efectivamente, dado $\lambda>0$ a função definida no semiplano $L=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>-1\}$ por $e^{i\lambda z}$ é analítica e limitada, pois tem-se

$$\left|e^{i\lambda z}\right|=e^{-\lambda\,\mathrm{Im}(z)}<e^{\lambda} \ \text{ se } \ z\in L.$$

Pondo então $D_0=D\cap L$ e

$$g(z)=e^{i\lambda z}f(z) \ \text{ se } \ z\in D_0\setminus P,$$

o conjunto D_0 e a função g verificam as condições impostas respectivamente a D e a f no teorema anterior. Obtém-se assim

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{c\in P\cap H_+} Res\,(g;c)$$

como se pretende.

■

Exemplo 16.16 - *Tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}\left(\lambda a+1\right)e^{-\lambda a} \quad se \quad \lambda \geq 0 \quad e \quad a>0.$$

Efectivamente, pondo

$$g(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{\left(z^2+a^2\right)^2}$$

a única singularidade de g no semiplano superior H_+ é um polo duplo no ponto $c = ia$. Atendendo ao exemplo 14.24 temos então

$$\begin{aligned} Res(g;ia) &= \lim_{z\to ia}\left((z-ia)^2\,g(z)\right)' = \lim_{z\to ia}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{(z+ia)^2}\right)' \\ &= \lim_{z\to ia} e^{i\lambda z}\left(\frac{i\lambda}{(z+ia)^2} - \frac{2}{(z+ia)^3}\right) = -\frac{\left(\lambda a+1\right)e^{-\lambda a}}{4a^3}i. \end{aligned}$$

Aplicando o corolário anterior ou o teorema 16.13 consoante for respectivamente $\lambda > 0$ ou $\lambda = 0$, obtém-se assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{2a^3}\left(\lambda a+1\right)e^{-\lambda a}$$

e a fórmula anunciada deduz-se agora imediatamente atendendo à paridade das funções seno e coseno.

Vamos seguidamente provar que a conclusão do corolário anterior se mantém válida substituindo a condição

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$

pela condição mais fraca

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

e também que as condições impostas a f são então suficientes para garantir a convergência do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx.$$

Começaremos por estabelecer dois resultados auxiliares.

Lema 16.17 (Lema de Jordan) - *Sejam* θ_1, θ_2 *tais que* $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, $a > 0$,

$$E = \left\{re^{i\theta} : r > a \ e \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\right\},$$

e $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Para cada $R > a$ *seja ainda* σ_R *o caminho definido por*

$$\sigma_R\,(t) = Re^{it} \text{ com } \theta_1 \leq t \leq \theta_2.$$

Se $\lambda > 0$ *tem-se então*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Para cada $R > a$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\lambda Re^{it}} f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} dt \\
&= iR \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\lambda R\cos t - \lambda R \sin t} f\left(Re^{it}\right) e^{it} dt
\end{aligned}$$

e portanto

$$\left|\int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz\right| \leq R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\lambda R \sin t} \left|f\left(Re^{it}\right)\right| dt \leq R \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin t} \left|f\left(Re^{it}\right)\right| dt.$$

Sendo

$$\varepsilon(R) = \max_{|z| = R} |f(z)|$$

temos então

$$\left|\int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz\right| \leq R\varepsilon(R) \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta.$$

Fazendo $\theta = \pi - t$ obtém-se

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\lambda R \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta$$

e a majoração anterior pode escrever-se na forma

$$\left|\int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz\right| \leq 2R\varepsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta. \tag{16.1}$$

Atendendo agora ao lema 12.10 temos

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{2\lambda R}$$

e de (16.1) resulta

$$\left|\int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi\varepsilon(R)}{\lambda}$$

o que estabelece o enunciado, pois a condição $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ implica

$$\lim_{R\to+\infty} \varepsilon(R) = 0.$$

■

Lema 16.18 - *Dado* $\alpha \in \left]0,\pi\right[$ *sejam* $D \subseteq \mathbb{C}$ *um conjunto aberto que contenha o sector*

$$\left\{re^{i\theta} : r \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \alpha\right\},$$

e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica. Se*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad e \quad \lambda > 0,$$

então o integral

$$\int_0^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$$

é convergente.

Demonstração. Para cada $R > 0$ sejam ρ_R, σ_R e τ_R os caminhos definidos por

$$\rho_R(t) = t \text{ com } t \in [0,R],$$

$$\sigma_R(t) = Re^{it} \text{ com } t \in [0,\alpha] \quad \text{e} \quad \tau_R(t) = te^{i\alpha} \text{ com } t \in [0,R].$$

Então, pondo $\gamma_R = \rho_R \dotplus \sigma_R \dotplus \tau_R^-$ o exemplo 11.35 mostra que cada γ_R é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o sector circular

$$S_\alpha = \left\{re^{i\theta} : 0 < r < R \text{ e } 0 < \theta < \alpha\right\}.$$

Como $S_\alpha \subseteq D$ e f é analítica em D temos

$$\int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\rho_R} e^{i\lambda z} f(z)dz + \int_{\sigma_R} e^{i\lambda z} f(z)dz - \int_{\tau_R} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0.$$

Atendendo ao lema anterior temos ainda

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} e^{i\lambda z}f(z)dz = 0$$

e obtém-se

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\rho_R} e^{i\lambda z}f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\tau_R} e^{i\lambda z}f(z)dz,$$

ou seja,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{i\lambda t}f(t)dt = e^{i\alpha}\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{i\lambda t\cos\alpha-\lambda t\sin\alpha}f\left(te^{i\alpha}\right)dt$$

pelo que o enunciado fica estabelecido se se provar a convergência do integral

$$\int_0^{+\infty} e^{i\lambda t\cos\alpha-\lambda t\sin\alpha}f\left(te^{i\alpha}\right)dt.$$

Como a continuidade de f e a condição $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ exigem que f seja limitada no conjunto $\left\{te^{i\alpha} : t \geq 0\right\}$, sendo M um majorante de $|f|$ neste conjunto temos então

$$\left|e^{i\lambda t\cos\alpha-\lambda t\sin\alpha}f\left(te^{i\alpha}\right)\right| = e^{-\lambda t\sin\alpha}\left|f\left(te^{i\alpha}\right)\right| \leq Me^{-\lambda t\sin\alpha}.$$

A relação $\lambda\sin\alpha > 0$ mostra agora que o integral dado é absolutamente convergente.

■

Nota 16.19 - No lema anterior é importante observar que a convergência do integral

$$\int_0^{+\infty} e^{i\lambda x}f(x)dx$$

é consequência de se ter $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ com

$$z \in \left\{re^{i\theta} : r \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \alpha\ \right\},$$

e não resulta simplesmente da condição $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Assim, no integral

$$\int_0^{+\infty} e^{ix}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$$

a parte imaginária é

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin^2 x}{x^2+1}dx$$

e pode ver-se que este integral diverge. Dado um inteiro $n \geq 1$ temos efectivamente

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x\sin^2 x}{x^2+1}dx \geq \frac{n\pi}{n^2\pi^2+1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin^2 xdx = \frac{n\pi^2}{2\left(n^2\pi^2+1\right)} \sim \frac{1}{2n}$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}\frac{x\sin^2 x}{x^2+1}dx=+\infty.$$

Podemos agora provar um teorema que generaliza e reforça o corolário do teorema 16.13.

Teorema 16.20 - *Sejam H_+ o semiplano superior $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)>0\}$, D um conjunto aberto tal que $H_+\cup\mathbb{R}\subseteq D$, $P\subseteq D\setminus\mathbb{R}$ um conjunto finito e $f:D\setminus P\longrightarrow\mathbb{C}$ uma função analítica. Se*

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=0 \quad e \quad \lambda>0$$

tem-se então

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}f(x)dx=2\pi i\sum_{c\in P\cap H_+}Res\left(e^{i\lambda z}f(z);c\right).$$

Demonstração. Tome-se $R_0>0$ tal que $P\subseteq B(0,R_0)$ e para cada $R>0$ seja σ_R o caminho semi-circular definido por

$$\sigma_R(t)=Re^{it} \quad \text{com} \quad t\in[0,\pi].$$

Atendendo ao teorema dos resíduos 16.1 temos então, como na demonstração do teorema 16.13,

$$\int_{-R}^{R}e^{i\lambda x}f(x)dx+\int_{\sigma_R}e^{\lambda zi}f(z)dz=2\pi i\sum_{c\in P\cap H_+}Res\left(e^{i\lambda z}f(z);c\right).$$

Do lema de Jordan 16.17 resulta agora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R}e^{\lambda zi}f(z)dz=0$$

e obtém-se

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}e^{i\lambda x}f(x)dx=2\pi i\sum_{c\in P\cap H_+}Res\left(e^{i\lambda z}f(z);c\right)$$

pelo que o enunciado fica estabelecido se se provar a convergência do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}f(x)dx.$$

Como P é um conjunto finito pode escolher-se $\alpha\in\,]0,\pi[$ tal que se tenha $\arg w>\alpha$ para cada $w\in P\cap H_+$. Então o sector

$$\left\{re^{i\theta}:r\geq 0 \text{ e } 0\leq\theta\leq\alpha\right\}$$

está contido em $D \setminus P$ e o lema 16.18 mostra que o integral

$$\int_0^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$$

converge. Da relação

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} e^{i\lambda x} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f(x)dx - \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} e^{i\lambda x} f(x)dx$$

deduz-se agora, sucessivamente, a convergência dos integrais

$$\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda x} f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx.$$

■

Exemplo 16.21 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-\lambda a} \quad \textit{se} \quad \lambda, a > 0.$$

Efectivamente, pondo

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$$

a única singularidade de f no semiplano superior H_+ é um polo simples no ponto $c = ia$. Temos então

$$Res(e^{i\lambda z} f(z); ia) = \lim_{z\to ia} (z - ia)\, e^{i\lambda z} f(z) = \frac{e^{-\lambda a}}{2}$$

pelo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\lambda x}}{x^2 + 1} dx = i\pi e^{-\lambda a}$$

e daqui resulta a fórmula pretendida.

Corolário - *Sejam H_- o semiplano inferior $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $H_- \cup \mathbb{R} \subseteq D$, $P \subseteq D \setminus \mathbb{R}$ um conjunto finito e $f : D \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad e \quad \lambda < 0$$

tem-se então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = -2\pi i \sum_{c \in P \cap H_-} Res\left(e^{i\lambda z} f(z); c\right).$$

Demonstração. Pondo $g(z) = f(-z)$ temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\lambda|x} g(x)dx.$$

Como $-P$ é o conjunto dos pontos singulares de g e a condição $a \in (-P)\cap H_+$ equivale a $-a \in P \cap H_-$, aplicando o teorema anterior à função g temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\lambda|x} g(x)dx &= 2\pi i \sum_{a\in(-P)\cap H_+} Res\left(e^{i|\lambda|z} g(z); a\right) \\ &= 2\pi i \sum_{c\in P\cap H_-} Res\left(e^{i|\lambda|z} g(z); -c\right).\end{aligned}$$

Atendendo ao exemplo 14.25 é então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\lambda|x} g(x)dx = -2\pi i \sum_{c\in P\cap H_-} Res\left(e^{i\lambda z} g(-z); c\right)$$

o que estabelece o enunciado.
■

Se a função f tiver algum polo em $\mathbb{R}$ todos os integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$$

são divergentes. No entanto, se f tiver apenas um polo simples no ponto $z = 0$ a singularidade de $\left(e^{i\lambda z} - 1\right) f(z)$ nesse ponto é removível e poderá haver convergência dos integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda x} - 1) f(x)dx.$$

O teorema seguinte mostra como o método dos resíduos pode ser usado para calcular integrais deste tipo.

Teorema 16.22 - *Sejam H_+ o semiplano superior $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $H_+ \cup \mathbb{R} \subseteq D$, $P \subseteq D \setminus \mathbb{R}$ um conjunto finito e $f : D \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existir e for finito, para cada $\lambda > 0$ tem-se*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{x} f(x)dx = \pi i \lim_{z\to\infty} f(z) + 2\pi i \sum_{c\in P\cap H_+} Res\left(\frac{e^{i\lambda z} - 1}{z} f(z); c\right).$$

Demonstração. Tome-se $R_0 > 0$ tal que $P \subseteq B(0, R_0)$ e para cada $R > R_0$ seja σ_R o caminho semicircular definido por $\sigma_R(t) = Re^{it}$ com $t \in [0, \pi]$. Representando ainda por g o prolongamento por continuidade de

$$\frac{e^{i\lambda z} - 1}{z} f(z)$$

ao ponto $z = 0$ e notando que esta função é analítica em $D \setminus P$, do teorema dos resíduos 16.1 resulta, como na demonstração do teorema 16.13,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{x} f(x)dx + \int_{\sigma_R} \frac{e^{i\lambda z} - 1}{z} f(z)dz = 2\pi i \sum_{c \in P \cap H_+} Res\,(g; c)\,.$$

No entanto, como $\lim_{z \to \infty} f(z)/z = 0$, do lema de Jordan 16.17 deduz-se

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{i\lambda z} - 1}{z} f(z)dz = -\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Pondo $\alpha = \lim_{z \to \infty} f(z)$ e notando que

$$\int_{\sigma_R} \frac{\alpha}{z} dz = \alpha \int_0^{\pi} i dt = \pi i \alpha$$

temos por outro lado

$$\int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z} dz = \pi i \alpha + \int_{\sigma_R} \frac{f(z) - \alpha}{z} dz.$$

Aplicando agora o lema 16.12 obtém-se

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z} dz = \pi i \alpha,$$

pelo que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{i\lambda z} - 1}{z} f(z)dz = -\pi i \alpha$$

e conclui-se a relação

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{x} f(x)dx = \pi i \alpha + 2\pi i \sum_{c \in P \cap H_+} Res\,(g; c)\,.$$

■

Exemplo 16.23 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

É efectivamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x} dx\right)$$

e a função definida por $\left(e^{iz}-1\right)/z$ não tem polos no semiplano superior H_+.

Exemplo 16.24 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{\pi}{a^2}\left(1-e^{-a}\right) \quad se \quad a>0.$$

Efectivamente, pondo

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$$

é $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ e

$$Res\left(\frac{e^{iz}-1}{z} f(z); ia\right) = \frac{1-e^{-a}}{2a^2}.$$

Temos então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx = \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x} f(x) dx\right) = \frac{\pi}{a^2}\left(1-e^{-a}\right).$$

Exemplo 16.25 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a}\left(1-e^{-2a}\right) \quad se \quad a>0.$$

Temos efectivamente

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{2ix}-1\right)$$

e sendo

$$f(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$$

resulta então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+a^2} dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}-1}{x} f(x) dx\right).$$

Como $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ pode aplicar-se o teorema anterior, e a relação

$$Res\left(\frac{e^{2iz}-1}{z^2+a^2}; ia\right) = \frac{e^{-2a}-1}{2ia}$$

conduz directamente ao resultado.

O teorema seguinte trata da aplicação do métodos resíduos quando a função integranda apresenta um polo simples no ponto $z = 0$.

Teorema 16.26 - *Sejam H_+ o semiplano superior $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $H_+ \cup \mathbb{R} \subseteq D$, $P \subseteq D \setminus \mathbb{R}$ um conjunto finito e $f : D \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

ou se f for da forma

$$f(z) = e^{i\lambda z} g(z) \quad com \quad \lambda > 0 \quad e \quad \lim_{z \to \infty} \frac{g(z)}{z} = 0$$

tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{R \to +\infty} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x} dx \right) = \pi i f(0) + 2\pi i \sum_{c \in P \cap H_+} Res\left(\frac{f(z)}{z}; c \right).$$

Demonstração. Como P é finito e $0 \notin P$ existem constantes ε_0 e R_0 tais que $0 < \varepsilon_0 < R_0$ e $P \subseteq B(0, R_0) \setminus B(0, \varepsilon_0)$. Fixados $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ e $R > R_0$ sejam ρ, σ_R, τ e σ_ε os caminhos definidos respectivamente por

$$\rho(t) = t \text{ com } t \in [\varepsilon, R], \quad \sigma_R(t) = R^{it} \text{ com } t \in [0, \pi],$$

$$\tau(t) = t \text{ com } t \in [-R, -\varepsilon] \quad \text{e} \quad \sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it} \text{ com } t \in [0, \pi].$$

Pondo $\gamma = \rho \dotplus \sigma_R \dotplus \tau \dotplus \sigma_\varepsilon^-$ o exemplo 11.36 mostra então que γ é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o conjunto

$$T = \left\{ re^{it} : \varepsilon < r < R \text{ e } 0 < t < \pi \right\}.$$

Como a função definida por $f(z)/z$ é analítica em $D \setminus (P \cup \{0\})$ e é válida a inclusão $P \cap H_+ \subseteq T$, do teorema dos resíduos 16.1 resulta

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \sum_{c \in P \cap H_+} Res\left(\frac{f(z)}{z}; c \right),$$

ou seja,

$$\int_\varepsilon^R \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$= 2\pi i \sum_{c \in P \cap H_+} Res\left(\frac{f(z)}{z}; c \right).$$

Aplicando agora o lema 16.12 se $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ ou o lema de Jordan 16.17 na hipótese de ser $f(z) = e^{i\lambda z}g(z)$ com $\lambda > 0$ e $\lim_{z\to\infty} g(z)/z = 0$, temos

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{z} dz = 0$$

pelo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x} dx \right)$$
$$= 2\pi i \sum_{c\in P\cap H_+} Res\left(\frac{f(z)}{z}; c\right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Por outro lado, como a função definida por $f(z)/z$ tem um polo simples no ponto $c = 0$ com resíduo $f(0)$, existe uma função analítica h tal que

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{f(0)}{z} + h(z) \quad \text{se} \quad z \in D \setminus (P \cup \{0\})$$

e resulta

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\sigma_\varepsilon} h(z) dz.$$

Dado que

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = \pi i$$

e que h é limitada em $B(0, \varepsilon)$, da majoração

$$\left| \int_{\sigma_\varepsilon} h(z) dz \right| \leq \pi\varepsilon \sup_{|z|=\varepsilon} |h(z)|$$

obtém-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = \pi i f(0),$$

o que estabelece o enunciado.

■

O integral do exemplo 16.23 pode agora calcular-se aplicando directamente o teorema anterior à função definida por $f(z) = e^{iz}$. Temos com efeito

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \right)$$

e como f é inteira obtém-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i.$$

Exemplo 16.27 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3\left(x^2 + a^2\right)} dx = \pi \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1 - e^{-a}}{a^4} \right) \quad se \quad a > 0.$$

Efectivamente, como é

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{iz} - 1 - iz}{z^2} = -\frac{1}{2},$$

define-se uma função f analítica no semiplano $\operatorname{Im}(z) > -1$ pondo

$$f(z) = \frac{e^{iz} - 1 - iz}{z^2\left(z^2 + a^2\right)} \quad \text{se} \quad \operatorname{Im}(z) > -1 \quad \text{e} \quad z \neq 0,$$

e $f(0) = -1/2a^2$. Dado que e^{iz} é limitada neste semiplano tem-se também

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

e como

$$Res\left(\frac{f(z)}{z}; ia\right) = \frac{e^{-a} - 1 + a}{2a^4},$$

do teorema anterior resulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{\pi}{2a^2} i + \pi i \frac{e^{-a} - 1 + a}{a^4}.$$

Temos assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3\left(x^2 + a^2\right)} dx &= -\operatorname{Im}\left(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2a^2} + \pi \frac{1 - a - e^{-a}}{a^4}. \end{aligned}$$

O teorema dos resíduos 16.1 pode também ser aplicado ao cálculo de certos integrais no intervalo $[0, +\infty[$. Começaremos por estabelecer um resultado auxiliar.

Lema 16.28 - *Sejam* a, b *tais que* $0 < a < b$, $\theta_0 \in \left]0, 2\pi\right[$ *e* E *o conjunto* $\left\{ re^{\theta i} : a \leq r \leq b \text{ e } |\theta| \leq \theta_0 \right\}$. *Dadas duas funções contínuas* $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ *e* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *é então*

$$\lim_{\theta \to 0} \int_a^b f\left(te^{i\theta}\right) g(t) dt = \int_a^b f(t)\, g(t) dt.$$

Demonstração. Como E é um conjunto compacto, a função f é uniformemente contínua. Para cada $\delta > 0$ existe então $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left|f\left(te^{i\theta}\right) - f(t)\right| < \delta \text{ se } t \in [a,b] \text{ e } \left|te^{i\theta} - t\right| < \varepsilon_0.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de modo que $\left|e^{i\theta} - 1\right| < \varepsilon_0/b$ se $|\theta| < \varepsilon$, temos assim

$$\left|te^{i\theta} - t\right| < \varepsilon_0 \text{ se } t \in [a,b] \text{ e } |\theta| < \varepsilon,$$

e pondo

$$\lambda(\theta) = \max_{t\in[a,b]} \left|f\left(te^{i\theta}\right) - f(t)\right|$$

segue-se que

$$\lambda(\theta) < \delta \text{ se } |\theta| < \varepsilon.$$

É pois $\lim_{\theta\to 0} \lambda(\theta) = 0$ e o enunciado resulta agora da relação

$$\left|\int_a^b f\left(te^{i\theta}\right) g(t)dt - \int_a^b f(t)\, g(t)dt\right| \leq \lambda(\theta) \int_a^b |g(t)|\, dt.$$

■

Teorema 16.29 - *Sejam $P \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ um conjunto finito e*

$$f : \mathbb{C} \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma função analítica. Dado $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ suponha-se que

$$\lim_{z\to 0} |z|^\mu f(z) = \lim_{z\to\infty} |z|^\mu f(z) = 0.$$

Tem-se então

$$\int_0^{+\infty} x^{\mu-1} f(x)dx = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \sum_{c\in P\setminus\{0\}} Res\left((-z)^{\mu-1} f(z); c\right).$$

Demonstração. Como $P \setminus \{0\}$ é um conjunto finito que não intersecta $\mathbb{R}_0^+$ existem constantes positivas ε_0, R_0 e θ_0 tais que para cada $w \in P \setminus \{0\}$ se tem $\varepsilon_0 < |w| < R_0$ e $|\arg w| > \theta_0$. Dados $\theta \in]0, \theta_0[$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ e $R > R_0$ consideremos então os caminhos ρ_1, σ_1, ρ_2 e σ_2 definidos respectivamente por

$$\rho_1(t) = te^{i\theta} \text{ com } t \in [\varepsilon, R], \quad \sigma_1(t) = Re^{it} \text{ com } t \in [\theta, 2\pi - \theta],$$

$$\rho_2(t) = te^{i(2\pi-\theta)} \text{ com } t \in [\varepsilon, R] \text{ e } \sigma_2(t) = \varepsilon e^{it} \text{ com } t \in [\theta, 2\pi - \theta].$$

Pondo $\gamma = \rho_1 \dot{+} \sigma_1 \dot{+} \rho_2^- \dot{+} \sigma_2^-$ o exemplo 11.36 mostra que este é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o conjunto

$$T = \left\{re^{it} : \varepsilon < r < R \text{ e } \theta < t < 2\pi - \theta\right\}.$$

Sejam agora λ e g as funções definidas em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$ por $\lambda(z)=\ln(-z)+i\pi$ e

$$g(z)=e^{(\mu-1)\lambda(z)} \quad \text{se} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+.$$

Como g e fg são analíticas em $\mathbb{C}\setminus\left(\mathbb{R}_0^+\cup P\right)$ e atendendo ainda à inclusão $P\setminus\{0\}\subseteq T$, do teorema dos resíduos 16.1 resulta então

$$\int_\gamma f(z)g(z)dz = 2\pi i\sum_{c\in P\setminus\{0\}} Res\left(f(z)g(z);c\right).$$

Pondo

$$S=\sum_{c\in P\setminus\{0\}} Res\left(f(z)g(z);c\right) \tag{16.2}$$

obtém-se assim a identidade

$$\int_{\rho_1} f(z)g(z)dz+\int_{\sigma_1} f(z)g(z)dz-\int_{\rho_2} f(z)g(z)dz-\int_{\sigma_2} f(z)g(z)dz=2\pi iS.$$

Dado $z=re^{i\varphi}$ com $0<\varphi<2\pi$ pode agora ver-se que $\lambda(z)=\ln r+i\varphi$. Efectivamente, se $0<\varphi\leq\pi$ é $\varphi=\arg z$ e do exemplo 10.5 resulta

$$\ln(-z)+i\pi=\ln z=\ln r+i\varphi.$$

Se $\pi<\varphi<2\pi$ é $\arg z=\varphi-2\pi<0$ e o mesmo exemplo mostra que

$$\ln(-z)+i\pi=\ln z+2\pi i=\ln r+i(\arg z+2\pi)=\ln r+i\varphi.$$

Temos assim

$$g\left(re^{i\varphi}\right)=r^{\mu-1}e^{i(\mu-1)\varphi} \quad \text{se} \quad r>0 \quad \text{e} \quad 0<\varphi<2\pi,$$

e daqui deduz-se

$$\int_{\rho_1} f(z)g(z)dz=e^{i\mu\theta}\int_\varepsilon^R t^{\mu-1}f\left(te^{i\theta}\right)dt,$$

$$\int_{\sigma_1} f(z)g(z)dz=i\int_\theta^{2\pi-\theta} R^\mu e^{i\mu t}f\left(Re^{it}\right)dt$$

$$\int_{\rho_2} f(z)g(z)dz=e^{i\mu(2\pi-\theta)}\int_\varepsilon^R t^{\mu-1}f\left(te^{-i\theta}\right)dt$$

$$\int_{\sigma_2} f(z)g(z)dz=i\int_\theta^{2\pi-\theta} \varepsilon^\mu e^{i\mu t}f\left(\varepsilon e^{it}\right)dt.$$

Fazendo $\theta\to 0$ e usando o lema 16.28 resulta então

$$\int_{\varepsilon}^{R} t^{\mu-1} f\left(t\right) dt + i \int_{0}^{2\pi} R^{\mu} e^{i\mu t} f\left(Re^{it}\right) dt - e^{2\pi i\mu} \int_{\varepsilon}^{R} t^{\mu-1} f\left(t\right) dt$$
$$-i \int_{0}^{2\pi} \varepsilon^{\mu} e^{i\mu t} f\left(\varepsilon e^{it}\right) dt = 2\pi i S. \tag{16.3}$$

Sendo
$$M = \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|e^{i\mu t}\right|$$
temos ainda
$$\left|\int_{0}^{2\pi} R^{\mu} e^{i\mu t} f\left(Re^{it}\right) dt\right| \leq 2\pi M \sup_{|z|=R} \left||z|^{\mu} f(z)\right|$$
e
$$\left|\int_{0}^{2\pi} \varepsilon^{\mu} e^{i\mu t} f\left(\varepsilon e^{it}\right) dt\right| \leq 2\pi M \sup_{|z|=\varepsilon} \left||z|^{\mu} f(z)\right|,$$
pelo que as condições $\lim_{z\to\infty} |z|^{\mu} f(z) = \lim_{z\to 0} |z|^{\mu} f(z) = 0$ implicam
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{2\pi} R^{\mu} e^{i\mu t} f\left(Re^{it}\right) dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0}^{2\pi} \varepsilon^{\mu} e^{i\mu t} f\left(\varepsilon e^{it}\right) dt = 0.$$
Fazendo sucessivamente $\varepsilon \to 0$ e $R \to +\infty$ em (16.3) chegamos assim à relação
$$(1 - e^{2\pi i\mu}) \int_{0}^{+\infty} t^{\mu-1} f(t) dt = S,$$
donde se deduz
$$\int_{0}^{+\infty} t^{\mu-1} f(t) dt = \frac{S}{1 - e^{2\pi i\mu}}$$
pois a condição $\mu \notin \mathbb{Z}$ impõe que seja $e^{2\pi i\mu} \neq 1$. Finalmente, como
$$\lambda(z) = \ln\left(-z\right) + i\pi,$$
da definição de g resulta
$$g(z) = (-z)^{\mu-1} e^{i(\mu-1)\pi} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$$
e a relação (16.2) transforma-se assim em
$$S = e^{i(\mu-1)\pi} \sum_{c\in P\setminus\{0\}} Res\left((-z)^{\mu-1} f(z); c\right).$$
A fórmula do enunciado obtém-se agora notando que
$$\frac{2\pi i e^{i(\mu-1)\pi}}{1 - e^{2\pi i\mu}} = \frac{2\pi i e^{i\mu\pi}}{e^{2\pi i\mu} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{i\mu\pi} - e^{-i\mu\pi}} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

■

Corolário - *Sejam* $P \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ *um conjunto finito e* $f : \mathbb{C} \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica. Se existir* $\alpha > 0$ *tal que*

$$f(z) = O\left(|z|^{-\alpha}\right) \qquad (z \to \infty)\,,$$

a fórmula do teorema anterior é válida para todo o $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *que verifique a condição* $0 < \mathrm{Re}(\mu) < \alpha$.

Demonstração. Atendendo à relação

$$\left||z|^{\mu} f(z)\right| = |z|^{\mathrm{Re}(\mu)} |f(z)|\,,$$

de $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ deduz-se $\lim_{z\to 0} |z|^{\mu} f(z) = 0$ pois f é analítica no ponto 0. Da mesma relação vem ainda

$$\left||z|^{\mu} f(z)\right| = |z|^{\mathrm{Re}(\mu)-\alpha} \left||z|^{\alpha} f(z)\right|$$

e as condições $\mathrm{Re}(\mu) < \alpha$ e $f(z) = O\left(|z|^{-\alpha}\right)$ $(z \to \infty)$ implicam que se tenha

$$\lim_{z\to\infty} |z|^{\mu} f(z) = 0.$$

■

Exemplo 16.30 - *Tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\mu-1}}{x + e^{i\theta}} dx = \pi \frac{e^{i\theta(\mu-1)}}{\sin \mu\pi} \quad se \quad 0 < \mathrm{Re}(\mu) < 1 \quad e \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Efectivamente, atendendo ao corolário anterior pode aplicar-se o teorema 16.29 à função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z + e^{i\theta}},$$

com $0 < \mathrm{Re}(\mu) < 1$. Como a única singularidade desta função é um polo simples com resíduo 1 no ponto $c = -e^{i\theta} \notin \mathbb{R}^+$, obtém-se directamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\mu-1}}{x + e^{i\theta}} dx = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \left(e^{i\theta}\right)^{(\mu-1)} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} e^{(\mu-1)\ln\left(e^{i\theta}\right)},$$

e da condição $-\pi < \theta < \pi$ resulta $\ln\left(e^{i\theta}\right) = i\theta$.

Exemplo 16.31 - *Tem-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{e^x + e^{-x} + 2\cos\theta} dx = \frac{\pi}{\sin\theta} \frac{e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta}}{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}} \quad se \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad e \quad 0 < \theta < \pi.$$

É efectivamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{e^x + e^{-x} + 2\cos\theta} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{e^x + e^{-x} + 2\cos\theta} dx,$$

e com a mudança de variável $t = e^x$ este integral transforma-se em

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{i\lambda}}{t^2 + 2t\cos\theta + 1} dt.$$

Pode agora aplicar-se o teorema anterior com $\mu = 1 + i\lambda$ notando que as únicas singularidades da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z\cos\theta + 1}$$

são polos simples nos pontos $-e^{i\theta}$ e $-e^{-i\theta}$. Obtém-se assim

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^{i\lambda}}{t^2 + 2t\cos\theta + 1} dt &= \frac{\pi}{2i\sin(\pi + i\lambda\pi)} \left(-\frac{e^{-\lambda\theta}}{\sin\theta} + \frac{e^{\lambda\theta}}{\sin\theta} \right) \\
&= -\frac{\pi\left(e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta}\right)}{2i\sin(i\lambda\pi)\sin\theta} = \frac{\pi}{\sin\theta} \frac{e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta}}{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}.
\end{aligned}$$

O teorema dos resíduos 16.1 pode também ser usado para calcular a soma de séries da forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n,$$

com base no seguinte teorema:

Teorema 16.32 - *Seja φ uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas singularidades são polos simples nos inteiros e suponha-se que φ é limitada nos conjuntos*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| = n + 1/2\} \quad e \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| = n + 1/2\}.$$

Dados um conjunto finito $P \subseteq \mathbb{C}$ e uma função analítica $f : \mathbb{C} \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, tem-se então

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{n=-m \\ n\notin P}}^{m} f(n) Res(\varphi; n) = -\sum_{c\in P} Res(f\varphi; c).$$

Demonstração. Para cada inteiro positivo m ponha-se $a_m = m + 1/2$ e seja γ_m um caminho rectangular da forma

$$(-a_m - ia_m,\, a_m - ia_m,\, a_m + ia_m,\, -a_m + ia_m,\, -a_m - ia_m).$$

Então γ_m é um caminho fechado elementar orientado positivamente cujo interior é o rectângulo aberto

$$R_m = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < m + 1/2 \;\text{ e }\; |\mathrm{Im}(z)| < m + 1/2\}.$$

Como P é finito pode escolher-se $k \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $P \subseteq R_k$, e para cada $m \geq k$ o teorema dos resíduos permite escrever

$$\int_{\gamma_m} f(z)\varphi(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\setminus P \\ |n|\leq m}} Res\,(f\varphi; n) + 2\pi i \sum_{c\in P} Res\,(f\varphi; c)\,.$$

Atendendo agora a que as singularidades de φ são polos simples, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus P$ tem-se

$$Res\,(f\varphi; n) = \lim_{z\to n}(z-n)f(z)\varphi(z) = f(n)\lim_{z\to n}(z-n)\varphi(z) = f(n)Res\,(\varphi; n)$$

e resulta

$$\int_{\gamma_m} f(z)\varphi(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\setminus P \\ |n|\leq m}} f(n)Res\,(\varphi; n) + 2\pi i \sum_{c\in P} Res\,(f\varphi; c)\,, \tag{16.4}$$

se $m \geq k$.

Por outro lado, para cada $z \in [\gamma_m]$ é

$$|\mathrm{Re}(z)| = m + 1/2 \quad \text{ou} \quad |\mathrm{Im}(z)| = m + 1/2.$$

De acordo com a hipótese feita sobre φ existe então uma constante K tal que $|\varphi(z)| \leq K$ se $z \in \cup_{m\geq 1}[\gamma_m]$, e pondo

$$L_m = \sup_{z\in[\gamma_m]} |f(z)|$$

obtém-se a majoração

$$\left|\int_{\gamma_m} f(z)\varphi(z)dz\right| \leq 4\,(2m+1)\,KL_m \quad \text{se} \quad m \geq k.$$

Além disso, se $z \in [\gamma_m]$ é

$$|z| \geq \max\{|\mathrm{Re}(z)|\,,\ |\mathrm{Im}(z)|\} = 2m + 1$$

pelo que

$$(2m+1)\,L_m \leq \sup_{z\in[\gamma_m]} |zf(z)|\,,$$

e a condição $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ exige então

$$\lim_{m\to+\infty} (2m+1)\,L_m = 0.$$

Resulta assim

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\gamma_m} f(z)\varphi(z)dz = 0$$

e o enunciado obtém-se fazendo $m \to +\infty$ em (16.4).

■

Corolário 1 - *Sejam $P \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto finito e $f : \mathbb{C} \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Tem-se então*

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{n=-m \\ n\notin P}}^{m} f(n) = -\sum_{c\in P} Res\,(f(z)\pi\cot\pi z; c)$$

e

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{n=-m \\ n\notin P}}^{m} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\in P} Res\,(f(z)\pi\csc\pi z; c)\,.$$

Demonstração. Pondo $\varphi(z) = \pi\cot\pi z$ define-se uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e o exemplo 14.21 mostra que φ tem um polo simples com resíduo 1 em cada inteiro. Analogamente, a função definida por $\pi\csc\pi z$ também é analítica em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ e as suas singularidades são polos simples em cada inteiro n com resíduo $(-1)^n$. Para estabelecer o enunciado basta agora mostrar que estas funções são ambas limitadas nos conjuntos

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| = n + 1/2\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| = n + 1/2\}\,.$$

Sendo então $z = a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$|\sin(a+ib)| = \left|\frac{e^{ia-b} - e^{-ia+b}}{2i}\right| \geq \left|\frac{e^{-b} - e^{b}}{2}\right| = |\sinh b| = \sinh|b|$$

e

$$|\cos(a+ib)| = \left|\frac{e^{ia-b} + e^{-ia+b}}{2}\right| \leq \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} = \cosh b = \cosh|b|\,.$$

Se para algum $n \in \mathbb{Z}^+$ for $|\mathrm{Im}(z)| = n + 1/2$ resulta assim

$$|\csc\pi z| \leq \frac{1}{\sinh(n\pi + \pi/2)} \quad \text{e} \quad |\cot\pi z| \leq \frac{\cosh(n\pi + \pi/2)}{\sinh(n\pi + \pi/2)}.$$

Como

$$\frac{1}{\sinh x} \quad \text{e} \quad \frac{\cosh x}{\sinh x} = 1 + \frac{e^{-x}}{\sinh x}$$

são ambas decrescentes em $\mathbb{R}^+$ deduz-se então

$$|\csc\pi z| \leq \frac{1}{\sinh(\pi/2)} \quad \text{e} \quad |\cot\pi z| \leq \frac{\cosh(\pi/2)}{\sinh(\pi/2)}.$$

Por outro lado, supondo que para algum $n \in \mathbb{Z}^+$ é $|\mathrm{Re}(z)| = n + 1/2$ e $\mathrm{Im}(z) = b$, de (10.26) e (10.27) resulta

$$|\cos\pi z| = |\sinh\pi b| \quad \text{e} \quad |\sin\pi z| = \sqrt{1 + \sinh^2\pi b} = |\cosh\pi b|\,,$$

pelo que

$$|\csc \pi z| = \frac{1}{|\cosh \pi b|} \leq 1 \quad \text{e} \quad |\cot \pi z| = \left| \frac{\sinh \pi b}{\cosh \pi b} \right| \leq 1.$$

■

Corolário 2 - *Sejam $P \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto finito, $f : \mathbb{C} \backslash P \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$ e $\lambda \in [0, 2\pi]$. Tem-se então*

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{\substack{n=-m \\ n \notin P}}^{m} f(n) e^{i\lambda n} = - \sum_{c \in P} Res \left(f(z) \frac{2\pi i e^{i\lambda z}}{e^{2\pi i z} - 1} ; c \right).$$

Demonstração. Fixado $\lambda \in [0, 2\pi]$ e pondo

$$\varphi(z) = \frac{2\pi i e^{i\lambda z}}{e^{2\pi i z} - 1}$$

define-se uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas singularidades são polos simples com resíduo $e^{i\lambda n}$ em cada ponto $n \in \mathbb{Z}$. Atendendo ao teorema anterior basta agora provar que φ é limitada nos conjuntos

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| = n + 1/2\} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| = n + 1/2\}.$$

Seja então $z = a + ib \in A \cup B$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Supondo $b \geq -1$ temos

$$\left| e^{i\lambda z} \right| = e^{-\lambda b} \leq e^{\lambda}$$

e da identidade

$$\pi \cot \pi z - \pi i = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}$$

resulta

$$|\varphi(z)| \leq (|\pi \cot \pi z| + \pi)\, e^{\lambda}.$$

Dado que na demonstração do corolário anterior se provou que a função definida por $\pi \cot \pi z$ é limitada em $A \cup B$, conclui-se assim que φ é limitada no conjunto $(A \cup B) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq -1\}$.

Por outro lado, para todo o $z = a + ib$ temos

$$|\varphi(z)| = \frac{2\pi e^{-\lambda b}}{|e^{2\pi i a} e^{-2\pi b} - 1|} = \frac{2\pi e^{-\lambda b}}{|e^{-2\pi b} - e^{-2\pi i a}|},$$

e como

$$\left| e^{-2\pi b} - e^{-2\pi i a} \right| \geq \left| e^{-2\pi b} - 1 \right|,$$

se $b < -1$ obtém-se

$$|\varphi(z)| \leq \frac{2\pi e^{-\lambda b}}{|e^{-2\pi b} - 1|} = \frac{2\pi e^{\lambda |b|}}{e^{2\pi|b|} - 1} \leq \frac{2\pi e^{2\pi|b|}}{e^{2\pi|b|} - 1} \leq \frac{2\pi e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1}.$$

■

Exemplo 16.33 - *Dado* $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *tem-se*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-w)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi w}.$$

Efectivamente a única singularidade da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-w)^2}$$

é um polo duplo no ponto w. Aplicando o exemplo 14.24 temos

$$-Res\left(f(z)\pi \cot \pi z; w\right) = -\lim_{z \to w} \left(\pi \cot \pi z\right)' = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi w}$$

e a fórmula resulta directamente da primeira parte do corolário 1 do teorema anterior.

Exemplo 16.34 - *Dado* $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *tem-se*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \pi^2 \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \pi a}.$$

Efectivamente a única singularidade da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$$

é um polo duplo no ponto $-a$. Aplicando o exemplo 14.24 temos

$$-Res\left(f(z)\pi \csc \pi z; -a\right) = -\lim_{z \to -a} \left(\pi \csc \pi z\right)' = \pi^2 \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$$

e a fórmula resulta directamente da segunda parte do corolário 1 do teorema anterior.

Exemplo 16.35 - *Dados* $a \in \mathbb{R}^+$ *e* $\lambda \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\lambda}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\cosh (\pi - \lambda) a}{\sinh \pi a} - \frac{1}{2a^2}.$$

Efectivamente as únicas singularidades da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$$

são polos simples nos pontos $\pm ia$ com resíduos $\pm 1/2ia$. Aplicando o corolário 2 do teorema anterior temos então

$$-Res\left(f(z)\frac{2\pi i e^{i\lambda z}}{e^{2\pi i z} - 1}; ia\right) = -\frac{\pi}{a}\frac{e^{-\lambda a}}{e^{-2\pi a} - 1} = \frac{\pi}{2a}\frac{e^{(\pi-\lambda)a}}{\sinh \pi a}$$

e

$$-Res\left(f(z)\frac{2\pi i e^{i\lambda z}}{e^{2\pi i z} - 1}; -ia\right) = \frac{\pi}{a}\frac{e^{\lambda a}}{e^{2\pi a} - 1} = \frac{\pi}{2a}\frac{e^{-(\pi-\lambda)a}}{\sinh \pi a},$$

pelo que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\lambda}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{\cosh(\pi - \lambda)\, a}{\sinh \pi a}.$$

A fórmula do exemplo resulta agora de ser

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\lambda}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\lambda}{n^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2}.$$

Exemplo 16.36 - *Tem-se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sinh^2\frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

Efectivamente, pondo $a = (1 + i)/\sqrt{2}$, as únicas singularidades da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

são polos simples nos pontos $\pm a$ e $\pm \overline{a}$. Temos

$$Res\,(f(z); a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(z + a)(z - \overline{a})(z + \overline{a})} = \frac{1}{8a\,\mathrm{Re}(a)\,\mathrm{Im}(a)} = \frac{1}{4a}$$

e analogamente,

$$Res\,(f(z); \overline{a}) = -\frac{1}{4\overline{a}}.$$

Como f é uma função par, do exemplo 14.25 resulta então

$$Res\,(f(z); -a) = -\frac{1}{4a} \quad \text{e} \quad Res\,(f(z); -\overline{a}) = \frac{1}{4\overline{a}}\ .$$

Atendendo agora que a função cotangente é ímpar e à relação $\cot \pi\overline{a} = \overline{\cot \pi a}$, obtém-se

$$-\sum_{c\in P} Res\,(f(z)\pi\cot\pi z; c) = -\operatorname{Im}\left(\frac{\pi\cot\pi a}{a}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\operatorname{Im}\left((1-i)\cot\pi a\right).$$

Por outro lado, das identidades (10.23), (10.24) e (10.25) deduz-se

$$\cot\left(\alpha + i\beta\right) = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - i\sinh\beta\cosh\beta}{\sin^2\alpha + \sinh^2\beta} \quad \text{se} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

e pondo $c = \pi/\sqrt{2}$ temos então

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\operatorname{Im}\left((1-i)\cot\pi a\right) = c\frac{\sinh c\cosh c + \sin c\cos c}{\sin^2 c + \sinh^2 c}.$$

A fórmula apresentada resulta agora da primeira parte do corolário 1 do teorema anterior, notando que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^4+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^4+1} + \frac{1}{2}.$$

17 - Zeros de funções inteiras

Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e duas funções analíticas $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ não identicamente nulas nalguma componente conexa de D, diremos abreviadamente que f e g *têm a mesma estrutura de zeros* se ambas as funções se anularem nos mesmos pontos e se as ordens dos respectivos zeros forem iguais.

Teorema 17.1 - *Dada uma função inteira f não identicamente nula, as funções inteiras com a mesma estrutura de zeros de f são as funções da forma fe^h em que h é uma função inteira.*

Demonstração. Se f tiver um zero a de ordem m a definição de ordem mostra directamente que a ainda é zero de ordem m da função fe^h. Como todo o zero de fe^h também é zero de f vemos assim que as funções f e fe^h têm a mesma estrutura de zeros.

Por outro lado, se g for uma função inteira com a mesma estrutura de zeros de f, representando por Z o conjunto destes zeros vemos que a função g/f é analítica em $\mathbb{C} \setminus Z$ e não se anula. Além disso, como g/f tem uma singularidade removível em cada ponto $w \in Z$ e $\lim_{z \to w} g(z)/f(z) \neq 0$, o prolongamento por continuidade de g/f a $\mathbb{C}$ é uma função inteira φ sem zeros. Dado que $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, a condição 5 do teorema 13.16 mostra que existe um ramo h do logaritmo de φ, e h é então uma função inteira que verifica a condição $\varphi = e^h$. Temos assim $g(z) = f(z)e^{h(z)}$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus Z$ e esta relação permanece válida nos zeros de f.

■

Corolário 1 - *As funções inteiras cujo conjunto de zeros é finito são as funções da forma Pe^h em que P é uma função polinomial e h uma função inteira.*

Demonstração. Efectivamente, dada uma função inteira f com um conjunto finito de zeros $\{z_1, ..., z_n\}$ e sendo $m_1, ...m_n$ as respectivas multiplicidades, a função polinomial P definida por

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} ... (z - z_n)^{m_n}$$

é uma função inteira com a mesma estrutura de zeros de f. O enunciado resulta agora directamente do teorema anterior.

■

Corolário 2 - *Dada uma função inteira f com um conjunto finito de zeros, seja $(z_1, ..., z_n)$ uma sucessão formada com os zeros de f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e tal que* *cada zero figura um número de vezes igual à sua ordem. Então f é representável na forma*

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) ... \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \tag{17.1}$$

em que h é uma função inteira e m é a ordem do zero de f no ponto 0 se $f(0) = 0$, ou $m = 0$ se $f(0) \neq 0$.

Demonstração. Sendo

$$P(z) = z^m (1 - z/z_1) ... (1 - z/z_n),$$

as funções f e P tem a mesma estrutura de zeros pelo que o enunciado resulta directamente do teorema anterior.

■

Seja agora f uma função inteira não identicamente nula e suponha-se que ela tem um conjunto infinito Z de zeros. Resulta então do corolário do teorema 9.10 que Z não tem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ e o teorema 2.14 mostra que Z é um conjunto numerável. Pode assim formar-se uma sucessão (z_n) com os elementos de Z de modo que cada elemento de Z figure na sucessão (z_n) um número de vezes igual à sua ordem como zero de f. Como a condição de Z não ter pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ exige que para todo o $r > 0$ o conjunto $\{z_n : |z_n| \leq r\}$ seja finito, segue-se que $\lim |z_n| = +\infty$. Diremos abreviadamente que uma sucessão (z_n) deste tipo é uma *sucessão admissível dos zeros de f.*

Dada uma função inteira f com uma infinidade de zeros e procurando para f uma representação semelhante a (17.1), somos naturalmente conduzidos a estudar os análogos multiplicativos das séries, que são os chamados *produtos infinitos.*

Dada uma sucessão complexa $(u_n)_{n \geq p}$, a sucessão (P_m) definida por

$$P_m = \prod_{n=p}^{m} u_n \quad \text{se} \quad m \geq p$$

diz-se a sucessão dos *produtos parciais* do *produto infinito*

$$\prod_{n=p}^{+\infty} u_n.$$

Se a sucessão (P_m) for convergente escreve-se

$$\prod_{n=p}^{+\infty} u_n = \lim \prod_{n=p}^{m} u_n$$

e diz-se que o produto infinito converge para o valor $\lim P_m$.

Dado um produto infinito $\prod_{n=p}^{+\infty} u_n$ diz-se que ele é o produto infinito de termo geral (u_n) e diz-se também que os u_n são os seus factores. Da definição resulta que qualquer produto infinito com algum factor nulo converge para zero.

Exemplo 17.2 - *Seja $(z_n)_{n\geq p}$ uma sucessão de números complexos não nulos. Se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} \ln z_n$ for convergente o produto infinito converge para um valor não nulo.*

Efectivamente, se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} \ln u_n$ for convergente temos

$$\prod_{n=p}^{m} u_n = \exp\left(\sum_{n=p}^{m} \ln u_n\right) \quad \text{se} \quad m \geq p,$$

e resulta

$$\prod_{n=p}^{+\infty} u_n = \exp\left(\sum_{n=p}^{+\infty} \ln u_n\right) \neq 0.$$

Teorema 17.3 - *Seja $(z_n)_{n\geq p}$ uma sucessão de números complexos tal que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} |z_n - 1|$ é convergente. Então o produto infinito $\prod_{n=p}^{+\infty} z_n$ também converge e o seu valor é nulo sse algum dos seus factores for nulo.*

Demonstração. Da definição de convergência resulta directamente que o produto infinito converge para zero se algum dos seus factores for nulo. Suponha-se então $z_n \neq 0$ para todo o $n \geq p$. Como a série $\sum_{n=p}^{+\infty} (z_n - 1)$ converge tem-se $\lim (z_n - 1) = 0$ e a relação

$$|\ln z_n| = |\ln (1 + z_n - 1)| \sim |z_n - 1|$$

mostra que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \ln z_n$$

é absolutamente convergente. O enunciado resulta agora do exemplo anterior.

■

Dados $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma sucessão $(f_n)_{n\geq p}$ de aplicações de D em $\mathbb{C}$, diz-se que *o produto infinito*

$$\prod_{n=p}^{+\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente em D se a respectiva sucessão de produtos parciais

$$P_m(z) = \prod_{n=p}^{m} f_n(z)$$

for uniformemente convergente em D.

Para estudar a convergência uniforme de produtos infinitos de funções analíticas são úteis as duas desigualdades expressas no seguinte lema:

Lema 17.4 - *Dada uma sucessão complexa* $(z_n)_{n\geq p}$*, para cada* $m \geq p$ *tem-se*

$$\left|\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)\right| \leq \exp\left(\sum_{n=p}^{m}|z_n|\right) \tag{17.2}$$

e

$$\left|\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)-1\right| \leq \exp\left(\sum_{n=p}^{m}|z_n|\right)-1. \tag{17.3}$$

Demonstração. Para cada $m \geq p$ temos efectivamente

$$\left|\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)\right| = \prod_{n=p}^{m}|1+z_n| \leq \prod_{n=p}^{m}(1+|z_n|) \leq \prod_{n=p}^{m}e^{|z_n|} = \exp\left(\sum_{n=p}^{m}|z_n|\right)$$

o que estabelece (17.2). A relação (17.3) resulta agora de aplicar (17.2) à desigualdade

$$\left|\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)-1\right| \leq \prod_{n=p}^{m}(1+|z_n|) \ -1 \tag{17.4}$$

que se prova por indução em m. Efectivamente (17.4) reduz-se a uma identidade para $m=p$. Admitindo que ela é válida para um certo $m \geq p$ temos ainda

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{n=p}^{m+1}(1+z_n)-1\right| &= \left|\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)+z_{m+1}\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)-1\right| \\
&\leq \left|\prod_{n=p}^{m}(1+z_n)-1\right| + |z_{m+1}|\prod_{n=p}^{m}|1+z_n| \\
&\leq \prod_{n=p}^{m}(1+|z_n|)-1+|z_{m+1}|\prod_{n=p}^{m}(1+|z_n|) \\
&= \prod_{n=p}^{m+1}(1+|z_n|)-1,
\end{aligned}$$

pelo que a desigualdade permanece válida para $m+1$.

■

Estamos agora em condições de provar um teorema fundamental sobre a convergência uniforme dos produtos infinitos de funções analíticas.

Teorema 17.5 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $(f_n)_{n\geq p}$ uma sucessão de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} |f_n(z) - 1|$ for uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D então o produto infinito*

$$\prod_{n=p}^{+\infty} f_n(z)$$

converge em D para uma função analítica f e a convergência é também uniforme em cada subconjunto compacto de D. Além disso, os zeros de f são os pontos onde se anula algum dos factores do produto infinito, e se nenhum desses factores for identicamente nulo nalguma componente conexa de D, a ordem de cada zero de f é a soma das suas ordens como zero de cada factor f_n.

Demonstração. Nas condições do enunciado o teorema 17.3 mostra que o produto infinito converge em cada ponto $z \in D$.

Por outro lado, devido à convergência uniforme de $\sum_{n=p}^{+\infty} |f_n(z) - 1|$ a função h definida por

$$h(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} |f_n(z) - 1| \quad \text{se} \quad z \in D$$

é analítica. Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$ e sendo L um majorante de h em K temos então, atendendo a (17.2),

$$|P_m(z)| = \left|\prod_{n=p}^{m} f_n(z)\right| \leq \exp\left(\sum_{n=p}^{m} |f_n(z) - 1|\right) \leq e^{h(z)} \leq e^L \quad \text{se} \quad m \geq p \quad \text{e} \quad z \in K.$$

Seja agora

$$\delta_m = \sup_{z\in K} \sum_{n=m+1}^{+\infty} |f_n(z) - 1| \quad \text{se} \quad m \geq p.$$

Dado $q \geq 1$ e supondo $P_m(z) \neq 0$, de (17.3) resulta

$$\left|\frac{P_{m+q}(z)}{P_m(z)} - 1\right| = \left|\prod_{n=m+1}^{m+q} f_n(z) - 1\right| \leq \exp\left(\sum_{n=m+1}^{m+q} |f_n(z) - 1|\right) - 1 \leq e^{\delta_m} - 1,$$

pelo que

$$|P_{m+q}(z) - P_m(z)| \leq |P_m(z)| \left(e^{\delta_m} - 1\right) \leq e^L \left(e^{\delta_m} - 1\right),$$

e estas desigualdades são trivialmente verdadeiras se $P_m(z) = 0$. Fazendo $q \to +\infty$ obtém-se então

$$\left|\prod_{n=p}^{+\infty} f_n(z) - \prod_{n=p}^{m} f_n(z)\right| \leq e^L \left(e^{\delta_m} - 1\right) \quad \text{se} \quad z \in K$$

e como $\lim_{m\to+\infty} e^L \left(e^{\delta_m}-1\right)=0$ conclui-se que o produto infinito é uniformemente convergente em K.

Dado que os produtos parciais P_m são funções analíticas, do teorema de Weierstrass 13.9 resulta que o mesmo sucede com a função f definida pelo produto infinito, e o teorema 17.2 mostra que f só se anula nos pontos que anulem algum dos factores do produto.

Suponha-se agora que para algum $a \in D$ é $f(a)=0$, e seja $r>0$ tal que $\overline{B}(a,r) \subseteq D$. Como a série $\sum_{n=p}^{+\infty} |f_n(z)-1|$ converge uniformemente em $\overline{B}(a,r)$, existe uma ordem k tal que $|f_n(z)-1|<1/2$ para todo o $n>k$ e $z \in \overline{B}(a,r)$, pelo que as funções f_n não se anulam em $\overline{B}(a,r)$ quando $n>k$. Aplicando de novo o teorema 17.2 resulta que a função φ_k definida por

$$\prod_{n=k+1}^{+\infty} f_n(z)$$

não se anula em $\overline{B}(a,r)$, e a identidade

$$f(z)=\varphi_k(z)\prod_{n=1}^{k} f_n(z) \quad \text{se} \quad z \in D$$

mostra que a ordem de a como zero de f é a sua ordem como zero de $\prod_{n=1}^{k} f_n(z)$ se este produto não for identicamente nulo nalguma vizinhança de a.

■

O teorema seguinte diz respeito à derivação de um produto infinito.

Teorema 17.6 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $(f_n)_{n\geq p}$ uma sucessão de funções analíticas $f_n : D \to \mathbb{C}$ tal que o produto infinito $\prod_{n=p}^{+\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D. Se a função f definida em D por este produto infinito não tiver zeros, para todo o $z \in D$ é*

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

e a convergência da série é uniforme em cada subconjunto compacto de D.

Demonstração. Para cada $m \geq p$ seja

$$P_m(z)=\prod_{n=p}^{m} f_n(z) \quad \text{se} \quad z \in D.$$

Como a sucessão de funções analíticas $(P_m)_{m\geq p}$ converge uniformemente para f nos subconjuntos compactos de D, de acordo com o teorema de Weierstrass 13.9 temos então

$$\lim_{m\to+\infty} P_m'(z)=f'(z) \quad \text{se} \quad z \in D$$

e a convergência da sucessão $(P'_m)_{m\geq p}$ também é uniforme em cada subconjunto compacto de D.

Dado que nenhuma das funções f_n se anula em D, tomando a derivada logarítmica de P_m temos

$$P'_m(z) = P_m(z)\sum_{n=p}^{m}\frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \quad \text{se} \quad z \in D$$

e fazendo $m \to +\infty$ obtém-se

$$f'(z) = f(z)\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \quad \text{se} \quad z \in D,$$

o que justifica a fórmula do enunciado.

Para provar que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} f'_n(z)/f_n(z)$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de D ponha-se

$$s_m(z) = \sum_{n=p}^{m}\frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = \frac{P'_m(z)}{P_m(z)} \quad \text{se} \quad m \geq p \quad \text{e} \quad z \in D,$$

e considere-se um conjunto compacto $K \subseteq D$. Então f' é limitada em K e como f não se anula é também

$$\min_{z\in K}|f(z)| > 0.$$

Dado que a sucessão (P_m) não se anula em K os exemplos 7.4 e 7.5 mostram agora que a convergência uniforme de (P_m) e (P'_m) em K implica a convergência uniforme em K da sucessão

$$s_m = \frac{P'_m}{P_m}.$$

■

Dada uma uma função inteira f com uma infinidade de zeros e não identicamente nula, procurando para f uma representação semelhante a (17.1) vamos agora estudar o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

em que (z_n) é uma sucessão admissível dos zeros de f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. O teorema seguinte descreve o resultado mais simples deste tipo.

Teorema 17.7 - *Seja (z_n) uma sucessão admissível dos zeros de uma função inteira f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e suponha-se que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|}.$$

é convergente. Então f é representável na forma

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

em que h é uma função inteira e m é a ordem do zero de f no ponto 0 se $f(0) = 0$, ou $m = 0$ se $f(0) \neq 0$.

Demonstração. Dado um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ e tomando $r > 0$ tal que $K \subseteq B(0, r)$, temos

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{r}{|z_n|} \quad \text{se} \quad \in K$$

donde se deduz que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |z/z_n|$ é uniformemente convergente em K. De acordo com o teorema 17.5 o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

define então uma função inteira g para a qual (z_n) é uma sucessão admissível de zeros e tal que $g(0) = 1$. Tomando o inteiro $m \geq 0$ descrito no enunciado segue-se que $z^m g$ tem a mesma estrutura de zeros de f e o enunciado resulta agora directamente do teorema 17.1.

■

Em certas situações em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/|z_n|$ diverge o teorema seguinte permite ainda obter uma representação da função através de um produto infinito.

Teorema 17.8 - *Seja f uma função inteira com paridade definida e (w_n) uma sucessão admissível dos seus zeros na região $\left\{re^{i\theta} : r > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < \pi\right\}$. Se a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|w_n|^2}$$

for convergente então f é representável na forma

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{w_n^2}\right)$$

em que h é uma função inteira e m é a ordem do zero de f no ponto 0 se $f(0) = 0$, ou $m = 0$ se $f(0) \neq 0$.

Demonstração. Como f tem paridade definida, para cada zero w de f na região

$$H = \left\{re^{i\theta} : r > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < \pi\right\}$$

existe um zero $-w$ de f com o mesmo grau de multiplicidade (cf. exemplo 9.14) e $-w \in \mathbb{C} \setminus H$. Definindo a sucessão $(z_n)_{n \geq 1}$ por $z_{2n-1} = w_n$ e $z_{2n} = -w_n$, esta é então uma sucessão admissível dos zeros de f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por outro lado a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/ |w_n|^2$ mostra que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{z^2}{w_n^2} \right|$$

é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Nestas condições, do teorema 17.5 resulta que o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{w_n^2}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{2n-1}}\right) \left(1 - \frac{z}{z_{2n}}\right)$$

define uma função inteira g para a qual $(z_n)_{n \geq 1}$ é uma sucessão admissível dos zeros e tal que $g(0) = 1$. Então a função definida por $z^m g(z)$ tem a mesma estrutura de zeros que f e o enunciado resulta ainda do teorema 17.1.

■

O teorema anterior permite representar a função seno na forma de um produto infinito.

Teorema 17.9 (Euler) - *Para todo o $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Demonstração. O zeros da função definida por $\sin \pi z$ são os inteiros, e todos estes zeros são simples pois $(\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z$ não se anula em $\mathbb{Z}$. Como $\sin \pi z$ é ímpar, o teorema anterior mostra então que é válida uma relação da forma

$$\sin \pi z = z e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C},$$

em que h é uma função inteira.

Atendendo ao teorema 17.6 temos agora

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + h'(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

e comparando com o desenvolvimente da função cotangente dado por (15.4) conclui-se que h' é identicamente nula em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Então h é constante e para um certo $a \in \mathbb{C}$ tem-se

$$\frac{\sin \pi z}{z} = a \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Tomando o limite quando $z \to 0$ obtém-se a fórmula do enunciado.
■

Corolário - *Para todo o* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\cos \pi z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2}\right).$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior temos

$$\sin 2\pi z = 2\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

e como

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right) &= \lim_{m\to+\infty} \prod_{n=1}^{2m} \left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{(2n)^2}\right) \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2}\right) \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

resulta

$$\sin 2\pi z = 2 \sin \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2}\right)$$

donde se deduz

$$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2 \sin \pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Notando agora que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{(n-1/2)^2}$$

converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, o teorema 17.5 mostra que o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^2}\right)$$

define uma função inteira. Como $\cos \pi z$ também é uma função inteira, aplicando o princípio do prolongamente analítico conclui-se que a identidade anterior permanece válida em $\mathbb{Z}$. ■

Procurando generalizar o resultado do teorema 17.7 de modo a englobar todos os casos em que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/|z_n|$ diverge, vamos agora estudar produtos infinitos da forma

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_n\left(\frac{z}{z_n}\right)} \tag{17.5}$$

com

$$P_n(w)=w+\frac{w^2}{2}+...+\frac{w^n}{n}.$$

Começaremos por estabelecer um resultado auxiliar sobre as funções E_n definidas por

$$E_n(z)=(1-z)\,e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n}} \quad \text{se} \quad n\geq 0, \tag{17.6}$$

em que o expoente é nulo quando $n=0$ (soma vazia).

Lema 17.10 - *Para cada inteiro $n\geq 0$ tem-se*

$$|E_n(z)-1|\leq \frac{4}{n+1}|z|^{n+1} \quad \text{se} \quad |z|\leq\frac{1}{2}.$$

Demonstração. Pondo

$$\lambda_n(z)=\ln(1-z)+z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n} \quad \text{se} \quad |z|<1$$

temos

$$\lambda_n(z)=-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}$$

pelo que

$$|\lambda_n(z)|\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k}\leq\frac{|z|^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}|z|^k=\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)(1-|z|)}$$

e portanto

$$|\lambda_n(z)|\leq\frac{2}{n+1}|z|^{n+1}\leq 1 \quad \text{se} \quad |z|\leq\frac{1}{2}. \tag{17.7}$$

Atendendo a (17.6) é, por outro lado,

$$E_n(z)=e^{\lambda_n(z)} \tag{17.8}$$

e dado $w\in\mathbb{C}$ tal que $|w|\leq 1$ temos

$$|e^w-1|\leq|w|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|w|^{k-1}}{k!}\leq|w|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}=|w|(e-1)<2|w|.$$

De (17.7) e (17.8) resulta então

$$|E_n(z)-1|\leq\frac{4}{n+1}|z|^{n+1} \quad \text{se} \quad |z|\leq\frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

Podemos agora provar um resultado que traduz a propriedade fundamental dos produtos infinitos da forma (17.5).

Teorema 17.11 (Weierstrass) - *Seja* (z_n) *uma sucessão de pontos de* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tal que* $\lim |z_n| = +\infty$. *Então o produto infinito*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n}$$

converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ *e define uma função inteira para a qual* (z_n) *é uma sucessão admissível dos seus zeros.*

Demonstração. Dado um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ tome-se $r > 0$ tal que $K \subseteq B(0, r)$. Como $\lim |z_n| = +\infty$ existe uma ordem k para a qual

$$|z_n| \geq 2r \quad \text{se} \quad n \geq k.$$

Se $z \in K$ e $n \geq k$ temos então

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{r}{|z_n|} \leq \frac{1}{2}$$

e do lema anterior resulta

$$\left|E_n\left(\frac{z}{z_n}\right) - 1\right| \leq \frac{4}{n+1}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{n+1} \leq 2\left|\frac{z}{z_n}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{se} \quad n \geq k \quad \text{e} \quad z \in K.$$

Vemos assim que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|E_n\left(\frac{z}{z_n}\right) - 1\right|$$

converge uniformemente em K, e o teorema 17.5 mostra que o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n}$$

verifica as condições do enunciado.

■

Corolário 1 - *Dada uma sucessão* (z_n) *de complexos tal que* $\lim |z_n| = +\infty$, *existe uma função inteira para a qual* (z_n) *é uma sucessão admissível dos seus zeros.*

Demonstração. Se nenhum dos z_n for nulo o enunciado resulta directamente do teorema anterior. Supondo que exactamente m termos da sucessão (z_n)

são nulos, o teorema anterior mostra que existe uma função f_0 para a qual $(z_{n+m})_{n\geq 1}$ é uma sucessão admissível de zeros. Então a função f definida por

$$f(z) = z^m f_0(z)$$

verifica as condições do enunciado.

■

Corolário 2 - *Seja $Z \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto sem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$, e para cada $w \in Z$ seja $m(w)$ um inteiro positivo. Existe então uma função inteira cujo conjunto de zeros é Z e tal que cada $w \in Z$ é um zero de ordem $m(w)$.*

Demonstração. Se Z for um conjunto finito $\{w_1, ..., w_n\}$, o polinómio definido por

$$(z - w_1)^{m(w_1)} ... (z - w_n)^{m(w_n)}$$

verifica as condições do enunciado. Supondo que Z é infinito ele é um conjunto numerável e pode então formar-se uma sucessão (z_n) com os elementos de Z de modo que cada elemento $w \in Z$ figure em (z_n) um número de vezes igual a $m(w)$. Como Z não tem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ é $\lim |z_n| = +\infty$ e o corolário anterior mostra agora que existe uma função nas condições do enunciado.

■

Corolário 3 - *Toda a função meromorfa em $\mathbb{C}$ é o quociente de duas funções inteiras.*

Demonstração. Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, P o conjunto dos seus polos, e para cada $w \in P$ seja $m(w)$ a ordem de w. Dado que P não tem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ o corolário anterior mostra que existe uma função inteira g que admite P como conjunto de zeros e tal que cada zero w tem ordem $m(w)$. Então fg tem singularidades removíveis nos polos de f, e sendo h o prolongamento por continuidade de fg obtém-se uma função inteira tal que $f = h/g$.

■

Estamos agora em condições de caracterizar a classe das funções inteiras com uma infinidade de zeros.

Teorema 17.12 - *As funções inteiras e não identicamente nulas com uma infinidade de zeros são as funções da forma*

$$e^{h(z)} z^m \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n}$$

em que h é uma função inteira, m um inteiro não negativo e (z_n) uma sucessão de pontos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\lim |z_n| = +\infty$.

Demonstração. Aplicando o teorema 17.11 verifica-se que todas as funções desta forma são inteiras, não identicamente nulas, e têm uma infinidade de zeros.

Reciprocamente seja f uma função inteira com uma infinidade de zeros. Se f não se anular no ponto zero e (z_n) for uma sucessão admissível dos seus zeros, como $\lim |z_n| = +\infty$ segue-se que (z_n) verifica as condições do teorema 17.11. Então a função g definida por

$$g(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n}$$

tem a mesma estrutura de zeros que f e o teorema 17.1 mostra que f se pode escrever na forma do enunciado com $m = 0$.

Finalmente, se f tiver um zero de ordem m no ponto zero, a função definida por $z^m g(z)$ tem a mesma estrutura de zeros que f e o enunciado resulta ainda do teorema 17.1.

■

Em muitos casos a representação dada pelo teorema anterior pode ser consideravelmente simplificada. Neste sentido é importante o seguinte resultado que generaliza o teorema 17.7:

Teorema 17.13 - *Seja (z_n) uma sucessão de pontos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e suponha-se que para algum inteiro $p \geq 0$ a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

é convergente. Então o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}$$

converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e define uma função inteira para a qual (z_n) é uma sucessão admissível dos zeros.

Demonstração. Dado um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ tome-se $r > 0$ tal que $K \subseteq B(0, r)$. Como a convergência de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

implica $\lim |z_n| = +\infty$, existe uma ordem k tal que $|z_n| \geq 2r$ se $n \geq k$.

Pondo ainda

$$E_p(z) = (1 - z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C},$$

atendendo ao lema 17.10 temos então

$$\left|E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)-1\right| \leq \frac{4}{p+1}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1} \leq 4r^{p+1}\frac{1}{|z_n|^{p+1}} \quad \text{se } n \geq k \text{ e } z \in K,$$

e da convergência de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

deduz-se que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)-1\right|$$

converge uniformemente em K. O enunciado resulta agora do teorema 17.5.

■

Corolário - *Seja* (z_n) *uma sucessão admissível dos zeros de uma função inteira* f *em* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Se para algum inteiro* $p \geq 0$ *a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

for convergente, então f *é representável na forma*

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}$$

em que h *é uma função inteira e* m *é a ordem do zero de* f *no ponto* 0 *se* $f(0)=0$, *ou* $m=0$ *se* $f(0)\neq 0$.

Demonstração. Como a sucessão (z_n) verifica as condições do teorema anterior segue-se que a função definida por

$$z^m \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}$$

tem a mesma estrutura de zeros que f. O enunciado resulta então directamente do teorema 17.1.

■

Uma classe importante de funções inteiras que verifica a hipótese do corolário anterior é a classe das funções inteiras de ordem finita que será estudada na secção 20.

18 - O princípio do módulo máximo

O teorema seguinte traduz uma propriedade característica das funções analíticas que não tem qualquer análogo em Análise Real.

Teorema 18.1 (Princípio do módulo máximo) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se $|f|$ tiver algum máximo local então f é constante.*

Demonstração. Suponha-se que f não é constante e seja $a \in D$. Se $f(a) = 0$ existe necessariamente $c \in D$ tal que $|f(c)| > |f(a)|$ e vamos provar que isso sucede também quando $f(a) \neq 0$.

Seja então $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$h(z) = \frac{f(z)}{f(a)} - 1.$$

Como h não é identicamente nula, sendo p a ordem do zero de h em a existe uma função analítica $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$ e

$$\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + g(z)(z-a)^p \quad \text{se} \quad z \in D.$$

Pondo agora

$$\varphi(z) = \frac{g(z) - g(a)}{g(a)} \quad \text{se} \quad z \in D,$$

existe $r > 0$ tal que $\overline{B}\,(a,r) \subseteq D$ e $|\varphi(z)| < 1/2$ se $z \in \overline{B}\,(a,r)$. Como é

$$\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + g(a)(z-a)^p + \varphi(z)g(a)(z-a)^p \quad \text{se} \quad z \in D,$$

temos então

$$\left|\frac{f(z)}{f(a)}\right| \geq |1 + g(a)(z-a)^p| - \frac{1}{2}\,|g(a)(z-a)^p| \quad \text{se} \quad z \in \overline{B}\,(a,r)\,. \tag{18.1}$$

Por outro lado, sendo $\theta = \arg g(a)$ e $c = a + re^{-i\theta/p}$, temos também

$$g(a)(c-a)^p = |g(a)|\,r^p = |g(a)(c-a)^p|$$

pelo que

$$|1 + g(a)(c-a)^p| - \frac{1}{2}\,|g(a)(c-a)^p| = 1 + \frac{1}{2}\,|g(a)(c-a)^p| > 1,$$

e de (18.1) resulta

$$\left|\frac{f(c)}{f(a)}\right| > 1,$$

como se pretendia.

■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, limitado e conexo, e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. Para cada $w \in D$ é então*

$$|f(w)| \leq \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}$$

valendo a desigualdade estrita se f não for constante.

Demonstração. Se f é constante a relação do enunciado é trivialmente verdadeira. Supondo que f não é constante, como $\overline{D}$ é compacto e $|f|$ é contínua, existe um ponto $a \in \overline{D}$ onde $|f|$ é máximo. Dado que $|f|$ não tem um máximo local em D então necessariamente $a \in \partial D$, e para cada $z \in D$ é

$$|f(w)| < |f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

■

Exemplo 18.2 - *Dados $a \in \mathbb{C}$ e $R \in \mathbb{R}^+$, seja $f : \overline{B}(a, R)$ uma função analítica em $B(a, R)$, contínua em $C(a, R)$ e não constante. Pondo*

$$M(r) = \max\{|f(\zeta)| : |\zeta - a| = r\} \quad \textit{se} \quad r \in [0, R],$$

a função M é estritamente crescente.

Efectivamente, dados $r, s \in [0, R]$ tais que $r < s$ e tomando $c \in \mathbb{C}$ tal que $|f(c)| = M(r)$, o corolário anterior mostra que $|f(c)| < M(s)$.

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e limitado, e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. É então*

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Demonstração. Dado $w \in \partial D$ existe uma sucessão (z_n) de pontos de D com limite w, e da continuidade de $|f|$ resulta

$$|f(w)| = \lim |f(z_n)| \leq \sup_{z \in D} |f(z)|$$

pelo que

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z)| \leq \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Dado $w \in D$ seja agora C a componente conexa de D a que pertence w. Aplicando o corolário 1 ao conjunto C tem-se

$$|f(w)| \leq \max_{z \in \partial C} |f(z)|$$

e do teorema 5.29 resulta ainda $\partial C \subseteq \partial D$. É assim

$$|f(w)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)| \quad \text{se} \quad c \in D,$$

o que implica a relação do enunciado.

■

Corolário 3 (Princípio do módulo mínimo) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se f não é constante então f anula-se em cada ponto onde $|f|$ tenha um mínimo local.*

Demonstração. Suponha-se que $|f|$ tem um mínimo local num ponto a e que $f(a) \neq 0$. Tomando $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq D$ e $|f(z)| \geq |f(a)|$ para todo o $z \in B(a,r)$, segue-se que f não se anula em $B(a,r)$. Então $1/f$ define uma função analítica em $B(a,r)$, e como $|1/f|$ tem um máximo local em a o teorema anterior mostra que f é constante em $B(a,r)$. Do princípio do prolongamento analítico 9.10 resulta agora que f é constante em D.

■

Exemplo 18.3 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, limitado e conexo, e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. Se $|f|$ é constante em ∂D e f não se anula em D então f é constante.*

Efectivamente, suponha-se que f não é constante e seja μ o valor de $|f|$ em ∂D. Atendendo ao corolário 1 temos $|f(z)| < \mu$ para cada $z \in D$, pelo que o mínimo de $|f|$ em $\overline{D}$ é atingido nalgum ponto de D. Então o princípio do módulo mínimo exige que f se anule em D contrariamente à hipótese.

Corolário 4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se alguma das funções $\operatorname{Re}(f)$ ou $\operatorname{Im}(f)$ tiver um extremo local então f é constante.*

Demonstração. Para cada $z \in D$ temos

$$\left| e^{f(z)} \right| = e^{\operatorname{Re}(f(z))}$$

pelo que os pontos de extremo local de $\operatorname{Re}(f)$ são os pontos de extremo local de $\left| e^f \right|$. Como e^f é uma função analítica sem zeros, se $\operatorname{Re}(f)$ tiver um extremo local os princípios do módulo máximo e do módulo mínimo exigem que e^f seja constante. Daqui resulta que f tem derivada identicamente nula e isto implica que f seja constante. Quanto à segunda parte do enunciado, ela deduz-se da primeira atendendo à identidade $\operatorname{Im}(f) = -\operatorname{Re}(if)$.

■

Chama-se por vezes "paisagem analítica" de uma função de variável complexa z ao gráfico do seu módulo no espaço tridimensional, como função das coordenadas de z. Alguém formulou os princípios do módulo máximo e do módulo mínimo com uma frase sugestiva: "Se uma função é analítica, na sua paisagem analítica não há montes e quando chove só se formam lagos em torno dos seus zeros"...

O princípio do módulo mínimo permite também estabelecer outra propriedade característica da Análise Complexa.

Teorema 18.4 (Teorema da aplicação aberta) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se f não é constante o contradomínio de f é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $c = f(a)$ um ponto do contradomínio de f. Como f não é constante, do princípio do prolongamento analítico 9.10 resulta que existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq c$ para todo o $z \in C(a,r)$. Seja então

$$\varepsilon = \min\{|f(z) - c| : z \in C(a,r)\} > 0$$

e tome-se $w \in B(c, \varepsilon/2)$. Dado $z \in C(a,r)$ temos

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - c| - |w - c| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$

e $|f(a) - w| = |c - w| < \varepsilon/2$. Então o mínimo da função $|f - w|$ em $\overline{B}(a,r)$ é atingido num ponto de $B(a,r)$ e isto mostra que $|f - w|$ tem um mínimo local. Como esta função não é constante, do princípio do módulo mínimo resulta que ela se anula, ou seja, que $w \in f[D]$. Conclui-se assim que $B(c, \varepsilon/2) \subseteq f[D]$ pelo que c é interior a $f[D]$.

■

Podemos agora estabelecer o seguinte resultado sobre a inversão de funções analíticas:

Teorema 18.5 (Teorema da função inversa) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in D$. Se $f'(a) \neq 0$ existe um conjunto aberto $U \subseteq D$ que verifica as seguintes condições:*

1 - *$a \in U$ e f aplica injectivamente U sobre uma vizinhança do ponto $f(a)$.*
2 - *f' não se anula em U e a função inversa da restrição de f a U é analítica.*

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq D$ e $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|/2$ se $z \in B(a,r)$. Temos então $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$ se $z \in B(a,r)$ pelo que f' não se anula em $B(a,r)$.

Por outro lado, como $f(z) - f'(a)z$ é uma primitiva de $f'(z) - f'(a)$, dados $u, v \in B(a,r)$ temos

$$f(v) - f(u) - f'(a)(v - u) = \int_u^v (f'(z) - f'(a))\, dz,$$

e sendo γ o caminho linear definido por $\gamma(t) = u + t(v - u)$ com $t \in [0, 1]$, é ainda

$$\int_u^v (f'(z) - f'(a))\, dz = (v - u) \int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(a))\, dt.$$

Como o segmento $[u, v]$ está contido em $B(a, r)$ obtém-se assim

$$|f(v) - f(u) - f'(a)(v - u)| \leq |v - u| \frac{|f'(a)|}{2} < |f'(a)(v - u)| \quad \text{se} \quad v - u \neq 0,$$

e daqui resulta

$$f(v) - f(u) \neq 0 \quad \text{se} \quad v - u \neq 0.$$

Isto mostra que a restrição de f ao conjunto $B(a, r)$ é injectiva e do teorema da aplicação aberta 18.4 deduz-se que f aplica $B(a, r)$ sobre um conjunto aberto G. Então, tomando $\rho > 0$ tal que $B(f(a), \rho) \subseteq G$, o conjunto

$$U = \{z \in B(a, r) : f(z) \in B(f(a), \rho)\}$$

é aberto (cf. teorema 3.7), verifica a primeira condição do enunciado, e f' não se anula em U.

Representemos agora por φ a restrição de f a U, e dados $\delta > 0$ e um ponto $b \in B(f(a), \rho)$, seja $c = \varphi^{-1}(b)$. Como o conjunto $\varphi[B(c, \delta)]$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(b, \varepsilon) \subseteq \varphi[B(c, \delta)]$, e para cada $w \in B(b, \varepsilon)$ necessariamente $\varphi^{-1}(w) \in B(c, \delta)$. É então $\left|\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(b)\right| < \delta$ se $|w - b| < \varepsilon$ e isto mostra que φ^{-1} é contínua no ponto b. Como φ^{-1} é contínua no seu domínio e φ' não se anula em U, do teorema 6.9 resulta que φ^{-1} é diferenciável e conclui-se que φ^{-1} é uma função analítica.

■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $a \in D$. Suponha-se ainda que f não é constante nalguma vizinhança de a e seja p a ordem do zero de $f - f(a)$ no ponto a. Existem então um conjunto aberto $U \subseteq D$ e uma função analítica $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ que verificam as seguintes condições:*

1 - $a \in U$ e $f(z) = f(a) + \varphi^p(z)$ para cada $z \in U$.

2 - φ' não se anula em U e φ aplica injectivamente U sobre uma vizinhança do ponto 0.

Demonstração. Sendo p a ordem do zero de $f - f(a)$ no ponto a, o teorema 9.12 mostra que existe uma função analítica $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$ e

$$f(z) = f(a) + (z - a)^p g(z) \quad \text{se} \quad z \in D.$$

Pondo

$$h(z) = \frac{g(z)}{g(a)} - 1$$

a função h é analítica em D e anula-se no ponto a, pelo que existe $r > 0$ tal que

$$B(a,r) \subseteq D \ \text{ e } \ |h(z)| < 1 \ \text{ se } \ z \in B(a,r).$$

Então, como $1 + h(z) \notin \mathbb{R}_0^-$ se $z \in B(a,r)$, a função φ definida por

$$\varphi(z) = (z-a)g^{1/p}(a)(1+h(z))^{1/p} \ \text{ se } \ z \in B(a,r)$$

é analítica, e da relação $g(z) = g(a)(1+h(z))$ resulta

$$f(z) = f(a) + \varphi^p(z) \ \text{ se } \ z \in B(a,r).$$

Atendendo à definição de φ temos ainda

$$\varphi'(a) = g^{1/p}(a)(1+h(a))^{1/p} \neq 0,$$

e como é também $\varphi(a) = 0$ o teorema anterior mostra que existe um conjunto $U \subseteq B(a,r) \subseteq D$ verificando as condições do enunciado.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se f é injectiva então f' não se anula e a função inversa de f é analítica.*

Demonstração. Supondo que f' se anula nalgum ponto $a \in D$ segue-se que o zero de $f - f(a)$ em a tem ordem $p \geq 2$. Com as notações do corolário anterior seja

$$f(z) = f(a) + \varphi^p(z) \ \text{ se } \ z \in U \subseteq D,$$

em que φ aplica U sobre um círculo $B(0,r)$. Dados $w \in B(0,r)$ e $z_1 \in U$ tal que $\varphi(z_1) = w$, existe $z_2 \in U$ para o qual

$$\varphi(z_2) = we^{2\pi i/p}$$

e tem-se então $f(z_1) = f(z_2)$, o que contraria a hipótese de f ser injectiva. A segunda conclusão do teorema da função inversa mostra agora que para cada $z \in D$ a função f^{-1} é analítica no ponto $f(z)$.

■

O corolário anterior não é válido em Análise Real, como se pode verificar com o exemplo da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$.

Por outro lado, a exponencial complexa mostra que o não anulamento da derivada de uma função analítica não implica a sua injectividade, embora esse seja um resultado verdadeiro em Análise Real.

O princípio do módulo máximo 18.1 permite enfraquecer as hipóteses na aplicação do teorema de Weierstrass 13.9, como resulta do teorema seguinte.

Teorema 18.6 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e limitado, e $f_n : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de função analíticas em D e contínuas em ∂D. Se (f_n) for uniformemente convergente em ∂D então a convergência também é uniforme em $\overline{D}$.*

Demonstração. Como (f_n) converge uniformemente em ∂D o teorema 7.6 mostra que para cada $\delta > 0$ existe uma ordem k tal que

$$\sup_{z \in \partial D} |f_m(z) - f_n(z)| < \delta \text{ se } m, n \geq k.$$

Aplicando o corolário 2 do princípio do módulo máximo 18.1 à função $f_m - f_n$ temos então também

$$\sup_{z \in D} |f_m(z) - f_n(z)| < \delta \text{ se } m, n \geq k$$

pelo que

$$\sup_{z \in \overline{D}} |f_m(z) - f_n(z)| < \delta \text{ se } m, n \geq k$$

e isto mostra que (f_n) converge uniformemente em $\overline{D}$.

■

Exemplo 18.7 - *Dados $a \subseteq \mathbb{C}$ e $R \in \mathbb{R}^+$, se uma série de potências de $z - a$ converge uniformemente em $C(a, R)$ ela também converge uniformemente em $\overline{B}(a, R)$.*

Efectivamente, dada uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^n$ basta aplicar o teorema anterior às funções f_m definidas por

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n(z - a)^n \text{ se } z \in \overline{B}(a, R).$$

Exemplo 18.8 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $K \subseteq D$ um conjunto compacto e $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de função analíticas. Se (f_n) for uniformemente convergente na fronteira de K então a convergência também é uniforme em K.*

Efectivamente temos $\overline{K^\circ} \subseteq K$ pelo que $\partial K^\circ \subseteq \partial K$ e a convergência de (f_n) em ∂K° também é uniforme. Aplicando o teorema anterior segue-se que (f_n) converge uniformemente em K°, e portanto também em $K^\circ \cup \partial K = K$ (cf. exemplo 7.1).

Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em $\overline{D}$. Se D for limitado, o corolário 2 do princípio do módulo máximo 18.1 mostra que $\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$. No caso de D ser ilimitado esta relação pode já não ser válida como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 18.9 - *Sejam* $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2 \text{ e } \mathrm{Im}(z) > 0\}$, *e* f *a função definida em* $\overline{D}$ *por* $f(z) = \exp\left(e^{-iz}\right)$. *Então* f *é limitada em* ∂D *mas é ilimitada em* D.

Temos efectivamente

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| = \pi/2 \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cup [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Pondo $z = \pm\pi/2 + iy$ com $y \in \mathbb{R}_0^+$, é $|f(z)| = |\exp(\pm ie^y)| = 1$ e como f é limitada em $[-\pi/2, \pi/2]$ segue-se que f é limitada em ∂D. Temos, por outro lado, $\lim_{y\to+\infty} f(iy) = \lim_{y\to+\infty} \exp(e^y) = +\infty$, pelo que f não é limitada em D.

Se o conjunto D for ilimitado mas a função f for limitada, o teorema seguinte mostra que a relação $\sup_{z\in D} |f(z)| = \sup_{z\in\partial D} |f(z)|$ se mantém válida.

Teorema 18.10 - *Sejam* $D \subseteq \mathbb{C}$ *um conjunto aberto ilimitado, e* $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica em* D *e contínua em* ∂D. *Se* f *for limitada tem-se*

$$\sup_{z\in D} |f(z)| = \sup_{z\in\partial D} |f(z)|\,.$$

Demonstração. Como na demonstração do corolário 2 do teorema 18.1, da continuidade de $|f|$ em ∂D resulta $\sup_{z\in\partial D} |f(z)| \leq \sup_{z\in D} |f(z)|$ pelo que basta estabelecer a relação $\sup_{z\in D} |f(z)| \leq \sup_{z\in\partial D} |f(z)|$.

Supondo sem perda de generalidade que f não é constante, seja $c \in D$ e tome-se $a \in D$ tal que $f(a) \neq f(c)$. Então a função $g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(a) = f'(a)$ e

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \text{se} \quad z \in D \setminus \{a\},$$

é analítica em D, contínua em $\overline{D}$, e tem-se $g(c) \neq 0$. Além disso, por f ser limitada é $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ e existe $C > 0$ tal que

$$|g(z)| \leq C \quad \text{se} \quad z \in \overline{D}.$$

Ponha-se agora

$$M = \sup_{z\in\overline{D}} |f(z)|$$

e para cada inteiro $n \geq 1$ seja

$$h_n(z) = g(z) f^n(z) \quad \text{se} \quad z \in \overline{D}. \tag{18.2}$$

Como $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, dado $\lambda > \sup_{z\in\partial D} |f(z)|$ existe uma sucessão (R_n) tal que $\lim R_n = +\infty$, $R_n > |c|$ para cada n e

$$|g(z)| \leq C \left(\frac{\lambda}{M}\right)^n \quad \text{se} \quad |z| = R_n \ \text{ e } \ z \in \overline{D}. \tag{18.3}$$

Sendo $D_n = D \cap B(0, R_n)$ pode então ver-se que é válida a majoração

$$|h_n(z)| \leq C\lambda^n \text{ se } z \in \partial D_n.$$

Efectivamente, se $z \in \overline{D} \cap C(0, R_n)$, de (18.2) resulta $|h_n(z)| \leq |g(z)| M^n$ e (18.3) implica $|h_n(z)| \leq C\lambda^n$. Se $z \in \partial D_n$ mas $z \notin \overline{D} \cap C(0, R_n)$ segue-se que $z \in \overline{D} \cap B(0, R_n)$ e a condição $z \in \partial D_n$ exige $z \in \partial D$. Neste caso, das definições de h_n e de λ resulta directamente $|h_n(z)| \leq C\lambda^n$.

Atendendo ao corolário 2 do princípio do módulo máximo 18.1 é então $|h_n(z)| \leq C\lambda^n$ para todo o $z \in D_n$, e como $|c| < R_n$ é também $|h_n(c)| \leq C\lambda^n$. De (18.2) resulta agora

$$|f(c)| \leq \lambda \left(\frac{C}{|g(c)|} \right)^{1/n}$$

e fazendo $n \to +\infty$ obtém-se $|f(c)| \leq \lambda$. Dado que c é um ponto genérico de D segue-se que $\sup_{z \in D} |f(z)| \leq \lambda$, e como $\lambda > \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$ é arbitário isto exige $\sup_{z \in D} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$.

■

Um método desenvolvido por Phragmén e Lindelöf permite ampliar a relação

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$$

a funções ilimitadas e a certos conjuntos ilimitados, desde que $|f(z)|$ não cresça com demasiada rapidez quando $z \to \infty$.

No caso de D ser uma faixa ou semifaixa vertical, o resultado básico é traduzido pelo seguinte teorema:

Teorema 18.11 (Phragmén-Lindelöf, 1908) - *Dados $y_0 \in [-\infty, +\infty[$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, sejam*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < b \text{ e } \mathrm{Im}(z) > y_0\}$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. Se existirem constantes positivas A, B, γ tais que $\gamma < \pi/(b-a)$ e

$$|f(z)| \leq A \exp\left(Be^{\gamma|z|}\right) \quad \textit{se} \quad z \in \overline{D},$$

é então

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Demonstração. Como na demonstração do teorema anterior basta estabelecer a relação $\sup_{z \in D} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$, e sem perda de generalidade pode supôr-se que a função $|f|$ é majorada em ∂D.

Tomando $\theta \in]\gamma, \pi/(b-a)[$, $c = (a+b)/2$ e $\varepsilon > 0$, seja g_ε a função definida por

$$g_\varepsilon(z) = \exp\left(-\varepsilon \left(e^{i\theta(z-c)} + e^{-i\theta(z-c)}\right)\right) \text{ se } z \in \overline{D}.$$

Dado $z = x + iy \in \overline{D}$ com $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\theta(z-c)} + e^{-i\theta(z-c)}\right) = \left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right)\cos\theta(x-c),$$

e como $|\theta(x-c)| = \theta\,|x-c| \leq \theta(b-a)/2 < \pi/2$, pondo $\mu = \cos\left(\theta(b-a)/2\right)$ deduz-se $\cos\theta(x-c) \geq \mu > 0$. É então

$$|g_\varepsilon(z)| \leq \exp\left(-\varepsilon\mu\left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right)\right) < 1 \;\text{ se }\; z \in \overline{D} \;\text{ e }\; \operatorname{Im}(z) = y, \tag{18.4}$$

e daqui resulta

$$|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq A\exp\left(Be^{\gamma|z|} - \varepsilon\mu\left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right)\right) \;\text{ se }\; z \in \overline{D} \;\text{ e }\; \operatorname{Im}(z) = y.$$

Sendo agora $m = \max\{|a|, |b|\}$, na relação anterior temos ainda $|z| \leq m + |y|$ donde vem

$$Be^{\gamma|z|} - \varepsilon\mu\left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right) \leq Be^{\gamma m}e^{\gamma|y|} - \varepsilon\mu\left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right),$$

e portanto

$$|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq A\exp\left(Be^{\gamma m}e^{\gamma|y|} - \varepsilon\mu\left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right)\right). \tag{18.5}$$

Como da condição $\gamma < \theta$ se deduz

$$\lim_{y\to+\infty} Be^{\gamma m}e^{\gamma|y|} - \varepsilon\mu\left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right) = -\infty,$$

de (18.5) conclui-se

$$\lim_{\operatorname{Im}(z)\to+\infty} |f(z)g_\varepsilon(z)| = 0. \tag{18.6}$$

Dado $\lambda > \sup_{z\in\partial D}|f(z)|$ temos por outro lado, atendendo a (18.4),

$$|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq \lambda \;\text{ se }\; z \in \partial D$$

e a relação (18.6) mostra que existe $L > 0$ tal que $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ se $\operatorname{Im}(z) \geq L$ e $z \in \overline{D}$.

Suponha-se agora $y_0 > -\infty$ e considere-se o rectângulo

$$R = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b \text{ e } y_0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq L\}.$$

Temos então $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ se $z \in \partial R$, e do princípio do módulo máximo 18.1 resulta $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ para cada $z \in R$. É assim $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ para todo o $z \in \overline{D}$, e tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$ deduz-se $|f(z)| \leq \lambda$ se $z \in D$. É pois

$$\sup_{z\in D}|f(z)| \leq \lambda \;\text{ se }\; \lambda > \sup_{z\in\partial D}|f(z)|,$$

o que exige $\sup_{z\in D}|f(z)| \leq \sup_{z\in\partial D}|f(z)|$.

Na hipótese $y_0 = -\infty$, da condição $\gamma < \theta$ deduz-se ainda

$$\lim_{y \to -\infty} Be^{\gamma m} e^{\gamma|y|} - \varepsilon\mu \left(e^{\theta|y|} + e^{-\theta|y|}\right) = -\infty$$

e atendendo a (18.5) e (18.6) conclui-se

$$\lim_{\mathrm{Im}(z) \to \pm\infty} |f(z) g_\varepsilon(z)| = 0.$$

Dado $\lambda > \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$ existe então $L > 0$ tal que $|f(z) g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ se $|\mathrm{Im}(z)| \geq L$ e $z \in \overline{D}$. Por outro lado, considerando o rectângulo

$$R = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b \text{ e } |\mathrm{Im}(z)| \leq L\}$$

verifica-se como anteriormente que é $|f(z) g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ para cada $z \in R$. Daqui resulta $|f(z) g_\varepsilon(z)| \leq \lambda$ para todo o $z \in \overline{D}$, o que conduz novamente ao resultado pretendido.

■

Nota 18.12 - No enunciado do teorema anterior a condição $\gamma < \pi/(b-a)$ não pode ser enfraquecida. Efectivamente, tomando

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2 \text{ e } \mathrm{Im}(z) > 0\},$$

esta condição equivale a $\gamma < 1$, e para a função f do exemplo 18.9 temos $|f(z)| \leq \exp\left|e^{-iz}\right| \leq \exp\left(e^{|z|}\right)$.

Para um sector do plano complexo limitado por duas semi-rectas pode agora estabelecer-se o seguinte resultado:

Corolário - *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, sejam*

$$D = \left\{re^{i\theta} : r > 0 \text{ e } \alpha < \theta < \beta\right\},$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. Suponha-se que existem constantes positivas A, B, γ tais que $\gamma < \pi/(\beta - \alpha)$ e

$$|f(z)| \leq A \exp\left(B |z|^\gamma\right) \quad \text{se} \quad z \in \overline{D}.$$

Tem-se então

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Demonstração. Sendo $E = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Re}(z) < \beta\}$, como a função definida por $\varphi(z) = e^{iz}$ transforma E em D e ∂E em $\partial D \setminus \{0\}$, tem-se

$$\sup_{z \in E} |f(\varphi(z))| = \sup_{z \in D} |f(z)|$$

e

$$\sup_{z\in\partial E}|f(\varphi(z))| = \sup_{z\in\partial D\setminus\{0\}}|f(z)|\,.$$

Basta agora aplicar o teorema anterior, notando que a condição imposta sobre f conduz a

$$|f(\varphi(z))| \le A\exp\left(B\left|e^{iz}\right|^{\gamma}\right) \le A\exp\left(Be^{\gamma|z|}\right) \quad \text{se} \quad z\in\overline{E}$$

e que

$$\sup_{z\in\partial D}|f(z)| = \sup_{z\in\partial D\setminus\{0\}}|f(z)|\,.$$

■

Exemplo 18.13 - *Seja f uma função inteira e suponha-se que existem constantes positivas A, B, γ tais que $\gamma < 1/2$ e*

$$|f(z)| \le A\exp\left(B|z|^{\gamma}\right) \quad \textit{se} \quad z\in\mathbb{C}.$$

Se existir $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que f é limitada na semi-recta $\left\{re^{i\alpha} : r\ge 0\right\}$ então a função f é constante.

Efectivamente, fazendo $\beta = \alpha + 2\pi$ no corolário anterior temos

$$D = \mathbb{C}\setminus\left\{re^{i\alpha} : r > 0\right\} \quad \text{e} \quad \partial D = \left\{re^{i\alpha} : r\ge 0\right\}.$$

Deduz-se então que f é limitada em $\overline{D} = \mathbb{C}$ e a conclusão resulta de aplicar o teorema de Liouville.

Exemplo 18.14 - *Seja f uma função inteira e suponha-se que existem constantes positivas A, B, γ tais que $\gamma < 1$ e*

$$|f(z)| \le A\exp\left(B|z|^{\gamma}\right) \quad \textit{se} \quad z\in\mathbb{C}.$$

Se f for limitada ao longo do eixo real ou do eixo imaginário então a função f é constante.

Efectivamente, suponha-se por exemplo que f é limitada ao longo do eixo real. Aplicando o corolário anterior com $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ e com $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$ resulta que f é limitada em $\mathbb{C}$ e a conclusão obtém-se aplicando o teorema de Liouville.

O teorema de Phrágmen–Lindelöf 18.11 permite também obter majorações mais precisas do módulo de uma função analítica limitada, definida numa faixa vertical:

Teorema 18.15 -*Dados $a, b\in\mathbb{R}$ tais que $a < b$, sejam*

$$D = \{z\in\mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < b\}$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. Se f for limitada, pondo

$$M(x) = \sup_{\mathrm{Re}(z)=x} |f(z)| \quad \textit{se} \quad a \leq x \leq b$$

tem-se

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \quad \textit{se} \quad a \leq x \leq b.$$

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar $M(a) > 0$ e $M(b) > 0$, e considere-se a função g definida por

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Então g e $1/g$ são funções inteiras, e se $\mathrm{Re}(z) = x \in [a, b]$ tem-se

$$|g(z)| = M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}} \geq \min\{M(a), M(b)\}$$

pelo que $1/g$ é limitada em $\overline{D}$. Tem-se ainda

$$\sup_{\mathrm{Re}(z)=x} \left(\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \right) = \frac{M(x)}{M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}} \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b,$$

e em particular

$$\sup_{\mathrm{Re}(z)=a} \left(\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \right) = \sup_{\mathrm{Re}(z)=b} \left(\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \right) = 1.$$

Aplicando o teorema de Phragmén-Lindelöf 18.11 à função f/g obtém-se então

$$\frac{M(x)}{M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}} \leq 1 \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b,$$

o que equivale à desigualdade do enunciado.

Supondo finalmente $M(a)M(b) = 0$ e considerando, por exemplo, o caso $M(a) = 0$, pode ver-se que que o enunciado permanece válido pois f é então identicamente nula. Efectivamente, se $M(b) = 0$ isto resulta directamente do teorema de Phragmén-Lindelöf 18.11. Supondo $M(b) > 0$, para cada $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < M(b)$ ponha-se

$$M_\varepsilon(x) = \sup_{\mathrm{Re}(z)=x} |f(z) + \varepsilon| \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b.$$

Temos então $M_\varepsilon(a) = \varepsilon > 0$ e $M_\varepsilon(b) \geq M(b) - \varepsilon > 0$, pelo que a parte já demonstrada do enunciado conduz a

$$M_\varepsilon(x) \leq \varepsilon^{\frac{b-x}{b-a}} M_\varepsilon(b)^{\frac{x-a}{b-a}} \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b.$$

Daqui vem

$$M(x) \leq M_\varepsilon(x) + \varepsilon \leq \varepsilon^{\frac{b-x}{b-a}} \left(M(b) + \varepsilon\right)^{\frac{x-a}{b-a}} + \varepsilon \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$ resulta $M(x) = 0$ se $x \in [a, b[$, o que contraria a hipótese pois isto implica $M(b) = 0$.

■

Nas condições do teorema anterior, se f não for identicamente nula as constantes $M(a)$ e $M(b)$ são ambas positivas, e tomando logaritmos na desigualdade do teorema obtém-se

$$\ln M(x) \leq \frac{b-x}{b-a} \ln M(a) + \frac{x-a}{b-a} \ln M(b) \quad \text{se} \quad a \leq x \leq b.$$

Como a recta que une os pontos $(a, \ln M(a))$ e $(b, \ln M(b))$ tem equação

$$y = \frac{b-x}{b-a} \ln M(a) + \frac{x-a}{b-a} \ln M(b),$$

aquela desigualdade traduz que o ponto $(x, \ln M(x))$ está situado abaixo desta recta e isto significa que a função $\ln M$ é convexa.

Exemplo 18.16 - *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, sejam*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função limitada, analítica em D e contínua em ∂D. Então é contínua a função M definida por

$$M(x) = \sup_{\operatorname{Re}(z)=x} |f(z)| \quad se \quad a \leq x \leq b.$$

Efectivamente, dado $c \in [a, b[$ e tomando $x \in]c, b]$ temos, pelo teorema anterior,

$$M(x) \leq M(c)^{\frac{b-x}{b-c}} M(b)^{\frac{x-c}{b-c}}$$

e daqui resulta $\overline{\lim}_{x \to c^+} M(x) \leq M(c)$. Por outro lado existe uma sucessão (x_n) de pontos de $]c, b]$ tal que $\lim x_n = c$ e $\lim M(x_n) = \underline{\lim}_{x \to c^+} M(x)$. Tomando $z = c + iy$ com $y \in \mathbb{R}$ e pondo $z_n = x_n + iy$, segue-se que

$$|f(z)| = \lim |f(z_n)| \leq \lim M(x_n) = \underline{\lim}_{x \to c^+} M(x).$$

É assim $|f(z)| \leq \underline{\lim}_{x \to c^+} M(x)$ se $\operatorname{Re}(z) = c$, o que exige $M(c) \leq \underline{\lim}_{x \to c^+} M(x)$. Temos então $\lim_{x \to c^+} M(x) = M(c)$ e análogamente se mostra que para cada $c \in]a, b]$ é $\lim_{x \to c^-} M(x) = M(c)$.

Se o domínio for uma coroa circular podemos agora estabelecer um resultado atribuído a Hadamard.

Corolário (Teorema dos três círculos) - *Dados $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tais que $r_1 < r_2$, sejam*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica em* D *e contínua em* ∂D*. Então, para a função* M *definida por*

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad se \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

tem-se

$$M(r)^{\ln(r_2/r_1)} \leq M(r_1)^{\ln(r_2/r)} M(r_2)^{\ln(r/r_1)} \quad se \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Demonstração. A função φ definida por $\varphi(z) = e^z$ transforma a faixa vertical

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \ln r_1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \ln r_2\}$$

em $\overline{D}$ e cada recta $\operatorname{Re}(z) = \ln r$ na circunferência $C(0, r)$. Pondo

$$L(x) = \sup_{\operatorname{Re}(z)=x} |f(e^z)| \quad \text{se} \ \ln r_1 \leq x \leq \ln r_2$$

é então $M(r) = L(\ln r)$ e o enunciado resulta directamente de aplicar o teorema anterior à função $f \circ \varphi$ em E.

■

O teorema de Phragmén-Lindelöf 18.11 pode também ser usado para estimar a rapidez de crescimento de certas funções analíticas definidas em semifaixas verticais e que não são limitadas na fronteira do seu domínio.

Teorema 18.17 (Lindelöf, 1908) - *Dados* $y_0 > 0$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$, *sejam*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b \ \ e \ \ \operatorname{Im}(z) > y_0\}$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica em* D *e contínua em* ∂D*. Suponha-se que existem constantes positivas* α, β, C *tais que*

$$|f(a + iy)| \leq C y^\alpha \quad e \quad |f(b + iy)| \leq C y^\beta \quad se \quad y \geq y_0.$$

Sendo λ *a função linear definida em* $\mathbb{C}$ *pelas condições* $\lambda(a) = \alpha$ *e* $\lambda(b) = \beta$, *existe então uma constante* M *tal que*

$$|f(x + iy)| \leq M y^{\lambda(x)} \quad se \quad x \in [a, b] \quad e \quad y \geq y_0.$$

Demonstração. Seja g a função definida por

$$g(z) = e^{\lambda(z) \ln(-iz)}.$$

Dado $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ temos $\ln(-iz) = \ln(y - ix)$ pelo que g é analítica no semiplano $\operatorname{Im}(z) > 0$. Temos ainda

$$\ln(y - ix) = \ln y + \ln\left|1 - i\frac{x}{y}\right| + i \arctan\left(-\frac{x}{y}\right),$$

e como $\lambda(z)$ tem a forma $cz + d$ com $c, d \in \mathbb{R}$, é então

$$\operatorname{Re}(\lambda(z)\ln(-iz)) = \lambda(x)\ln y + h(z)$$

em que

$$h(z) = \lambda(x)\ln\left|1 - i\frac{x}{y}\right| - cy\arctan\left(-\frac{x}{y}\right).$$

Dado que

$$\left|\arctan\left(-\frac{x}{y}\right)\right| = \arctan\frac{|x|}{y} \leq \frac{|x|}{y}$$

segue-se que h é limitada em $\overline{D}$, e daqui resulta que existe uma constante A para a qual

$$e^{|h(z)|} \leq A \quad \text{se} \quad z \in \overline{D}.$$

Como

$$|g(z)| = e^{h(z)+\lambda(x)\ln y} = e^{h(z)}y^{\lambda(x)} \quad \text{se} \quad z = x + iy \in \overline{D},$$

das hipóteses feitas sobre f conclui-se agora

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq Ce^{-h(z)} \leq CA \quad \text{se} \quad \operatorname{Re}(z) \in \{a, b\} \quad \text{e} \quad y \geq y_0,$$

e dado que f/g é limitada no conjunto compacto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [a, b] \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = y_0\}$$

segue-se que f/g é limitada em ∂D. O teorema de Phragmén-Lindelöf 18.11 mostra então que existe uma constante B que majora $|f/g|$ em $\overline{D}$, e temos assim

$$|f(z)| \leq Be^{h(z)}y^{\lambda(x)} \leq ABy^{\lambda(x)} \text{ se } z = x + iy \text{ com } x \in [a, b] \text{ e } y \geq y_0,$$

o que estabelece o enunciado.

■

Corolário - *Dados $y_0 > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, sejam*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b \quad e \quad \operatorname{Im}(z) > y_0\}$$

e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e contínua em ∂D. Suponha-se ainda que existem constantes positivas α, β, C tais que

$$|f(a + iy)| \leq Cy^{\alpha} \quad e \quad |f(b + iy)| \leq Cy^{\beta} \quad se \quad y \geq y_0.$$

Então a função μ definida em $[a, b]$ por

$$\mu(x) = \inf\{\gamma > 0 : f(x + iy) = O(y^{\gamma}) \quad (y \to +\infty)\},$$

verifica a condição

$$\mu(x) \leq \mu(a)\frac{b-x}{b-a} + \mu(b)\frac{x-a}{b-a} \quad \textit{se} \quad x \in [a,b].$$

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante C_ε tal que

$$|f\,(a+iy)| \leq C_\varepsilon y^{\mu(a)+\varepsilon} \quad \text{e} \quad |f\,(b+iy)| \leq C_\varepsilon y^{\mu(b)+\varepsilon} \quad \text{se} \quad y \geq y_0.$$

Sendo λ_ε a função linear tal que $\lambda_\varepsilon\,(a) = \mu(a)+\varepsilon$ e $\lambda_\varepsilon\,(b) = \mu(b)+\varepsilon$, do teorema anterior resulta

$$\mu(x) \leq \lambda_\varepsilon\,(x) \quad \text{se} \quad x \in [a,b].$$

Como é

$$\lambda_\varepsilon\,(x) = \lambda_\varepsilon\,(a)\,\frac{b-x}{b-a} + \lambda_\varepsilon\,(b)\,\frac{x-a}{b-a},$$

a desigualdade do enunciado obtém-se agora tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$.
■

O corolário anterior mostra em particular que μ é uma função convexa.

Exemplo 18.18 - *Nas condições do corolário anterior a função μ é contínua em $]a,b[$.*

Efectivamente, dado $c \in\,]a,b[$ e tomando $x \in\,]c,b]$ temos

$$\mu(x) \leq \mu(c)\frac{b-x}{b-c} + \mu(b)\frac{x-c}{b-c}$$

o que implica $\overline{\lim}_{x\to c^+}\mu(x) \leq \mu(c)$. Temos também

$$\mu(c) \leq \mu(a)\frac{x-c}{x-a} + \mu(x)\frac{c-a}{x-a}$$

pelo que $\underline{\lim}_{x\to c^+}\mu(x) \geq \mu(c)$. É pois $\lim_{x\to c^+}\mu(x) = \mu(c)$ e do mesmo modo se prova que $\lim_{x\to c^-}\mu(x) = \mu(c)$.

Nota 18.19 - Sendo M e μ as funções introduzidas respectivamente no teorema 18.15 e no corolário do teorema 18.17, a convexidade de $\ln M$ e de μ leva a que aqueles resultados sejam algumas vezes referidos como o *primeiro e o segundo teorema da convexidade* para funções analíticas.

19 - O lema de Schwarz e o teorema da aplicação de Riemann

O princípio do módulo máximo conduz directamente a um resultado com numerosas aplicações conhecido por *Lema de Schwarz*.

Teorema 19.1 (Lema de Schwarz) - *Dado* $R \in \mathbb{R}^+$ *sejam*

$$f : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma função analítica tal que $f(0) = 0$, *e* M *um majorante de* $|f|$. *Tem-se então*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z| \quad \textit{se} \quad 0 < |z| < R \tag{19.1}$$

e

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}. \tag{19.2}$$

Além disso, se em (19.1) *for válida a igualdade para algum* $z \in B(0,R) \setminus \{0\}$, *ou se for válida a igualdade em* (19.2), *existe* $\gamma \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\gamma| = 1$ *e*

$$f(z) = \gamma \frac{M}{R} z \quad \textit{se} \quad z \in B(0,R).$$

Demonstração. Seja g a função definida em $B(0,R)$ por $g(0) = f'(0)$ e

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{se} \quad 0 < |z| < R.$$

Então g é analítica em $B(0,R)\setminus\{0\}$ e contínua em 0, pelo que também é analítica nesse ponto. Dados $z \in B(0,R)$ e $r \in \left]|z|, R\right[$, pelo princípio do módulo máximo temos

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| \leq \frac{M}{r}$$

e tomando o limite quando $r \to R$ resulta

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R},$$

o que estabelece as duas desigualdades do enunciado.

Finalmente, se se verificar alguma das hipóteses da segunda parte do enunciado existe $z \in B(0,R)$ tal que $|g(z)| = M/R$ e o princípio do módulo máximo exige que g seja constante. Existe então $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $|\gamma| = 1$ e $g(z) = \gamma M/R$ para todo o $z \in B(0,R)$, o que equivale a

$$f(z) = \frac{\gamma M}{R} z \quad \text{se} \quad z \in B(0,R). \qquad \blacksquare$$

Uma função analítica em $B(0,R)$ cuja parte real é majorada pode não ser limitada, como mostra a função f definida em $B(0,1)$ por $i\ln(1-z)$. Neste caso temos efectivamente $\mathrm{Re}(f(z)) = -\arg(1-z)$ e $\mathrm{Im}(f(z)) = \ln|1-z|$, pelo que $|\mathrm{Re}(f(z))| < \pi/2$ e $\lim_{z\to 1}|\mathrm{Im}(f(z))| = +\infty$.

Usando o lema de Schwarz pode no entanto estabelecer-se uma desigualdade que permite majorar o módulo de uma função analítica em $B(0,R)$ a partir de um majorante da sua parte real:

Teorema 19.2 (Borel-Carathéodory) - *Dado $R \in \mathbb{R}^+$ seja*

$$f : \overline{B}(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma função analítica em $B(0,R)$ e contínua em $C(0,R)$. Pondo

$$A(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re}(f) \quad e \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad se \quad r \in [0,R],$$

tem-se

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r}\,|f(0)| \quad se \quad 0 \leq r < R.$$

Demonstração. Consideremos em primeiro lugar o caso $f(0) = 0$. O enunciado é então trivial se f for constante, e se isto não suceder o corolário 4 do princípio do módulo máximo mostra que é $A(R) > \mathrm{Re}(f(z))$ para todo o $z \in B(0,R)$. Temos assim $A(R) > 0 = \mathrm{Re}(f(0))$, e partindo de $f(z) = u + iv$ com $u, v \in \mathbb{R}$ resulta

$$|2A(R) - f(z)|^2 = (2A(R) - u)^2 + v^2 = 4A(R)\,(A(R) - u) + u^2 + v^2 > u^2 + v^2.$$

É pois $|2A(R) - f(z)| > |f(z)|$ se $z \in B(0,R)$ pelo que, pondo

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$$

fica definida uma função analítica em $B(0,R)$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $|\varphi(z)| < 1$ para todo o $z \in B(0,R)$.

Do lema de Schwarz resulta agora

$$|\varphi(z)| \leq \frac{|z|}{R} \quad \text{se} \quad |z| < R,$$

ou seja,

$$R\,|f(z)| \leq |z|\,|2A(R) - f(z)| \leq |z|\,(2A(R) + |f(z)|) \quad \text{se} \quad |z| < R$$

e portanto

$$|f(z)| \leq \frac{2\,|z|}{R - |z|}\, A(R) \quad \text{se} \quad |z| < R.$$

Dado $r \in [0, R[$ obtém-se então

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R)$$

e o enunciado fica estabelecido neste caso.

Passando ao caso geral temos agora

$$\max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \left(A(R) - \operatorname{Re}(f(0))\right)$$

e o enunciado resulta das desigualdades

$$\max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| \geq M(r) - |f(0)| \quad \text{e} \quad A(R) - \operatorname{Re} f(0) \leq A(R) + |f(0)| \, .$$

■

O teorema anterior permite ainda estabelecer um resultado que representa um reforço substancial do exemplo 14.17.

Corolário (Lema de Hadamard) - *Sejam f uma função inteira e $\alpha \geq 0$. Se existirem uma constante $C > 0$ e uma sucessão de números positivos (r_n) tais que* $\lim r_n = +\infty$ *e*

$$\operatorname{Re}(f(z)) \leq C |z|^{\alpha} \quad \textit{se} \quad |z| = r_n,$$

então f é um polinómio cujo grau não excede α.

Demonstração. Aplicando o teorema anterior com $R = 2r$ obtém-se

$$M(r) \leq 2A(2r) + 3 |f(0)| \, .$$

Temos assim

$$M(r_n/2) \leq 2C r_n^{\alpha} + 3 |f(0)|$$

e existe uma constante $L > 0$ tal que

$$M(r_n/2) \leq L r_n^{\alpha} \, .$$

Por outro lado, sendo $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ a série de Maclaurin de f, das desigualdades de Cauchy resulta

$$M(r) \geq |c_k| \, r^k \ \text{ se } \ k \geq 0.$$

Para cada $k \geq 0$ temos então

$$|c_k| \leq 2^k L r_n^{\alpha - k}$$

e fazendo $n \to +\infty$ conclui-se $c_k = 0$ se $k > \alpha$.

■

Como aplicação do lema de Schwarz podemos também caracterizar todas as funções analíticas que aplicam injectivamente o conjunto $B(0,1)$ sobre si próprio. Começaremos por um teorema que descreve as propriedades de uma classe particularmente importante de funções daquele tipo.

Teorema 19.3 - *Para cada $a \in B(0,1)$ seja φ_a a função definida por*

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Então φ_a é analítica em $\overline{B}(0,1)$, aplica injectivamente cada um dos conjuntos $B(0,1)$ e $C(0,1)$ sobre si próprio e tem-se $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

Demonstração. A função φ_a tem domínio $D_a = \mathbb{C}$ ou $D_a = \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ consoante for $a = 0$ ou $a \neq 0$. Como φ_a é analítica em D_a e $|a| < 1$, segue-se que existe $r > 1$ tal que φ_a é analítica em $B(0,r)$.

Por outro lado, dado $z \in C(0,1)$ temos $1 - \overline{a}z = z\overline{z} - \overline{a}z$ pelo que

$$|\varphi_a(z)| = \left| \frac{a - z}{z\overline{z} - \overline{a}z} \right| = \left| \frac{a - z}{\overline{z} - \overline{a}} \right| = \left| \frac{z - a}{\overline{\overline{z - a}}} \right| = 1$$

e φ_a aplica $C(0,1)$ em $C(0,1)$. Notando que $|\varphi_a(0)| = |a| < 1$, do princípio do módulo máximo resulta então $|\varphi_a(z)| < 1$ se $|z| < 1$, e isto mostra que φ_a aplica $B(0,1)$ em $B(0,1)$.

Finalmente, para cada $z \in D_a$ verifica-se directamente que $\varphi_a\left(\varphi_a(z)\right) = z$ pelo que φ_a é injectiva e $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$. Dado $z \in \overline{B}\,(0,1)$ e pondo

$$w = \varphi_a\,(z) \in \overline{B}\,(0,1)$$

segue-se que $\varphi_a\,(w) = z$ e isto mostra que φ_a aplica $\overline{B}\,(0,1)$ sobre $\overline{B}\,(0,1)$. Daqui resulta então que φ_a aplica $B(0,1)$ sobre $B(0,1)$ e $C(0,1)$ sobre $C(0,1)$.

■

Teorema 19.4 - *Seja f uma aplicação analítica e injectiva de $B(0,1)$ sobre $B(0,1)$. Pondo $a = f^{-1}(0)$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Demonstração. Seja φ_a a função definida no teorema anterior e ponha-se $g = f \circ \varphi_a$. Então g aplica injectivamente $B(0,1)$ sobre $B(0,1)$ e tem-se

$$g(0) = f\left(\varphi_a(0)\right) = 0.$$

Aplicando o lema de Schwarz 19.1 sucessivamente a g e a g^{-1} resulta

$$|g(z)| \leq |z| = \left|g^{-1}\left(g(z)\right)\right| \leq |g(z)| \quad \text{se} \quad z \in B(0,1)$$

e existe uma constante γ de módulo unitário tal que

$$g(z) = \gamma z \quad \text{se} \quad |z| < 1.$$

Pondo $\theta = \arg \gamma$ e notando que $f = g \circ \varphi_a^{-1} = g \circ \varphi_a$, conclui-se

$$f(z) = \gamma \varphi_a(z) = e^{i\theta} \varphi_a(z)$$

para todo o $z \in B(0,1)$.

■

Corolário - *Dados* $r, R > 0$ *seja* f *uma aplicação analítica e injectiva de* $B(0,r)$ *sobre* $B(0,R)$. *Pondo* $a = f^{-1}(0)$, *existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(z) = e^{i\theta} rR \frac{a - z}{r^2 - \overline{a}z}.$$

Demonstração. A função g definida por

$$g(w) = \frac{1}{R} f(rw) \quad \text{se} \quad |w| < 1$$

é uma aplicação analítica e injectiva de $B(0,1)$ sobre $B(0,1)$, tal que $g(a/r) = 0$. Então, atendendo ao teorema anterior existe $\theta \in \mathbb{R}$ para o qual

$$g(w) = e^{i\theta} \frac{a/r - w}{1 - \overline{a}w/r} \quad \text{se} \quad |w| < 1.$$

Temos assim

$$f(rw) = e^{i\theta} R \frac{a - rw}{r - \overline{a}w} \quad \text{se} \quad |w| < 1$$

e pondo $w = z/r$ obtém-se o enunciado.

■

As funções φ_a definidas no teorema 19.3 podem ser utilizadas na resolução de uma vasta gama de problemas em Análise Complexa, como se ilustra no seguinte exemplo:

Exemplo 19.5 - *Uma função inteira cujo módulo seja constante em* $C(0,1)$ *é um polinómio da forma* az^n.

Efectivamente, seja f uma função não identicamente nula nestas condições. Se f não se anula em $B(0,1)$ o exemplo 18.3 mostra que f é constante em $B(0,1)$ e do princípio do prolongamento analítico 9.10 deduz-se que f é da forma indicada com $n = 0$. Suponha-se agora que f se anula em $B(0,1)$ e seja $(z_1, ..., z_n)$ uma sucessão formada pelos zeros de f neste conjunto, em que cada zero figura um número de vezes igual ao grau de multiplicidade respectivo.

Pondo $g = \varphi_{z_1} ... \varphi_{z_n}$, como os zeros de f e g em $B(0,1)$ são os mesmos e têm o mesmo grau de multiplicidade, os z_k são singularidades removíveis de f/g.

Notando ainda que os polos de g nos pontos $1/\overline{z_k}$ tais que $z_k \neq 0$ são também singularidades removíveis de f/g, podemos tratar f/g como uma função inteira com zeros nesses pontos. Dado que esta função tem módulo constante em $C(0,1)$ e não se anula em $B(0,1)$ resulta, como anteriormente, que f/g é constante em $\mathbb{C}$. Então g não tem polos em $\mathbb{C}$, pelo que os z_k são necessariamente nulos e conclui-se que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = c\varphi_0^n(z) = c\,(-1)^n\, z^n$$

para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Associando o lema de Schwarz 19.1 às funções φ_a podem também obter-se resultados mais detalhados sobre as funções analíticas que aplicam o conjunto $B(0,1)$ em si próprio.

Teorema 19.6 (Lindelöf) - *Se f é uma função analítica que aplica o conjunto $B(0,1)$ em si próprio, para cada $z \in B(0,1)$ tem-se*

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)|\,|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)|\,|z|}.$$

Demonstração. Sendo $a = f(0)$ e pondo $g = \varphi_a \circ f$ temos $g(0) = \varphi_a(a) = 0$. Aplicando o lema de Schwarz 19.1 à função g resulta então $|g(z)| \leq |z|$ para cada $z \in B(0,1)$, ou seja

$$\left|\frac{a - f(z)}{1 - \overline{a}f(z)}\right| \leq |z| \quad \text{se} \quad |z| < 1. \tag{19.3}$$

Pondo agora $b = f(z)$ e partindo da identidade

$$|a-b|^2 + \left(1 - |a|^2\right)\left(1 - |b|^2\right) = |1 - \overline{a}b|^2$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 &= 1 - \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)}{|1-\overline{a}b|^2} \geq 1 - \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)}{(1-|a|\,|b|)^2} \\
&= \left|\frac{|a| - |b|}{1 - |a|\,|b|}\right|^2.
\end{aligned}$$

Temos assim

$$\left|\frac{a - f(z)}{1 - \overline{a}f(z)}\right| \geq \frac{||a| - |f(z)||}{1 - |a|\,|f(z)|}$$

e de (19.3) deduz-se

$$\frac{||a| - |f(z)||}{1 - |a|\,|f(z)|} \leq |z| \quad \text{se} \quad |z| < 1.$$

Para cada $z \in B(0,1)$ é então

$$\frac{|f(z)| - |a|}{1 - |a|\,|f(z)|} \le |z| \quad \text{e} \quad \frac{|a| - |f(z)|}{1 - |a|\,|f(z)|} \le |z|\,,$$

e as desigualdades do enunciado resultam agora de ser $a = f(0)$.

■

Teorema 19.7 - *Se f é uma função analítica que aplica o conjunto $B(0,1)$ em si próprio, para cada $z \in B(0,1)$ tem-se*

$$|f'(z)| \le \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Demonstração. Dado $a \in B(0,1)$ seja $b = f(a)$ e $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$. Então a função g é uma aplicação de $B(0,1)$ em $B(0,1)$ que verifica

$$g(0) = \varphi_b\,(f(a)) = \varphi_b(b) = 0$$

e do lema de Schwarz 19.1 resulta $|g'(0)| \le 1$. Temos no entanto

$$g'(0) = \varphi_b'\,(f\,(\varphi_a(0)))\,f'\,(\varphi_a(0))\,\varphi_a'(0) = \varphi_b'(b)f'(a)\varphi_a'(0)$$

e por derivação directa verifica-se que

$$\varphi_a'(0) = |a|^2 - 1 \quad \text{e} \quad \varphi_b'(b) = \frac{1}{|b|^2 - 1}.$$

Obtém-se assim

$$|f'(a)|\,\frac{1 - |a|^2}{1 - |b|^2} \le 1$$

o que equivale ao enunciado.

■

Teorema 19.8 - *Seja f uma função analítica que aplica o conjunto $B(0,1)$ em si próprio. Se a equação $f(z) = z$ tiver mais de uma solução então f é a função identidade.*

Demonstração. Dados $a, b \in B(0,1)$ tais que $a \ne b$, $f(a) = a$ e $f(b) = b$, seja $g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a$. Temos então $g(0) = \varphi_a\,(f\,(a)) = \varphi_a(a) = 0$ e, pondo $c = \varphi_a(b) \ne 0$, é $\varphi_a(c) = \varphi_a^{-1}(c) = b$ pelo que $g(c) = \varphi_a\,(f(b)) = \varphi_a(b) = c$.

Aplicando a g o lema de Schwarz 19.1 resulta que existe uma constante γ tal que $g(z) = \gamma z$ para todo o $z \in B(0,1)$, mas a condição $g(c) = c$ exige $\gamma = 1$. É assim $f \circ \varphi_a = \varphi_a^{-1} = \varphi_a$ pelo que $f = \varphi_a \circ \varphi_a^{-1}$.

■

As funções definidas no teorema 19.3 permitem também estabelecer uma importante generalização da desigualdade (19.1) para funções analíticas em $B(0,1)$.

Teorema 19.9 - *Sejam $f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, limitada e não identicamente nula, e M um majorante de $|f|$. Seja ainda $(z_1, ..., z_n)$ uma sucessão finita de zeros de f em que cada zero figura um número de vezes não superior à sua ordem. Tem-se então*

$$|f(z)| \leq M \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right| \quad \textit{se} \ \ z \in B(0,1).$$

Além disso, se na relação anterior for válida a igualdade para algum $z \in B(0,1) \setminus \{z_1, ..., z_n\}$, existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $|\gamma| = 1$ e

$$f(z) = \gamma M \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \quad \textit{para todo o} \ \ z \in B(0,1).$$

Demonstração. Seja $g = \varphi_{z_1} ... \varphi_{z_n}$ e tome-se $z \in B(0,1)$. Se $g(z) = 0$ é também $f(z) = 0$ e a desigualdade do enunciado é válida para z.

Supondo $g(z) \neq 0$, seja $r_0 = \max \{|z|, |z_1|, ..., |z_n|\}$ e ponha-se

$$\mu(r) = \sup_{|\zeta|=r} \left| \frac{1}{g(\zeta)} \right| \quad \text{se} \ \ r_0 < r \leq 1.$$

Como no exemplo 19.5 podemos considerar que a expressão f/g define uma função analítica em $B(0,1)$ e do princípio do módulo máximo resulta

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \sup_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \right| \leq M\mu(r) \quad \text{se} \ \ r_0 < r < 1.$$

Seja agora (c_n) uma sucessão de complexos tais que $r_0 < |c_n| < 1$,

$$\mu(|c_n|) = \left| \frac{1}{g(c_n)} \right|$$

e $\lim |c_n| = 1$. Passando se necessário a uma subsucessão podemos supôr que (c_n) converge para um ponto $c \in C(0,1)$. Como para todo o n é

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq M\mu(|c_n|) = \frac{M}{|g(c_n)|},$$

temos

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \lim \frac{M}{|g(c_n)|} = \frac{M}{|g(c)|} = M$$

e obtém-se a desigualdade do enunciado.

Finalmente, supondo que é $|f(z)| = M|g(z)|$ para algum $z \notin \{z_1, ..., z_n\}$, como $g(z) \neq 0$ tem-se

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = M$$

e do princípio do módulo máximo resulta que f/g se reduz-se a uma constante αM, com $|\alpha| = 1$. Para todo o $z \in B(0,1) \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ temos pois $f(z) = \alpha M g(z)$ e esta igualdade é trivial quando $z \in \{z_1, ..., z_n\}$. O enunciado é então válido com $\gamma = (-1)^n \alpha$.

■

O teorema anterior permite obter uma estimativa eficaz sobre o número de zeros de uma função analítica, conhecida por *desigualdade de Jensen.*

Corolário 1 (Desigualdade de Jensen) - *Dado* $R > 0$, *seja* $f : B(0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica, limitada, e tal que* $f(0) \neq 0$. *Para cada* $r \in \,]0, R[$ *represente-se por* $N(r)$ *o número de zeros de* f *em* $\overline{B}(0, r)$ *contados de acordo com as ordens respectivas, e seja* $M = \sup |f|$. *Tem-se então*

$$N\left(\frac{R}{1+\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \ln \frac{M}{|f(0)|} \quad \textit{se} \quad \varepsilon > 0.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ sejam

$$r = \frac{R}{1+\varepsilon},$$

e $(z_1, ..., z_m)$ uma sucessão formada com os zeros de f em $\overline{B}(0, r)$, onde cada zero figura um número de vezes igual à sua ordem. Seja ainda g a função definida em $B(0, 1)$ por $g(z) = f(Rz)$.

Como cada z_k/R é um zero de g, mudando f em g no teorema anterior e fazendo $z = 0$ temos

$$|f(0)| = |g(0)| \leq \sup |g| \prod_{k=1}^{m} \left|\frac{z_k}{R}\right| = M \frac{|z_1...z_m|}{R^m}.$$

Da desigualdade

$$|z_1...z_m| \leq \frac{R^m}{(1+\varepsilon)^m}$$

resulta então

$$(1+\varepsilon)^m \leq \frac{M}{|f(0)|},$$

o que equivale à fórmula do enunciado.

■

Nota 19.10 - Existe uma versão do corolário anterior na forma de uma identidade, que pode ser estabelecida sem recorrer ao teorema 19.9.

Teorema (Jensen) - *Dado* $R > 0$ *seja* f *uma função analítica em* $\overline{B}(0, R)$ *que não se anula na circunferência* $C(0, R)$, *e tal que* $f(0) \neq 0$. *Seja ainda*

$(z_1, ..., z_n)$ *uma sucessão formada com os zeros de* f *no círculo* $B(0, R)$, *em que cada zero figura um número de vezes igual à sua ordem. Tem-se então*

$$\ln \frac{|f(0)| R^n}{|z_1 ... z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(Re^{i\theta}\right) \right| d\theta.$$

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar $R = 1$ e seja F a função definida por

$$F(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - \overline{z_k} z}{z - z_k}.$$

Sendo $D \subseteq \mathbb{C}$ o domínio de f, a inclusão $\overline{B}(0, 1) \subseteq D$ mostra que $d(0, \mathbb{C} \setminus D) > 1$, e para todo o r tal que $1 < r < d(0, \mathbb{C} \setminus D)$ a função F é analítica em $\overline{B}(0, r)$. Como F não se anula em $\overline{B}(0, 1)$ e o conjunto dos seus zeros em $\overline{B}(0, r)$ é finito, pode escolher-se $r > 1$ tal que F não se anule em $B(0, r)$. Existe então um ramo do logaritmo de F em $B(0, r)$ e sendo γ o caminho circular definido por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$, pela fórmula integral de Cauchy temos

$$\ln F(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\ln F(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln F\left(e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Tomando a parte real desta identidade resulta

$$\ln |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| F\left(e^{i\theta}\right) \right| d\theta,$$

e como

$$\left| F\left(e^{i\theta}\right) \right| = \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\left| \varphi_{z_k}\left(e^{i\theta}\right) \right|} = \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|$$

obtém-se

$$\ln \left| \frac{f(0)}{z_1 ... z_n} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| d\theta.$$

Passando finalmente ao caso geral, seja g a função analítica em $\overline{B}(0, 1)$ definida por $g(z) = f(Rz)$. Como os zeros de g são os z_k / R, usando a identidade acabada de estabelecer temos

$$\ln \left| \frac{g(0) R^n}{z_1 ... z_n} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| g\left(e^{i\theta}\right) \right| d\theta,$$

o que equivale à fórmula do enunciado.

■

Corolário 2 (Blaschke, 1915) - *Seja* $f : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica, limitada, com uma infinidade de zeros e não identicamente nula. Seja* *ainda* (z_n) *uma sucessão formada com os zeros de* f*, em que cada zero figura um número de vezes não superior à sua ordem. Tem-se então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|z_n|)<+\infty.$$

Demonstração. Supondo $f(0)\neq 0$ e fazendo $z=0$ no teorema 19.9 vemos que a sucessão $|z_1...z_n|$ é minorada por

$$\frac{|f(0)|}{\sup|f|}>0.$$

Como esta sucessão é decrescente, segue-se que ela converge para um certo limite $\lambda>0$ e daqui resulta que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln|z_n|$ converge para $\ln\lambda$. Temos então $\lim|z_n|=1$ pelo que $1-|z_n|\sim-\ln|z_n|$ e isto prova que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|z_n|)$ também é convergente.

Supondo agora $f(0)=0$, seja m a ordem do ponto 0 como zero de f e consideremos a função analítica $g:B(0,1)\longrightarrow\mathbb{C}$ definida por

$$g(z)=\frac{f(z)}{z^m}\;\text{ se }\; z\in B(0,1)\setminus\{0\}\,.$$

Como $g(0)\neq 0$ e g também é limitada, tomando um índice p tal que $z_k\neq 0$ para $k\geq p$ pode aplicar-se a parte do teorema já estabelecida à função g e à sucessão $(z_n)_{n\geq p}$. Resulta assim que a série $\sum_{n=p}^{+\infty}(1-|z_n|)$ converge, pelo que o enunciado permanece válido neste caso.

■

Corolário 3 - *Sejam* (z_n) *uma sucessão de pontos distintos de* $B(0,1)$*,* E *o conjunto dos* z_n *e* $f,g:B(0,1)\longrightarrow\mathbb{C}$ *duas funções analíticas e limitadas que coincidem em* E*. Então, se a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|z_n|)$$

for divergente as funções f *e* g *são idê*nticas.

Demonstração. Nas condições do enunciado $f-g$ é uma função analítica e limitada, com um zero em cada ponto z_n. Então o corolário anterior mostra que $f-g$ é identicamente nula.

■

Vamos agora provar que a condição de Blaschke dada pelo corolário 2 do teorema anterior é também suficiente para que uma sucessão (z_n) de pontos de $B\,(0,1)$ seja a sucessão dos zeros de uma função analítica que aplica este conjunto em si próprio.

Teorema 19.11 (Blaschke, 1915) - *Seja* (z_n) *uma sucessão de pontos de* $B(0,1)$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|z_n|) < +\infty.$$

Existe então uma função analítica $f : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ *cujos zeros são os* z_n *e tal que a ordem de cada zero é igual ao número das respectivas ocorrências na sucessão* (z_n).

Demonstração. Para cada índice n seja f_n a função definida em $B(0,1)$ por

$$f_n(z) = \frac{|z_n|}{z_n}\varphi_{z_n}(z) = \frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z} \quad \text{se} \quad z_n \neq 0$$

e

$$f_n(z) = -\varphi_0(z) = z \quad \text{se} \quad z_n = 0.$$

Dado $z_n \neq 0$, para cada $z \in B(0,1)$ temos

$$f_n(z) - 1 = \frac{(|z_n|-1)\,(z_n + |z_n|\,z)}{z_n\,(1-\overline{z_n}z)}$$

pelo que

$$|f_n(z) - 1| \leq (1-|z_n|)\frac{1+|z|}{1-|z_n z|}.$$

Se $z_n \neq 0$ é assim

$$|f_n(z) - 1| \leq (1-|z_n|)\frac{2}{1-|z|}$$

e esta desigualdade permanece válida quando $z_n = 0$.

Sejam agora K um subconjunto compacto de $B(0,1)$ e $r = \max\{|z| : z \in K\}$. Temos então

$$|f_n(z) - 1| \leq (1-|z_n|)\frac{2}{1-r} \quad \text{se} \quad z \in K$$

e o critério de Weierstrass mostra que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(z)-1|$ converge uniformemente em K. Atendendo ao teorema 17.5 a função f definida em $B(0,1)$ por

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$$

é analítica e os seus zeros têm as propriedades exigidas. Como cada f_n aplica $B(0,1)$ em $B(0,1)$, dado $z \in B(0,1)$ tal que $f(z) \neq 0$ temos ainda

$$|f(z)| = |f_1(z)|\prod_{n=2}^{+\infty}|f_n(z)| < \prod_{n=2}^{+\infty}|f_n(z)| \leq 1$$

e conclui-se que f também aplica $B(0,1)$ em $B(0,1)$.

■

Atendendo à importância do teorema de Weierstrass 13.9, vamos agora estudar condições que garantam que uma dada sucessão de funções analíticas seja uniformemente convergente nos subconjuntos compactos do respectivo domínio.

Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, uma sucessão (f_n) de funções $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se *uniformemente limitada* num conjunto $A \subseteq D$ se existir $M > 0$ tal que $|f_n(z)| \leq M$ para todo o índice n e para todo o $z \in A$. Supondo D aberto diz-se ainda que (f_n) é *localmente limitada* se for uniformemente limitada em cada subconjunto compacto de D.

Exemplo 19.12 - *Dado um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$, uma sucessão (f_n) de funções $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é localmente limitada sse para cada ponto de D existir uma vizinhança onde (f_n) é uniformemente limitada.*

Efectivamente, se (f_n) é localmente limitada, dado $a \in D$ e escolhendo $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subseteq D$ segue-se que (f_n) é uniformemente limitada em $\overline{B}(a, r)$, e portanto também em $B(a, r)$.

Reciprocamente suponha-se que para cada ponto de D existe uma vizinhança onde (f_n) é uniformemente limitada. Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$, do lema de Heine-Borel resulta que existe uma colecção finita $\{V_1, ..., V_p\}$ de vizinhanças de pontos de D tal que $K \subseteq V_1 \cup ... \cup V_p$ e (f_n) é uniformemente limitada em cada V_j. Então (f_n) é uniformemente limitada em $V_1 \cup ... \cup V_p$ e conclui-se que o mesmo sucede em K.

Exemplo 19.13 - *Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma sucessão (f_n) de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, se (f_n) for uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D então (f_n) é localmente limitada.*

Efectivamente o teorema de Weistrass mostra que a função limite f é analítica em D, logo limitada em cada conjunto compacto $K \subseteq D$.

Por outro lado, da definição de convergência uniforme resulta que existe uma ordem m tal que $|f_n(z) - f(z)| \leq 1$ se $n > m$ e $z \in K$. Sendo μ e μ_n majorantes respectivamente de $|f|$ e de $|f_n|$ em K, segue-se que

$$|f_n(z)| \leq \max\{1 + \mu, \mu_1, \cdots \mu_m\} \quad \text{se} \quad z \in K \text{ e } n \geq 1.$$

Ainda como aplicação do lema de Schwarz 19.1 vamos agora estabelecer um resultado preliminar sobre sucessões localmente limitadas de funções analíticas.

Lema 19.14 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e (f_n) uma sucessão localmente limitada de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Dados $a \in D$ e $\delta > 0$, existe então $\varepsilon > 0$ tal que para todas as funções f_n se tem*

$$|f_n(w) - f_n(z)| < \delta \quad se \quad w, z \in B(a, \varepsilon).$$

Demonstração. Dado $a \in D$ seja $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, 2r) \subseteq D$ e tome-se $z \in B(a, r)$. Pondo

$$D_z = \{u \in \mathbb{C} : |u + z - a| < 2r\},$$

se $u \in D_z$ então $u + z \in B(a, 2r) \subseteq D$ e para cada índice n pode definir-se uma função $g_n : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g_n(u) = f_n(u + z) - f_n(z).$$

Nas condições do enunciado existe $M > 0$ tal que $|f_n(\zeta)| \leq M$ para todo o índice n e para todo o $\zeta \in \overline{B}(a, 2r)$. É então $|g_n(u)| \leq 2M$ para cada $u \in D_z$, donde vem

$$|g_n(u)| \leq \frac{2M}{r} |u| \quad \text{se} \quad u \in D_z \quad \text{e} \quad |u| \geq r.$$

Notando ainda que $B(0, r) \subseteq D_z$ e $g_n(0) = 0$, podemos aplicar o lema de Schwarz a g_n em $B(0, r)$ e resulta

$$|g_n(u)| \leq \frac{2M}{r} |u| \quad \text{se} \quad |u| < r,$$

pelo que a relação

$$|g_n(u)| \leq \frac{2M}{r} |u| \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

é válida para todo o $u \in D_z$. Tomando agora $w \in B(a, r)$ e pondo $u = w - z$, como $u \in D_z$ fica estabelecida a desigualdade

$$|f_n(w) - f_n(z)| \leq \frac{2M}{r} |w - z| \quad \text{se} \quad z, w \in B(a, r) \quad \text{e} \quad n \geq 1.$$

Dado $\delta > 0$ seja então $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{r, r\delta/(4M)\}$. Se $z, w \in B(a, \varepsilon)$ é $|w - z| < 2\varepsilon < r\delta/(2M)$ e resulta

$$|f_n(w) - f_n(z)| < \delta \quad \text{se} \quad z, w \in B(a, \varepsilon) \quad \text{e} \quad n \geq 1.$$

■

Usaremos também outro resultado auxiliar que traduz uma propriedade de sucessões arbitrárias de funções complexas.

Lema 19.15 - *Dado um conjunto numerável $E \subseteq \mathbb{C}$ seja (f_n) uma sucessão de funções $f_n : E \longrightarrow \mathbb{C}$. Se para cada $c \in E$ a sucessão numérica $(f_n(c))$ for limitada, existe uma subsucessão de (f_n) que converge em todos os pontos de E.*

Demonstração. Como E é um conjunto numerável existe uma sucessão $(c_n)_{n \geq 1}$ com contradomínio E. Atendendo a que $(f_n(c_1))$ é uma sucessão limitada de números complexos, ela tem uma subsucessão convergente, pelo que existe uma subsucessão $\left(f_{\alpha_n^{(1)}}\right)$ de (f_n) que converge no ponto c_1.

Indutivamente, dado $k \geq 1$ e supondo escolhida uma subsucessão $\left(f_{\alpha_n^{(k)}}\right)$ que seja convergente no ponto c_k, pode escolher-se uma subsucessão $\left(f_{\alpha_n^{(k+1)}}\right)$

de $\left(f_{\alpha_n^{(k)}}\right)$, convergente no ponto c_{k+1} e tal que $\alpha_1^{(k+1)} > \alpha_1^{(k)}$. Pondo ainda

$$I_k = \left\{\alpha_n^{(k)} : n \geq 1\right\} \quad \text{se} \quad k \geq 1$$

temos assim $I_{k+1} \subseteq I_k$, pelo que $I_n \subseteq I_k$ se $n \geq k$.

Seja agora $\beta_n = \alpha_1^{(n)}$ para cada $n \geq 1$, e considere-se a sucessão $\left(f_{\beta_n}\right)$. Como (β_n) é uma sucessão estritamente crescente de índices segue-se que $\left(f_{\beta_n}\right)$ é uma subsucessão de (f_n). Por outro lado, fixado $k \geq 1$, para cada $n \geq k$ temos $\beta_n = \alpha_1^{(n)} \in I_n \subseteq I_k$, pelo que $\left(f_{\beta_n}\right)_{n \geq k}$ é uma subsucessão de $\left(f_{\alpha_n^{(k)}}\right)$. Então $\left(f_{\beta_n}\right)_{n \geq k}$converge no ponto c_k e conclui-se que $\left(f_{\beta_n}\right)$ converge em todos os pontos do conjunto E.

■

Com base nos dois lemas anteriores estamos agora em condições de estabelecer a propriedade fundamental das sucessões localmente limitadas de funções analíticas.

Teorema 19.16 (Montel, 1908) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e (f_n) uma sucessão localmente limitada de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Então (f_n) tem uma subsucessão que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Seja Q o conjunto dos pontos de D cujas partes real e imaginária são ambas racionais. Então Q é numerável e do lema anterior resulta que (f_n) tem uma subsucessão (g_n) convergente em cada ponto de Q. Notando que (g_n) ainda é locamente limitada, dados um conjunto compacto $K \subseteq D$ e $\delta > 0$, o lema 19.14 mostra que para cada $a \in K$ existe uma vizinhança $B(a, \varepsilon)$ tal que

$$|g_n(v) - g_n(u)| < \frac{\delta}{3} \quad \text{se} \quad u, v \in B(a, \varepsilon) \quad \text{e} \quad n \geq 1.$$

Como K é compacto existe uma colecção finita

$$\{B(a_1, \varepsilon_1), ..., B(a_p, \varepsilon_p)\}$$

destas vizinhanças que cobre K, e por Q ser denso em D cada $B(a_j, \varepsilon_j)$ contém um ponto $c_j \in Q$. Então, dado que a sucessão (g_n) converge em cada c_j, pelo teorema de Cauchy-Bolzano 1.7 existe uma ordem k tal que

$$|g_m(c_j) - g_n(c_j)| < \frac{\delta}{3} \quad \text{se} \quad m, n \geq k \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq p.$$

Tome-se agora $z \in K$ e seja $j \in \{1, ..., p\}$ tal que $z \in B(a_j, \varepsilon_j)$. Se $m, n \geq k$ temos então

$$|g_m(z) - g_n(z)| \leq |g_m(z) - g_m(c_j)| + |g_m(c_j) - g_n(c_j)| + |g_n(c_j) - g_n(z)| < \delta$$

e o teorema 7.6 mostra que a sucessão (g_n) converge uniformemente em K. ■

Nota 19.17 - Na demonstração do teorema de Montel a hipótese de as funções f_n serem analíticas só foi utilizada para estabelecer o lema 19.14 e isto sugere a possibilidade de generalizar a conclusão do teorema a funções de outro tipo.

Dados um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma família $\mathcal{F}$ de aplicações de D em $\mathbb{C}$, diz-se que $\mathcal{F}$ é *equicontínua* se para cada $\delta > 0$ existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(w) - f(z)| < \delta \quad \text{se} \quad f \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad |w - z| < \varepsilon.$$

Diz-se ainda que $\mathcal{F}$ é *localmente equicontínua* se cada ponto de D tiver uma vizinhança onde $\mathcal{F}$ é equicontínua.

Pode agora provar-se a seguinte generalização do teorema de Montel:

Teorema (Arzelà-Ascoli) - *Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $\mathcal{F}$ uma família localmente equicontínua de aplicações de D em $\mathbb{C}$. Se para cada $a \in D$ o conjunto $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ for limitado, então cada sucessão de funções de $\mathcal{F}$ tem uma subsucessão que converge em todos os subconjuntos compactos de D.*

Demonstração. Dados $a \in D$ e $\delta > 0$, da condição de $\mathcal{F}$ ser localmente equicontínua resulta que existe $\varepsilon > 0$ para o qual

$$|f(w) - f(z)| < \delta \quad \text{se} \quad f \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad z, w \in B(a, \varepsilon) \cap D,$$

o que corresponde à conclusão do lema 19.14.

Por outro lado, dados um conjunto numerável $E \subseteq D$ e uma sucessão (f_n) de membros de $\mathcal{F}$, a segunda condição verificada por $\mathcal{F}$ permite aplicar a (f_n) o lema 19.15 e obter uma subsucessão que converge em cada ponto de E. A demonstração anterior do teorema de Montel mantém-se agora válida e permite tirar a conclusão pretendida.

■

Os corolários seguintes mostram que as premissas do teorema de Weierstrass 13.9 permanecem válidas para sucessões localmente limitadas de funções analíticas que satisfaçam algumas restrições adicionais.

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e (f_n) uma sucessão localmente limitada de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se toda a subsucessão de (f_n) que seja uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D tiver por limite uma mesma função f, então (f_n) converge uniformemente para f em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Se o enunciado fosse falso existia um conjunto compacto $K \subseteq D$ tal que a sucessão

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)|$$

não tinha limite zero. Existiam assim $\delta_0 > 0$ e uma subsucessão (g_n) de (f_n) tais que

$$\sup_{z\in K} |g_n(z) - f(z)| \geq \delta_0 \tag{19.4}$$

para todo o índice n. Por outro lado, como (g_n) ainda é localmente limitada, do teorema de Montel resulta que (g_n) teria uma subsucessão (h_n) uniformemente convergente em todos os subconjuntos compactos de D. No entanto, dado que (h_n) é uma subsucessão (f_n), ela seria convergente para f em K, e (19.4) mostra que isso é impossivel.

■

Corolário 2 (Blaschke, 1915) - *Sejam (f_n) uma sucessão limitada de funções analíticas $f_n : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ e (z_n) uma sucessão de pontos distintos de $B(0,1)$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) = +\infty.$$

Então, se a sucessão (f_n) convergir em cada ponto z_k, ela é uniformemente convergente em todo o subconjunto compacto de $B(0,1)$.

Demonstração. Ponha-se $E = \{z_n : n \geq 1\}$ e sejam g e h os limites de duas subsucessões de (f_n) uniformemente convergentes nos subconjuntos compactos de $B(0,1)$. Como (f_n) é limitada também f e g são limitadas, e dado que estas funções coincidem em E, o corolário 3 do teorema 19.9 mostra que elas coincidem em $B(0,1)$. O enunciado resulta agora do corolário anterior.

■

Corolário 3 (Teorema de Vitali, 1903) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e (f_n) uma sucessão localmente limitada de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ que converge nos pontos de um conjunto com algum ponto de acumulação em D. Então (f_n) é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Seja $E \subseteq D$ o conjunto onde (f_n) converge. Então, dadas duas subsucessões de (f_n) uniformemente convergentes nos subconjuntos compactos de D, as respectivas funções limite são analíticas e coincidem em E. Pelo princípio do prolongamento analítico 9.10 segue-se que estas funções coincidem em D e o enunciado resulta agora do corolário 1.

■

Atendendo ao exemplo 19.13 vemos que o teorema de Vitali dá condições mínimas para que uma sucessão de funções analíticas seja uniformemente convergente nos subconjuntos compactos do domínio, o que faz dele um instrumento poderoso no estudo da convergência deste tipo de sucessões. Como aplicação deste teorema vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 19.18 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, e (f_n) uma sucessão localmente limitada de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Se existir $a \in D$ tal que para todo o $k \geq 0$ as sucessões $\left(f_n^{(k)}(a)\right)$ são convergentes, então (f_n) é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Dado $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subseteq D$, seja M um majorante dos $|f_n(z)|$ em $\overline{B}(a, r)$. Das desigualdades de Cauchy resulta então que para todo o n são válidas as desigualdades

$$\left|\frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k\right| \leq M\frac{|z-a|^k}{r^k} \text{ se } k \geq 0 \text{ e } z \in \mathbb{C}.$$

Pondo agora

$$c_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} \text{ se } k \geq 0$$

e notando que a série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z-a|^k}{r^k}$$

converge quando $z \in B(a, r)$, o teorema 7.11 mostra que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k \text{ se } z \in B(a, r).$$

Então a sucessão (f_n) converge em $B(a, r)$ e o enunciado resulta agora do teorema de Vitali.

■

Ainda como aplicação do teorema de Vitali vamos agora estabelecer um resultado que traduz uma propriedade profunda dos pontos regulares das funções definidas por séries de potências.

Teorema 19.19 (Fatou, 1906) - *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ uma série de potências com raio de convergência $R = 1$ e suponha-se que $\lim c_n = 0$. Então, se $z = 1$ for ponto regular da função definida por $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ em $B(0, 1)$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ é convergente. Além disso, existe $\alpha \in]0, \pi[$ tal que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge uniformemente no sector*

$$\left\{z \in \overline{B}(0, 1) : |\arg(z)| \leq \alpha\right\}.$$

Demonstração. Como 1 é um ponto regular da função definida pela série, existem $\delta > 0$ e uma função analítica $f : B(0, 1) \cup B(1, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \text{ se } z \in B(0, 1). \tag{19.5}$$

Sejam agora $\rho \in]1, 1+\delta[$ e $\beta \in]0, \pi[$ para os quais

$$\left|e^{i\beta} - 1\right| < \frac{1+\delta-\rho}{\rho},$$

e considere-se o sector circular

$$S = \left\{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq \rho \ \text{ e } \ |\theta| \leq \beta\right\}.$$

Dado $z \in S$ tal que $|z| \geq 1$ temos

$$|z-1| = \left|r\left(e^{i\theta} - 1\right) + r - 1\right| \leq \rho\left|e^{i\theta} - 1\right| + \rho - 1$$

e como $\left|e^{i\theta} - 1\right|^2 = 2\left(1 - \cos\theta\right)$ é ainda

$$\left|e^{i\theta} - 1\right| = \left|e^{i|\theta|} - 1\right| \leq \left|e^{i\beta} - 1\right| < \frac{1+\delta-\rho}{\rho}$$

pelo que $|z-1| < \delta$. Resulta assim a inclusão $S \subseteq B(0,1) \cup B(1,\delta)$ e isto mostra que f é analítica em S.

Seja agora (g_n) a sucessão de funções definidas em $B(0,1) \cup B(1,\delta)$ por

$$g_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}}\left(f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right) \ \left(z - e^{i\beta}\right)\left(z - e^{-i\beta}\right) \quad \text{se} \quad z \neq 0$$

e $g_n(0) = c_{n+1} = \lim_{z\to 0} g_n(z)$. Então as funções g_n são analíticas em S, e para provar que a sucessão (g_n) é limitada em S basta mostrar que ela é limitada no conjunto

$$\partial S = \left\{re^{i\beta} : 0 \leq r \leq \rho\right\} \cup \left\{re^{-i\beta} : 0 \leq r \leq \rho\right\} \cup \left\{\rho e^{i\theta} : |\theta| \leq \rho\right\}.$$

Como $\lim c_n = 0$, a sucessão (c_n) é limitada. Sejam então

$$C = \sup\left\{|c_n| : n \geq 0\right\} \quad \text{e} \quad M = \max\left\{f(z) : z \in S\right\}.$$

Se $z = re^{i\beta}$ com $0 \leq r < 1$, de (19.5) resulta

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k z^k\right| \leq C \sum_{k=n+1}^{+\infty} |z|^k = \frac{C\,|z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

e atendendo às relações

$$\left|z - e^{i\beta}\right| = 1 - |z| \quad \text{e} \quad \left|z - e^{-i\beta}\right| \leq |z| + 1 < 2$$

conclui-se

$$|g_n(z)| \leq 2C \quad \text{se} \quad z = re^{i\beta} \quad \text{com} \quad 0 \leq r < 1.$$

Suponha-se agora $z = re^{i\beta}$ com $1 \leq r \leq \rho$. Se $r = 1$ é $g_n(z) = g_n\left(e^{i\beta}\right) = 0$ e podemos supôr $1 < r \leq \rho$. Temos então

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right| \leq M + C\sum_{k=0}^{n} |z|^k \leq M + \frac{C\,|z|^{n+1}}{|z| - 1}$$

e como

$$\left|z-e^{i\beta}\right|=|z|-1 \text{ e } \left|z-e^{-i\beta}\right|\leq|z|+1\leq\rho+1,$$

obtém-se

$$|g_n(z)|\leq\left(\frac{M}{|z|^{n+1}}+\frac{C}{|z|-1}\right)(|z|-1)\,(\rho+1)\leq(M+C)\,(\rho+1)$$

pois $(|z|-1)\,/\,|z|^{n+1}<1$.

Vemos assim que a sucessão (g_n) é limitada no segmento $\left[0,\rho e^{i\beta}\right]$, e por razões análogas é também limitada no segmento $\left[0,\rho e^{-i\beta}\right]$. Supondo agora $z=\rho e^{i\theta}$ com $|\theta|\leq\beta$ temos, como anteriormente,

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_kz^k\right|\leq M+\frac{C\,|z|^{n+1}}{|z|-1}$$

e dado que

$$\left|z-e^{i\beta}\right|\ \left|z-e^{-i\beta}\right|\leq(\rho+1)^2\,,$$

obtém-se

$$|g_n(z)|\leq\left(M+\frac{C\rho^{n+1}}{\rho-1}\right)\frac{(\rho+1)^2}{\rho^{n+1}}\leq\left(M+\frac{C}{\rho-1}\right)(\rho+1)^2\,.$$

Concluímos então que (g_n) é limitada em S e vamos agora provar que (g_n) tem limite 0 em todos os pontos do conjunto

$$E=\left\{re^{i\theta}:0<r<1 \text{ e } |\theta|<\beta\right\}.$$

Sendo $\varepsilon_n=\sup\left\{|c_k|:k\geq n\right\}$, para cada $z\in E$ temos

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_kz^k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}c_kz^k\right|\leq\varepsilon_{n+1}\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

e da relação $\left|z-e^{i\beta}\right|\,\left|z-e^{-i\beta}\right|\leq(|z|+1)^2$ resulta

$$|g_n(z)|\leq\frac{\varepsilon_{n+1}}{1-|z|}\,(|z|+1)^2\,.$$

Como a hipótese $\lim c_n=0$ exige também $\lim\varepsilon_n=0$ conclui-se então

$$\lim_{n\to+\infty}g_n(z)=0 \text{ se } z\in E.$$

Atendendo agora ao teorema de Vitali, a convergência de (g_n) em E implica a convergência uniforme de (g_n) em todos os subconjuntos compactos de S°, e como a função limite é analítica conclui-se que ela é identicamente nula em S°. Em particular, tomando $\alpha\in\,]0,\beta[$ segue-se que a sucessão (g_n) converge uniformemente para 0 no sector

$$L=\left\{re^{i\theta}:0\leq r\leq1 \text{ e } |\theta|\leq\alpha\right\}.$$

Como
$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_kz^k\right| = \left|\frac{g_n(z)}{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(z-e^{-i\beta}\right)}\right||z|^{n+1},$$
sendo
$$\mu = \min_{z\in L}\left|\left(z-e^{i\beta}\right)\left(z-e^{-i\beta}\right)\right| > 0$$
temos
$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_kz^k\right| \leq \frac{|g_n(z)|}{\mu} \quad \text{se} \quad z\in L$$
e isto mostra que a série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ converge uniformemente para f em L.
■

Corolário 1 - *Seja $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R\in\mathbb{R}^+$ e tal que $\lim c_nR^n = 0$. Então a série converge em todos os pontos regulares da função que ela define em $B(a,R)$. Além disso, se z_0 é um ponto regular existe $\alpha\in\,]0,\pi[$ tal que a série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ converge uniformemente no sector*
$$\left\{z\in\overline{B}(a,R):\left|\arg\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)\right|\leq\alpha\right\}.$$

Demonstração. Sendo z_0 um ponto regular da função definida pela série em $B(a,R)$, para algum $r>0$ existe uma função analítica
$$f: B(a,R)\cup B\left(z_0,r\right)\longrightarrow\mathbb{C}$$
tal que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n \quad \text{se} \quad |z-a|<R.$$

Pondo agora $\varphi(w) = a+w(z_0-a)$, a função φ aplica $B(0,1)$ em $B(a,R)$ e $B\left(1,r/R\right)$ em $B\left(z_0,r\right)$ pelo que $f\circ\varphi$ é analítica em $B(0,1)\cup B\left(1,r/R\right)$. Pondo ainda $b_n = c_n(z_0-a)^n$ temos
$$f\left(\varphi\left(w\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_nw^n \quad \text{se} \quad |w|<1$$
e como $|b_n| = |c_nR^n|$ segue-se que $\lim b_n = 0$. Aplicando o teorema anterior à série $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nw^n$ conclui-se então que ela é uniformemente convergente num sector S da forma
$$\left\{w\in\overline{B}(0,1):|\arg(w)|\leq\alpha\right\}.$$
Dado que
$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n\left(\varphi^{-1}(z)\right)^n$$

e como φ^{-1} transforma o sector do enunciado em S, conclui-se que a série inicial é uniformemente convergente nesse sector.

■

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ a série de Taylor de f relativa a um dado ponto $a \in D$. Se esta série tiver raio de convergência $R < +\infty$ e $\lim c_n R^n = 0$, então a série converge em todos os pontos de $C(a, R) \cap D$.*

Demonstração. Nas condições do enunciado, todos os pontos de $C(a, R) \cap D$ são pontos regulares da função definida pela série em $B(a, R)$. A convergência da série nesses pontos resulta então, directamente, do corolário anterior.

■

Nas condições do corolário anterior o estudo da convergência da série de potências nos pontos da fronteira do seu círculo de convergência onde f é analítica, fica assim reduzido a saber se o respectivo termo geral tem aí limite nulo.

Em 1851 Riemann enunciou uma propriedade fundamental do plano complexo que passou a ser conhecida por "Teorema da aplicação de Riemann": Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, simplesmente conexo, não vazio e distinto de $\mathbb{C}$, existe uma função analítica e injectiva que aplica D sobre $B(0, 1)$. Para obter este resultado vamos começar com uma definição:

Dados um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ chama-se *ramo da raiz quadrada* de f a uma função analítica $\sigma : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\sigma^2 = f$.

Exemplo 19.20 - *Se $D \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto simplesmente conexo, para toda função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe um ramo da raiz quadrada.*

Efectivamente a condição 5 do teorema 13.16 mostra que existe um ramo λ do logaritmo de f. Pondo $\sigma = e^{\lambda/2}$ temos então $\sigma^2 = e^{\lambda} = f$ pelo que σ é um ramo da raiz quadrada de f.

Exemplo 19.21 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função analítica e injectiva, e σ um ramo da raiz quadrada de f. Então σ é injectiva e $-\sigma[D] \cap \sigma[D] = \varnothing$.*

Efectivamente, dados $z, w \in D$ tais que $\sigma(z) = \sigma(w)$, temos $\sigma^2(z) = \sigma^2(w)$ pelo que $f(z) = f(w)$ e portanto $z = w$. Supondo que existem $z, w \in D$ tais que $\sigma(w) = -\sigma(z)$ teríamos também $f(z) = f(w)$ e portanto $z = w$. Seria então $\sigma(z) = -\sigma(z)$ pelo que $\sigma(z) = 0$ e daqui resultava $f(z) = \sigma^2(z) = 0$, o que é impossível.

Provaremos ainda um resultado auxiliar cuja demonstração se faz à custa das propriedades das funções definidas no teorema 19.3.

Lema 19.22 - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo. Dados $z_0 \in D$ e uma função analítica e injectiva $f : D \longrightarrow B(0,1)$, se $f[D] \neq B(0,1)$ existe uma função analítica e injectiva $g : D \longrightarrow B(0,1)$ tal que $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$.*

Demonstração. Para cada $w \in B(0,1)$ seja φ_w a função definida por

$$\varphi_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}.$$

Dado $a \in B(0,1) \setminus f[D]$, como a função $\varphi_a \circ f$ nunca se anula e é injectiva, os dois exemplos anteriores mostram que existe um ramo σ da raiz quadrada de $\varphi_a \circ f$ que também é uma função injectiva. Pondo $c = \sigma(z_0)$ a função $g = \varphi_c \circ \sigma$ é então uma aplicação injectiva de D em $B(0,1)$, tal que $g(z_0) = 0$. Seja ainda $s(z) = z^2$ para cada $z \in B(0,1)$, e considere-se a função $F = \varphi_a \circ s \circ \varphi_c$. Como $\varphi_c^{-1} = \varphi_c$ e $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$ temos então

$$F \circ g = \varphi_a \circ s \circ \sigma = \varphi_a \circ \sigma^2 = \varphi_a \circ \varphi_a \circ f = f$$

pelo que

$$f'(z_0) = F'(g(z_0))\, g'(z_0) = F'(0)g'(z_0).$$

Dado que F aplica $B(0,1)$ em $B(0,1)$, do lema de Schwarz resulta $|F'(0)| \leq 1$, valendo a igualdade sse existir γ tal que $|\gamma| = 1$ e $F(z) = \gamma z$ para cada $z \in B(0,1)$. No entanto, nesta última hipótese a função F seria injectiva e o mesmo sucedia então com $s = \varphi_a \circ F \circ \varphi_a$ o que é falso. Temos assim $|F'(0)| < 1$, e daqui resulta

$$|f'(z_0)| = |F'(0)|\, |g'(z_0)| < |g'(z_0)|,$$

pois g é injectiva e o corolário 2 do teorema da função inversa mostra que isso exige $g'(z_0) \neq 0$.
■

Podemos agora provar o teorema fundamental.

Teorema 19.23 (Teorema da aplicação de Riemann) - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, simplesmente conexo, não vazio e distinto de $\mathbb{C}$. Existe então uma função analítica e injectiva que aplica D sobre $B(0,1)$.*

Demonstração. Fixado um ponto $c \in \mathbb{C} \setminus D$, dos exemplos 19.20 e 19.21 resulta que existe uma função injectiva σ que é um ramo da raiz quadrada de $z - c$ com $z \in D$.

Por outro lado, atendendo ao teorema da aplicação aberta 18.4 existem $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ tais que $\overline{B}\,(a,r) \subseteq \sigma[D]$. Se $w \in \overline{B}\,(-a,r) \cap \sigma[D]$ seria

$$|-w-a| = |w-(-a)| \leq r$$

pelo que $-w \in \overline{B}(a,r) \subseteq \sigma[D]$, e o exemplo 19.21 mostra que isto não pode suceder. É então necessariamente $\overline{B}(-a,r) \cap \sigma[D] = \varnothing$ o que exige que para todo o $z \in D$ seja $|\sigma(z)+a| > r$.

Vemos assim que a função f definida por

$$f(z) = \frac{r}{\sigma(z)+a} \quad \text{se} \quad z \in D$$

é uma aplicação injectiva de D em $B(0,1)$ e isto mostra que o conjunto $\mathcal{F}$ das funções analíticas e injectivas que aplicam D em $B(0,1)$ é não vazio.

Tome-se agora um ponto $z_0 \in D$ e ponha-se

$$\mu = \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}.$$

Como cada $f \in \mathcal{F}$ é injectiva, do corolário 2 do teorema da função inversa 18.5 resulta $|f'(z_0)| > 0$ e conclui-se que $\mu \in]0,+\infty]$. Por outro lado, atendendo à definição de μ existe uma sucessão (f_n) de membros de $\mathcal{F}$ tal que $\lim|f_n'(z_0)| = \mu$, e para cada n tem-se $\sup_{z\in D}|f_n(z)| \leq 1$. Então (f_n) é uniformemente limitada e o teorema de Montel 19.16 mostra que existe uma subsucessão (g_n) de (f_n) uniformemente convergente nos subconjuntos compactos de D.

Sendo $g = \lim g_n$, a função g é analítica, e como (g_n') converge para g' temos ainda

$$|g'(z_0)| = \lim|g_n'(z_0)| = \lim|f_n'(z_0)| = \mu.$$

Em particular segue-se que $|g'(z_0)| \in \mathbb{R}^+$ pelo que g não é constante e os corolários 2 e 3 do teorema de Hurwitz 16.9 mostram que $g \in \mathcal{F}$. Para cada $f \in \mathcal{F}$ temos no entanto $|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$ e o lema anterior permite concluir que $g[D] = B(0,1)$.

■

Nota 19.24 - No teorema anterior a restrição $D \neq \mathbb{C}$ é essencial pois uma função analítica que aplique $\mathbb{C}$ em $B(0,1)$ é uma função inteira limitada, e o teorema de Liouville mostra que ela é necessariamente constante.

Corolário - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, simplesmente conexo, não vazio e distinto de $\mathbb{C}$. Dado $c \in D$ existe uma e uma só função analítica e injectiva f que aplica D sobre $B(0,1)$ e verifica as condições $f(c) = 0$ e $f'(c) \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Dada uma função analítica e injectiva F que aplica D sobre $B(0,1)$ seja $a = F(c)$. Pondo então $h = \varphi_a \circ F$ é $h(c) = 0$, e como h também aplica injectivamente D sobre $B(0,1)$ conclui-se que a função

$$f = \frac{|h'(c)|}{h'(c)} h$$

verifica as condições do enunciado.

Suponha-se agora que g é uma função que verifica as mesmas condições. Então $f \circ g^{-1}$ é uma função analítica e injectiva que aplica $B(0,1)$ sobre $B(0,1)$ e tem-se $\left(f \circ g^{-1}\right)(0) = 0$. De acordo com o teorema 19.4 segue-se que existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $|\gamma| = 1$ e $\left(f \circ g^{-1}\right)(z) = \gamma z$ para todo o $z \in B(0,1)$. É pois $f = \gamma g$ o que implica $f = g$, pois da relação $f'(c) = \gamma g'(c)$ deduz-se $\gamma = 1$.

■

Diz-se que dois subconjuntos de $\mathbb{C}$ são *homeomorfos* se existir uma função contínua, injectiva e com inversa contínua que aplique um conjunto sobre o outro. Diz-se então que essa função estabelece um *homeomorfismo* entre os dois conjuntos.

Exemplo 19.25 - *A função φ definida por*

$$\varphi(z) = \frac{z}{1-|z|} \quad \textit{se} \quad z \in B(0,1)$$

estabelece um homeomorfismo entre $B(0,1)$ e $\mathbb{C}$.

Efectivamente φ é contínua e aplica $B(0,1)$ sobre $\mathbb{C}$, pois dado $w \in \mathbb{C}$ é

$$\varphi\left(\frac{w}{1+|w|}\right) = w.$$

Além disso, de $\varphi(z) = w$ deduz-se

$$|z| = \frac{|w|}{1+|w|}$$

pelo que uma relação $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ exige $|z_1| = |z_2|$ e portanto também $z_1 = z_2$. Então φ é injectiva, e como φ^{-1} é a função contínua definida em $\mathbb{C}$ por

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{w}{1+|w|},$$

segue-se que φ estabelece um homeomorfismo entre $B(0,1)$ e $\mathbb{C}$.

Podemos agora dar novas caracterizações dos conjuntos abertos simplesmente conexos, que complementam o teorema 13.16.

Teorema 19.26 - *Se $D \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto não vazio, aberto e conexo, as seguintes condições são equivalentes:*

1 - D é simplesmente conexo.

2 - Para cada função analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe um ramo da raiz quadrada.

3 - $D = \mathbb{C}$ ou existe uma aplicação analítica e injectiva de D sobre $B(0,1)$.

4 - D é homeomorfo a $\mathbb{C}$.

5 - Dois caminhos em D com os mesmos pontos iniciais e os mesmos pontos finais são homotópicos em D com extremidades fixas.

6 - Todo o caminho fechado em D é homotópico em D a um caminho pontual.

Demonstração. O exemplo 19.20 mostra que a condição 1 implica a condição 2. Para vermos que esta condição implica a condição 3 basta observar que nas demonstrações do lema 19.22 e do teorema da aplicação de Riemann, entre as propriedades dos conjuntos simplesmente conexos apenas foi utilizada a que se traduz pela condição 2.

Suponha-se agora que a condição 3 se verifica. Então, dado $D \neq \mathbb{C}$ existe uma função analítica e injectiva f que aplica D sobre $B(0,1)$ e, sendo φ a função definida no exemplo 19.25, a função $\varphi \circ f$ estabelece um homeomorfismo entre D e $\mathbb{C}$.

Se a condição 4 se verifica existe uma aplicação contínua e injectiva f de D sobre $\mathbb{C}$. Dados dois caminhos γ e σ em D com os mesmos pontos iniciais e os mesmos pontos finais, então $f \circ \gamma$ e $f \circ \sigma$ são caminhos em $\mathbb{C}$ que verificam as mesmas condições e o exemplo 13.21 mostra que eles são homotópicos em $\mathbb{C}$ com extremidades fixas. Sendo H a função que estabelece essa homotopia, resulta da definição que $f^{-1} \circ H$ estabelece uma homotopia do mesmo tipo entre γ e σ em D.

Se a condição 5 se verifica, qualquer caminho fechado em D é homotópico com extremidades fixas a um caminho pontual com os mesmos pontos inicial e final, e daqui resulta que a condição 6 também se verifica. Finalmente, o corolário 3 do teorema 13.20 mostra que a condição 6 implica a condição 1.

■

O teorema anterior tem a seguinte consequência puramente topológica:

Corolário - *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, não vazio e simplesmente conexo. Então um conjunto aberto e não vazio $E \subseteq \mathbb{C}$ é homeomorfo a D sse for simplesmente conexo.*

Demonstração. Se E é simplesmente conexo o teorema anterior mostra que D e E são ambos homeomorfos a $\mathbb{C}$ pelo que são homeomorfos entre si. Reciprocamente, se E é homeomorfo a D, do teorema anterior resulta que E é homeomorfo a $\mathbb{C}$, e como E é necessariamente conexo o teorema anterior mostra ainda que E é simplesmente conexo.

■

20 - Funções inteiras de ordem finita

Uma função inteira f diz-se de *ordem finita* se existir $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(z) = O\left(\exp\left(|z|^\alpha\right)\right) \quad (z \to \infty)\,,$$

ou seja, se existirem constantes positivas α, r_0, C para as quais

$$|f(z)| \leq C \exp\left(|z|^\alpha\right) \quad \text{se} \quad |z| > r_0.$$

Nestas condições, como a função definida por

$$f(z) \exp\left(-\,|z|^\alpha\right)$$

é limitada em $\overline{B}\,(0, r_0)$, pode ainda escolher-se C de modo que a desigualdade anterior seja válida para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Dada uma função inteira f define-se a sua *ordem* $Ord\,(f)$ por

$$Ord\,(f) = \inf\left\{\alpha > 0 : f(z) = O\left(\exp\left(|z|^\alpha\right)\right) \quad (z \to \infty)\right\}.$$

Desta definição resulta em particular que se f não tiver ordem finita a sua ordem é $+\infty$.

Exemplo 20.1 - *Sejam f uma função inteira e $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se existir $a > 0$ tal que*

$$f(z) = O\left(\exp\left(a\,|z|^\alpha\right)\right) \quad (z \to \infty)$$

então $Ord\,(f) \leq \alpha$.

Efectivamente, dado $\varepsilon > 0$ existe r_0 tal que $|z|^\varepsilon \geq a$ se $|z| \geq r_0$. Para cada $\varepsilon > 0$ temos então

$$f(z) = O\left(\exp\left(|z|^{\alpha+\varepsilon}\right)\right) \quad (z \to \infty)$$

e conclui-se $Ord\,(f) \leq \alpha$.

Exemplo 20.2 - *Dadas duas funções inteiras f e g, é*

$$Ord\,(fg) \leq \max\left\{Ord\,(f)\,, Ord\,(g)\right\}.$$

Efectivamente, sendo $\rho = \max\left\{Ord\,(f)\,, Ord\,(g)\right\}$, para cada $\alpha > \rho$ é

$$f(z) = O\left(\exp\left(|z|^\alpha\right)\right) \quad \text{e} \quad g(z) = O\left(\exp\left(|z|^\alpha\right)\right)$$

pelo que

$$f(z)g(z) = O\left(\exp\left(2\,|z|^\alpha\right)\right).$$

Do exemplo anterior resulta então $Ord\,(fg) \leq \alpha$ e isto exige $Ord\,(fg) \leq \rho$.

Exemplo 20.3 - *Toda a função polinomial tem ordem zero.*
Efectivamente, para todo o $\alpha > 0$ é

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{\exp\left(|z|^{\alpha}\right)} = 0$$

pelo que $P(z) = O\left(\exp\left(|z|^{\alpha}\right)\right)$ quando $z \to \infty$.

Exemplo 20.4 - *Dadas uma função polinomial P e uma função inteira f, tem-se*

$$Ord\,(Pf) = Ord\,(f)\,.$$

Efectivamente, como $0 = Ord\,(P) \leq Ord\,(f)$, do exemplo 20.2 resulta $Ord\,(Pf) \leq Ord\,(f)$. Dado que $1/P$ é limitada numa vizinhança de ∞, quando $z \to \infty$ é $1/P(z) = O(1)$. Isto implica $f(z) = O\left(P(z)f(z)\right)$ $(z \to \infty)$ pelo que $Ord\,(f) \leq Ord\,(Pf)$.

Teorema 20.5 - *Dada uma função inteira f, para cada $r \geq 0$ seja*

$$M(r) = \sup\left\{|f(z)| : |z| = r\right\}.$$

Tem-se então

$$Ord\,(f) = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

Demonstração. Sendo

$$\mu = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r},$$

para cada $\alpha > \mu$ existe $r_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \alpha \quad \text{se} \quad r > r_0.$$

Temos assim

$$M(r) \leq \exp\left(r^{\alpha}\right) \quad \text{se} \quad r > r_0$$

pelo que

$$f(z) = O\left(\exp\left(|z|^{\alpha}\right)\right) \quad (z \to \infty)$$

e isto implica $Ord(f) \leq \alpha$. Como $\alpha > \mu$ é arbitrário segue-se que $Ord(f) \leq \mu$.
Tomando agora $\alpha > Ord(f)$, existe $C > 0$ tal que

$$M(r) \leq C\exp\left(r^{\alpha}\right) \quad \text{se} \quad r > 0,$$

e obtém-se uma majoração da forma

$$\ln M(r) \leq r^{\alpha}u(r)$$

em que
$$\lim_{r\to+\infty} u(r) = 1.$$
Temos então
$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \alpha + \frac{\ln u(r)}{\ln r} \quad \text{se} \quad r > 0,$$
o que implica $\mu \leq \alpha$. Como $\alpha > Ord(f)$ é arbitrário, isto exige $\mu \leq Ord(f)$.
■

Corolário - *Sejam f uma função inteira e $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se existirem constantes positivas A, a, B, b e r_0 tais que*
$$A\exp(ar^\alpha) \leq \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq B\exp(br^\alpha) \quad \textit{quando} \quad r \geq r_0,$$
então
$$Ord(f) = \alpha.$$

Demonstração. Com a notação do teorema anterior temos
$$A\exp(ar^\alpha) \leq M(r) \leq B\exp(br^\alpha) \quad \text{se} \quad r \geq r_0$$
pelo que
$$\alpha + \frac{\ln(a + r^{-\alpha}\ln A)}{\ln r} \leq \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \alpha + \frac{\ln(b + r^{-\alpha}\ln B)}{\ln r} \quad \text{se} \quad r \geq r_0$$
e obtém-se
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \alpha.$$
■

Exemplo 20.6 - *As funções exponencial, seno e coseno têm ordem* 1.

Com a notação do teorema anterior, para a função exponencial tem-se efectivamente
$$M(r) = e^r$$
e para as outras funções vale a majoração
$$M(r) \leq e^r.$$

Para a função coseno temos ainda
$$M(r) \geq |\cos ir| = \frac{e^r + e^{-r}}{2} \geq \frac{e^r}{2}$$
e para a função seno é
$$M(r) \geq |\sin ir| = e^r\frac{1 - e^{-2r}}{2} \geq e^r\frac{1 - e^{-2}}{2} \quad \text{se} \quad r \geq 1.$$

O corolário anterior mostra agora que todas estas funções têm ordem 1.

Exemplo 20.7 - *A função definida por* $\exp\left(e^z\right)$ *tem ordem infinita.*
Efectivamente, como

$$\left|\exp\left(e^z\right)\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(e^z\right)\right),$$

para esta função é

$$M(r) = \exp\left(e^r\right)$$

Daqui resulta

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{r}{\ln r} = +\infty.$$

e teorema anterior mostra que a função tem ordem $+\infty$.

Teorema 20.8 - *Se* P *é um polinómio de grau* m *tem-se*

$$Ord\left(e^P\right) = m.$$

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade que P não é identicamente nulo, seja

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$$

com $c_m \neq 0$. Como $P(z) \sim c_m z^m$ $(z \to \infty)$, dado $\lambda > m$ é

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{|z|^\lambda} = 0$$

pelo que $\lim_{z\to\infty}\left(|P(z)| - |z|^\lambda\right) = -\infty$. Notando que

$$\left|e^{P(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}(P(z))} \leq e^{|P(z)|}$$

temos então

$$\lim_{z\to\infty} \frac{e^{P(z)}}{\exp\left(|z|^\lambda\right)} = 0 \ \text{ se } \ \lambda > m$$

e isto mostra que $Ord\left(e^P\right) \leq m$.

Por outro lado, sendo $\theta = \arg c_m$ e tomando $r > 0$, temos

$$P\left(re^{-i\theta/m}\right) \sim |c_m|\, r^m \ \ (r \to +\infty)$$

pelo que também

$$\mathrm{Re}\left(P\left(re^{-i\theta/m}\right)\right) \sim |c_m|\, r^m \ \ (r \to +\infty)$$

e dado $\lambda < m$ é então

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\mathrm{Re}\left(P\left(re^{-i\theta/m}\right)\right)-r^{\lambda}\right)=+\infty.$$

Temos assim

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\left|\exp\left(P\left(re^{-i\theta/m}\right)\right)\right|}{\exp\left(r^{\lambda}\right)}=+\infty$$

e isto mostra que a relação $Ord\left(e^{P}\right) < \lambda$ é falsa. Como $\lambda < m$ é arbitrário, daqui resulta $Ord\left(e^{P}\right) \geq m$ o que estabelece o enunciado.

■

O teorema seguinte exprime a ordem de uma função inteira em termos dos coeficientes do seu desenvolvimento em série de potências de z.

Teorema 20.9 - *Dada uma função inteira f tal que*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n \quad se \quad z\in\mathbb{C},$$

é

$$Ord(f)=\overline{\lim}\frac{n\ln n}{\ln\left|c_n^{-1}\right|}.$$

Demonstração. Seja

$$\mu=\overline{\lim}\frac{n\ln n}{\ln\left|c_n^{-1}\right|}.$$

Dado $\lambda > \mu$ e tomando $\alpha \in\,]\mu,\lambda[$ existe uma ordem m tal que

$$\frac{n\ln n}{\ln\left|c_n^{-1}\right|}<\alpha \quad \text{se} \quad n>m$$

pelo que

$$|c_n|<\frac{1}{n^{n/\alpha}} \quad \text{se} \quad n>m,$$

e portanto

$$|f(z)|\leq\sum_{n=0}^{m}|c_n|\,r^n+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{r^n}{n^{n/\alpha}} \quad \text{se} \quad |z|=r. \tag{20.1}$$

Se $n > (2r)^{\alpha}$ é $n^{1/\alpha} > 2r$ pelo que

$$\sum_{n>(2r)^{\alpha}}\frac{r^n}{n^{n/\alpha}}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2. \tag{20.2}$$

Supondo agora $r \geq 1$, se $n \leq (2r)^{\alpha}$ temos

$$r^n\leq r^{(2r)^{\alpha}}=\exp\left((2r)^{\alpha}\ln r\right)$$

pelo que

$$\sum_{n\leq(2r)^\alpha}\frac{r^n}{n^{n/\alpha}}\leq\exp\left((2r)^\alpha\ln r\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{n/\alpha}}$$

e existe uma constante A tal que

$$\sum_{n\leq(2r)^\alpha}\frac{r^n}{n^{n/\alpha}}\leq A\exp\left((2r)^\alpha\ln r\right).$$

Atendendo a (20.1) e (20.2) podemos então escrever

$$|f(z)|\leq P(r)+A\exp\left((2r)^\alpha\ln r\right)\quad\text{se}\quad|z|=r\geq1,$$

em que P é um polinómio cujo grau não excede m. Notando agora que as funções definidas por

$$\frac{P(r)}{\exp\left(r^\lambda\right)}\quad\text{e}\quad\frac{(2r)^\alpha\ln r}{r^\lambda}$$

são limitadas quando $r\in[1,+\infty[$, conclui-se que existem constantes C e a tais que

$$|f(z)|\leq C\exp\left(ar^\lambda\right)\quad\text{se}\ |z|\geq1,$$

e daqui resulta $Ord(f)\leq\lambda$. Como $\lambda>\mu$ é arbitrário isto exige $Ord(f)\leq\mu$ e, em particular, se for $\mu=0$ tem-se $Ord(f)=0$.

Suponha-se agora $\mu>0$ e seja $\alpha\in\,]0,\mu[$. Para cada inteiro $k>0$ existe então $n>k$ tal que

$$\frac{n\ln n}{\ln\left|c_n^{-1}\right|}>\alpha$$

e daqui resulta

$$|c_n|>\frac{1}{n^{n/\alpha}}.$$

Sendo

$$r_n=(en)^{1/\alpha}$$

temos então

$$|c_nr_n^n|>\exp\left(\frac{n}{\alpha}\right)=\exp\left(\frac{r_n^\alpha}{\alpha e}\right)$$

e como as desigualdades de Cauchy implicam

$$\max_{|z|=r_n}|f(z)|\geq|c_nr_n^n|$$

conclui-se que existe uma sucessão (z_n) de complexos tal que $|z_n|=r_n\to+\infty$ e

$$|f\left(z_n\right)|>\exp\left(\frac{|z_n|^\alpha}{\alpha e}\right).$$

Dado $\lambda < \mu$ e tomando $\alpha \in]\lambda, \mu[$ temos então

$$\frac{\ln |f(z_n)|}{|z_n|^{\lambda}} \geq \frac{|z_n|^{\alpha-\lambda}}{\alpha e}$$

pelo que

$$\frac{\ln |f(z)|}{|z|^{\lambda}}$$

não é limitada e isto mostra que $Ord(f) \geq \lambda$. Como $\lambda < \mu$ é arbitrário, é necessariamente $Ord(f) \geq \mu$ e conclui-se $Ord(f) = \mu$.

■

O interesse das funções inteiras de ordem finita no estudo da factorização de funções inteiras baseia-se no seguinte resultado:

Teorema 20.10 - *Seja f uma função inteira com uma infinidade de zeros e não identicamente nula. Se f tiver ordem finita ρ e (z_n) for uma sucessão admissível dos seus zeros em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, para cada $\alpha > \rho$ a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}$$

é convergente.

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar $f(0) \neq 0$, e para cada $r \geq 0$ seja $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq r\}$. Representando por $N(r)$ o número de zeros de f em $\overline{B}(0, r)$ e aplicando a desigualdade de Jensen temos

$$N(r) \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M(2r)}{|f(0)|}.$$

Dado $\alpha > \rho$ tome-se $\lambda \in]\rho, \alpha[$. Existe então uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{M(2r)}{|f(0)|} \leq C \exp\left((2r)^{\lambda}\right)$$

e como $\lambda > 0$ daqui resulta que existem constantes A e r_0 tais que

$$N(r) \leq Ar^{\lambda} \ \text{ se } \ r \geq r_0.$$

Sejam agora φ uma permutação de $\mathbb{Z}^+$ para a qual a sucessão $\left(\left|z_{\varphi(n)}\right|\right)$ é crescente, e k uma ordem tal que $\left|z_{\varphi(n)}\right| \geq r_0$ se $n \geq k$. Notando que

$$N\left(\left|z_{\varphi(n)}\right|\right) \geq n$$

temos então

$$\frac{1}{\left|z_{\varphi(n)}\right|^{\lambda}} \leq \frac{A}{n} \ \text{ se } \ n \geq k,$$

pelo que

$$\frac{1}{\left|z_{\varphi(n)}\right|^\alpha} \leq \frac{A^{\alpha/\lambda}}{n^{\alpha/\lambda}} \quad \text{se} \quad n \geq k$$

e por ser $\alpha/\lambda > 1$ segue-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\left|z_{\varphi(n)}\right|^\alpha$converge. Como para todo o índice $m \geq 1$ é

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left|z_{\varphi(n)}\right|^\alpha},$$

conclui-se que também a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/|z_n|^\alpha$ é convergente.

Supondo finalmente que f tem um zero de ordem m no ponto $z = 0$ e sendo g a função inteira definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $g(z) = f(z)/z^m$, o exemplo 20.4 mostra que g também tem ordem ρ. Como $g(0) \neq 0$ e (z_n) é uma sucessão admissível dos zeros de g, basta agora aplicar a g o resultado já estabelecido.

■

Dada uma sucessão infinita (z_n) de pontos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o ínfimo do conjunto

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-\alpha} < +\infty\right\}$$

diz-se o *expoente de convergência de* (z_n). Se (z_n) for uma sucessão admissível de zeros de uma função inteira de ordem finita ρ, o teorema anterior mostra então que o seu expoente de convergência ρ_0 é finito e que $\rho_0 \leq \rho$.

Se p for o menor inteiro para o qual a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

converge, o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}$$

diz-se o *produto canónico associado a* (z_n). O teorema 17.13 mostra que este produto converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e que (z_n) é uma sucessão admissível de zeros da função inteira P que ele define.

Podemos ainda provar que a ordem de P é o expoente de convergência de (z_n) e vamos para isso estabelecer um lema.

Lema 20.11 - *Sejam* (z_n) *uma sucessão infinita de pontos de* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *com expoente de convergência finito* ρ_0. *Sejam ainda* p *o menor inteiro para o qual a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

converge, e E_p a função definida por

$$E_p(w) = (1-w)\, e^{s_p(w)} \quad se \quad w \in \mathbb{C}$$

com

$$s_p(w) = \sum_{k=1}^{p} \frac{w^k}{k}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante L tal que

$$\left| \sum_{|z/z_n|<1/2} \ln \left| E_p\left(\frac{z}{z_n}\right) \right| + \operatorname{Re}\left(\sum_{|z/z_n|\geq 1/2} s_p\left(\frac{z}{z_n}\right) \right) \right| \leq L\, |z|^{\rho_0+\varepsilon} \quad se \quad |z| \geq 1.$$

Demonstração. Pondo $w_n = z/z_n$ temos

$$|E_p(w_n)| = |1 - w_n| \exp\left(\operatorname{Re}\left(s_p(w_n)\right)\right)$$

pelo que

$$\ln |E_p(w_n)| = \operatorname{Re}\left(\ln(1 - w_n) + s_p(w_n)\right).$$

Se $|w_n| < 1$ é então

$$\ln |E_p(w_n)| = -\operatorname{Re}\left(\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{w_n^k}{k} \right)$$

pelo que

$$|\ln |E_p(w_n)|| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{|w_n|^k}{k} \leq |w_n|^{p+1} \sum_{k=0}^{+\infty} |w_n|^k$$

e obtém-se

$$|\ln |E_p(w_n)|| \leq 2\, |w_n|^{p+1} \quad \text{se} \quad |w_n| < \frac{1}{2}. \tag{20.3}$$

Como $|w_n| < 1$ temos

$$|w_n|^{p+1} \leq |w_n|^{\rho_0+\varepsilon} \quad \text{se} \quad \rho_0 + \varepsilon \leq p + 1$$

e por ser $|z| \geq 1$ temos também

$$|w_n|^{p+1} \leq \frac{|z|^{\rho_0+\varepsilon}}{|z_n|^{p+1}} \quad \text{se} \quad p + 1 < \rho_0 + \varepsilon,$$

pelo que

$$|w_n|^{p+1} \leq \frac{|z|^{\rho_0+\varepsilon}}{|z_n|^{\lambda}} \quad \text{com } \lambda = \min\{p+1, \rho_0 + \varepsilon\}.$$

Atendendo a (20.3) é então

$$\left|\sum_{|w_n|<1/2} \ln|E_p(w_n)|\right| \leq \sum_{|w_n|<1/2} |\ln|E_p(w_n)|| \leq 2|z|^{\rho_0+\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda}},$$

e como o teorema 20.10 e a hipótese feita sobre p mostram que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-\lambda}$ converge, conclui-se que existe uma constante A tal que

$$\left|\sum_{|w_n|<1/2} \ln|E_p(w_n)|\right| \leq A|z|^{\rho_0+\varepsilon}.$$

Supondo agora $|w_n| \geq 1/2$ temos

$$|s_p(w_n)| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{|w_n|^k}{k} = |w_n|^p \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k|w_n|^{p-k}} \leq |w_n|^p \sum_{k=1}^{p} \frac{2^{p-k}}{k},$$

e como $p \leq \rho_0$ é também

$$|w_n|^p = \frac{|2w_n|^p}{2^p} \leq |w_n|^{\rho_0+\varepsilon} 2^{\rho_0+\varepsilon-p}.$$

Existe então uma constante M tal que

$$|s_p(w_n)| \leq M \frac{|z|^{\rho_0+\varepsilon}}{|z_n|^{\rho_0+\varepsilon}} \quad \text{se} \quad |w_n| \geq 1/2,$$

pelo que

$$\left|\operatorname{Re}\left(\sum_{|w_n|\geq 1/2} s_p(w_n)\right)\right| \leq \left|\sum_{|w_n|\geq 1/2} s_p(w_n)\right| \leq M|z|^{\rho_0+\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\rho_0+\varepsilon}}$$

e conclui-se que existe uma constante B para a qual

$$\left|\operatorname{Re}\left(\sum_{|w_n|\geq 1/2} s_p(w_n)\right)\right| \leq B|z|^{\rho_0+\varepsilon}.$$

O enunciado é pois válido com $L = A + B$.
■

Podemos agora provar o resultado que tínhamos referido anteriormente.

Teorema 20.12 - *Seja (z_n) uma sucessão infinita de pontos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ com expoente de convergência finito. Então a ordem da função definida pelo produto canónico associado a (z_n) é o expoente de convergência de (z_n).*

Demonstração. Sendo ρ_0 o expoente de convergência de (z_n) e P a função definida pelo produto canónico correspondente, para estabelecer o enunciado basta provar a relação $Ord(P) \leq \rho_0$ pois a desigualdade oposta resulta do teorema 20.10.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq 1$. Pondo $w_n = z/z_n$, com as notações do lema anterior temos

$$\ln|P(z)| = \sum_{|w_n|<1/2} \ln|E_p(w_n)| + \operatorname{Re}\left(\sum_{|w_n|\geq 1/2} s_p(w_n)\right) + \sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n|$$

e o lema mostra que existe uma constante K tal que

$$\ln|P(z)| \leq K|z|^{\rho_0+\varepsilon} + \sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n|. \tag{20.4}$$

Temos agora

$$\ln|1-w_n| \leq \ln(1+|w_n|)$$

e como a função definida por

$$\frac{\ln(1+x)}{x^{\rho_0+\varepsilon}} \quad \text{se} \quad x \in [1/2, +\infty[$$

é limitada, existe uma constante A tal que

$$\ln(1+|w_n|) \leq A|w_n|^{\rho_0+\varepsilon} \quad \text{se} \quad |w_n| \geq \frac{1}{2}.$$

É então

$$\sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n| \leq A|z|^{\rho_0+\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{\rho_0+\varepsilon}}$$

e de (20.4) resulta que existe uma constante C para a qual

$$\ln|P(z)| \leq C|z|^{\rho_0+\varepsilon} \quad \text{se} \quad |z| \geq 1.$$

Temos assim

$$|P(z)| \leq \exp\left(C|z|^{\rho_0+\varepsilon}\right) \quad \text{se} \quad |z| \geq 1$$

e do exemplo 20.1 conclui-se $Ord(P) \leq \rho_0$.

■

O resultado seguinte é uma consequência imediata dos dois teoremas anteriores.

Teorema 20.13 - *Uma sucessão infinita (z_n) de pontos de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ é uma sucessão admissível de zeros de alguma função de ordem finita sse o seu expoente de convergência for finito.*

■

Dada uma função inteira f de ordem finita ρ tal que $f(0) \neq 0$, o corolário 1 do teorema 17.1 e o corolário do teorema 17.13 mostram que f é representável na forma

$$e^{h(z)}P(z)$$

em que h é uma função inteira e P é um polinómio ou o produto canónico associado a uma sucessão admissível dos zeros de f. Um resultado fundamental, conhecido por *teorema da factorização de Hadamard*, estabelece que nesta representação a função h é necessariamente um polinómio cujo grau não excede a parte inteira $\lfloor \rho \rfloor$ de ρ.

Começaremos por tratar o caso em que o conjunto dos zeros de f é finito.

Teorema 20.14 (Hadamard, 1893) - *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ. Se o conjunto dos zeros de f for finito então ρ é inteiro e tem-se*

$$f(z) = e^{h(z)}P(z)$$

em que P e h são polinómios e h tem grau ρ.

Demonstração. Atendendo ao corolário 1 do teorema 17.1 basta provar que h é um polinómio de grau ρ.

Como o exemplo 20.4 mostra que e^h também tem ordem ρ, para cada $\alpha > \rho$ existe então uma constante C tal que

$$\left|e^{h(z)}\right| \leq \exp\left(C\left|z\right|^{\alpha}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Temos assim

$$\operatorname{Re}\left(h(z)\right) \leq C\left|z\right|^{\alpha} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C},$$

e o corolário do teorema de Borel-Carathéodory 19.2 mostra que h é um polinómio de grau $q \leq \alpha$. Atendendo ao teorema 20.8 é então

$$Ord\left(e^h\right) = q$$

pelo que $q = \rho$.

■

O resultado seguinte ilustra a profundidade deste teorema.

Corolário - *Uma função inteira cuja ordem é um número real não inteiro toma uma infinidade de vezes qualquer valor complexo.*

Demonstração. Se f é uma função inteira de ordem finita não inteira, dado $a \in \mathbb{C}$ a ordem da função $f - a$ é a mesma e o teorema anterior mostra então que $f - a$ tem uma infinidade de zeros.

■

Nota 20.15 - Seja f uma função inteira não constante e suponha-se que f nunca toma um certo valor $a \in \mathbb{C}$. Se f tiver ordem finita o teorema 20.14 permite agora mostrar que f toma uma infinidade de vezes qualquer valor complexo $z \neq a$. Efectivamente, como $f - a$ não tem zeros, do teorema de Hadamard resulta que $f - a$ tem a forma e^h em que h é um polinómio não constante. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, para cada inteiro k existe então $w_k \in \mathbb{C}$ tal que $h(w_k) = \ln(z - a) + 2k\pi i$ pelo que $f(w_k) = z$.

Este resultado é no entanto válido para toda a função inteira, como consequência do Grande Teorema de Picard que provaremos posteriormente (cf. corolário 3 do teorema 21.11).

Para estabelecer a segunda parte do teorema da factorização de Hadamard usaremos o seguinte lema:

Lema 20.16 - *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ com uma infinidade de zeros e que não se anula no ponto 0. Sejam ainda (z_n) uma sucessão admissível dos seus zeros e*

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}$$

a função definida pelo produto canónico correspondente. Dado $\varepsilon > 0$ existem uma constante C e uma sucessão (r_n) de números positivos tais que $\lim r_n = +\infty$ e

$$|P(z)| > \exp\left(-C\,|z|^{\rho+\varepsilon}\right) \quad \textit{se} \quad |z| = r_n.$$

Demonstração. Para cada $n \geq 1$ seja

$$\delta_n = \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

e tome-se

$$z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 1} B(z_n, \delta_n)$$

tal que $|z| \geq 1$.

Com as notações do lema 20.11, pondo $w_n = z/z_n$ temos

$$\ln|E_p(w_n)| = \ln|1 - w_n| + \operatorname{Re}\left(w_n + \frac{w_n^2}{2} + \cdots + \frac{w_n^p}{p}\right),$$

e como o expoente de convergência ρ_0 de (z_n) não excede ρ, daquele lema resulta que existe uma constante positiva L tal que

$$\left| \sum_{|w_n|<1/2} \ln|E_p(w_n)| + \operatorname{Re}\left(\sum_{|w_n|\geq 1/2} \left(w_n + \frac{w_n^2}{2} + \cdots + \frac{w_n^p}{p}\right)\right)\right| \leq L\,|z|^{\rho+\varepsilon}.$$

É então
$$\ln|P(z)| \geq -L\,|z|^{\rho+\varepsilon} + \sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n| \tag{20.5}$$
e como $z \notin B\,(z_n, \delta_n)$ temos
$$|1-w_n| \geq \frac{\delta_n}{|z_n|} = \frac{1}{|z_n|^{p+2}} \geq \frac{1}{(2\,|z|)^{p+2}} \quad \text{se} \quad |w_n| \geq \frac{1}{2}.$$
Pondo $r = |z|$ é pois
$$\ln|1-w_n| \geq -\,(p+2)\ln 2r, \tag{20.6}$$
e representando por $N(2r)$ o número de zeros de f em $\overline{B}\,(0,2r)$ resulta
$$\sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n| \geq -N(2r)(p+2)\ln 2r.$$
Sendo agora
$$\mu = \sup_{|z|\leq 4r} |f(z)|\,,$$
a desigualdade de Jensen mostra que é válida a majoração
$$N(2r) \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\mu}{|f(0)|},$$
e como f tem ordem ρ segue-se que existe uma constante λ tal que
$$\frac{\mu}{|f(0)|} \leq \lambda \exp\left((4r)^{\rho+\varepsilon/2}\right) \,.$$
De (20.6) resulta então que existem constantes A e B tais que
$$\sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n| \geq -\left(Ar^{\rho+\varepsilon/2} + B\right)\ln 2r = r^{\rho+\varepsilon}c(r)$$
em que $c(r)$ é limitada no intervalo $[1,+\infty[$, e isto mostra que existe uma constante positiva M para a qual
$$\sum_{|w_n|\geq 1/2} \ln|1-w_n| \geq -Mr^{\rho+\varepsilon}.$$
Atendendo a (20.5) conclui-se que existe uma constante positiva C tal que
$$\ln|P(z)| \geq -C\,|z|^{\rho+\varepsilon}$$
e obtemos assim a relação
$$|P(z)| \geq \exp\left(-C\,|z|^{\rho+\varepsilon}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B\,(z_n, \delta_n) \quad \text{e} \quad |z| \geq 1. \tag{20.7}$$

Para cada $n \geq 1$ seja agora $I_n =]|z_n| - \delta_n, |z_n| + \delta_n[$ e tome-se um inteiro positivo m. Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} < +\infty,$$

os I_n não cobrem o intervalo $]m, +\infty[$ e existe então $r_m > m$ tal que

$$r_m \notin \bigcup_{n \geq 1} I_n.$$

Para todo o z tal que $|z| = r_m$ segue-se que

$$z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 1} B\left(z_n, \delta_n\right),$$

pois de $|z - z_n| < \delta_n$ resultaria

$$|z_n| - \delta_n < |z| < |z_n| + \delta_n$$

e isto implicava $|z| \in I_n$. Então (20.7) mostra que a desigualdade do enunciado é válida quando $|z| = r_m$.

■

Estamos agora em condições de provar a segunda parte do teorema da factorização de Hadamard.

Teorema 20.17 (Hadamard, 1893) - *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ com uma infinidade de zeros e que não se anula no ponto 0. Sendo (z_n) uma sucessão admissível dos seus zeros e P a função definida pelo produto canónico associado, tem-se*

$$f(z) = e^{h(z)} P(z) \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C},$$

em que h é um polinómio de grau $q \leq \rho$.

Demonstração. Atendendo ao corolário do teorema 17.13 basta provar que h é um polinómio de grau $q \leq \rho$. Dado $\lambda > \rho$ o lema anterior mostra que existem uma constante $C > 0$ e uma sucessão (r_m) com limite $+\infty$ tais que

$$|P(z)| \geq \exp\left(-C\,|z|^\lambda\right) \quad \text{se} \quad |z| = r_m.$$

Por outro lado, como f tem ordem ρ existe uma constante $A > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \exp\left(A\,|z|^\lambda\right) \quad \text{se} \quad |z| = r_m$$

e obtém-se a relação

$$\left|e^{h(z)}\right| \leq \exp\left(K\,|z|^\lambda\right) \quad \text{se} \quad |z| = r_m$$

com $K = A + C$. Temos então

$$\operatorname{Re}(h(z)) \leq K\,|z|^{\lambda} \quad \text{se} \quad |z| = r_m,$$

e do corolário do teorema de Borel-Carathéodory 19.2 resulta que h é um polinómio de grau $q \leq \lambda$. Como $\lambda > \rho$ é arbitrário, isto exige $q \leq \rho$.

■

Corolário 1 - *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ com uma infinidade de zeros e com um zero de ordem m no ponto 0. Sendo (z_n) uma sucessão admissível dos seus zeros e P a função definida pelo produto canónico associado, tem-se*

$$f(z) = z^m e^{h(z)} P(z)$$

em que h é um polinómio de grau $q \leq \rho$.

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior à função inteira definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por $f(z)/z^m$.

■

O teorema 20.17 e o corolário anterior mostram que toda a função inteira de ordem finita f, com uma infinidade de zeros e não identicamente nula, é representável na forma

$$f(z) = z^m e^{h(z)} P(z)$$

em que $m \geq 0$ é inteiro, h um polinómio e P a função definida por um produto canónico. O resultado seguinte esclarece a relação entre as ordens das funções f e P:

Corolário 2 - *Seja f uma função inteira da forma*

$$f(z) = z^m e^h P(z)$$

em que P é a função definida por um produto canónico, h um polinómio de grau q e $m \geq 0$ um inteiro. Tem-se então

$$Ord(f) = \max\{q, Ord(P)\}\,.$$

Demonstração. Como $Ord(P) = Ord\,(z^m P)$ podemos sem perda de generalidade supôr $m = 0$. Dado que $Ord(e^h) = q$, na hipótese $q > Ord\,(P)$ o exemplo 20.2 mostra que $Ord(f) \leq q$, e como o teorema de Hadamard exige $q \leq Ord(f)$ conclui-se $Ord(f) = q$.

Supondo $q \leq Ord(P)$, do exemplo 20.2 resulta $Ord(f) \leq Ord(P)$ e também $Ord(P) \leq \max\left\{Ord\left(e^{-h}\right), Ord\,(f)\right\} = \max\{q, Ord\,(f)\} = Ord\,(f)$ pelo que $Ord\,(f) = Ord(P)$.

■

Corolário 3 - *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ com uma infinidade de zeros e não identicamente nula, e (z_n) uma sucessão admissível dos seus zeros em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se ρ não é inteiro então (z_n) tem expoente de convergência ρ.*

Demonstração. Neste caso, do corolário anterior resulta $\rho = Ord(P)$ e o teorema 20.12 mostra que a ordem de P é o expoente de convergência de (z_n). ■

Em certas situações é útil a variante do teorema 20.17 que se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 20.18 - *Seja f uma função inteira de ordem $p \in \mathbb{Z}^+$, com uma infinidade de zeros e que não se anula no ponto 0. Sendo (z_n) uma sucessão admissível dos seus zeros, f é representável na forma*

$$f(z) = e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}$$

em que h é um polinómio cujo grau não excede p.

Efectivamente, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-p}$ divergir o teorema anterior mostra directamente que f admite uma representação deste tipo. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-p}$ for convergente seja $q \geq 0$ o maior inteiro para o qual $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^{-q}$ diverge. Então o produto canónico associado a (z_n) é

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{z_n}\right)^q}$$

e f é representável na forma $e^{h_0(z)}P(z)$ em que h_0 é um polinómio cujo grau não excede p. No entanto, sendo $\lambda_k = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n^{-k}$ para $q+1 \leq k \leq p$ e pondo

$$h(z) = h_0(z) - \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\lambda_k z^k}{k}$$

temos

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{h(z)} P(z) \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{q+1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{q+1} + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p} \\ &= e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p}. \end{aligned}$$

O teorema da factorização de Hadamard permite tornar mais preciso o enunciado do teorema 17.8 no caso de f ter ordem finita $\rho < 2$. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 20.19 - *Seja f uma função inteira não identicamente nula, com paridade definida, uma infinidade de zeros e ordem $\rho < 2$. Se (w_n) for uma sucessão admissível dos seus zeros tais que $0 \leq \arg(w_n) < \pi$, é válida a identidade*

$$f(z) = cz^m \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{w_n^2}\right)$$

em que m é a ordem do zero de f no ponto 0 se $f(0) = 0$, ou $m = 0$ se $f(0) \neq 0$, e

$$c = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z^m}.$$

Demonstração. Como na demonstração do teorema 17.8 obtém-se uma sucessão admissível (z_n) dos zeros de f pondo $z_{2n-1} = w_n$ e $z_{2n} = -w_n$. Sendo p o menor inteiro tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/|z_n|^{p+1}$ converge, é necessariamente $p = 0$ ou $p = 1$ pelo que o produto canónico correspondente tem a forma

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{pz}{z_n}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{w_n}\right) e^{\frac{pz}{w_n}} \left(1 + \frac{z}{w_n}\right) e^{-\frac{pz}{w_n}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{w_n^2}\right).$$

De acordo com o teorema de Hadamard 20.17 temos então

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{w_n^2}\right)$$

em que h é uma função da forma $a + bz$ e m é o inteiro do enunciado. Como m tem a paridade de f (cf. exemplo 9.13), a função definida para $z \neq 0$ por $f(z)/z^m$ é par e isto mostra que h também é par. Temos então $b = 0$ pelo que

$$e^{h(z)} = e^a = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z^m P(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z^m},$$

o que completa a demonstração.

∎

O produto infinito de $\sin \pi z$ obtido no teorema 17.9 aparece agora como uma consequência imediata do teorema anterior, sem depender do desenvolvimento em fracções parciais da função cotangente, pois a função seno é ímpar e tem ordem 1.

21 - Os teoremas de Bloch, Schottky e Picard

O teorema de Bloch dá indicações úteis sobre a amplitude do contradomínio de uma função analítica. Começaremos por estabelecer um resultado auxiliar.

Lema 21.1 - *Dados $c \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, seja f uma função analítica em $\overline{B}(c, r)$ e não constante, tal que*

$$|f'(z)| \leq 2\,|f'(c)| \quad \text{se} \quad z \in \overline{B}(c, r).$$

Então $f[B(c, r)]$ contém o circulo $B(f(c), R)$, com

$$R = \left(3 - 2\sqrt{2}\right) r\,|f'(c)|\,.$$

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar $c = f(c) = 0$ e seja h a função definida em $B(0, r)$ por

$$h(z) = f(z) - f'(0)z.$$

Como

$$|h(z)| \geq |f'(0)|\,|z| - |f(z)|$$

resulta

$$|f(z)| \geq |f'(0)|\,|z| - |h(z)| \quad \text{se} \quad |z| < r \tag{21.1}$$

e pode obter-se uma minoração útil de $|f(z)|$ a partir de uma majoração conveniente de $|h(z)|$. Dado $z \in B(0, r)$ temos

$$h(z) = \int_0^z (f'(\zeta) - f'(0))\,d\zeta = \int_0^1 (f'(zt) - f'(0))\,zdt$$

pelo que

$$|h(z)| \leq |z| \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)|\,dt. \tag{21.2}$$

Por outro lado, sendo γ o caminho definido por $\gamma(t) = re^{it}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, da fórmula integral de Cauchy resulta

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \quad \text{se} \quad w \in B(0, r)\,,$$

e portanto

$$f'(w) - f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{wf'(\zeta)}{\zeta(\zeta - w)} d\zeta \; = \frac{w}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'\left(re^{it}\right)}{re^{it} - w} dt.$$

Sendo

$$M = \sup_{|z|=r} |f'(z)|$$

tem-se então

$$|f'(w) - f'(0)| \leq \frac{M\,|w|}{r - |w|}$$

e de (21.2) vem

$$|h(z)| \leq |z| \int_0^1 \frac{M\,|zt|}{r - |zt|} dt \leq |z|^2 \, M \int_0^1 \frac{t}{r - |z|} dt.$$

Como por hipótese é

$$M \leq 2\,|f'(0)|$$

obtém-se assim

$$|h(z)| \leq \frac{|z|^2 \,|f'(0)|}{r - |z|}$$

e atendendo a (21.1) isto conduz à minoração

$$|f(z)| \geq |f'(0)| \left(|z| - \frac{|z|^2}{r - |z|} \right) \quad \text{se} \quad |z| < r.$$

Notando ainda que a expressão

$$|z| - \frac{|z|^2}{r - |z|}$$

atinge o máximo para

$$|z| = r_0 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) r$$

e que é

$$r_0 - \frac{r_0^2}{r - r_0} = \left(3 - 2\sqrt{2} \right) r,$$

conclui-se a relação

$$|f(z)| \geq |f'(0)| \left(3 - 2\sqrt{2} \right) r = R \quad \text{se} \quad |z| = r_0.$$

Seja agora $D = B\,(0, r_0)$ e tome-se $w \in \partial f\,[D]$. Como $f\,\left[\overline{D}\right]$ é compacto, segue-se que $\partial f\,[D] \subseteq \overline{f\,[D]} \subseteq f\,\left[\overline{D}\right]$ pelo que existe $z \in \overline{D}$ tal que $w = f(z)$. No entanto, dado que f é analítica em D e não constante, do teorema da aplicação aberta resulta que $f\,[D]$ é aberto e isto mostra que $z \in \overline{D} \setminus D$. Temos então $|z| = r_0$ pelo que $|w| \geq R$ e isto implica $B\,(0, R) \cap \partial f\,[D] = \varnothing$. Dado que por hipótese é $f(0) = 0$, segue-se que $B\,(0, R) \cap f\,[D] \neq \varnothing$ e do corolário 4 do teorema 5.22 conclui-se $B\,(0, R) \subseteq f\,[D] \subseteq f[B(0, r)]$, como se pretende.

Passando finalmente ao caso geral, seja g a função definida por

$$g(z) = f(z + c) - f(c).$$

Temos então $g(0) = 0$, e como f é analítica em $\overline{B}\,(c, r)$ segue-se que g é analítica em $\overline{B}\,(0, r)$. Como é também

$$\sup_{|z|\leq r} |g'(z)| = \sup_{|w-c|\leq r} |f'(w)| \leq 2\,|f'(c)| = 2\,|g'(0)|\,,$$

da parte do enunciado já estabelecida resulta a inclusão

$$B(0, R) \subseteq g\,[B(0, r)]\,,$$

e isto mostra que

$$B\,(f(c), R) \subseteq g\,[B(0, r)] + f(c) = f\,[B(c, r)]\,.$$

■

Podemos agora provar a seguinte versão do teorema de Bloch:

Teorema 21.2 (Bloch, 1924) - *Dada uma função f analítica em $\overline{B}\,(0, 1)$ e não constante, seja*

$$M = \max |f'(z)|\,(1 - |z|)\,.$$

Então $f\,[B(0, 1)]$ contém um círculo fechado de raio

$$R = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) M \geq \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) |f'(0)|\,.$$

Demonstração. A função definida em $\overline{B}\,(0, 1)$ por $|f'(z)|\,(1 - |z|)$ atinge o valor máximo M num ponto $c \in B\,(0, 1)$. Pondo

$$r = \frac{1 - |c|}{2} > 0$$

e dado $z \in \overline{B}(c, r)$, temos

$$|z| \leq |z - c| + |c| \leq r + |c| = 1 - r.$$

Então $\overline{B}(c, r) \subseteq B(0, 1)$ e isto mostra que f é analítica em $\overline{B}(c, r)$. Se $z \in \overline{B}(c, r)$ temos ainda

$$|f'(z)|\,(1 - |z|) \leq M = 2r\,|f'(c)|$$

pelo que

$$|f'(z)| \leq \frac{2r\,|f'(c)|}{1 - |z|},$$

e como $1 - |z| \geq r$ segue-se que

$$|f'(z)| \leq 2\,|f'(c)| \quad \text{se} \quad z \in \overline{B}(c, r).$$

Podemos agora aplicar o lema anterior, e pondo

$$R = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) M = \left(3 - 2\sqrt{2}\right) r \left|f'(c)\right|$$

resulta

$$B(f(c), R) \subseteq f\left[B(c, r)\right],$$

pelo que

$$\overline{B}(f(c), R) \subseteq \overline{f\left[B(c, r)\right]} \subseteq f\left[\overline{B}(c, r)\right] \subseteq f\left[B(0, 1)\right].$$

■

Corolário 1 - *Seja f uma função analítica em $\overline{B}(0,1)$ tal que $|f'(0)| = 1$. Então $f[B(0,1)]$ contém um círculo fechado de raio $R = 3/2 - \sqrt{2}$.*

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior notando que a condição $|f'(0)| = 1$ exclui a possibilidade de f ser constante.

■

Nota 21.3 - A constante $3/2 - \sqrt{2}$ que figura no enunciado anterior não é a melhor possível. Para cada função f, analítica em $\overline{B}(0,1)$ e tal que $|f'(0)| = 1$, seja

$$\lambda(f) = \max\left\{d\left(z, \partial f\left[B(0,1)\right]\right) : z \in f\left[B(0,1)\right]\right\}.$$

Existe então $c \in f[B(0,1)]$ tal que $\overline{B}(c, \lambda(f)) \subseteq \overline{f[B(0,1)]}$, e como

$$B(c, \lambda(f)) \cap \partial f\left[B(0,1)\right] = \varnothing$$

segue-se que $B(c, \lambda(f)) \subseteq f[B(0,1)]$. Representando por $\mathcal{D}$ o conjunto das funções analíticas em $\overline{B}(0,1)$ cuja derivada no ponto 0 tem módulo 1, define-se a chamada *constante de Landau* L por

$$L = \inf\left\{\lambda(f) : f \in \mathcal{D}\right\}.$$

Para cada função $f \in \mathcal{D}$ o conjunto $f[B(0,1)]$ contém assim um círculo aberto de raio L e o enunciado do corolário é válido para todo o $R < L$.

O valor de L é desconhecido mas corolário anterior mostra que

$$L \geq 3/2 - \sqrt{2} > 1/12.$$

Considerando agora a função f definida em $B(0,1)$ por

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

pode ver-se que $L \leq \pi/4 < 4/5$. Temos efectivamente $f'(0) = 1$, e como

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2} > 0 \quad \text{se} \quad |z| < 1$$

é $|\arg((1+z)/(1-z))| < \pi/2$ pelo que $|\mathrm{Im}(f(z))| < \pi/4$.

Estas estimativas podem ainda ser significativamente aperfeiçoadas e sabe-se que

$$\frac{1}{2} < L \leq \frac{\Gamma(1/3)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} = 0.5432... \;.$$

onde Γ representa a função gama (cf. secção 22).

Corolário 2 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se num ponto $c \in D$ for $f'(c) \neq 0$, dado $r > 0$ tal que $\overline{B}(c,r) \subseteq D$ o contradomínio de f contém um círculo fechado de raio*

$$\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) r\,|f'(c)| \;.$$

Demonstração. Dado r tal que $\overline{B}(c,r) \subseteq D$ seja g a função definida no conjunto

$$G = \frac{D-c}{r}$$

por

$$g(z) = \frac{f(rz+c)}{rf'(c)}.$$

Como

$$\overline{B}(0,1) = \frac{\overline{B}(c,r)-c}{r} \subseteq G,$$

segue-se que g é analítica em $\overline{B}(0,1)$. Temos ainda $g'(0) = 1$ e o corolário anterior mostra então que $g\,[B(0,1)]$ contém um círculo fechado de raio $3/2-\sqrt{2}$. O enunciado resulta agora de ser

$$f\,[B(c,r)] = rf'(c)g\,[B(0,1)]\,.$$

■

Corolário 3 - *O contradomínio de uma função inteira e não constante contém círculos de raio arbitrariamente grande.*

■

O corolário anterior traduz um resultado provisório que irá conduzir à demonstração de um teorema fundamental em Análise Complexa, conhecido por "Pequeno Teorema de Picard". Vamos primeiro provar dois lemas.

Lema 21.4 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ uma função analítica. Existe então uma função analítica $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $f = \cos \pi\varphi$.*

Demonstração. Como $1 - f^2$ não tem zeros e D é simplesmente conexo, o exemplo 19.20 mostra que para esta função existe um ramo g da raiz quadrada. É então $f^2 + g^2 = 1$, e como

$$(f + ig)(f - ig) = f^2 + g^2$$

daqui resulta que a função $f + ig$ nunca se anula. Sendo agora μ um ramo do logaritmo de $f + ig$ e $\varphi = \mu/i\pi$, temos

$$f + ig = e^{i\pi\varphi} \text{ e } f - ig = (f + ig)^{-1} = e^{-i\pi\varphi}$$

pelo que

$$f = \frac{e^{i\pi\varphi} + e^{-i\pi\varphi}}{2} = \cos \pi\varphi.$$

Finalmente, como para cada inteiro n é $\cos \pi n = (-1)^n$ e f não toma os valores ± 1, segue-se que φ não toma valores inteiros.

■

Lema 21.5 - *Dado um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ seja $\psi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $\cos \pi\psi$ não toma valores inteiros. Então $\psi[D]$ não contém círculos de raio 1.*

Demonstração. Sejam (u_n) a sucessão definida para $n \geq 1$ por

$$u_n = \frac{1}{\pi} \ln \left(n + \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

e E o conjunto dos pontos da forma $m \pm iu_n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. Dado $c \in E$ e sendo $c = m \pm iu_n$ temos

$$\begin{aligned}
\cos \pi c = \frac{e^{i\pi c} + e^{-i\pi c}}{2} &= (-1)^m \frac{e^{\pi u_n} + e^{-\pi u_n}}{2} \\
&= \frac{(-1)^m}{2} \left(n + \sqrt{n^2 - 1} + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \right) \\
&= (-1)^m n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

pelo que $\psi[D] \cap E = \varnothing$.

Temos por outro lado

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} &\leq \frac{1}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right) \\
&\leq \frac{1}{\pi} \ln \left(2 + \sqrt{3} \right) < 1.
\end{aligned}$$

Notando ainda que $u_1 = 0$, para cada $z \in \mathbb{C}$ pode então escolher-se $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|u_n - |\mathrm{Im}(z)|| \leq 1/2$. Tomando agora $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|m - \mathrm{Re}(z)| \leq 1/2$ segue-se que existe um ponto c da forma $m \pm iu_n$ para o qual

$$|z - c| \leq \sqrt{\frac{1}{2}} < 1.$$

Conclui-se assim que $B(z,1) \cap E \neq \varnothing$ e a condição $\psi[D] \cap E = \varnothing$ mostra que $\psi[D]$ não contém o círculo $B(z,1)$.

■

Podemos agora demonstrar o teorema fundamental.

Teorema 21.6 (Picard, 1879) - *O contradomínio de uma função inteira e não constante inclui todos os pontos de $\mathbb{C}$ com uma possível excepção.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $a \neq b$, e $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ uma função analítica. Pondo

$$f = \frac{h - a}{b - a}$$

segue-se que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ e o teorema fica estabelecido se se provar que f é constante. Como $2f - 1$ não toma os valores ± 1, o lema 21.4 mostra que existe uma função analítica $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $2f - 1 = \cos \pi\varphi$, e aplicando a φ o mesmo lema conclui-se que existe uma função analítica $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $\varphi = \cos \pi\psi$. Como ψ não toma valores inteiros, o lema 21.5 mostra que o seu contradomínio não contém círculos de raio 1, e do corolário 3 do teorema 21.2 resulta que ψ é constante. Da relação

$$f = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \pi \left(\cos \pi\psi\right)\right)$$

conclui-se então que f também é constante.

■

O contradomínio de uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ pode excluir dois pontos, como sucede com a função

$$\frac{1}{1 + e^z}$$

que não toma os valores 0 ou 1. O teorema anterior conduz no entanto ao seguinte resultado:

Corolário - *O contradomínio de uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e não constante inclui todos os pontos de $\mathbb{C}$ com duas possíveis excepções.*

Demonstração. Se f é uma função meromorfa que não toma três valores a, b e c, a função

$$g = \frac{1}{f - a}$$

é inteira e omite os valores $1/(b-a)$ e $1/(c-a)$. Então g é constante e o mesmo sucede com f.

■

Pode ainda provar-se que as funções analíticas em $\overline{B}(0,1)$ que omitem os valores 0 e 1 têm o módulo dos seus valores limitado por constantes que só dependem do valor que a função toma na origem. Começaremos por estabelecer um lema que reforça o enunciado do lema 21.4.

Lema 21.7 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ uma função analítica. Existe então uma função analítica $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $f = \cos \pi\varphi$ e*

$$|\varphi(0)| \leq 1 + |f(0)|.$$

Demonstração. Atendendo ao lema 21.4 existe uma função analítica $h : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tal que $f = \cos \pi h$. Seja agora n um inteiro tal que

$$\left| n - \frac{\mathrm{Re}(h(0))}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

e considere-se a função $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ definida por $\varphi = 2n - h$. É então $\cos \pi\varphi = \cos \pi h = f$, e como $|2n - \mathrm{Re}(h(0))| \leq 1$ é também $|\mathrm{Re}(\varphi(0))| \leq 1$. Pondo $a = \mathrm{Re}(\varphi(0))$ e $b = \mathrm{Im}(\varphi(0))$ temos $f(0) = \cos \pi(a + ib)$ com $|a| \leq 1$, e como

$$\begin{aligned} |\cos \pi(a+ib)| &\geq \left| \frac{\left|e^{-i\pi(a+ib)}\right| - \left|e^{i\pi(a+ib)}\right|}{2} \right| = |\sinh \pi b| = \sinh \pi |b| \\ &= \pi |b| + \frac{\pi^3 |b|^3}{3!} + \cdots \geq \pi |b| \end{aligned}$$

é $|f(0)| \geq \pi |b| \geq |b|$, pelo que

$$|\varphi(0)| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{1 + |f(0)|^2} \leq 1 + |f(0)|.$$

■

Podemos agora estabelecer o resultado que tínhamos referido.

Teorema 21.8 (Schottky, 1904) - *Dados $\mu \geq 0$ e $\theta \in \,]0,1[$ existe $M(\mu,\theta) > 0$ tal que, para toda a função f analítica em $\overline{B}(0,1)$ que omita os valores 0 e 1 e verifique a condição $|f(0)| \leq \mu$, é válida a majoração*

$$|f(z)| \leq M(\mu,\theta) \quad se \quad |z| \leq \theta.$$

Demonstração. Como f é analítica em $\overline{B}(0,1)$ existe um conjunto aberto E que contém $\overline{B}(0,1)$ e onde f também é analítica. Dado que $\partial E \cap \overline{B}(0,1) = \varnothing$, é $d\,(0,\partial E) > 1$ pelo que existe $r > 1$ tal que f é analítica no conjunto $B(0,r)$. Aplicando o lema anterior a $2f-1$ em $D = B(0,r)$ resulta então que existe uma função analítica $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ tal que $2f-1 = \cos\pi\varphi$ e

$$|\varphi\,(0)| \leq 1 + |2f(0) - 1| \leq 2 + 2\,|f(0)|\,.$$

Como φ não toma valores inteiros, aplicando de novo o lema anterior vemos que existe uma função analítica $\psi : D \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ tal que $\varphi = \cos\pi\psi$ e

$$|\psi(0)| \leq 1 + |\varphi(0)| \leq 3 + 2\,|f(0)|\,.$$

Por outro lado, dados $\theta \in \,]0,1[$ e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq \theta$, como

$$\overline{B}(z, 1-\theta) \subseteq \overline{B}(0,1) \subseteq D,$$

do corolário 2 do teorema 21.2 resulta que $\psi[D]$ contém um círculo de raio $\lambda(1-\theta)\left|\psi'(z)\right|$ com $\lambda = 3/2 - \sqrt{2}$. Dado que o lema 21.5 mostra que $\psi\,[D]$ não contém círculos de raio 1, é necessariamente $\lambda(1-\theta)\left|\psi'(z)\right| < 1$ pelo que

$$\left|\psi'(z)\right| < \frac{1}{\lambda(1-\theta)} \quad \text{se} \quad |z| \leq \theta.$$

Se $|z| \leq \theta$ temos também

$$\psi(z) - \psi(0) = \int_0^z \psi'\,(\zeta)\,d\zeta$$

e daqui vem

$$|\psi(z)| \leq |\psi(0)| + \frac{|z|}{\lambda(1-\theta)} \leq 3 + 2\,|f(0)| + \frac{\theta}{\lambda(1-\theta)} \leq A(\mu,\theta)$$

com

$$A(\mu,\theta) = 3 + 2\mu + \frac{\theta}{\lambda(1-\theta)}.$$

Como é

$$f = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\pi\,(\cos\pi\psi)\right),$$

das majorações

$$|\cos w| \leq e^{|w|}$$

e

$$\left|\frac{1+\cos w}{2}\right| \leq \frac{1+e^{|w|}}{2} \leq e^{|w|}$$

conclui-se então que o enunciado é válido com

$$M(\mu,\theta) = \exp\left(\pi e^{\pi A(\mu,\theta)}\right).$$

■

O resultado anterior generaliza-se imediatamente a funções analíticas em qualquer círculo fechado do plano complexo:

Corolário - *Dados $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $\mu \geq 0$, para cada $\theta \in]0,1[$ existe $M(\mu,\theta) > 0$ tal que, para toda a função f analítica em $\overline{B}(c,r)$ que omita os valores 0 e 1 e verifique a condição $|f(c)| \leq \mu$, é válida a majoração*

$$|f(z)| \leq M(\mu,\theta) \quad se \quad |z-c| \leq r\theta.$$

Demonstração. Resulta directamente de aplicar o teorema anterior à função g definida por

$$g(z) = f(c+rz).$$

∎

O teorema de Schottky permite obter resultados importantes sobre sucessões de funções analíticas cujos contradomínios excluem dois pontos. O teorema seguinte mostra que em condições extremamente gerais as sucessões deste tipo são localmente limitadas.

Teorema 21.9 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, z_1 e z_2 complexos distintos e (f_n) uma sucessão de funções analíticas*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}.$$

Se existir um ponto $c \in D$ para o qual a sucessão $(f_n(c))$ é limitada, então (f_n) é localmente limitada em D.

Demonstração. Como a sucessão de funções analíticas

$$\frac{f_n - z_1}{z_2 - z_1}$$

aplica $f_n[D]$ em $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ podemos sem perda de generalidade supôr $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$.

Se para algum ponto $c \in D$ a sucessão dos $f_n(c)$ for limitada, tomando $r > 0$ tal que $\overline{B}(c,r) \subseteq D$ e aplicando corolário do teorema de Schottky com $\theta = 1/2$, resulta que (f_n) é uniformemente limitada em $B(c, r/2)$. Então, sendo E o conjunto dos pontos $z \in D$ para os quais a sucessão dos $f_n(z)$ é limitada, e atendendo ao exemplo 19.12, vemos que o o teorema fica estabelecido se se provar a relação $E = D$. Como D é conexo e a hipótese $c \in E$ implica $D \cap E \neq \varnothing$, do corolário 4 do teorema 5.22 resulta que basta para isso mostrar que ∂E e D não têm pontos comuns.

Se existir um ponto $a \in \partial E \cap D$, a sucessão dos $f_n(a)$ não é limitada e tem portanto um subsucessão $(f_{\alpha_n}(a))$ com limite ∞. Pondo $g_n = 1/f_{\alpha_n}$ segue-se que (g_n) é uma sucessão de funções analíticas que aplicam D em $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ e tal que $\lim g_n(a) = 0$. O corolário do teorema de Schottky mostra então que existe $\delta > 0$ tal que (g_n) é uniformemente limitada em $B(a,\delta)$, e do teorema de Montel

19.16 resulta que (g_n) tem uma subsucessão (g_{β_n}) que converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $B(a,\delta)$. Sendo $g = \lim g_{\beta_n}$, como $g(a) = 0$ e as funções g_{β_n} não têm zeros, do corolário 1 do teorema de Hurwitz 16.9 conclui-se que g é identicamente nula em $B(a,\delta)$. Então a sucessão $1/g_{\beta_n}$ teria limite ∞ em todos os pontos de $B(a,\delta)$ o que é impossível pois ela é uma subsucessão de f_n e, como $B(a,\delta) \cap E \neq \varnothing$, nalgum ponto $z_0 \in B(a,\delta)$ a sucessão dos $f_n(z_0)$ é limitada.

■

Como consequência do teorema anterior obtemos agora versões reforçadas dos teoremas de Montel 19.16 e de Vitali (corolário 2 do teorema 19.16) para sucessões de funções que omitam dois valores.

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e a, b complexos distintos. Dada uma sucessão (f_n) de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$, se existir um ponto $c \in D$ para o qual a sucessão dos $f_n(c)$ é limitada existe então uma subsucessão de (f_n) que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e do teorema de Montel.

■

Corolário 2 (Carathéodory-Landau, 1911) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e a, b complexos distintos. Dada uma sucessão (f_n) de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$, se (f_n) convergir nos pontos de um conjunto com algum ponto de acumulação em D então (f_n) é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e do teorema de Vitali.

■

Estamos agora em condições de provar o chamado "Grande Teorema de Picard" que constitui um reforço fundamental do teorema de Casaroti-Weierstrass 14.9. Usaremos o seguinte lema:

Lema 21.10 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e (f_n) uma sucessão de funções analíticas $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, c\}$. Então alguma das sucessões (f_n) ou $(1/f_n)$ tem uma subsucessão que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de D.*

Demonstração. Se (f_n) não tiver uma subsucessão nas condições do enunciado, o corolário 1 do teorema anterior mostra que para cada ponto $z \in D$ a sucessão dos $f_n(z)$ é ilimitada. Fixado $c \in D$ existe então uma subsucessão f_{α_n} tal que $\lim f_{\alpha_n}(c) = \infty$ e pondo $g_n = 1/\ f_{\alpha_n}$ segue-se que a sucessão

$(g_n(c))$ é limitada. Como as funções g_n são analíticas em D e aplicam D em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1/c\}$, do mesmo corolário resulta que (g_n) tem uma subsucessão que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de D.

■

Teorema 21.11 (Picard, 1879) - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in D$ e $f : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com uma singularidade essencial no ponto a. Existe então $c \in \mathbb{C}$ tal que para todo o $r > 0$ vale a inclusão*

$$\mathbb{C} \setminus \{c\} \subseteq f\left[(B(a,r) \setminus \{a\}) \cap D\right].$$

Demonstração. Vamos provar que na hipótese de existirem $r > 0$ e complexos $b \neq c$ tais que $B(a,r) \subseteq D$ e $f\left[B(a,r) \setminus \{a\}\right] \subseteq \mathbb{C} \setminus \{b,c\}$, então a singularidade de f em a não seria essencial. Substituindo a função f por $f - b$ podemos ainda, sem perda de generalidade, supôr $b = 0$.

Sendo então (φ_n) a sucessão de funções definida por

$$\varphi_n(z) = f\left(a + \frac{(z-a)\,r}{n}\right) \quad \text{se} \quad 0 < |z-a| < 1 \quad \text{e} \quad n \geq 1,$$

de acordo com o lema anterior alguma das sucessões (φ_n) ou $(1/\varphi_n)$ tem uma subsucessão que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de $B(a,1) \setminus \{a\}$. Supondo que isto sucede com (φ_n), seja $\left(\varphi_{\alpha_n}\right)$ uma subsucessão que verifica a condição requerida. Então o exemplo 19.13 mostra que $\left(\varphi_{\alpha_n}\right)$ é limitada em $C\,(a, 1/2)$ pelo que existe $\mu > 0$ tal que

$$\left|\varphi_{\alpha_n}(z)\right| \leq \mu \quad \text{se} \quad |z-a| = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n \geq 1.$$

Temos assim

$$|f(w)| \leq \mu \quad \text{se} \quad |w-a| = \frac{r}{2\alpha_n} \quad \text{e} \quad n \geq 1,$$

e o princípio do módulo máximo 18.1, aplicado a cada coroa circular de centro a e raios $r/\left(2\alpha_n\right)$ e $r/\left(2\alpha_{n+1}\right)$, mostra que para todo o $n \geq 1$ é ainda

$$|f(w)| \leq \mu \quad \text{se} \quad \frac{r}{2\alpha_{n+1}} \leq |w-a| \leq \frac{r}{2\alpha_n}.$$

Vemos então que f é limitada em $B\left(a, r/2\alpha_1\right) \setminus \{a\}$, e do corolário do teorema 14.2 resulta que a singularidade de f em a é removível.

Supondo agora que $(1/\varphi_n)$ tem uma subsucessão que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de $B(a,r) \setminus \{a\}$, conclui-se do mesmo modo que $1/f$ é limitada nalgum conjunto da forma $B\left(a, \rho\right) \setminus \{a\}$. Então o ponto a é uma singularidade removível de $1/f$, e se não for também uma singularidade removível de f o exemplo 14.3 mostra que f tem um polo em a.

■

Corolário 1 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica com uma singularidade essencial em ∞. Existe então $c \in \mathbb{C}$ tal que para todo o $r > 0$ vale a inclusão*

$$\mathbb{C} \setminus \{c\} \subseteq f\left[B(\infty, r) \cap D\right].$$

Demonstração. Sejam $E = \{1/z : z \in D \setminus \{0\}\}$ e g a função definida em E por $g(z) = f(1/z)$. Então g tem uma singularidade essencial no ponto 0 e o enunciado resulta directamente do teorema anterior notando que

$$f\left[B(\infty, r) \cap D\right] = g\left[B(0, r) \cap E\right].$$

■

Podemos agora reforçar o resultado do pequeno teorema de Picard quando a função inteira não é polinomial:

Corolário 2 - *Uma função inteira e não polinomial toma uma infinidade de vezes qualquer valor complexo, com uma possível excepção.*

Demonstração. Basta aplicar o corolário anterior pois o corolário 1 do teorema 14.16 mostra que uma função inteira e não polinomial tem uma singularidade essencial no ponto ∞.

■

Obtemos ainda a seguinte propriedade geral das funções inteiras:

Corolário 3 - *Se uma função inteira e não constante omitir um dado valor $c \in \mathbb{C}$, então ela toma um infinidade de vezes qualquer valor complexo distinto de c.*

Demonstração. Como o exemplo 13.6 mostra que o contradomínio de uma função polinomial e não constante é $\mathbb{C}$, segue-se que uma função inteira nas condições do enunciado é necessariamente não polinomial e o enunciado resulta do corolário anterior.

■

22 - A função gama

O corolário do teorema 17.13 pode ser usado para introduzir a função gama no domínio complexo de uma forma natural e particularmente esclarecedora. Consideremos com efeito o problema de definir uma função f, meromorfa em $\mathbb{C}$, que verifique as condições

$$f(z+1) = zf(z) \quad \text{e} \quad f(1) = 1.$$

Pondo $g = 1/f$ somos então conduzidos a procurar funções meromorfas em $\mathbb{C}$ para as quais

$$g(z) = zg(z+1) \quad \text{e} \quad g(1) = 1. \tag{22.1}$$

Dado um inteiro $m \geq 0$ obtemos assim a relação

$$g(z) = z(z+1)...(z+m)g(z+m+1),$$

e ela mostra que g terá um zero para $z = -m$. Aplicando agora o corolário do teorema 17.13 com $p = 1$, vemos que as funções inteiras com zeros simples em $\mathbb{Z}_0^-$ e sem outros zeros têm a forma

$$g(z) = ze^{h(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \tag{22.2}$$

em que h é uma função inteira.

Se g for dada por esta expressão temos

$$zg(z+1) = g(z)e^{h(z+1)-h(z)}(z+1) \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{z+n+1}{z+n} e^{-\frac{1}{n}},$$

e como

$$(z+1) \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{z+n+1}{z+n} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{m \to +\infty} (z+m+1)\, e^{-\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}},$$

resulta

$$\frac{zg(z+1)}{g(z)} = e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{m \to +\infty} (z+m+1)\, e^{-\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}}.$$

Atendendo agora à relação

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \ln m + \gamma + o(1) \tag{22.3}$$

em que γ é a constante de Euler (cf. exemplo 1.8), obtém-se

$$\lim_{m\to+\infty}(z+m+1)\,e^{-\ln m-\gamma-o(1)}=e^{-\gamma}$$

e portanto

$$\frac{zg(z+1)}{g(z)}=e^{h(z+1)-h(z)-\gamma}.$$

A primeira das condições (22.1) equivale assim a $h(z+1)-h(z)=\gamma$, e as funções mais simples com esta propriedade têm a forma

$$h(z)=\gamma z+c$$

com $c\in\mathbb{C}$. Por outro lado, da mesma condição resulta ainda

$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z}=\lim_{z\to 0}g(z+1)=g(1)$$

pelo que a segunda das condições (22.1) equivale a

$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z}=1$$

e de (22.2) deduz-se $h(0)=0$, ou seja, $c=0$.

Concluímos assim que a função g definida por

$$g(z)=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

verifica ambas as condições (22.1) pelo que, introduzindo a função gama Γ por

$$\Gamma(z)=\frac{1}{g(z)}\quad\text{se}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-,$$

ela aparece como a solução mais simples da equação funcional $f(z+1)=zf(z)$ com a condição suplementar $f(1)=1$. Podemos agora enunciar o seguinte resultado:

Teorema 22.1 (Weierstrass) - *A função Γ, definida por*

$$\Gamma(z)=\frac{1}{ze^{\gamma z}}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}}\quad \textit{se}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-, \tag{22.4}$$

verifica a condição $\Gamma(1)=1$ e a equação funcional

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad \textit{se}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-.$$

Além disso, esta função é meromorfa em $\mathbb{C}$, não tem zeros, tem polos simples nos pontos de $\mathbb{Z}_0^-$, é real quando $z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^-$, e verifica a relação $\Gamma(n+1)=n!$ se $n\in\mathbb{Z}_0^+$.

Demonstração. A análise precedente mostra que Γ verifica as condições $\Gamma(1) = 1$ e a equação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$. Atendendo à relação

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

do teorema 17.13 resulta que $1/\Gamma$ é uma função inteira com zeros simples nos inteiros não positivos, pelo que Γ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ que nunca se anula e tem polos simples nestes pontos. Da definição resulta ainda directamente que $\Gamma(z)$ é real quando $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, e a relação $\Gamma(n+1) = n!$ se $n \in \mathbb{Z}_0^+$ é imediata por indução a partir da equação funcional.
■

Exemplo 22.2 - *Para cada* $n \in \mathbb{Z}_0^+$ *tem-se*

$$Res\,(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

É efectivamente

$$Res\,(\Gamma; 0) = \lim_{z \to 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \to 0} \Gamma(z+1) = 1,$$

e admitindo o resultado válido para um certo $n \geq 0$ é também

$$\begin{aligned} Res\,(\Gamma; -n-1) &= \lim_{z \to -n-1} (z+n+1)\,\Gamma(z) = \lim_{z \to -n-1} \frac{(z+n+1)\,\Gamma(z+1)}{z} \\ &= \lim_{w \to -n} \frac{(w+n)}{w-1}\Gamma(w) = -\frac{1}{n+1} Res\,(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Exemplo 22.3 - *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ *tem-se*

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z}).$$

Efectivamente, atendendo a que a função Γ é real na recta real esta identidade resulta do teorema 9.15.

Exemplo 22.4 - *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ *tem-se*

$$|\Gamma(z)| \leq |\Gamma(\operatorname{Re}(z))|$$

Efectivamente, como para cada $w \in \mathbb{C}$ é $|w| \geq |\operatorname{Re} w|$, atendendo a (22.4) temos

$$|\Gamma(z)| = \frac{1}{|z|\,e^{\gamma \operatorname{Re}(z)}} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{\operatorname{Re}(z)}{n}}}{\left|1 + \frac{z}{n}\right|} \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}(z)|\,e^{\gamma \operatorname{Re}(z)}} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{\operatorname{Re}(z)}{n}}}{\left|1 + \frac{\operatorname{Re}(z)}{n}\right|} = |\Gamma(\operatorname{Re}(z))|.$$

Exemplo 22.5 - *Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $a < b$, a função gama é limitada na faixa vertical $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq b\}$.*

Efectivamente, como Γ é contínua em $[a, b]$ existe M tal que $|\Gamma\,(x)| \leq M$ para todo o $x \in [a, b]$, e atendendo ao exemplo anterior temos ainda $|\Gamma\,(z)| \leq M$ se $a \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq b$.

O exemplo seguinte mostra como o valor de certos produtos infinitos se pode exprimir em termos da função gama.

Exemplo 22.6 - *Dados $a_1, ..., a_r$ e $b_1, ..., b_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tais que*

$$a_1 + \cdots + a_r = b_1 + \cdots + b_s,$$

tem-se

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)...\left(1+\frac{a_r}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)...\left(1+\frac{b_s}{n}\right)} = \frac{\Gamma\,(1+b_1)\,...\Gamma\,(1+b_s)}{\Gamma\,(1+a_1)\,...\Gamma\,(1+a_r)}.$$

Atendendo a (22.4), para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ temos efectivamente

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{z\Gamma\,(z)\,e^{\gamma z}} = \frac{1}{\Gamma\,(1+z)\,e^{\gamma z}}$$

e esta relação ainda é válida para $z = 0$. Obtemos assim

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)...\left(1+\frac{a_r}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)...\left(1+\frac{b_s}{n}\right)} &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}...\left(1+\frac{a_r}{n}\right)e^{-\frac{a_r}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}...\left(1+\frac{b_s}{n}\right)e^{-\frac{b_s}{n}}} \\
&= \frac{\Gamma\,(1+b_1)\,e^{\gamma b_1}...\Gamma\,(1+b_s)\,e^{\gamma b_s}}{\Gamma\,(1+a_1)\,e^{\gamma a_1}...\Gamma\,(1+a_r)\,e^{\gamma a_r}} \\
&= \frac{\Gamma\,(1+b_1)\,...\Gamma\,(1+b_s)}{\Gamma\,(1+a_1)\,...\Gamma\,(1+a_r)}.
\end{aligned}$$

O teorema 17.9 conduz directamente à chamada *fórmula dos complementos da função gama*, devida a Euler.

Teorema 22.7 (Fórmula dos complementos) - *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tem-se*

$$\Gamma\,(z)\,\Gamma\,(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Demonstração. Atendendo a (22.4), para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tem-se

$$\frac{1}{z\Gamma\,(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

e é também

$$\frac{1}{\Gamma\,(1-z)} = \frac{1}{(-z)\Gamma\,(-z)} = e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Temos então

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

e o enunciado resulta do teorema 17.9.

■

Corolário - *Tem-se*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{22.5}$$

Demonstração. Fazendo $z = 1/2$ na fórmula dos complementos deduz-se $\Gamma^2(1/2) = \pi$, e da definição resulta $\Gamma(1/2) > 0$.

■

Exemplo 22.8 - *Tem-se*

$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh \pi y}} \quad \textit{se} \quad y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Efectivamente, atendendo ao exemplo 22.3 e à fórmula dos complementos é

$$|\Gamma(iy)|^2 = \Gamma(iy)\Gamma(-iy) = -\frac{\Gamma(iy)\Gamma(1-iy)}{iy} = -\frac{\pi}{iy\sin i\pi y} = \frac{\pi}{y\sinh \pi y}.$$

Exemplo 22.9 - *Tem-se*

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh \pi y}} \quad \textit{se} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Como no exemplo anterior é efectivamente

$$\begin{aligned}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}-iy\right)\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi/2+i\pi y)} = \frac{\pi}{\cos i\pi y} = \frac{\pi}{\cosh \pi y}.\end{aligned}$$

O teorema seguinte dá outra representação importante da função gama, conhecida por fórmula de Gauss.

Teorema 22.10 (Fórmula de Gauss) - *Para cada* $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ *tem-se*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}.$$

Demonstração. Atendendo a (22.4), para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ temos

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{1}{ze^{\gamma z}} \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{z}{k}}}{\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)} \\ &= \frac{1}{z} \lim_{n\to+\infty} n! \frac{e^{z\left(-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{\prod_{k=1}^{n}(z+k)}\end{aligned}$$

e de (22.3) resulta

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n\to+\infty} n! \frac{e^{z\ln n}}{\prod_{k=1}^{n}(z+k)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}.$$

■

A fórmula de Gauss permite deduzir outra propriedade importante da função gama, devida a Legendre.

Teorema 22.11 (Legendre) - *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ *tem-se*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

Demonstração. Notando que $z/2$ e $(z+1)/2$ não pertencem a $\mathbb{Z}_0^-$ se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, a fórmula de Gauss dá sucessivamente

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{\frac{z}{2}}n!n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)...\left(\frac{z}{2}+n\right)\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)...\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n^{\frac{1}{2}} 2^{2n+2}(n!)^2}{z(z+2)...(z+2n)(z+1)(z+3)...(z+2n+1)} \\ &= \frac{1}{2^{z-1}} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^z n 2^{2n+1}(n!)^2}{z(z+1)(z+2)...(z+2n+1)n^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2^{z-1}} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!(2n)^z}{z(z+1)(z+2)...(z+2n)} \frac{2n}{z+2n+1} \frac{2^{2n}}{n^{\frac{1}{2}}\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{1}{2^{z-1}}\Gamma(z) \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{n^{\frac{1}{2}}\binom{2n}{n}}.\end{aligned}$$

Pondo agora

$$c = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{n^{\frac{1}{2}}\binom{2n}{n}}$$

temos então

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{c}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

Fazendo $z = 1$ nesta identidade e usando a relação (22.5) obtém-se a fórmula do enunciado.

■

Corolário (Fórmula da duplicação) - *Para cada complexo z tal que $2z \notin \mathbb{Z}_0^-$ tem-se*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Demonstração. Basta mudar z em $2z$ no teorema anterior.

■

O teorema seguinte dá uma forma particularmente útil de distinguir a função gama entre as funções f que verificam a equação funcional $f(z+1) = zf(z)$.

Teorema 22.12 (Wielandt, 1939) - *Sejam D o semiplano*

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\},$$

S a faixa vertical

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$$

e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica que verifique a condição $f(z+1) = zf(z)$ para cada $z \in D$. Se f for limitada em S é então $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ para cada $z \in D$.

Demonstração. Seja φ a função definida em D por $\varphi(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z)$. Temos $\varphi(1) = 0$, $\varphi(z+1) = z\varphi(z)$ se $z \in D$, e também

$$\lim_{z\to 0} \varphi(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z+1)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z+1) - \varphi(1)}{z} = \varphi'(1).$$

Prolongando então φ à região $-1 < \mathrm{Re}(z) \leq 0$ pelas relações

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(z+1)}{z} \quad \text{se} \quad -1 < \mathrm{Re}(z) \leq 0 \quad \text{e} \quad z \neq 0,$$

e

$$\varphi(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z+1)}{z} = \varphi'(1),$$

a função assim definida ainda é analítica. Usando agora indutivamente a relação $\varphi(z) = \varphi(z+1)/z$ pode prolongar-se φ a todo o plano complexo e obtém-se uma função inteira que verifica a condição $\varphi(z+1) = z\varphi(z)$.

Por outro lado, atendendo ao exemplo 22.5 e à hipótese feita sobre f vemos que φ é limitada em S. Seja então L um majorante de $|\varphi|$ em S e consideremos o conjunto

$$T = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}.$$

Temos

$$|\varphi(z)| = \frac{|\varphi(z+1)|}{|z|} \leq L \quad \text{se} \quad z \in T \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) > 1,$$

e dado que φ também é limitada no conjunto compacto

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ e } |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$$

resulta que φ é limitada em T. Pondo agora $\sigma(z) = \varphi(z)\varphi(1-z)$, como $\varphi(z)$ e $\varphi(1-z)$ percorrem os mesmos valores quando $z \in T$, segue-se que a função σ ainda é limitada em T. Para cada $z \in \mathbb{C}$ temos no entanto

$$\sigma(z+1) = z\, \varphi(z)\, \varphi(-z) = -\, \varphi(z)\varphi(1-z) = -\sigma(z)$$

pelo que $|\sigma(z+1)| = |\sigma(z)|$ e o facto de σ ser limitada em T permite concluir que σ é limitada em $\mathbb{C}$. Como σ é inteira e $\sigma(0) = \varphi(1)\varphi(0) = 0$, o teorema de Liouville mostra agora que σ é identicamente nula. Daqui resulta que o mesmo sucede com φ pois supondo $\varphi(z_0) \neq 0$ para algum $z_0 \in \mathbb{C}$, existia $r > 0$ tal que φ nunca se anulava em $B(z_0, r)$. Então a condição $\varphi(z)\varphi(1-z) = 0$ exigia $\varphi(z) = 0$ para todo o $z \in B(1-z_0, r)$ e φ seria identicamente nula, contrariamente à hipótese. Em particular φ é identicamente nula em D o que implica $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ para cada $z \in D$.

■

Para abordar a representação da função Γ na forma de um integral paramétrico vamos primeiro generalizar a integrais de Riemann impróprios as propriedades dos integrais paramétricos referidas no teorema 13.10.

Teorema 22.13 - *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo de extremos a e b com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e $\varphi : D \times I \longrightarrow \mathbb{C}$. Suponha-se que para cada $t \in I$ a função $z \mapsto \varphi(z,t)$ é analítica e que para cada $z \in D$ a função $t \mapsto \varphi(z,t)$ é localmente integrável-R em I. Suponha-se ainda que para cada conjunto compacto $K \subseteq D$ existe uma função $\psi_K : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, localmente integrável-R em I, tal que $\int_a^b \psi_K$ converge e*

$$|\varphi(z,t)| \leq \psi_K(t) \quad \textit{se} \quad z \in K \quad \text{e} \quad t \in I.$$

Então, para cada $z \in D$ o integral $\int_a^b \varphi(z,t)dt$ é absolutamente convergente e a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \int_a^b \varphi(z,t)dt$$

é analítica. Além disso, para cada inteiro positivo m e para cada $z \in D$ o integral

$$\int_a^b \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\, dt$$

é absolutamente convergente e tem-se

$$f^{(m)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\,dt.$$

Demonstração. Dado $z \in D$ e tomando $K = \{z\}$, a relação $|\varphi(z,t)| \le \psi_K(t)$ se $t \in I$ mostra que o integral $\int_a^b \varphi(z,t)dt$ é absolutamente convergente. Sejam agora (α_n) e (β_n) duas sucessões tais que $\lim \alpha_n = a$ e $\lim \beta_n = b$ com $a < \alpha_n < \beta_n < b$, e ponha-se

$$f_n(z) = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi(z,t)dt.$$

Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$, como ψ_K é limitada em cada intervalo $[\alpha_n, \beta_n]$ segue-se que φ é limitada em $K\times\, [\alpha_n, \beta_n]$ e o teorema 13.10 mostra que (f_n) é uma sucessão de funções analíticas.

Para cada $z \in K$ temos ainda

$$|f_n(z) - f(z)| \le \left|\int_a^{\alpha_n} \varphi(z,t)dt\right| + \left|\int_{\beta_n}^b \varphi(z,t)dt\right| \le \int_a^{\alpha_n} \psi_K(t)dt + \int_{\beta_n}^b \psi_K(t)dt$$

pelo que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \le \int_a^{\alpha_n} \psi_K(t)dt + \int_{\beta_n}^b \psi_K(t)dt$$

e (f_n) converge uniformemente para f em K. Então o teorema de Weierstrass 13.9 mostra que f também é analítica.

Por outro lado, dados $z \in D$ e um inteiro positivo m, o teorema 13.10 mostra ainda que a função definida por

$$t \mapsto \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)$$

é localmente integrável-R em I e que para cada n se tem

$$f_n^{(m)}(z) = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\,dt.$$

Tomando $r > 0$ tal que $\overline{B}(z,r) \subseteq D$ e pondo $K = \overline{B}(z,r)$, das desigualdades de Cauchy obtém-se

$$\left|\frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\right| \le \frac{m!}{r^m} \sup_{|\zeta - z| = r} |\varphi(\zeta,t)| \le \frac{m!\psi_K(t)}{r^m} \quad \text{se} \quad t \in I$$

e deduz–se que o integral

$$\int_a^b \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\,dt$$

é absolutamente convergente.

Finalmente, do teorema de Weierstrass 13.9 resulta ainda

$$f^{(m)}(z) = \lim f_n^{(m)}(z)$$

e conclui-se

$$f^{(m)}(z) = \lim \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial^m \varphi}{\partial z^m}(z,t)\,dt.$$

■

O teorema de Wielandt 22.12 pode agora ser usado para representar a função gama na forma de um integral paramétrico.

Teorema 22.14 - *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad se \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

Demonstração. Pondo

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

o integral dado é absolutamente convergente se $z \in D$, e para cada $t \in \mathbb{R}^+$ a função definida em D por $z \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ é analítica.

Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$ sejam

$$\alpha = \min\{\mathrm{Re}\,(z) : z \in K\} > 0 \quad \text{e} \quad \beta = \max\{\mathrm{Re}\,(z) : z \in K\}.$$

Definindo uma função $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}e^{-t} & \text{se} \quad 0 < t < 1 \\ t^{\beta-1}e^{-t} & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

temos então $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| \leq \varphi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$e $z \in K$. Como o integral $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge, aplicando o teorema anterior concluímos que a função f definida por

$$f(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0$$

é analítica em D. Além disso temos

$$|f(z)| \leq \int_0^{+\infty} t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}dt = f\left(\mathrm{Re}\,(z)\right)$$

e a continuidade de f mostra que esta função é limitada na faixa $1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 2$. Como é ainda $f(1) = 1$ e

$$f(z+1) = -\int_0^{+\infty} t^z \left(e^{-t}\right)' dt = \int_0^{+\infty} z t^{z-1}e^{-t}dt = zf(z) \quad \text{se} \quad z \in D,$$

o teorema de Wielandt 22.12 permite então concluir que se tem

$$f(z) = \Gamma(z) \ \text{ se } \ z \in D.$$

■

Corolário 1 - Para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se

$$\Gamma^{(m)}(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \ln^m t dt \quad se \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

Demonstração. Efectivamente, na demonstração do teorema anterior estabeleceu-se que o integral

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

verifica as condições de aplicabilidade do teorema 22.13. Temos então

$$\Gamma^{(m)}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(t^{z-1} e^{-t}\right) dt = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \ln^m t dt \ \text{ se } \ \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

■

Como aplicação do teorema anterior pode agora obter-se o valor do *integral de De Moivre*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Corolário 2 - *Tem-se*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Demonstração. Efectivamente, a mudança de variável $t = x^2$ conduz a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■

O teorema de Wielandt 22.12 pode também ser usado para provar outra identidade fundamental na teoria da função gama.

Teorema 22.15 (Euler) - *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad se \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0 \quad e \quad \mathrm{Re}\,(w) > 0.$$

Demonstração. Pondo

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}\,,$$

o integral dado é absolutamente convergente se $z \in D$ e $w \in D$. Por outro lado, fixados $t \in \,]0,1[$ e $z \in D$, a função definida em D por

$$w \mapsto t^{z-1}(1-t)^{w-1}$$

é analítica. Além disso, sendo K um subconjunto compacto de D e

$$\alpha = \min\{\mathrm{Re}\,(z) : z \in K\} > 0,$$

temos

$$\left|t^{z-1}(1-t)^{w-1}\right| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1}(1-t)^{\alpha-1} \quad \text{se} \quad 0 < t < 1.$$

Então, como para cada $z \in D$ o integral

$$\int_0^{+\infty} t^{\mathrm{Re}(z)-1}(1-t)^{\alpha-1}dt$$

é convergente, mantendo z fixo o teorema 22.13 permite concluir que o integral

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

define uma função analítica de w.

Mantendo ainda z fixo, seja agora f a função definida por

$$f(w) = \Gamma(z+w)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \quad \text{se} \quad w \in D.$$

Temos

$$f(w+1) = \Gamma(z+w+1)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w}dt$$

e como

$$z\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w}dt = \int_0^1 \left(t^z\right)'(1-t)^w\,dt = w\int_0^1 t^z\,(1-t)^{w-1}\,dt,$$

da relação

$$t^{z-1}\,(1-t)^w + t^z\,(1-t)^{w-1} = t^{z-1}\,(1-t)^{w-1}$$

resulta

$$(z+w)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w}dt = w\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

Obtém-se assim

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w}dt = \frac{wf(w)}{(z+w)\,\Gamma(z+w)} = \frac{wf(w)}{\Gamma(z+w+1)},$$

donde se conclui a identidade

$$f(w+1) = wf(w) \quad \text{se} \quad w \in D.$$

Por outro lado, da definição de f resulta

$$|f(w)| \le |\Gamma(z+w)| \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1}(1-t)^{\mathrm{Re}(w)-1} dt$$

donde se deduz

$$|f(w)| \le |\Gamma(z+w)| \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1} dt \quad \text{se} \quad 1 \le \mathrm{Re}\,(w) \le 2,$$

e o exemplo 22.5 mostra que f é limitada na faixa $1 \le \mathrm{Re}\,(w) \le 2$. Atendendo ao teorema de Wielandt 22.12 conclui-se então

$$f(w) = f(1)\Gamma(w) \quad \text{se} \quad w \in D$$

pelo que

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \frac{f(1)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad \text{se} \quad z, w \in D.$$

O enunciado resulta agora de ser

$$f(1) = \Gamma(z+1) \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z).$$

■

Corolário 1 - *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \textit{se} \quad 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1.$$

Demonstração. Fazendo $x = t/(1-t)$ e usando a fórmula dos complementos 22.7 obtém-se efectivamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

■

Corolário 2 - *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{z-1} x \cos^{w-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right)} \quad \textit{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \ \ \textit{e} \ \ \mathrm{Re}(w) > 0.$$

Demonstração. Como a mudança de variável $t = \sin^2 x$ transforma o integral dado em

$$\int_0^1 \frac{1}{2} t^{z/2-1}(1-t)^{w/2-1}dt$$

basta agora aplicar o teorema anterior.

■

O teorema seguinte exprime dois integrais notáveis em termos da função gama.

Teorema 22.16 (Cauchy) - *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^z} dt = \frac{\pi}{2\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}} \quad se \quad 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^z} dt = \frac{\pi}{2\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}} \quad se \quad 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 2.$$

Demonstração. Fixado $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1$, seja f a função definida por

$$f(u) = \frac{1}{u^z} \quad \text{se} \quad u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Como $\lim_{u\to 0} uf(u) = \lim_{u\to\infty} f(u) = 0$ e

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \Gamma\,(1-z)\,,$$

a função f verifica as condições de aplicabilidade do teorema 12.11. Para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathrm{Re}(w) \geq 0$ tem-se então

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = w\int_0^{+\infty} f\,(wt)\,e^{-wt}dt,$$

ou seja,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-wt}}{t^z} dt = \Gamma\,(1-z)\,w^{z-1}.$$

Em particular resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-it}}{t^z} dt = \Gamma\,(1-z)\,e^{\frac{i\pi}{2}(z-1)} \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^z} dt = \Gamma\,(1-z)\,e^{-\frac{i\pi}{2}(z-1)},$$

donde se deduz

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^z} dt = \Gamma\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^z} dt = \Gamma\,(1-z)\cos\frac{\pi z}{2}.$$

Usando agora a fórmula dos complementos 22.7 obtém-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^z} dt = \frac{\pi}{2\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^z} dt = \frac{\pi}{2\Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}},$$

o que estabelece as relações do enunciado para todo o z tal que $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$.

Como o segundo membro da última identidade define uma função analítica no conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 2\},$$

o princípio do prolongamento analítico 9.10 mostra que para ampliar esta identidade à região $1 \le \operatorname{Re}(z) < 2$ basta provar que o primeiro membro também define uma função analítica em D.

Decompondo o intervalo de integração e integrando por partes em $[1, +\infty[$ temos, no entanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^z} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^z} dt + \cos 1 - z \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{z+1}} dt \quad \text{se} \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 2$$

e o problema reduz-se assim a provar que os integrais

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^z} dt \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{z+1}} dt$$

representam ambos funções analíticas em D.

Dado um conjunto compacto $K \subseteq D$ sejam então

$$\alpha = \inf \{\operatorname{Re}(z) : z \in K\} > 0 \quad \text{e} \quad \beta = \sup \{\operatorname{Re}(z) : z \in K\} < 2.$$

Como é $|\sin t| \le t$ para $t \in [0, 1]$, temos

$$\left| \frac{\sin t}{t^z} \right| \le \frac{1}{|t^{z-1}|} \le \frac{1}{t^{\beta-1}} \quad \text{se} \quad z \in K \quad \text{e} \quad t \in]0, 1],$$

e temos também

$$\left| \frac{\cos t}{t^{z+1}} \right| \le \frac{1}{|t^{z+1}|} \le \frac{1}{t^{\alpha+1}} \quad \text{se} \quad z \in K \quad \text{e} \quad t \in [1, +\infty[.$$

Notando agora que os integrais

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-1}} dt \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt$$

são ambos convergentes, o teorema 22.13 permite concluir o resultado pretendido.

■

O corolário seguinte generaliza o exemplo 12.13.

Corolário - *Dado* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cos\frac{\pi}{2\alpha} \quad se \quad \alpha > 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi}{2\,|\alpha|} \quad se \quad |\alpha| > 1.$$

Demonstração. Tomando $\alpha > 1$ no primeiro destes integrais, a mudança de variável $t = x^\alpha$ e o teorema anterior conduzem a

$$\int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx = \frac{\pi}{2\alpha\Gamma\left(1-1/\alpha\right)\sin\pi/\left(2\alpha\right)}.$$

A identidade do enunciado obtém-se agora usando a fórmula dos complementos 22.7 e a equação funcional da função gama.

De modo análogo, tomando α tal que $|\alpha| > 1$ obtém-se a relação

$$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx = \frac{\pi}{2\,|\alpha|\,\Gamma\left(1-1/\alpha\right)\cos\pi/\left(2\alpha\right)},$$

e usando a fórmula dos complementos o segundo membro transforma-se em

$$\frac{1}{|\alpha|}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi}{2\alpha} = \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi}{2\,|\alpha|}.$$

■

Teorema 22.17 - *Para cada* $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ *tem-se*

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$$

e a série converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Demonstração. De (22.4) resulta

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-,$$

e o teorema 17.13 mostra que o produto infinito converge uniformemente em todo o subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Como a função que ele define não tem zeros em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, do teorema 17.6 resulta a relação

$$\left(\frac{1}{\Gamma(z+1)}\right)'\Gamma(z+1) = \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$$

que é equivalente à do enunciado. Do teorema 17.6 resulta ainda que a série no segundo membro converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

■

Corolário - *Tem-se*

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

Demonstração. Resulta directamente de fazer $z = 0$ na fórmula do teorema anterior.

■

Exemplo 22.18 - *Tem-se*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma.$$

Efectivamente basta usar o corolário anterior e o corolário 1 do teorema 22.14.

Exemplo 22.19 - *Tem-se*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{x^2} dx = -\gamma.$$

Efectivamente basta mudar x em $\ln x$ no exemplo anterior.

Exemplo 22.20 - *Tem-se*

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \gamma.$$

Efectivamente, mudando x em $1/x$ no exemplo anterior resulta

$$\int_0^1 \ln \ln (1/x) \, dx = -\gamma$$

e usando a identidade

$$\int_0^1 \ln x dx = \int_0^1 \ln(1-x) dx$$

obtém-se

$$\int_0^1 f(x) dx = -\gamma,$$

com

$$f(x) = \ln x - \ln(1-x) + \ln \ln \frac{1}{x}.$$

Notando agora que $\lim_{x\to 0} xf(x) = \lim_{x\to 1} xf(x) = 0$ e integrando por partes, deduz-se

$$\gamma = \int_0^1 xf'(x)dx$$

e daqui resulta a fórmula pretendida.

A função ψ definida por

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$$

diz-se a *função digama*. Como $1/\Gamma$ é uma função inteira vemos que ψ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, e do corolário do teorema anterior resulta

$$\psi(1) = -\gamma. \tag{22.6}$$

Exemplo 22.21 (Fórmula dos complementos da função digama) - *Tem-se*

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot \pi z \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{22.7}$$

Efectivamente basta tomar a derivada logarítmica da fórmula dos complementos da função gama, dada pelo teorema 22.7.

Exemplo 22.22 - *Tem-se*

$$\psi\left(\frac{z}{2}\right) + \psi\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2\psi(z) - 2\ln 2 \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-.$$

Efectivamente basta tomar a derivada logarítmica da identidade do teorema de Legendre 22.11.

Exemplo 22.23 - *Tem-se*

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - 3\ln 2 - \frac{\pi}{2} \quad \textit{e} \quad \psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma - 3\ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Efectivamente, fazendo $z = 1$ no exemplo anterior e usando a relação (22.6) obtém-se o valor de $\psi(1/2)$. Os valores de $\psi(1/4)$ e $\psi(3/4)$ resultam agora de fazer $z = 1/4$ em (22.7) e $z = 1/2$ no exemplo anterior.

Teorema 22.24 - *A função digama verifica a equação funcional*

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \tag{22.8}$$

e tem-se

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right) \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \tag{22.9}$$

sendo a série uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$.

Demonstração. Tomando a derivada logarítmica da equação funcional da função gama

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$$

obtém-se a equação funcional da função digama. A segunda parte do enunciado resulta agora directamente do teorema 22.17.

■

Corolário 1 - *Tem-se*

$$\psi(z) = \lim_{m \to +\infty} \left(\ln m - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+z} \right) \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-.$$

Demonstração. Efectivamente a relação (22.9) pode escrever-se na forma

$$\psi(z) = \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \gamma - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+z} \right)$$

e a relação (22.3) conduz à identidade pretendida.

■

Corolário 2 - *Para cada inteiro* $m \geq 0$ *tem-se*

$$\psi^{(m)}(z+1) - \psi^{(m)}(z) = (-1)^m \frac{m!}{z^{m+1}} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-.$$

Demonstração. Basta derivar sucessivamente a equação funcional (22.8).

■

Corolário 3 - *Para cada inteiro* $m \geq 1$ *tem-se*

$$\psi^{(m)}(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+z)^{m+1}} \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-.$$

Demonstração. Basta aplicar o corolário do teorema de Weierstrass 13.9 à derivação sucessiva da relação (22.9).
■

Exemplo 22.25 - *Para cada inteiro* $m \geq 1$ *tem-se*

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+1}}.$$

Efectivamente basta tomar $z = 1$ no corolário anterior.

Pondo

$$\zeta(m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$$

para cada inteiro $m \geq 2$ (cf. secção 23), a relação anterior traduz-se por

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1). \tag{22.10}$$

Exemplo 22.26 - *Tem-se*

$$\Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Efectivamente, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ temos

$$\psi'(z) = \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{\Gamma''(z)}{\Gamma(z)} - \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)^2$$

pelo que

$$\Gamma''(1) = (\Gamma'(1))^2 + \psi'(1).$$

Como o exemplo anterior mostra que

$$\psi'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

basta agora aplicar o corolário do teorema 22.17.

À semelhança do que sucede com a função gama, também $\psi(z)$ admite representações úteis sob a forma de integrais paramétricos quando $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Teorema 22.27 (Legendre) - *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1-t} dt \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Demonstração. Tomando $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$ e partindo da relação (22.9) temos

$$\psi(z) + \gamma + \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+z} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(t^n - t^{n+z} \right) dt.$$

Dado um intervalo $[a, b] \subseteq [0, 1[$, para cada $t \in [a, b]$ é

$$\left| t^n - t^{n+z} \right| = |1 - t^z| \, t^n \leq 2b^n$$

e o critério de Weierstrass mostra que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(t^n - t^{n+z} \right)$$

converge uniformemente em $[a, b]$. Além disso, para cada $m \geq 0$ temos

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \left(t^n - t^{n+z} \right) \right| = \left(1 - t^{m+1} \right) \left| \frac{1 - t^z}{1 - t} \right| \leq \left| \frac{1 - t^z}{1 - t} \right| \quad \text{se} \quad 0 \leq t < 1$$

e a relação $1 - t^z \sim z(1 - t) \quad (t \to 1)$ mostra que a função definida por

$$\frac{1 - t^z}{1 - t}$$

é limitada quando $t \in [0, 1[$.

Aplicando o teorema 11.4 temos então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(t^n - t^{n+z} \right) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(t^n - t^{n+z} \right) dt \ = \int_0^1 \frac{1 - t^z}{1 - t} dt$$

e a fórmula do enunciado resulta de ser

$$\frac{1}{z} = \int_0^1 t^{z-1} dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1} - t^z}{1 - t} dt.$$

■

Corolário 1 - *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se*

$$\psi(z) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln t} + \frac{t^{z-1}}{1 - t} \right) dt \quad \textit{se} \ \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior e do exemplo 22.20.

■

Corolário 2 - *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\psi(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt.$$

Demonstração. Basta mudar t em e^{-t} no corolário anterior.
■

Corolário 3 - *Para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se*

$$\psi^{(m)}(z) = -\int_0^1 \frac{t^{z-1} \ln^m t}{1-t} dt \quad se \ \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Demonstração. Dado $w \in \mathbb{C}$, do desenvolvimento de e^w em série de potências de w resulta a relação $|e^w - 1| \leq e^{|w|} - 1$ que conduz à desigualdade

$$\left| \frac{1 - t^{z-1}}{1-t} \right| \leq \frac{t^{-|z-1|} - 1}{1-t} \quad \text{se} \ \ 0 \leq t < 1.$$

Sendo K um conjunto compacto contido no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\mu = \max\{|z-1| : z \in K\}$ temos então

$$\left| \frac{1 - t^{z-1}}{1-t} \right| \leq \frac{t^{-\mu} - 1}{1-t} \quad \text{se} \ \ 0 \leq t < 1 \ \ \text{e} \ \ z \in K.$$

Como a função definida por $(t^{-\mu} - 1)/(1-t)$ é limitada quando $t \in [0, 1[$, a expressão de $\psi^{(m)}$ resulta agora de aplicar o teorema 13.10 à identidade do teorema anterior.
■

Exemplo 22.28 - *Para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se*

$$\int_0^1 \frac{\ln^m t}{1-t} dt = (-1)^m m! \zeta(m+1).$$

Efectivamente basta fazer $z = 1$ na expressão de $\psi^{(m)}(z)$ dada pelo corolário anterior e usar a relação (22.10).

Exemplo 22.29 - *Tem-se*

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \quad \psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6},$$

$$\psi\left(\frac{1}{6}\right) = -\gamma - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \psi\left(\frac{5}{6}\right) = -\gamma - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

Efectivamente, fazendo $z = 1/3$ no teorema 22.27 e mudando t em t^3 no integral correspondente, obtém-se

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) + \gamma = -3\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = -\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Os restantes valores de ψ resultam agora de tomar sucessivamente $z = 1/3$ e $z = 1/6$ na fórmula dos complementos da função digama e $z = 1/3$ na fórmula do exemplo 22.22.

O teorema seguinte mostra que a soma de uma série cujo termo geral é uma função racional se pode exprimir em termos da função digama e das suas derivadas.

Teorema 22.30 - *Seja R uma função racional própria, sem polos nos inteiros não negativos, e cuja decomposição em fracções simples é da forma*

$$R(z) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{C_{jk}}{(z+a_j)^k}.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} R(n)$ for convergente tem-se então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R(n) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{(-1)^k C_{jk}}{(k-1)!}\psi^{(k-1)}(a_j).$$

Demonstração. Como a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} R(n)$ exige $\lim nR(n) = 0$, de

$$R(n) = \sum_{j=1}^{r} \frac{C_{j1}}{n+a_j} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=2}^{m_j} \frac{C_{jk}}{(n+a_j)^k}$$

deduz-se

$$\sum_{j=1}^{r} C_{j1} = 0.$$

Para cada $n \geq 0$ podemos então escrever

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{C_{j1}}{n+a_j} = -\sum_{j=1}^{r} C_{j1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+a_j}\right)$$

pelo que

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=1}^{r} \frac{C_{j1}}{n+a_j} = -\sum_{j=1}^{r} C_{j1}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+a_j}\right)$$

e esta identidade pode ainda escrever-se na forma

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=1}^{r}\frac{C_{j1}}{n+a_j}=-\sum_{j=1}^{r}C_{j1}\left(-\gamma+\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+a_j}\right)\right).$$

Atendendo a (22.3) é então

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=1}^{r}\frac{C_{j1}}{n+a_j}=-\sum_{j=1}^{r}C_{j1}\left(\ln m-\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+a_j}+o(1)\right)$$

e usando o corolário 1 do teorema 22.24 obtém-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{r}\frac{C_{j1}}{n+a_j}=-\sum_{j=1}^{r}C_{j1}\psi\left(a_j\right).$$

Como do corolário 3 do teorema 22.24 resulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{jk}}{\left(n+a_j\right)^k}=C_{jk}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\psi^{(k-1)}\left(a_j\right)\quad\text{se}\quad k\geq 2\quad\text{e}\quad 1\leq j\leq r,$$

fica estabelecida a fórmula do enunciado.

■

Exemplo 22.31 - *Dados inteiros positivos* p_1, p_2, q_1, q_2 *tais que*

$$p_1/q_1\neq p_2/q_2,$$

tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(q_1 n+p_1\right)\left(q_2 n+p_2\right)}=\frac{\psi\left(p_1/q_1\right)-\psi\left(p_2/q_2\right)}{p_1q_2-p_2q_1}.$$

Efectivamente, neste caso é válida a decomposição

$$\frac{1}{\left(q_1 z+p_1\right)\left(q_2 z+p_2\right)}=\frac{1}{p_2q_1-p_1q_2}\left(\frac{1}{z+p_1/q_1}-\frac{1}{z+p_2/q_2}\right)$$

Exemplo 22.32 - *Dados inteiros positivos* p *e* q *tem-se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{qn+p}=\frac{1}{2q}\left(\psi\left(\frac{p}{2q}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{p}{2q}\right)\right).$$

É efectivamente

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{qn+p} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2qn+p}-\frac{1}{2qn+q+p}\right)\\ &= \frac{1}{2q}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+p/2q}-\frac{1}{n+p/2q+1/2}\right).\end{aligned}$$

Aplicando as duas fórmulas anteriores obtemos, por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+1)} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{6}\left(\psi\left(\frac{2}{3}\right) - \psi\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Usando a representação integral de ψ dada pelo teorema 22.27 é possível exprimir os valores de $\psi(x)$, com x racional positivo, por uma fórmula que apenas envolve funções elementares e constantes matemáticas conhecidas.

Aplicando sucessivamente a equação funcional (22.8) o problema reduz-se a calcular $\psi(p/q)$ em que p e q são inteiros tais que $0 < p < q$, e isso pode ser feito usando a identidadae que vamos estabelecer.

Teorema 22.33 (Gauss) - *Dados inteiros p, q tais que $0 < p < q$, tem-se*

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \ln 2q - \frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q} + 2\sum_{k=1}^{\lfloor (q-1)/2 \rfloor} \cos\frac{2kp\pi}{q}\ln\left(\sin\frac{k\pi}{q}\right).$$

Demonstração. Atendendo ao teorema 22.27 temos

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{p}{q}\right) + \gamma &= \int_0^1 \frac{1 - t^{p/q-1}}{1-t}dt = q\int_0^1 \frac{x^{q-1} - x^{p-1}}{1-x^q}dx \\ &= \lim_{X\to 1^-}\left(-\ln(1 - X^q) + \int_0^X \frac{qx^{p-1}}{x^q - 1}dx\right).\end{aligned}$$

Como é

$$x^q - 1 = \prod_{k=0}^{q-1}\left(x - e^{i\theta_k}\right) \quad \text{com} \quad \theta_k = \frac{2k\pi}{q},$$

a relação (14.1) permite escrever

$$\frac{qx^{p-1}}{x^q - 1} = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{C_k}{x - e^{i\theta_k}} \quad \text{com} \quad C_k = \lim_{x\to e^{i\theta_k}} \left(x - e^{i\theta_k}\right)\frac{qx^{p-1}}{x^q - 1},$$

pois a função em primeiro membro é uma função racional própria com polos simples nos pontos $e^{i\theta_k}$. Usando o exemplo 14.21 para calcular os resíduos C_k obtém-se

$$C_k = e^{i(p-q)\theta_k} = e^{ip\theta_k}$$

e deduz-se a decomposição

$$\frac{qx^{p-1}}{x^q-1}=\frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{q-1}\frac{e^{ip\theta_k}}{x-e^{i\theta_k}}.$$

Temos assim

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\gamma=\lim_{X\to 1^-}\left(-\ln\left(1-X^q\right)+\ln(1-X)\right)+\int_0^1\sum_{k=1}^{q-1}\frac{e^{ip\theta_k}}{x-e^{i\theta_k}}dx$$

e portanto

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\gamma+\ln q=\sum_{k=1}^{q-1}e^{ip\theta_k}\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx. \tag{22.11}$$

Mudando p em $q-p$ é então

$$\psi\left(1-\frac{p}{q}\right)+\gamma+\ln q=\sum_{k=1}^{q-1}e^{-ip\theta_k}\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx$$

e como a fórmula dos complementos (22.7) dá

$$\psi\left(1-\frac{p}{q}\right)=\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\pi\cot\frac{p\pi}{q},$$

resulta

$$\sum_{k=1}^{q-1}\left(e^{-ip\theta_k}-e^{ip\theta_k}\right)\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx=\pi\cot\frac{p\pi}{q},$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{q-1}i\sin p\theta_k\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}.$$

Atendendo a (22.11) obtém-se assim

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\gamma+\ln q+\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}=\sum_{k=1}^{q-1}\cos p\theta_k\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx$$

e como o primeiro membro desta identidade é real, deduz-se

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\gamma+\ln q+\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}=\sum_{k=1}^{q-1}\cos p\theta_k\,\mathrm{Re}\left(\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx\right).$$

Temos agora

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_0^1\frac{1}{x-e^{i\theta_k}}dx\right) &= \int_0^1\frac{x-\cos\theta_k}{x^2-2x\cos\theta_k+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(2-2\cos\theta_k\right)\\ &= \ln\left(2\sin\frac{\theta_k}{2}\right),\end{aligned}$$

e obtém-se a relação

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\gamma+\ln q+\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}=\sum_{k=1}^{q-1}\cos p\theta_k \ln\left(2\sin\frac{\theta_k}{2}\right). \tag{22.12}$$

Como é

$$\sum_{k=1}^{q-1}\cos p\theta_k=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{q-1}\left(e^{\frac{2p\pi i}{q}}\right)^k\right)=-1$$

a identidade (22.12) transforma-se em

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\gamma+\ln 2q+\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}=\sum_{k=1}^{q-1}u_k \tag{22.13}$$

com

$$u_k=\cos p\theta_k \ln\left(\sin\frac{\theta_k}{2}\right).$$

Notando agora que $\theta_{q-k}=2\pi-\theta_k$ se $1\leq k\leq q-1$, é

$$\cos p\theta_k=\cos p\theta_{q-k} \quad \text{e} \quad \sin\frac{\theta_{q-k}}{2}=\sin\left(\pi-\frac{\theta_k}{2}\right)=\sin\frac{\theta_k}{2}$$

pelo que

$$u_{q-k}=u_k \quad \text{se} \quad 1\leq k\leq q-1.$$

Se q for ímpar da forma $2m+1$ temos então

$$\sum_{k=1}^{q-1}u_k=\sum_{k=1}^{m}(u_k+u_{q-k})=2\sum_{k=1}^{m}u_k$$

e se q for par da forma $2m$ temos

$$\sum_{k=1}^{q-1}u_k=2\sum_{k=1}^{m-1}u_k+u_m=2\sum_{k=1}^{m-1}u_k,$$

pois de

$$\sin\frac{\theta_m}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

resulta $u_m=0$. Em ambos os casos é assim válida a relação

$$\sum_{k=1}^{q-1}u_k=2\sum_{k=1}^{\lfloor (q-1)/2\rfloor}u_k$$

e (22.13) conduz à fórmula do enunciado.

■

Conjugando o teorema de Gauss com os exemplos 22.31 e 22.32 podemos obter resultados impressionantes sobre soma de séries, resultados esses que seriam virtualmente impossíveis de alcançar com outros métodos.

Na teoria da função gama desempenha um papel importante um ramo particular do logaritmo desta função. Como $\Gamma(z)$ toma valores em $\mathbb{R}^+$ quando $z \in \mathbb{R}^+$, está definido o logaritmo real da restrição Γ a $\mathbb{R}^+$ e tem-se

$$(\ln \Gamma(z))' = \psi(z) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{R}^+$$

O teorema seguinte descreve o único ramo do logaritmo de Γ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ que prolonga este logaritmo real.

Teorema 22.34 - *A função λ definida por*

$$\lambda(z) = -\gamma\,(z-1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{n} - \ln\left(1 + \frac{z-1}{n}\right)\right) \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

verifica a condição

$$\lambda(z+1) = \lambda(z) + \ln z \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

e é o único ramo do logaritmo de Γ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ que coincide com o logaritmo real de Γ em $\mathbb{R}^+$.

Demonstração. Dado $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| \leq 1/2$, com base no desenvolvimento de $\ln(1+w)$ em série de potências de w deduz-se

$$|\ln(1+w) - w| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|w|^k}{k} \leq \frac{1}{2}\frac{|w|^2}{1-|w|} \leq |w|^2 .$$

Sendo $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ um conjunto compacto e $\mu = \max\{|z-1| : z \in K\}$ temos então

$$\left| \frac{z-1}{n} - \ln\left(1 + \frac{z-1}{n}\right)\right| \leq \frac{|z-1|^2}{n^2} \leq \frac{\mu^2}{n^2} \quad \text{se} \quad z \in K \quad \text{e} \quad n \geq 2\mu,$$

pelo que a série que define λ converge uniformemente em K. Como todas as funções

$$\ln\left(1 + \frac{z-1}{n}\right)$$

são analíticas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, do corolário do teorema de Weierstrass 13.9 resulta que λ é também analítica neste conjunto. Derivando a série termo a termo e atendendo a (22.9) resulta assim

$$\lambda'(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z-1}\right) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- .$$

Pondo agora

$$f(z)=\Gamma(z)e^{-\lambda(z)} \quad \text{se} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$$

segue-se que f' é identicamente nula em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ e como $f(1)=1$ conclui-se

$$e^{\lambda(z)}=\Gamma(z) \quad \text{se} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-.$$

Vemos assim que λ define um ramo do logaritmo de Γ em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ que é real quando $z\in\mathbb{R}^+$ e a unicidade resulta do exemplo 10.12. A segunda relação do enunciado obtém-se agora notando que as funções $\lambda(z+1)$ e $\lambda(z)+\ln z$ definem ambas ramos do logaritmo de $\Gamma(z+1)$ em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, que são reais em $\mathbb{R}^+$.
■

A função λ definida no teorema anterior diz-se simplesmente o *logaritmo da função* Γ e representa-se por $\log\Gamma$. Com esta notação as duas identidades do teorema anterior podem escrever-se na forma

$$\log\Gamma(z+1)=-\gamma z+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right) \quad \text{se} \quad \mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1], \tag{22.14}$$

e

$$\log\Gamma(z+1)=\log\Gamma(z)+\ln z \quad \text{se} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-. \tag{22.15}$$

Por derivação obtém-se agora, directamente,

$$(\log\Gamma(z))'=\psi(z) \quad \text{se} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-. \tag{22.16}$$

Corolário - *Tem-se*

$$\log\Gamma(z)=-\ln z-\gamma z+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right) \quad \textit{se} \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-.$$

Demonstração. Resulta directamente das identidades (22.14) e (22.15).
■

Nota 22.35 - É importante observar que $\log\Gamma(z)$ não coincide em geral com o logaritmo principal $\ln\Gamma(z)$ do número complexo $\Gamma(z)$. Efectivamente a parte imaginária de $\ln\Gamma(z)$ não excede π, e para cada $y>0$ o corolário anterior dá

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\log\Gamma(iy)) &= -\frac{\pi}{2}-\gamma y+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{y}{n}-\arctan\frac{y}{n}\right)>-\frac{\pi}{2}-\gamma y+y-\arctan y\\ &> y(1-\gamma)-\pi\end{aligned}$$

pelo que $\lim_{y\to+\infty}\operatorname{Im}(\log\Gamma(iy))=+\infty$.

O teorema seguinte descreve o desenvolvimento de $\log\Gamma(z+1)$ em série de potências de z.

Teorema 22.36 - *Tem-se*

$$\log\Gamma(z+1) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}z^n \quad se \quad |z| \leq 1 \quad e \quad z \neq -1.$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tal que $|z| \leq 1$, para cada inteiro $m \geq 1$ tem-se

$$\ln\left(1+\frac{z}{m}\right) = \frac{z}{m} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n$$

e de (22.14) resulta

$$\log\Gamma(z+1) + \gamma z = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n,$$

ou seja,

$$\log\Gamma(z+1) + \gamma z = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n + \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n. \tag{22.17}$$

É no entanto

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n\right| \leq \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{m^n} = \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{m(m-1)} = 1$$

pelo que

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\zeta(n)-1\right)}{n}z^n.$$

Substituindo em (22.17) obtém-se a fórmula do enunciado.
■

Corolário - *Tem-se*

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\zeta(n+1)z^n \quad se \quad |z| < 1.$$

Demonstração. Resulta imediatamente do teorema anterior derivando termo a termo a série de potências.
■

Exemplo 22.37 (Euler) - *Tem-se*

$$\gamma = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}.$$

Efectivamente basta fazer $z = 1$ no teorema anterior.

Nota 22.38 - Há várias outras séries numéricas simples que envolvem as constantes $\zeta(n)$ e cuja soma pode ser determinada permutando os símbolos de série de acordo com o teorema 7.13. Efectivamente temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^n} = \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{m^n} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^2 (1 - 1/m)} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{m} \right)^n = \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{m} \right)^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{m^2 (1 + 1/m)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando o exemplo anterior obtém-se ainda

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n) - 1}{n} = \gamma + \ln 2 - 1$$

e temos também

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{nm^n} = \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{m} \right)^n \\ &= - \lim_{M \to +\infty} \sum_{m=2}^{M} \left(\frac{1}{m} + \ln \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{M} \left(\frac{1}{m} + \ln \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right) &= \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m} - \sum_{m=2}^{M} (\ln m - \ln(m-1)) \\ &= -1 + \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m} - \ln M, \end{aligned}$$

de (22.3) conclui-se então

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = 1-\gamma.$$

Teorema 22.39 (Fórmulas de Raabe) - *Tem-se*

$$\int_0^1 \log\Gamma\,(z+t)\,dt = z\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-,$$

e

$$\int_0^1 \log\Gamma\,(t)\,dt = \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

Demonstração. Como $\log\Gamma$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ e este é um conjunto em estrela relativamente ao ponto 1, segue-se que a função $\log\Gamma$ é primitivável. Sendo F uma primitiva de $\log\Gamma$ e pondo

$$\varphi(z) = \int_0^1 \log\Gamma\,(z+t)\,dt \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$$

resulta assim

$$\varphi(z) = \int_z^{z+1} \log\Gamma(\zeta)d\zeta = F(z+1) - F(z).$$

Atendendo a (22.15) temos então

$$\varphi'(z) = \log\Gamma\,(z+1) - \log\Gamma\,(z) = \ln z$$

e existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(z) = z\ln z - z + c,$$

ou seja,

$$\int_0^1 \log\Gamma\,(z+t)\,dt = z\ln z - z + c. \tag{22.18}$$

Daqui resulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \log\Gamma\,(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{1+\varepsilon} \log\Gamma\,(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varphi(\varepsilon) = c$$

pelo que o integral

$$\int_0^1 \log\Gamma\,(t)\,dt$$

converge e

$$\int_0^1 \log\Gamma\,(t)\,dt = c.$$

Por outro lado, tomando $x \in \mathbb{R}^+$ no corolário do teorema 22.11 temos

$$\log\Gamma(2x) = (2x-1)\ln 2 - \frac{\ln\pi}{2} + \log\Gamma(x) + \log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

donde vem

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\Gamma(2x)\,dx = -\frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln\pi}{4} + \int_0^1 \log\Gamma(x)dx$$

e fazendo $t = 2x$ no primeiro destes integrais obtém-se

$$c = \int_0^1 \log\Gamma(t)\,dt = \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

A primeira parte do enunciado resulta agora de (22.18).

■

O teorema anterior permite deduzir estimativas da função $\log\Gamma(z)$ particularmente úteis quando $|z|$ é elevado. Usaremos o seguinte resultado auxiliar:

Lema 22.40 - *Dados $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $x \in \mathbb{R}_0^+$ tem-se*

$$|z+x| \geq (|z|+x)\cos\left(\frac{\arg z}{2}\right)$$

Demonstração. Pondo $\theta = \arg z$ temos

$$\begin{aligned} |z+x|^2 &= |z|^2 + 2|z|x\cos\theta + x^2 = (|z|+x)^2 - 2|z|x(1-\cos\theta) \\ &= (|z|+x)^2 - 4|z|x\sin^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Atendendo agora à relação $|z|^2 + x^2 \geq 2|z|x$ temos por outro lado

$$(|z|+x)^2 \geq 4|z|x,$$

e da identidade anterior resulta

$$|z+x|^2 \geq (|z|+x)^2\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = (|z|+x)^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

■

Teorema 22.41 (Aproximação de Stirling) - *Para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ tem-se*

$$\log\Gamma(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \mu(z) \tag{22.19}$$

com

$$\mu(z) = \int_0^1 \psi(z+t)\left(t-\frac{1}{2}\right)dt,$$

sendo válidas as estimativas

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8\,|z| \cos^2\left(\frac{\arg z}{2}\right)} \tag{22.20}$$

e

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8\,|z| \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \quad se \quad |\arg z| \leq \pi - \varepsilon \quad e \quad \varepsilon \in]0, \pi[\,. \tag{22.21}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ temos

$$\int_0^1 \log \Gamma\,(z+t)\,dt = \int_0^1 \log \Gamma\,(z+t) \left(t - \frac{1}{2}\right)' dt.$$

Integrando por partes e usando as relações (22.15) e (22.16) resulta assim

$$\int_0^1 \log \Gamma\,(z+t)\,dt = \log \Gamma\,(z) + \frac{1}{2} \ln z - \int_0^1 \psi\,(z+t) \left(t - \frac{1}{2}\right) dt.$$

Pondo agora

$$\mu(z) = \int_0^1 \psi\,(z+t) \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$$

e comparando com o teorema anterior, deduz-se a primeira relação do enunciado.

Temos ainda

$$\mu(z) = \int_0^1 \psi\,(z+t) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)' dt = -\int_0^1 \psi'\,(z+t) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) dt$$

donde vem

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8} \int_0^1 \left|\psi'\,(z+t)\right| dt. \tag{22.22}$$

Atendendo ao corolário 3 do teorema 22.24 temos no entanto

$$\left|\psi'\,(z+t)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|z+n+t|^2}$$

e sendo $\theta = \arg z$ do lema anterior obtém-se

$$\left|\psi'\,(z+t)\right| \leq \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(|z|+n+t)^2} = \frac{\psi'\,(|z|+t)}{\cos^2(\theta/2)}.$$

Como é também

$$\int_0^1 \psi'\,(|z|+t)\,dt = \psi(|z|+1) - \psi(|z|) = \frac{1}{|z|}$$

resulta

$$\int_0^1 \left|\psi'\,(z+t)\right| dt \leq \frac{1}{|z| \cos^2(\theta/2)}$$

e de (22.22) deduz-se (22.20).

Finalmente, se $|\arg z| \le \pi - \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{|\arg z|}{2} \le \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

e portanto

$$\cos\left(\frac{\arg z}{2}\right) = \cos\left|\frac{\arg z}{2}\right| \ge \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\frac{\varepsilon}{2},$$

o que conduz a (22.21).

■

Corolário - *Dado* $\varepsilon \in \,]0, \pi[$ *tem-se*

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \quad \textit{se} \quad z \to \infty \quad \textit{e} \quad |\arg z| \le \pi - \varepsilon,$$

e em particular

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \textit{se} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{22.23}$$

Demonstração. Se $|\arg z| \le \pi - \varepsilon$ atendendo ao teorema anterior temos efectivamente

$$\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}} = e^{\mu(z)}$$

com

$$|\mu(z)| \le \frac{1}{8|z| \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}.$$

É então

$$\lim_{z\to\infty} \mu(z) = 0$$

e obtém-se

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}} = 1 \quad \text{se} \quad |\arg z| \le \pi - \varepsilon.$$

Dado um inteiro $n \ge 1$, a segunda fórmula do enunciado resulta agora de ser $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

■

Usando a aproximação de Stirling pode estudar-se o comportamento de $\Gamma(z)$ quando $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$ numa faixa vertical da forma $a \le \mathrm{Re}(z) \le b$.

Teorema 22.42 - *Dado um intervalo compacto* $I \subseteq \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\Gamma(x+iy) = \sqrt{2\pi} y^{x-\frac{1}{2}+iy} e^{-\frac{\pi y}{2} + i\frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{2}) - iy} \left(1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right) \quad \textit{se } y \to +\infty \textit{ e } x \in I.$$

Demonstração. Dado $z = x + iy$ com $x \in I$ e $y \geq 1$ temos

$$\arg z = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y} \tag{22.24}$$

Tomando $\alpha > 0$ tal que $|x| \leq \alpha$, para cada $x \in I$ é também

$$\frac{\pi}{2} > \arctan\frac{x}{y} \geq \arctan\left(\frac{-\alpha}{y}\right) \geq \arctan(-\alpha) = -\arctan\alpha$$

pelo que $0 < \arg z \leq \pi/2 + \arctan\alpha$ e portanto

$$|\arg z| \leq \pi - \varepsilon \quad \text{com} \quad \varepsilon = \pi/2 - \arctan\alpha > 0.$$

Atendendo ao teorema anterior, nas condições do enunciado podemos então escrever

$$\log\Gamma(z) = \left(x - \frac{1}{2} + iy\right)(\ln|z| + i\arg z) - x - iy + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \mu(z) \tag{22.25}$$

com

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8\,|z|\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{1}{8y\sin^2\frac{\varepsilon}{2}},$$

ou seja,

$$\mu(z) = O\left(\frac{1}{y}\right) \quad (y \to +\infty)\,. \tag{22.26}$$

Temos ainda

$$\ln|z| = \ln y + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)$$

e da relação $\ln(1+u) \sim u$ quando $u \to 0$, resulta

$$\ln|z| = \ln y + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad (y \to +\infty)$$

pelo que

$$\left(x - \frac{1}{2} + iy\right)\ln|z| = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln y + iy\ln y + O\left(\frac{1}{y}\right) \quad (y \to +\infty)\,. \tag{22.27}$$

Como é também $\arctan u = u + O\left(u^3\right)$ quando $u \to 0$, de (22.24) obtém-se

$$\arg z = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{y} + O\left(\frac{1}{y^3}\right) \quad (y \to +\infty)$$

e daqui deduz-se

$$\left(x - \frac{1}{2} + iy\right) i\arg z = i\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} + x + O\left(\frac{1}{y}\right). \tag{22.28}$$

Notando ainda que

$$e^{O(1/y)} = 1 + O\left(\frac{1}{y}\right) \qquad (y \to +\infty)\,,$$

o enunciado resulta agora directamente das relações (22.25), (22.26), (22.27) e (22.28).
■

Corolário - *Dado um intervalo compacto $I \subseteq \mathbb{R}$ tem-se*

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi} y^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi y}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right) \quad se \quad y \to +\infty \quad e \quad x \in I.$$

Demonstração. Basta tomar módulos no corolário anterior.
■

A partir da aproximação de Stirling podemos agora obter estimativas eficazes de $\psi(z)$ para valores elevados de $|z|$.

Teorema 22.43 - *Para cada $z \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}_0^-$ tem-se*

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + \rho(z) \tag{22.29}$$

com

$$\rho(z) = \int_0^1 \psi'(z+t)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt,$$

sendo válidas as estimativas

$$|\rho(z)| \leq \frac{1}{8\,|z|^2 \cos^3\left(\frac{\arg z}{2}\right)} \tag{22.30}$$

e

$$|\rho(z)| \leq \frac{1}{8\,|z|^2 \sin^3 \frac{\varepsilon}{2}} \quad se \quad |\arg z| \leq \pi - \varepsilon \quad e \quad \varepsilon \in \left]0, \pi\right[. \tag{22.31}$$

Demonstração. Derivando a relação (22.19) obtém-se (22.29) com

$$\rho(z) = \mu'(z) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\psi(z+t)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 \psi'(z+t)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt.$$

Integrando por partes temos ainda

$$\int_0^1 \psi'(z+t)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = -\int_0^1 \psi''(z+t)\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) dt$$

pelo que

$$|\rho(z)| \leq \frac{1}{8} \int_0^1 \left|\psi''(z+t)\right| dt.$$

Atendendo ao corolário 3 do teorema 22.24 temos no entanto

$$\psi''(z+t) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+z+t)^3} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$$

e é também

$$\int_0^1 \psi''(z+t)\, dt = \psi'(z+1) - \psi'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^- \ .$$

Procedendo como na demonstração do teorema 22.41 e sendo $\theta = \arg z$ obtém-se assim

$$\int_0^1 \left|\psi''(z+t)\right| dt \leq -\int_0^1 \frac{\psi''(|z|+t)}{\cos^3(\theta/2)} dt = \frac{1}{|z|^2 \cos^3(\theta/2)}$$

o que permite estabelecer as estimativas (22.30) e (22.31).

■

Corolário - *Dado* $\varepsilon \in \left]0, \pi\right[$ *tem-se*

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \textit{se} \quad z \to \infty \quad \textit{e} \quad |\arg z| \leq \pi - \varepsilon.$$

Demonstração. Resulta directamente das relações (22.29) e (22.31).

■

Como aplicação da aproximação de Stirling vamos deduzir uma generalização do teorema 22.11.

Teorema 22.44 (Gauss) - *Dados um inteiro positivo* m *e* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ *tem-se*

$$\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right) = \frac{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{m-1}}{m^{z-\frac{1}{2}}} \Gamma(z).$$

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ e tome-se um inteiro j tal que $0 \leq j < m$. Então

$$\frac{z+j}{m} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$$

e do teorema 22.10 vem

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{z+j}{m}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{z+j}{m}}n!}{\frac{z+j}{m}\left(\frac{z+j}{m}+1\right)...\left(\frac{z+j}{m}+n\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{z}{m}}n^{\frac{j}{m}}n!m^{n+1}}{(z+j)(z+m+j)...(z+mn+j)}.\end{aligned}$$

Temos assim

$$\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right)...\Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^z n^{\frac{1+\cdots+m-1}{m}}(n!)^m m^{mn+m}}{Q_{mn}(z)} \tag{22.32}$$

com

$$Q_{mn}(z)=\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{q=0}^{n}(z+qm+j)=\prod_{k=0}^{mn+m-1}(z+k)\,,$$

ou seja,

$$Q_{mn}(z)=(z+mn+1)\,(z+mn+2)\,...\,(z+mn+m-1)\prod_{k=0}^{mn}(z+k)\,.$$

É então

$$Q_{mn}(z)\sim(mn)^{m-1}\prod_{k=0}^{mn}(z+k)\quad(n\to+\infty)$$

e o segundo membro de (22.32) transforma-se sucessivamente em

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\frac{n^z n^{\frac{m-1}{2}}(n!)^m m^{mn+m}}{m^{m-1}n^{m-1}z(z+1)...(z+mn)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^z(n!)^m m^{mn+1}}{n^{\frac{m-1}{2}}z(z+1)...(z+mn)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^m m^{mn+1}}{m^z\,(mn)!n^{\frac{m-1}{2}}}\frac{(mn)^z(mn)!}{z(z+1)...(z+mn)}\\ &= \frac{1}{m^z}\Gamma(z)\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^m m^{mn+1}}{(mn)!n^{\frac{m-1}{2}}}.\end{aligned}$$

Usando agora a relação (22.23) temos

$$\frac{(n!)^m}{(mn)!}\sim\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{mn}(2\pi n)^{\frac{m}{2}}}{\left(\frac{mn}{e}\right)^{mn}(2\pi mn)^{\frac{1}{2}}}=\frac{n^{\frac{m-1}{2}}}{m^{mn+\frac{1}{2}}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\qquad(n\to+\infty)$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^m m^{mn+1}}{(mn)!n^{\frac{m-1}{2}}}=m^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,.$$

Resulta assim

$$\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right)...\Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right)=\frac{1}{m^z}\Gamma(z)m^{\frac{1}{2}}\left(2\pi\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

que é a fórmula do enunciado.

■

Corolário - *Dados um inteiro positivo m e $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ tem-se*

$$\psi\left(\frac{z}{m}\right)+\psi\left(\frac{z+1}{m}\right)+\cdots+\psi\left(\frac{z+m-1}{m}\right)=m\psi(z)-m\ln m.$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior por derivação logarítmica.

■

Exemplo 22.45 - *Dado um inteiro positivo m tem-se*

$$\psi\left(\frac{1}{m}\right)+\psi\left(\frac{2}{m}\right)+\cdots+\psi\left(\frac{m-1}{m}\right)=-(m-1)\gamma-m\ln m.$$

Efectivamente basta tomar $z=1$ no corolário anterior e usar a relação (22.6).

Em particular, fazendo $m=3$ no exemplo anterior e recorrendo à relação dos complementos da função digama obtém-se o valor de $\psi(1/3)$ sem usar integração.

As aproximações de $\log\Gamma$ e de ψ dadas pelos teoremas 22.41 e 22.43 podem ser significativamente aperfeiçoadas usando as propriedades dos polinómios de Bernoulli $B_n(w)$ e dos números de Bernoulli $B_n=B_n(0)$ introduzidos na secção 15.

Começaremos por estabelecer uma identidade geral, onde a soma é vazia no caso $m=0$.

Teorema 22.46 - *Dado um inteiro $m\geq 0$ seja $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ uma função com derivadas contínuas até à ordem $2m+2$. Tem-se então*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(u)du &= \frac{f(0)+f(1)}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!}B_{2k}\\ &\quad+\frac{1}{(2m+2)!}\int_0^1 f^{(2m+2)}(u)\left(B_{2m+2}(u)-B_{2m+2}\right)du,\end{aligned}$$

em que os $B_n(u)$ e os $B_n=B_n(0)$ são respectivamente os polinómios e os números de Bernoulli.

Demonstração. Atendendo às relações (15.29), (15.30) e (15.32), para cada inteiro k tal que $2 \leq k \leq 2m+1$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^{(k-1)}(u)B_{k-1}(u)du &= \frac{1}{k}\int_0^1 f^{(k-1)}(u)B_k'(u)du \\ &= \frac{f^{(k-1)}(1)-f^{(k-1)}(0)}{k}B_k - \frac{1}{k}\int_0^1 f^{(k)}(u)B_k(u)du\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^1 f^{(k-1)}(u)B_{k-1}(u)du - \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 f^{(k)}(u)B_k(u)du$$
$$= (-1)^k\frac{f^{(k-1)}(1)-f^{(k-1)}(0)}{k!}B_k.$$

Somando com $2 \leq k \leq 2m+1$ e atendendo a que $B_{2k-1} = 0$ temos então

$$\int_0^1 f'(u)B_1(u)du = \sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!}B_{2k}$$
$$+ \frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 f^{(2m+1)}(u)B_{2m+1}(u)du. \tag{22.33}$$

Como $B_1(u) = u - 1/2$, integrando por partes obtém-se

$$\int_0^1 f'(u)B_1(u)du = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(u)du. \tag{22.34}$$

Notando ainda que

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(u)B_{2m+1}(u)du = \frac{1}{2m+2}\int_0^1 f^{(2m+1)}(u)\left(B_{2m+2}(u)-B_{2m+2}\right)'du,$$

e integrando novamente por partes deduz-se

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(u)B_{2m+1}(u)du = -\frac{1}{2m+2}\int_0^1 f^{(2m+2)}(u)\left(B_{2m+2}(u)-B_{2m+2}\right)du. \tag{22.35}$$

O enunciado resulta agora substituindo (22.34) e (22.35) em (22.33).
■

Podemos agora estabelecer um resultado que representa uma generalização substancial do teorema 22.40.

Teorema 22.47 - *Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se*

$$\log \Gamma(z) = z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{z^{2k-1}} + \mu_m(z) \quad (22.36)$$

com

$$\mu_m(z) = -\frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 \psi^{(2m+1)}(z+u)\,(B_{2m+2}(u) - B_{2m+2})\,du. \quad (22.37)$$

Demonstração. Sendo f a função definida para $u \in [0,1]$ por

$$f(u) = \log \Gamma(z+u),$$

do teorema 22.39 resulta

$$\int_0^1 f(u)du = z \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi.$$

Temos ainda

$$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \log \Gamma(z) + \frac{1}{2} \ln z$$

e

$$f^{(n)}(u) = \psi^{(n-1)}(z+u) \quad \text{se} \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad u \in [0,1]\,.$$

Atendendo ao corolário 2 do teorema 22.24 é então

$$f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) = \psi^{(2k-2)}(z+1) - \psi^{(2k-2)}(z) = \frac{(2k-2)!}{z^{2k-1}} \quad \text{se} \quad k \geq 1,$$

e o enunciado resulta agora directamente do teorema anterior.
■

Corolário - *Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, para cada inteiro $m \geq 0$ tem-se*

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} \frac{1}{z^{2k}} + \rho_m(z) \quad (22.38)$$

com

$$\rho_m(z) = -\frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 \psi^{(2m+2)}(z+u)\,(B_{2m+2}(u) - B_{2m+2})\,du. \quad (22.39)$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior por derivação.
■

Para estimar os restos $\mu_m(z)$ e $\rho_m(z)$ que figuram nos dois desenvolvimentos anteriores vamos provar dois resultados auxiliares.

Lema 22.48 - *Para cada inteiro $n \geq 1$ tem-se*

$$(-1)^n \left(B_{2n}(u) - B_{2n}\right) > 0 \quad se \quad 0 < u < 1$$

e

$$\int_0^1 \left(B_{2n}(u) - B_{2n}\right) du = -B_{2n}.$$

Demonstração. Comecemos por usar indução para provar que um polinómio de Bernoulli $B_{2n-1}(u)$ não pode ter dois zeros em $]0,1[$. Isto é evidente se $n = 1$, e admitindo que é válido para $B_{2n-1}(u)$ podemos ver que também é válido para $B_{2n+1}(u)$. Efectivamente, se $B_{2n+1}(u)$ se anulasse duas vezes em $]0,1[$, como as relações (15.11) e (15.32) mostram que ele também se anula nas extremidades deste intervalo, pelo teorema de Rolle $B_{2n}(u)$ anulava-se três vezes em $]0,1[$ e isto exigia que $B_{2n-1}(u)$ se anulasse duas vezes em $]0,1[$ o que contraria a hipótese.

Supondo agora que o polinómio $B_{2n}(u) - B_{2n}$ não tem sinal constante em $]0,1[$, como a relação (15.32) mostra que ele se anula nas extremidades deste intervalo, ele teria necessariamente três zeros em $[0,1]$ e isto exigia que $B_{2n-1}(u)$ se anulasse duas vezes em $]0,1[$ o que não pode suceder.

Atendendo a (15.30) é ainda

$$\int_0^1 \left(B_{2n}(u) - B_{2n}\right) du = \frac{B_{2n+1}(1) - B_{2n+1}(0)}{2n+1} - B_{2n} = -B_{2n},$$

e como (15.19) mostra que $-B_{2n}$ tem o sinal de $(-1)^n$, conclui-se que o mesmo sucede com $B_{2n}(u) - B_{2n}$ em $]0,1[$.

■

Lema 22.49 - *Os restos μ_m e ρ_m dos desenvolvimentos* (22.36) *e* (22.38) *verificam a relação*

$$\mu_m(z) = -\int_1^{+\infty} z\rho_m(zu)du \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Demonstração. As relações (22.36) e (22.38) mostram que μ_m é uma primitiva de ρ_m em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. Tomando $\lambda > 1$ e integrando ρ_m ao longo do caminho linear definido por $\gamma(u) = zu$ com $1 \leq u \leq \lambda$ temos então

$$\mu_m(\lambda z) - \mu_m(z) = \int_z^{\lambda z} \rho_m(w)dw = \int_1^{\lambda} z\rho_m(zu)du \quad \text{se} \quad \lambda > 1 \quad \text{e} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Por outro lado, atendendo a (22.19) e a (22.36) temos

$$\mu(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{z^{2k-1}} + \mu_m(z).$$

Como (22.20) mostra que $\lim_{\lambda\to+\infty}\mu(\lambda z)=0$, é também $\lim_{\lambda\to+\infty}\mu_m(\lambda z)=0$, o que estabelece o enunciado.

■

O teorema seguinte mostra como os restos $\mu_m(z)$ e $\rho_m(z)$ podem ser eficientemente estimados.

Teorema 22.50 - *Para os restos $\rho_m(z)$ e $\mu_m(z)$ dos desenvolvimentos* (22.38) *e* (22.36) *são válidas as seguintes estimativas:*

$$\rho_m(z)=-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)\,(z+\theta_m(z))^{2m+2}}\quad \textit{com}\ \ 0<\theta_m(z)<1,\ \ \textit{se}\ \ z\in\mathbb{R}^+,\tag{22.40}$$

$$|\rho_m(z)|<\frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)\,|z|^{2m+2}\cos^{2m+3}\left(\frac{\arg z}{2}\right)}\quad \textit{se}\ \ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-,\tag{22.41}$$

$$\mu_m(z)=\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)\,(z+\theta_m(z))^{2m+1}}\quad \textit{com}\ \ 0<\theta_m(z)<1,\ \ \textit{se}\ \ z\in\mathbb{R}^+,\tag{22.42}$$

e

$$|\mu_m(z)|<\frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(2m+1)\,|z|^{2m+1}\cos^{2m+2}\left(\frac{\arg z}{2}\right)}\quad \textit{se}\ \ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-.\tag{22.43}$$

Demonstração. Na expressão (22.39) de $\rho_m(z)$ consideremos em primeiro lugar o caso $z\in\mathbb{R}^+$. Como o polinómio $B_{2m+2}(u)-B_{2m+2}$ tem o sinal de $(-1)^{m+1}$quando $u\in\,]0,1[$ e o corolário 3 do teorema 22.24 mostra que $-\psi^{(2m+2)}$ é positiva em $\mathbb{R}^+$, segue-se que $\rho_m(z)$ tem o sinal de $(-1)^{m+1}$. Por outro lado, tomando um termo adicional no desenvolvimento (22.38) obtém-se a relação

$$\rho_m(z)-\rho_{m+1}(z)=-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)z^{2m+2}},$$

e como $\rho_m(z)$ e $-\rho_{m+1}(z)$ têm o mesmo sinal é necessariamente

$$|\rho_m(z)|<\left|\rho_m(z)-\rho_{m+1}(z)\right|,$$

o que implica

$$|\rho_m(z)|<\frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)z^{2m+2}}.\tag{22.44}$$

O corolário 3 do teorema 22.24 mostra também que $\psi^{(2m+3)}$ é positiva em $\mathbb{R}^+$ pelo que $-\psi^{(2m+2)}$ é estritamente decrescente neste intervalo, e aplicando o lema 22.48 resulta

$$|\rho_m(z)| = \frac{1}{(2m+2)!}\int_0^1 \left(-\psi^{(2m+2)}(z+u)\right)|B_{2m+2}(u) - B_{2m+2}|\,du$$

$$> -\frac{\psi^{(2m+2)}(z+1)}{(2m+2)!}\int_0^1 |B_{2m+2}(u) - B_{2m+2}|\,du$$

$$= \frac{-\psi^{(2m+2)}(z+1)\,|B_{2m+2}|}{(2m+2)!}.$$

Atendendo ainda à monotonia de $-\psi^{(2m+2)}$ e ao corolário 2 do teorema 22.24 temos também

$$\begin{aligned} -\psi^{(2m+2)}(z+1) &> -\int_{z+1}^{z+2} \psi^{(2m+2)}(t)dt = \psi^{(2m+1)}(z+1) - \psi^{(2m+1)}(z+2) \\ &= \frac{(2m+1)!}{(z+1)^{2m+2}} \end{aligned}$$

pelo que

$$|\rho_m(z)| > \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(z+1)^{2m+2}}. \tag{22.45}$$

Combinando esta desigualdade com (22.44) podemos então representar $|\rho_m(z)|$ na forma

$$|\rho_m(z)| = \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(z+\theta_m(z))^{2m+2}} \quad \text{com} \quad 0 < \theta_m(z) < 1,$$

e a relação (22.40) resulta agora de $\rho_m(z)$ e B_{2m+2} terem sinais opostos.

No caso geral $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$, atendendo de novo ao corolário 3 do teorema 22.24 temos

$$\psi^{(2m+2)}(z+u) = -(2m+2)!\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+z+u)^{2m+3}}$$

e do lema 22.40 resulta

$$\left|\psi^{(2m+2)}(z+u)\right| \leq \left|\psi^{(2m+2)}\left(|z|+u\right)\right|\lambda_m(z).$$

com

$$\lambda_m(z) = \frac{1}{\cos^{2m+3}\left(\frac{\arg z}{2}\right)}.$$

É assim

$$|\rho_m(z)| \leq \frac{\lambda_m(z)}{(2m+2)!}\int_0^1 \left|\psi^{(2m+2)}\left(|z|+u\right)\right||B_{2m+2}(u) - B_{2m+2}|\,du,$$

pelo que

$$|\rho_m(z)| \leq \frac{|\rho_m(|z|)|}{\cos^{2m+3}\left(\frac{\arg z}{2}\right)}$$

e de (22.44) obtém-se a estimativa (22.41).

Notando que para cada inteiro $m \geq 0$ a função ρ_m tem sinal fixo em $\mathbb{R}^+$, o lema 22.49 e as desigualdades (22.44) e (22.45) conduzem ao enquadramento

$$\int_1^{+\infty} \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)} \frac{z}{(zu+1)^{2m+2}} du < |\mu_m(z)| < \int_1^{+\infty} \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)} \frac{z}{(zu)^{2m+2}} du$$

se $z \in \mathbb{R}^+$. Daqui resulta

$$\frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(2m+1)(z+1)^{2m+1}} < |\mu_m(z)| < \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{R}^+$$

o que equivale a (22.42), pois o lema 22.49 mostra também que μ_m e ρ_m têm sinais opostos em $\mathbb{R}^+$.

Finalmente, aplicando ainda o corolário 3 do teorema 22.24 e o lema 22.40 obtém-se

$$\left|\psi^{(2m+1)}(z+u)\right| \leq \frac{\psi^{(2m+1)}\left(|z|+u\right)}{\cos^{2m+2}\left(\frac{\arg z}{2}\right)}.$$

Daqui vem, como anteriormente,

$$|\mu_m(z)| \leq \frac{|\mu_m(|z|)|}{\cos^{2m+2}\left(\frac{\arg z}{2}\right)}$$

e de (22.42) deduz-se (22.43).

■

Exemplo 22.51 - *Dados dois inteiros $m \geq 0$ e $n \geq 1$ tem-se*

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{n^{2k-1}}$$

$$+ \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)\left(n+\theta_{mn}\right)^{2m+1}} \quad \textit{com} \quad 0 < \theta_{mn} < 1.$$

Efectivamente basta aplicar as relações (22.36) e (22.42) notando que $\ln n! = \log \Gamma(n) + \ln n$.

Exemplo 22.52 - *Dados dois inteiros $m \geq 0$ e $n \geq 1$ tem-se*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} \frac{1}{n^{2k}} - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)\left(n+\theta_{mn}\right)^{2m+2}} \quad \textit{com} \ 0 < \theta_{mn} < 1.$$

Da identidade $\psi(k+1) - \psi(k) = 1/k$ resulta efectivamente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \psi(n+1) - \psi(1) = \psi(n) + \frac{1}{n} + \gamma$$

e basta agora aplicar as relações (22.38) e (22.40).

Nota 22.53 - Comparando os resultados do teorema 22.47 e do respectivo corolário com os teoremas 22.41 e 22.43, vemos que as funções μ e ρ que figuram nas identidades (22.19) e (22.29) admitem os desenvolvimentos

$$\mu(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{z^{2k-1}} + \mu_m(z) \tag{22.46}$$

e

$$\rho(z) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} \frac{1}{z^{2k}} + \rho_m(z) \tag{22.47}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$. Em particular, usando as estimativas (22.41) e (22.43) correspondentes a $m = 0$ e recordando que $B_2 = -1/6$, as relações (22.20) e (22.30) podem agora ser substituídas pelas estimativas mais precisas

$$|\mu(z)| < \frac{1}{12\,|z| \cos^2\left(\frac{\arg z}{2}\right)} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

e

$$|\rho(z)| < \frac{1}{12\,|z|^2 \cos^3\left(\frac{\arg z}{2}\right)} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Nota 22.54 - Nas identidades (22.36) e (22.38) cada termo do somatório é desprezável relativamente ao termo anterior quando $z \to \infty$, e diz-se por isso que elas são *desenvolvimentos assimptóticos, nas vizinhanças de* ∞, das funções correspondentes. Nestes desenvolvimentos as séries obtidas a partir dos somatórios respectivos são divergentes. Efectivamente a identidade (15.16) implica a relação

$$|B_{2n}| \sim 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}},$$

e representando por u_n o termo geral de ambos os somatórios temos então

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \sim \left(\frac{n}{\pi\,|z|}\right)^2 \to +\infty.$$

Atendendo às estimativas de $\mu_m(z)$ e $\rho_m(z)$ vemos que estes restos serão mínimos quando $|u_{m+1}|$ for mínimo e a relação anterior mostra que isto corresponde a um valor de m próximo de $\pi\,|z|$.

O teorema seguinte dá uma expressão nova para $\rho(z)$ que é válida quando $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Teorema 22.55 (Binet) - *A função* ρ *definida em* (22.29) *é dada por*

$$\rho(z) = -\int_0^{+\infty} \frac{2u}{(u^2+z^2)\,(e^{2\pi u}-1)} du \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{22.48}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$, e atendendo ao corolário 2 do teorema 22.27 temos

$$\psi(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-zt} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-zt} \right) dt - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-zt} dt.$$

Usando agora o teorema 12.17 e a relação

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$$

o primeiro destes integrais transforma-se em

$$\ln z - \frac{1}{2z}$$

e de (22.29) resulta

$$\rho(z) = -\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-zt} dt.$$

Atendendo ao teorema 15.4 temos ainda

$$\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-zt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2te^{-zt}}{t^2 + (2n\pi)^2} \quad \text{se} \quad t > 0$$

pelo que

$$\rho(z) = -\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2te^{-zt}}{t^2 + (2n\pi)^2} \right) dt \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Suponha-se agora que $z \in \mathbb{R}^+$. Fazendo a mudança de variável $u = zt/(2n\pi)$ obtém-se então

$$\rho(z) = -\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2ue^{-2n\pi u}}{u^2 + z^2} \right) du \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

e como é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2ue^{-2n\pi u}}{u^2 + z^2} = \frac{2u}{(u^2 + z^2)\left(e^{2\pi u} - 1\right)} \quad \text{se} \quad u, z \in \mathbb{R}^+$$

conclui-se a relação

$$\rho(z) = -\int_0^{+\infty} \frac{2u}{(u^2 + z^2)\left(e^{2\pi u} - 1\right)} du \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{R}^+.$$

A identidade do enunciado fica agora estabelecida se se mostrar que esta relação se mantém na região $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Consideremos então a função f definida no conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

por

$$f(z) = -\int_0^{+\infty} \frac{2u}{(u^2+z^2)\,(e^{2\pi u}-1)}du \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0,$$

e seja K um subconjunto compacto de D. Pondo

$$\mu = \min\{|z| : z \in K\} > 0,$$

do lema 22.40 deduz-se

$$\frac{1}{|u^2+z^2|} \le \frac{1}{\left(u^2+|z|^2\right)\cos(\pi/4)} \le \frac{\sqrt{2}}{u^2+\mu^2}$$

e como o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{(u^2+\mu^2)\,(e^{2\pi u}-1)}du$$

converge, do teorema 22.13 resulta que f é analítica em D. Por outro lado, a relação (22.29) mostra que a função ρ também é analítica em D e o princípio do prolongamento analítico 9.10 permite então concluir que a a expressão de $\rho(z)$ permanece efectivamente válida para todo o $z \in D$.

■

Podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 22.56 - *Para cada inteiro positivo k tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2k-1}}{e^{2\pi u}-1}du = \frac{(-1)^{k-1}}{4k}B_{2k} \tag{22.49}$$

e o resto ρ_m do desenvolvimento (22.38) *é dado por*

$$\rho_m(z) = \frac{2(-1)^{m-1}}{z^{2m}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{2m+1}}{(u^2+z^2)\,(e^{2\pi u}-1)}du \quad \textit{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{22.50}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$ e fazendo $r = u^2/z^2$ na identidade

$$\frac{1}{1+r} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, r^{k-1} + (-1)^m \frac{r^m}{1+r} \quad \text{se} \quad r \neq -1$$

obtém-se

$$\frac{u}{u^2+z^2} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, \frac{u^{2k-1}}{z^{2k}} + \frac{(-1)^m}{z^{2m}}\frac{u^{2m+1}}{u^2+z^2} \quad \text{se} \quad u > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Atendendo ao teorema anterior é então

$$\begin{aligned}\rho(z) &= -2\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{z^{2k}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2k-1}}{e^{2\pi u}-1}du+\\&+\frac{2(-1)^{m-1}}{z^{2m}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2m+1}}{(u^2+z^2)(e^{2\pi u}-1)}du,\end{aligned}$$

e obtemos um desenvolvimento de $\rho(z)$ da forma

$$\rho(z)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{z^{2k}}+\nu_m(z), \tag{22.51}$$

com

$$c_k=\frac{2(-1)^{k-1}}{z^{2k}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2k-1}}{e^{2\pi u}-1}du$$

e

$$\nu_m(z)=\frac{2(-1)^{m-1}}{z^{2m}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2m+1}}{(u^2+z^2)(e^{2\pi u}-1)}du.$$

Tomando o termo de ordem $m+1$ neste desenvolvimento temos

$$\nu_m(z)=-\frac{c_{m+1}}{z^{2m+2}}+\nu_{m+1}(z),$$

e atendendo a que do lema 22.40 resulta

$$|\nu_{m+1}(z)|\leq\frac{2}{|z|^{2m+2}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}u^{2m+3}}{(u^2+1)(e^{2\pi u}-1)}du \quad \text{se} \quad |z|\geq 1$$

vemos que

$$\nu_{m+1}(z)=O\left(\frac{1}{z^{2m+2}}\right)\quad(z\to\infty),$$

o que implica

$$\nu_m(z)=O\left(\frac{1}{z^{2m+2}}\right)\quad(z\to\infty).$$

Suponha-se agora que os desenvolvimentos (22.47) e (22.51) são distintos e seja k a menor ordem para a qual

$$c_k\neq\frac{B_{2k}}{2k}.$$

Subtraindo os dois desenvolvimentos seria então

$$\left(c_k-\frac{B_{2k}}{2k}\right)\frac{1}{z^{2k}}=\nu_k(z)-\rho_k(z)$$

pelo que

$$\frac{1}{z^{2k}}=O\left(\nu_k(z)-\rho_k(z)\right)\quad(z\to\infty)$$

e como $\nu_k(z)$ e $\rho_k(z)$ são ambos dominados por z^{-2k-2} quando $z \to \infty$, daqui resultava

$$\frac{1}{z^{2k}} = O\left(\frac{1}{z^{2k+2}}\right) \quad (z \to \infty)$$

o que é absurdo. Os desenvolvimentos (22.47) e (22.51) são por isso idênticos, o que justifica o enunciado.

■

Na região $\operatorname{Re}(z) > 0$ podemos agora refinar as estimativas anteriormente obtidas para $\mu_m(z)$ e $\rho_m(z)$.

Teorema 22.57 (Lindelöf, 1905) - *Para os restos $\mu_m(z)$ e $\rho_m(z)$ dos desenvolvimentos* (22.36) *e* (22.38) *são válidas as seguintes estimativas:*

$$|\rho_m(z)| < \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)\,|z|^{2m+2}} \quad se \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{4}, \tag{22.52}$$

$$|\rho_m(z)| < \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)\,|z|^{2m+2}\sin(2\arg z)} \quad se \quad \frac{\pi}{4} < \ |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \tag{22.53}$$

$$|\mu_m(z)| < \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(2m+1)\,|z|^{2m+1}} \quad se \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{4}, \tag{22.54}$$

e

$$|\mu_m(z)| < \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)(2m+1)\,|z|^{2m+1}\sin(2\arg z)} \quad se \quad \frac{\pi}{4} < \ |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{22.55}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$, de (22.50) resulta

$$|\rho_m(z)| \le \frac{2}{|z|^{2m}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{2m+1}}{|u^2+z^2|\,(e^{2\pi u}-1)} du.$$

Como

$$\left|u^2+z^2\right|^2 = u^4 + 2u^2 \operatorname{Re}\left(z^2\right) + |z|^4 \ge |z|^4 \quad \text{se} \quad \operatorname{Re}\left(z^2\right) \ge 0$$

e

$$\left|u^2+z^2\right| \ge \left|\operatorname{Im}\left(u^2+z^2\right)\right| = \left|\operatorname{Im}\left(z^2\right)\right| = \left|z^2 \sin\left(\arg\left(z^2\right)\right)\right|,$$

temos

$$\left|u^2+z^2\right| \ge |z|^2 \quad \text{se} \quad |\arg z| \le \pi/4$$

e

$$\left|u^2+z^2\right| \ge |z|^2 \sin\left(2\arg z\right) \quad \text{se} \quad \pi/4 < |\arg z| < \pi/2,$$

sendo as desigualdades estritas válidas excepto, respectivamente, quando $u = 0$ ou $u^2 = -\operatorname{Re}\left(z^2\right)$.

Pondo

$$\lambda(z) = 1 \quad \text{se} \quad |\arg z| \leq \pi/4$$

e

$$\lambda(z) = \sin(2\arg z) \quad \text{se} \quad \pi/4 < |\arg z| < \pi/2,$$

é então

$$|\rho_m(z)| < \frac{2}{|z|^{2m+2}\,\lambda(z)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{2m+1}}{e^{2\pi u} - 1} du$$

e as estimativas (22.52) e (22.53) resultam directamente da relação (22.49).

Aplicando o lema 22.49 temos finalmente

$$|\mu_m(z)| \leq |z| \int_1^{+\infty} |\rho_m(zu)|\, du < \frac{|B_{2m+2}|}{(2m+2)\,|z|^{2m+1}\,\lambda(z)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2m+2}} du$$

donde se obtêm as estimativas (22.54) e (22.55).

■

Vemos assim que na região $0 < \arg z \leq \pi/4$ estas estimativas superam as que são dadas pelo teorema 22.50 e só se tornam inferiores quando $\arg z$ se aproxima de $\pi/2$.

23 - A função zeta de Riemann e a distribuição dos números primos

Vamos iniciar o estudo da função zeta de Riemann analisando o comportamento da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

com $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 23.1 - *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

é absolutamente convergente se $\mathrm{Re}(z) > 1$ *e divergente se* $\mathrm{Re}(z) \leq 1$. *Além disso, para cada* $a > 1$ *a série converge uniformemente no semiplano* $\mathrm{Re}(z) \geq a$.

Demonstração. Atendendo à relação

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$$

vemos que a série é absolutamente convergente quando $\mathrm{Re}(z) > 1$, e do critério de Weierstrass resulta que a convergência é uniforme em todo o semiplano da forma $\mathrm{Re}(z) \geq a > 1$.

Se $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ a série diverge pois o seu termo geral não tende para zero. Suponha-se agora que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ e seja $w = 1 - z$. Temos então

$$\left|\frac{1}{n^w} - \frac{1}{(n+1)^w}\right| = \frac{|(1+1/n)^w - 1|}{(n+1)^{\mathrm{Re}(w)}} \sim \frac{|(1+1/n)^w - 1|}{n^{\mathrm{Re}(w)}}$$

e atendendo ao corolário do teorema 10.17 resulta

$$\left|\frac{1}{n^w} - \frac{1}{(n+1)^w}\right| \sim \frac{|w|}{n^{1+\mathrm{Re}(w)}}$$

pelo que a sucessão (n^{-w}) é de variação limitada. Como $\lim n^{-w} = 0$ e

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n^w}\frac{1}{n^z},$$

se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

fosse convergente, do critério de Dirichlet 1.11 resultava a convergência da série harmónica, o que é absurdo.

Supondo finalmente $\mathrm{Re}(z) = 1$ e $z \neq 1$, seja $z = 1 - ia$ com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Atendendo de novo ao corolário do teorema 10.17 temos

$$n^{ia} - (n+1)^{ia} = n^{ia}\left(-\frac{ia}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{a}{in^z} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

pelo que

$$\frac{1}{n^z} = \frac{i}{a}\left(n^{ia} - (n+1)^{ia}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Esta relação mostra imediatamente que a natureza da série em estudo é a da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{ia} - (n+1)^{ia}\right),$$

ou seja, a da sucessão $\left(n^{ia}\right)$. Se esta sucessão fosse convergente teríamos

$$\lim n^{ia} = \lim (2n)^{ia} = \lim (3n)^{ia} \neq 0$$

o que exigia

$$2^{ia} = 3^{ia} = 1.$$

Existiam assim inteiros não nulos k_1, k_2 tais que $a \ln 2 = 2k_1\pi$ e $a \ln 3 = 2k_2\pi$ donde vinha $|k_2| \ln 2 = |k_1| \ln 3$ e portanto

$$2^{|k_2|} = 3^{|k_1|},$$

o que é absurdo.

■

Corolário - *A função zeta de Riemann, definida para* $\mathrm{Re}(z) > 1$ *por*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z},$$

é analítica neste semiplano.

Demonstração. Dado um conjunto compacto K contido no semiplano $\mathrm{Re}(z) > 1$ e sendo $a = \min\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\}$, é $a > 1$ pelo que o teorema anterior mostra que a série converge uniformemente em K. Como as funções

$$\frac{1}{n^z} = e^{-z \ln n}$$

são analíticas, o enunciado resulta do teorema de Weierstrass 13.9.

■

Transformando convenientemente a série que define ζ vamos poder prolongar analiticamente esta função à faixa $\mathrm{Re}(z) > 0$ privada do ponto 1. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 23.2 - *A função ζ é prolongável analiticamente ao semiplano* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *privado do ponto* 1*, e tem-se então*

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z) \tag{23.1}$$

com

$$u_n(z) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) dx. \tag{23.2}$$

Demonstração. Supondo $\mathrm{Re}(z) > 1$ temos

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^z} dx$$

e sendo $u_n(z)$ definido por (23.2) resulta

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z) \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

Temos agora

$$|u_n(z)| \leq \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right| dx \leq \max_{x \in [n,n+1]} \left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right|$$

e como

$$\left| \frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right| = \left| \int_n^x \frac{z}{t^{z+1}} dt \right| \leq \int_n^x \left| \frac{z}{t^{z+1}} \right| dt = \int_n^x \frac{|z|}{t^{\mathrm{Re}(z)+1}} dt \leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}}$$

se $x \in [n, n+1]$, obtemos a majoração

$$|u_n(z)| \leq \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}} \tag{23.3}$$

que mostra que a série que figura no segundo membro de (23.1) converge quando $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Dado um conjunto compacto K contido no semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ e sendo

$$a = \min\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\} > 0 \quad \text{e} \quad b = \max\{|z| : z \in K\},$$

temos

$$|u_n(z)| \leq \frac{b}{n^{a+1}} \quad \text{se} \quad z \in K$$

e do critério de Weierstrass resulta que a série em causa converge uniformemente em K. Então a função φ definida por

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z) \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

é analítica, e a relação

$$\zeta\,(z) = \frac{1}{z-1} + \varphi(z) \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1$$

permite prolongar analiticamente a função ζ ao semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ privado do ponto 1.

■

Corolário 1 - *No ponto* 1 *a função zeta tem um polo simples com resíduo* 1.

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior existe uma função φ, analítica no ponto 1, tal que

$$(z-1)\,\zeta\,(z) = 1 + (z-1)\,\varphi(z) \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \quad \text{e} \quad z \neq 1,$$

e daqui resulta

$$\lim_{z \to 1} (z-1)\,\zeta\,(z) = 1.$$

■

Corolário 2 - *Tem-se*

$$\lim_{z \to 1} \left(\zeta\,(z) - \frac{1}{z-1} \right) = \gamma.$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior é

$$\lim_{z \to 1} \left(\zeta\,(z) - \frac{1}{z-1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1)$$

e como

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) &= \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx \right) \\ &= \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln(m+1) \right) \end{aligned}$$

o enunciado resulta da relação (22.3).

■

Corolário 3 - *Tem-se*

$$\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)=\gamma.$$

Demonstração. Seja f a função definida no semiplano $\mathrm{Re}(z)>0$ por $f(1)=1$ e $f(z)=(z-1)\,\zeta(z)$ se $z\neq 1$. Como o corolário 1 mostra que f é analítica no ponto 1, temos

$$\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{f'(z)}{f(z)}=f'(1).$$

É também, por outro lado,

$$f'(1)=\lim_{z\to 1}\frac{f(z)-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\left(\zeta(z)-\frac{1}{z-1}\right)$$

e o enunciado resulta agora do corolário anterior.

■

O resultado seguinte mostra como o exemplo 1.8 pode ser generalizado.

Corolário 4 - *Para todo o inteiro* $n\geq 1$ *tem-se*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^z}=\frac{n^{1-z}}{1-z}+\zeta(z)+o(1)\quad \text{se}\quad \mathrm{Re}(z)>0\quad \text{e}\quad z\neq 1.$$

Demonstração. Atendendo a (23.1) e (23.2), dado $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ tal que $\mathrm{Re}(z)>0$ temos

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k^z}-\frac{1}{x^z}\right)dx$$

pelo que

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^z}-\frac{1}{n^z}-\int_1^n\frac{1}{x^z}dx\right),$$

e daqui resulta

$$\zeta(z)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^z}-\frac{n^{1-z}}{1-z}\right).$$

■

Para prosseguir o estudo da função ζ vamos agora relacioná-la com a função gama.

Teorema 23.3 - *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\Gamma(z)\,\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx \quad se \quad \mathrm{Re}(z) > 1. \tag{23.4}$$

Demonstração. Atendendo ao teorema 22.14 temos

$$\Gamma(z)\,\zeta(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{n^z} e^{-t} dt$$

e fazendo $x = t/n$ resulta

$$\Gamma(z)\,\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-nx} dx. \tag{23.5}$$

Como é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{z-1} e^{-nx} = \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \quad \text{se} \quad x > 0,$$

vemos que o enunciado fica estabelecido desde que se prove que a série e o integral podem comutar na identidade (23.5).

Dado um intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$ temos

$$\left| x^{z-1} e^{-nx} \right| = x^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-nx} \leq b^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-na} \quad \text{se} \quad x \in [a, b],$$

e do critério de Weierstrass resulta que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{z-1} e^{-nx}$$

converge uniformemente em $[a, b]$. Para cada inteiro $m \geq 1$ é também

$$\left| \sum_{n=1}^{m} x^{z-1} e^{-nx} \right| \leq \sum_{n=1}^{m} x^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-nx} \leq \frac{x^{\mathrm{Re}(z)-1}}{e^x - 1}$$

e a relação

$$\frac{x^{\mathrm{Re}(z)-1}}{e^x - 1} \sim \frac{1}{x^{2-\mathrm{Re}(z)}} \quad (x \to 0)$$

mostra que o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\mathrm{Re}(z)-1}}{e^x - 1} dx$$

é convergente. Aplicando agora o teorema 11.4 temos então

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{z-1} e^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-nx} dx$$

como se pretende.

■

O teorema anterior conduz a uma representação da função zeta na faixa $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ sob a forma de um integral.

Teorema 23.4 - *Tem-se*

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} x^{z-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx \quad se \quad 0 < \mathrm{Re}(z) < 1. \tag{23.6}$$

Demonstração. Dado z tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$, o integral que figura no segundo membro de (23.4) pode decompor-se na forma

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx + \int_0^1 x^{z-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_0^1 x^{z-2} dx$$

e obtemos a relação

$$\Gamma(z)\,\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \int_1^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx + \int_0^1 x^{z-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx, \tag{23.7}$$

válida se $\mathrm{Re}(z) > 1$. O primeiro dos integrais que figuram no segundo membro desta identidade é absolutamente convergente para todo o $z \in \mathbb{C}$, e como

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2},$$

o segundo integral converge absolutamente quando $\mathrm{Re}(z) > 0$. Sejam então f e g a funções definidas para $\mathrm{Re}(z) > 0$ por

$$f(z) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx$$

e

$$g(z) = \int_0^1 x^{z-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Dado um conjunto compacto K contido no semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ e sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b \quad \text{se} \quad z \in K,$$

as majorações

$$\left| \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \right| \leq \frac{x^{b-1}}{e^x - 1} \quad \text{se} \quad x \geq 1$$

e

$$\left| x^{z-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) \right| \leq x^{a-1} \left| \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) \right| \quad \text{se} \quad 0 < x \leq 1$$

permitem aplicar o teorema 22.13 para concluir que f e g são ambas analíticas.

Como o primeiro membro de (23.7) representa uma função analítica no semi-plano $\operatorname{Re}(z) > 0$ privado do ponto 1, pelo princípio do prolongamento analítico 9.10 a relação (23.7) mantém-se válida nesta região. O enunciado resulta agora notando que

$$\frac{1}{z-1} = -\int_1^{+\infty} x^{z-2}dx \quad \text{se} \quad \operatorname{Re}(z) < 1.$$

■

Exemplo 23.5 - *A função ζ é negativa no intervalo* $]0,1[$.

Efectivamente basta aplicar a identidade (23.6) notando que a função Γ é positiva em $\mathbb{R}^+$e que para todo o $x > 0$ é $e^x - 1 > x$.

Vamos agora provar um resultado auxiliar.

Lema 23.6 - *A função ζ é prolongável analiticamente à faixa definida por* $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$, *sendo então válida a identidade*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)dx \quad \textit{se} \quad -1 < \operatorname{Re}(z) < 0. \tag{23.8}$$

Demonstração. Sendo h a função definida em $\mathbb{R}^+$por

$$h(x) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}$$

e atendendo ao teorema anterior, temos

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty} x^{z-1}h(x)dx \quad \text{se} \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1.$$

Como é também

$$\int_0^1 x^{z-1}dx = \frac{1}{z} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

na faixa $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ aquela identidade pode ainda transformar-se em

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\left(\int_1^{+\infty} x^{z-1}h(x)dx + \int_0^1 x^{z-1}\left(h(x) + \frac{1}{2}\right)dx\right) - \frac{1}{2\Gamma(z+1)}. \tag{23.9}$$

Por outro lado, de (15.12) deduz-se

$$\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sim \frac{B_2 x}{2} = \frac{x}{12} \quad (x \to 0) \tag{23.10}$$

e isto mostra que o integral

$$\int_0^1 x^{z-1}\left(h(x)+\frac{1}{2}\right)dx$$

converge se $\mathrm{Re}(z) > -1$. Podemos agora verificar que a função f definida por

$$f(z) = \int_1^{+\infty} x^{z-1}h(x)dx$$

é analítica no semiplano $\mathrm{Re}(z) < 1$. Como $x\,|h(x)| \sim 1$ quando $x \to +\infty$, existe uma constante A tal que

$$\left|x^{z-1}h(x)\right| \leq A\left|x^{z-2}\right| = Ax^{\mathrm{Re}(z)-2} \quad \text{se} \quad x \geq 1.$$

Dado um conjunto compacto K contido no semiplano $\mathrm{Re}(z) < 1$ e sendo

$$\max\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\} = a < 1,$$

é então

$$\left|x^{z-1}h(x)\right| \leq Ax^{a-2} \quad \text{se} \quad z \in K,$$

e como o integral

$$\int_1^{+\infty} x^{a-2}dx$$

converge, o teorema 22.13 mostra que f é analítica.

Seja ainda g a função definida por

$$g(z) = \int_0^1 x^{z-1}\left(h(x)+\frac{1}{2}\right)dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > -1.$$

Como a relação (23.10) mostra que $x^{-1}\left(h(x)+1/2\right)$ é limitada em $]0,1]$, existe um constante B tal que

$$\left|x^{z-1}\left(h(x)+1/2\right)\right| \leq B\left|x^z\right| = Bx \quad \text{se} \quad x \in \left]0,1\right].$$

Dado um conjunto compacto K contido no semiplano $\mathrm{Re}(z) > -1$ e sendo

$$\min\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\} = a > -1$$

é então

$$\left|x^{z-1}\left(h(x)+1/2\right)\right| \leq Bx^a \quad \text{se} \quad z \in K,$$

e como o integral

$$\int_0^1 x^a dx$$

converge, o teorema 22.13 permite concluir que g também é analítica.

Notando ainda que $1/\Gamma$ é uma função inteira, segue-se que o segundo membro de (23.9) define uma função analítica na faixa $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ pelo que aquela relação permite o prolongamento analítico de ζ a esta faixa.

Finalmente, se $\mathrm{Re}(z) < 0$ temos ainda

$$-\frac{1}{z} = \int_1^{+\infty} x^{z-1} dx$$

e na faixa $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$ a relação (23.9) pode então escrever-se na forma

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) dx.$$

■

O teorema seguinte traduz um resultado preliminar que será posteriormente ampliado.

Teorema 23.7 - *Tem-se*

$$\zeta(z) = 2\,(2\pi)^{z-1}\,\Gamma(1-z)\zeta\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} \quad \textit{se} \quad -1 < \mathrm{Re}(z) < 1. \tag{23.11}$$

Demonstração. Atendendo a (23.8) e ao desenvolvimento (15.2) temos

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^z}{x^2 + (2n\pi)^2} \right) dx \quad \text{se} \quad -1 < \mathrm{Re}(z) < 0.$$

Dado um intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$, se $x \in [a, b]$ é

$$\left| \frac{2x^z}{x^2 + (2n\pi)^2} \right| = \frac{2x^{\mathrm{Re}(z)}}{x^2 + (2n\pi)^2} = \frac{2}{x^{|\mathrm{Re}(z)|}\left(x^2 + (2n\pi)^2\right)} \le \frac{1}{a^{|\mathrm{Re}(z)|}n^2}$$

e do critério de Weierstrass resulta que a série converge uniformemente em $[a, b]$.

Para cada $m \ge 1$ temos ainda

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{2x^z}{x^2 + (2n\pi)^2} \right| \le x^{\mathrm{Re}(z)-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n\pi)^2} = x^{\mathrm{Re}(z)-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)$$

e o lema anterior mostra que o integral

$$\int_0^{+\infty} x^{\mathrm{Re}(z)-1} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) dx$$

converge se $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$. O teorema 11.4 permite então escrever

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2x^z}{x^2 + (2n\pi)^2} dx$$

e fazendo $u = x/(2n\pi)$ obtém-se

$$\zeta(z)\Gamma(z) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (2n\pi)^{z-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^z}{1+u^2}du,$$

ou seja,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = 2\,(2\pi)^{z-1}\,\zeta\,(1-z) \int_0^{+\infty} \frac{u^z}{1+u^2}du.$$

Fazendo $x = u^2$ no integral anterior e aplicando o corolário 1 do teorema 22.15 resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^z}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^{(z-1)/2}}{1+x}dt = \frac{\pi}{2\sin\pi\left(\frac{z+1}{2}\right)} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi z}{2}}.$$

Obtemos assim a identidade

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \frac{\pi\,(2\pi)^{z-1}}{\cos\frac{\pi z}{2}}\zeta\,(1-z) \quad \text{se} \quad -1 < \mathrm{Re}(z) < 0,$$

e usando a fórmula dos complementos 22.7 da função gama esta relação transforma-se ainda em

$$\zeta(z) = 2\,(2\pi)^{z-1}\,\Gamma(1-z)\zeta\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} \quad \text{se} \quad -1 < \mathrm{Re}(z) < 0.$$

Suponha-se agora $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$. Se $z \neq 0$ o segundo membro da identidade anterior representa uma função analítica nesta região e a singularidade no ponto zero é removível pois as relações

$$\zeta\,(1-z) \sim -\frac{1}{z} \;\text{ e }\; \sin\frac{\pi z}{2} \sim \frac{\pi z}{2} \quad (z \to 0)$$

conduzem a

$$\lim_{z\to 0}\zeta\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Então, como ζ é analítica na faixa $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ e coincide com a função em segundo membro quando $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$, conclui-se que as duas funções coincidem na região $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ o que estabelece o enunciado.

■

Exemplo 23.8 - *Tem-se*

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Efectivamente, atendendo a (23.11) e à parte final da demonstração anterior temos

$$\zeta(0) = 2\,(2\pi)^{-1}\,\Gamma(1)\lim_{z\to 0}\zeta\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Corolário 1 - *A função ζ é prolongável analiticamente ao plano complexo privado do ponto* 1.

Demonstração. O teorema 23.2 e o lema 23.6 mostram que a função ζ é prolongável analiticamente ao semiplano $\operatorname{Re}(z) > -1$ privado do ponto 1. Como a função representada pelo segundo membro de (23.11) é analítica quando $\operatorname{Re}(z) \leq -1$, aquela identidade permite prolongar analiticamente a função zeta a toda esta região.

■

Corolário 2 - *A função ζ tem zeros simples nos pontos $-2n$ com $n \in \mathbb{Z}^+$ e não tem outros zeros em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $z \in \mathbb{R}^-$ o segundo membro de (23.11) anula-se apenas quando $\sin \pi z/2$ se anula, o que sucede para $z = -2n$ com $n \in \mathbb{Z}^+$. Todos estes zeros são simples pois a derivada de $\sin \pi z/2$ não se anula nestes pontos. Além disso a função zeta é positiva no intervalo $]1, +\infty[$, e os exemplos 23.5 e 23.8 mostram que esta função é negativa em $[0, 1[$.

■

Os zeros de ζ na recta real dizem-se os *zeros triviais* da função zeta de Riemann.

Exemplo 23.9 - *Para cada inteiro $n \geq 1$ é*

$$\zeta(-2n+1) = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

Efectivamente basta aplicar as relações (23.11) e (15.16).

Sobre a função zeta assim prolongada podemos agora provar um resultado fundamental devido a Riemann.

Teorema 23.10 (Equação funcional da função zeta de Riemann) - *A função zeta verifica a relação*

$$\zeta(z) = 2\,(2\pi)^{z-1}\,\Gamma(1-z)\zeta\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \tag{23.12}$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior e à forma como a função zeta foi prolongada ao semiplano $\operatorname{Re}(z) \leq -1$, conclui-se que a identidade do enunciado é válida quando $\operatorname{Re}(z) < 1$.

Se $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ o segundo membro de (23.12) representa uma função analítica excepto possivelmente quando $z \in \mathbb{Z}^+$ pois então $1 - z \in \mathbb{Z}_0^-$ e a função gama tem polos simples nesses pontos. No entanto, exceptuando $z = 1$, esses polos coincidem com zeros simples de $\sin \pi z/2$ se z for par ou com zeros simples de $\zeta\,(1-z)$ se z for ímpar, pelo que todas estas singularidades são removíveis. Supondo a função em segundo membro prolongada por continuidade a estes pontos então ela representa uma função analítica, que por coincidir com ζ quando $\operatorname{Re}(z) < 1$ coincide também necessariamente com ζ em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

■

Corolário 1 - *A função ζ é real na recta real e tem-se*

$$\overline{\zeta(z)} = \zeta(\overline{z}) \quad se \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Demonstração. O corolário do teorema 23.1 e os exemplos 23.5 e 23.8 mostram directamente que a função ζ é real em $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, e da equação funcional deduz-se então que o mesmo sucede em $\mathbb{R}^-$. A identidade do enunciado resulta agora do teorema 9.15.

■

Corolário 2 - *Tem-se*

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi. \tag{23.13}$$

Demonstração. Sendo f o prolongamento analítico de $(z-1)\,\zeta(z)$ ao ponto 1, de (23.12) resulta

$$f(z) = -2\,(2\pi)^{z-1}\,\Gamma(2-z)\zeta\,(1-z)\sin\frac{\pi z}{2} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que a função ζ não se anule em $B(1,\varepsilon)$, por derivação logarítmica deduz-se

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \ln 2\pi - \frac{\Gamma'(2-z)}{\Gamma(2-z)} - \frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos \pi z/2}{\sin \pi z/2} \quad \text{se} \quad z \in B(1,\varepsilon),$$

e atendendo a que $\Gamma'(1) = -\gamma$ obtém-se

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi + \gamma - \frac{f'(1)}{f(1)}.$$

Por outro lado, derivando directamente a função f temos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \quad \text{se} \quad z \in B(1,\delta) \setminus \{1\},$$

e do corolário 3 do teorema 23.2 resulta

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \gamma.$$

■

O teorema seguinte traduz um resultado básico sobre os zeros não triviais de ζ e simultaneamente estabelece uma conexão fundamental entre esta função e a sucessão dos números primos, que era já conhecida de Euler no caso de z ser real.

Teorema 23.11 - *A função ζ não se anula na região* $\mathrm{Re}(z) > 1$, *e sendo $(p_n)_{n\geq 1}$ a sucessão dos números primos tem-se*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right) = \frac{1}{\zeta(z)} \quad se \quad \mathrm{Re}(z) > 1. \tag{23.14}$$

Demonstração. Para cada inteiro $n \geq 0$ seja I_n o conjunto dos inteiros positivos que não têm factores primos $p < p_{n+1}$. Desta definição resulta imediatamente que $I_0 = \mathbb{Z}^+$ e que $1 \in I_n$ para todo o $n \geq 0$. Por outro lado, dado um inteiro $m \geq 1$, os conjuntos I_m e $\{kp_m : k \in I_{m-1}\}$ são disjuntos e tem-se

$$I_{m-1} = \{kp_m : k \in I_{m-1}\} \cup I_m.$$

Seja agora $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$, e considerem-se dois inteiros $m \geq 1$ e $N > p_m$. Temos então

$$\sum_{\substack{k<N \\ k \in I_{m-1}}} \frac{1}{k^z} = \sum_{\substack{k<N/p_m \\ k \in I_{m-1}}} \frac{1}{(kp_m)^z} + \sum_{\substack{k<N \\ k \in I_m}} \frac{1}{k^z}$$

e fazendo $N \to +\infty$ obtém-se

$$\sum_{k \in I_{m-1}} \frac{1}{k^z} = \sum_{k \in I_{m-1}} \frac{1}{(kp_m)^z} + \sum_{k \in I_m} \frac{1}{k^z},$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{1}{p_m^z}\right) \sum_{k \in I_{m-1}} \frac{1}{k^z} = \sum_{k \in I_m} \frac{1}{k^z}.$$

Usando indução e notando que

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} = \sum_{k \in I_0} \frac{1}{k^z}$$

resulta assim, para cada $m \geq 1$,

$$\left(1 - \frac{1}{p_1^z}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^z}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m^z}\right) \zeta(z) = \sum_{k \in I_m} \frac{1}{k^z},$$

ou seja,

$$\zeta(z) \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right) = 1 + \sum_{k \in I_m \setminus \{1\}} \frac{1}{k^z} \quad \text{se} \quad m \geq 1. \tag{23.15}$$

Pondo agora $\sigma = \mathrm{Re}(z)$ temos

$$\left| \sum_{k \in I_m \setminus [1]} \frac{1}{k^z} \right| \leq \sum_{k \in I_m \setminus \{1\}} \frac{1}{k^\sigma} \leq \sum_{k=p_{m+1}}^{+\infty} \frac{1}{k^\sigma}$$

e como $\lim p_{m+1} = +\infty$, segue-se que

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{k \in I_m \setminus \{1\}} \frac{1}{k^z} = 0.$$

É então possível escolher m tal que

$$\left|\sum_{k\in I_m\setminus\{1\}}\frac{1}{k^z}\right|<\frac{1}{2}$$

pelo que o primeiro membro de (23.15) não se anula, e isto exige $\zeta(z)\neq 0$. Finalmente, fazendo $m\to+\infty$ em (23.15) obtém-se a identidade (23.14).

■

Corolário - *Os zeros não não triviais da função ζ estão situados na faixa* $0\leq \mathrm{Re}(z)\leq 1$.

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior a equação funcional (23.12) mostra que os únicos zeros de ζ quando $\mathrm{Re}(z)<0$ correspondem aos zeros de $\sin(\pi z/2)$ nessa região. De (10.19) resulta então que esses são os zeros triviais da função zeta.

■

Na teoria da função zeta de Riemann a região $0\leq \mathrm{Re}(z)\leq 1$ e a recta $\mathrm{Re}(z)=1/2$ são conhecidas respectivamente por *faixa crítica* e por *recta crítica*.

Para continuar a explorar a relação entre a distribuição dos números primos e a função ζ vamos agora introduzir uma nova função que permite exprimir $-\zeta'/\zeta$ em termos da sucessão dos números primos por intermédio de uma série.

A *função de Von Mangoldt* é a função $\Lambda:\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda(n)=\ln p \quad \text{se} \quad n=p^k \text{ com } p \text{ primo e } k\in\mathbb{Z}^+,$$

e $\Lambda(n)=0$ se n não tiver esta forma. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 23.12 - *Dado $z\in\mathbb{C}$ tem-se*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^z} \quad \textit{se} \quad \mathrm{Re}(z)>1. \tag{23.16}$$

Demonstração. Retomando a identidade (23.14)

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right) \quad \textit{se} \quad \mathrm{Re}(z)>1$$

pode ver-se que a convergência do produto infinito é uniforme em todo o conjunto compacto K contido no semiplano vertical $\mathrm{Re}(z)>1$. Efectivamente, sendo

$$a=\min\{\mathrm{Re}(z):z\in K\}>1,$$

para cada $n\geq 1$ temos

$$\left|\frac{1}{p_n^z}\right|=\frac{1}{p_n^{\mathrm{Re}(z)}}\leq\frac{1}{p_n^a}\leq\frac{1}{n^a}.$$

O critério de Weierstrass mostra então que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{p_n^z}\right|$$

é uniformemente convergente em K, e do teorema 17.5 resulta que o mesmo sucede com o produto infinito.

Aplicando o teorema 17.6 temos então

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln p_j}{p_j^z}\frac{1}{1-p_j^{-z}}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln p_j}{p_j^z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_j^{kz}}\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln p_j}{\left(p_j^k\right)^z}.\end{aligned}$$

Para cada inteiro $m\geq 1$ sejam agora

$$L_m=\left\{p_1^{k_1}\cdots p_m^{k_m}:k_1,...,k_m\in\mathbb{Z}_0^+\right\}$$

e P_m o conjunto dos inteiros de L_m para os quais $k_m>0$. Temos então

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln p_m}{\left(p_m^k\right)^z}=\sum_{n\in P_m}\frac{\Lambda\left(n\right)}{n^z},$$

e notando que $\Lambda\left(1\right)=0$ daqui resulta

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln p_j}{\left(p_j^k\right)^z}=\sum_{n\in L_m}\frac{\Lambda\left(n\right)}{n^z}.$$

Fazendo $m\to+\infty$ obtém-se assim

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln p_j}{\left(p_j^k\right)^z}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda\left(n\right)}{n^z},$$

ou seja

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda\left(n\right)}{n^z}.$$

■

Para tratar adequadamente a identidade (23.16) vamos começar por estabelecer um resultado geral que permite transformar somas em integrais.

Teorema 23.13 (Identidade de Abel) - *Sejam $(a_n)_{n\geq q}$ uma sucessão complexa e A a respectiva função soma, definida para $x\geq q$ por*

$$A(x)=\sum_{q\leq n\leq x}a_n.$$

Dada uma função $f : [q, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *com derivada contínua, para todo o* $x \geq q$ *tem-se então*

$$\sum_{q \leq n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_q^x A(t)f'(t)dt.$$

Demonstração. Para cada $x \geq q$ temos

$$\sum_{q \leq n \leq x} a_n f(n) - A(x)f(x) = \sum_{q \leq n \leq x} a_n \left(f(n) - f(x)\right) = - \sum_{q \leq n \leq x} a_n \int_n^x f'(u)du.$$

Pondo agora $\chi_n(u) = 1$ se $u \geq n$ e $\chi_n(u) = 0$ se $q \leq u < n$, podemos escrever

$$\sum_{q \leq n \leq x} a_n \int_n^x f'(u)du = \sum_{q \leq n \leq x} a_n \int_q^x \chi_n(u)f'(u)du = \int_q^x \sum_{q \leq n \leq x} \chi_n(u)a_n f'(u)du,$$

e como

$$\int_q^x \sum_{q \leq n \leq x} \chi_n(u)a_n f'(u)du = \int_q^x \sum_{q \leq n \leq u} a_n f'(u)du = \int_q^x A(u)f'(u)du,$$

obtém-se a fórmula do enunciado.

■

Introduzindo agora a *função* ψ *de Chebyshev* (sem relação com a função digama) que se define-se por

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \text{se} \quad x \geq 1,$$

é válido o seguinte resultado:

Teorema 23.14 - *Para todo o* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{Re}(z) > 1$ *tem-se*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{z+1}}dx. \tag{23.17}$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$, e aplicando o teorema anterior com $f(u) = u^{-z}$, obtemos

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^z} = \frac{\psi(x)}{x^z} + z \int_1^x \frac{\psi(u)}{u^{z+1}}du \quad \text{se} \quad x \geq 1. \tag{23.18}$$

Por outro lado, tomando $\sigma \in]1, \mathrm{Re}(z)[$ temos

$$\frac{\psi(x)}{x^\sigma} \leq \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}$$

pelo que $\psi(x) = O\left(x^{\sigma}\right)$ quando $x \to +\infty$ e daqui resulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{z}} = 0.$$

Fazendo então $x \to +\infty$ em (23.18) obtém-se o enunciado.
∎

Para cada $x \geq 1$ representa-se por $\pi(x)$ o número de números primos no intervalo $[1, x]$, e a função assim obtida está estreitamente relacionada com ψ. O teorema seguinte compara o comportamento assimptótico destas duas funções quando $x \to +\infty$.

Teorema 23.15 (Chebyshev) - *Tem-se*

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

e

$$\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

Demonstração. Dado $x \geq 1$, no somatório que figura na identidade

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda\left(n\right)$$

as parcelas não nulas correspondem aos inteiros n da forma p^k em que p é primo, $k \in \mathbb{Z}^+$ e $p^k \leq x$. Para cada um destes inteiros é $\Lambda\left(n\right) = \ln p$ e como o seu número é

$$\left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor,$$

representando por p um número primo genérico temos

$$\psi(x) = \sum_{p\ \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \leq \ln x \sum_{p\ \leq x} 1 = \pi(x)\ln x.$$

É então

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

e daqui resultam as relações

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

e

$$\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}.$$

Dado $u \in]1, x[$ é também

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \psi(u) &= \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p - \sum_{p \leq u} \left\lfloor \frac{\ln u}{\ln p} \right\rfloor \ln p \\
&\geq \sum_{u<p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \geq \sum_{u<p \leq x} \ln p \\
&\geq (\pi(x) - \pi(u)) \ln u
\end{aligned}$$

e atendendo às desigualdades $\psi(u) \geq 0$ e $\pi(u) \leq u$ obtemos

$$\pi(x) \leq u + \frac{\psi(x)}{\ln u}.$$

Tomando agora $u = x/\ln^2 x$ é então

$$\frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq \frac{1}{\ln x} + \frac{\psi(x)}{x} \frac{\ln x}{\ln x - 2 \ln \ln x}$$

donde se deduz

$$\underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

e

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leq \overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

■

No início do século XIX, Gauss e Legendre conjecturaram a relação assimptótica

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty),$$

um resultado que é hoje conhecido por Teorema dos Números Primos. O teorema anterior mostra então que esta conjectura é equivalente a

$$\psi(x) \sim x \quad (x \to +\infty).$$

Um passo decisivo na demonstração do teorema dos números primos foi a constatação que a função ζ não tem zeros na recta $\mathrm{Re}(z) = 1$. Na demonstração deste resultado e no tratamento subsequente da função ζ usaremos a convenção iniciada por Riemann, e geralmente adoptada na literatura, de escrever $z = \sigma + it$ com $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

Teorema 23.16 (Hadamard e De La Vallée Poussin, 1896) - *A função ζ não se anula na recta* $\mathrm{Re}(z) = 1$.

Demonstração. Suponha-se que ζ tem um zero de ordem m num ponto $c = 1 + it$. Atendendo ao exemplo 14.22 conclui-se que ζ'/ζ tem um polo simples em c com resíduo m, pelo que

$$\lim_{z \to c} (z - c) \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = m$$

e em particular, com $\sigma = \mathrm{Re}(z)$, temos

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = m \geq 1. \tag{23.19}$$

No ponto $1 + 2it$ a função ζ é analítica, e se não se anular nesse ponto tem-se

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} = 0,$$

pelo que em qualquer hipótese é

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \geq 0. \tag{23.20}$$

No ponto 1 a função ζ tem um polo simples com resíduo 1 e o exemplo 14.23 mostra que ζ'/ζ tem aí um polo simples com resíduo -1. É então

$$\lim (z - 1) \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -1$$

e em particular

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = -1. \tag{23.21}$$

Consideremos agora a função φ definida para $\sigma > 1$ por

$$\varphi(\sigma) = 3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} + \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}.$$

Atendendo ao teorema 23.12 temos

$$\varphi(\sigma) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \left(3 + 4n^{-it} + n^{-2it}\right)$$

e pondo $\theta_n = -t \ln n$ daqui resulta

$$\mathrm{Re}(\varphi(\sigma)) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \left(3 + 4\cos\theta_n + \cos 2\theta_n\right).$$

É no entanto

$$3 + 4\cos\theta_n + \cos 2\theta_n = 2\left(1 + \cos\theta_n\right)^2 \geq 0$$

pelo que

$$\mathrm{Re}(\varphi(\sigma)) \leq 0 \tag{23.22}$$

e portanto também

$$\mathrm{Re}\left(\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1)\,\varphi(\sigma)\right) \leq 0.$$

Atendendo às relações (23.19), (23.20) e (23.21) temos, por outro lado,

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \left(3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} + \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) \geq -3 + 4m \geq 1$$

o que é absurdo e leva à conclusão de que ζ não se anula na recta $\mathrm{Re}(z) = 1$.
■

Corolário - *Existe um conjunto aberto que contém o semiplano* $\mathrm{Re}(z) \geq 1$*, onde é analítica a função* φ *definida por* $\varphi(1) = -\gamma - 1$ *e*

$$\varphi(z) = -\frac{\zeta'(z)}{z\zeta(z)} - \frac{1}{z-1} \quad \textit{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad \textit{e} \quad \zeta(z) \neq 0.$$

Demonstração. A função φ é analítica no conjunto D dos pontos do semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ privado do ponto 1 e dos zeros da função ζ. Como é

$$\varphi(z) = -\frac{1}{z} \left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1} + 1 \right) \quad \text{se} \quad z \in D,$$

o corolário 3 do teorema 23.2 mostra que

$$\lim_{z \to 1} \varphi(z) = -\gamma - 1$$

pelo que φ é também analítica no ponto 1.

Do teorema anterior resulta então que a recta $\mathrm{Re}(z) = 1$ está incluída no conjunto aberto D.
■

Para demonstrar o teorema dos números primos usaremos ainda outro resultado obtido por Chebyshev.

Teorema 23.17 (Chebyshev) - *Para a função* ψ *de Chebyshev tem-se*

$$\psi(x) = O(x) \quad (x \to +\infty).$$

Demonstração. Para cada $x \geq 1$ seja

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Dado um inteiro $n \geq 1$, como o coeficiente binomial

$$\binom{2n}{n}$$

é um inteiro divisível por todos os números primos p tais que $n < p \leq 2n$, temos

$$\binom{2n}{n} \geq \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

Temos também, por outro lado,

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n}$$

e tomando logaritmos obtém-se

$$\theta\left(2n\right) - \theta(n) \leq 2n \ln 2.$$

Como $\theta\left(2n+1\right) \leq \ln\left(2n+1\right) + \theta\left(2n\right)$ é então

$$\begin{aligned}
\theta\left(2n+1\right) - \theta\left(n+\frac{1}{2}\right) &\leq \ln\left(2n+1\right) + \theta\left(2n\right) - \theta(n) \\
&\leq (2n+1)\ln 2\left(1 + \frac{\ln(2n+1)}{(2n+1)\ln 2}\right)
\end{aligned}$$

pelo que existe uma constante C tal que

$$\theta\left(n\right) - \theta\left(\frac{n}{2}\right) \leq Cn \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Dado $x > 1$ seja $n = \lfloor x \rfloor$ e tome-se $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$2^{m+1} \leq n < 2^{m+2}.$$

Temos então

$$\theta(x) = \theta\left(n\right) = \sum_{k=0}^{m} \left(\theta\left(\frac{n}{2^k}\right) - \theta\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)\right) \leq Cn \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k} < 2Cn \leq 2Cx$$

e daqui resulta

$$\theta(x) = O\left(x\right) \quad \left(x \to +\infty\right).$$

Atendendo agora à definição de ψ é

$$\psi(x) = \sum_{k\geq 1} \sum_{p\leq x^{1/k}} \ln p = \theta(x) + \sum_{k\geq 2} \theta\left(x^{1/k}\right)$$

e como $\theta(x) = 0$ se $x < 2$ temos

$$\sum_{k\geq 2} \theta\left(x^{1/k}\right) = \sum_{2\leq k\leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \theta\left(x^{1/k}\right) \leq \frac{\ln x}{\ln 2} \theta\left(x^{1/2}\right)$$

donde se conclui

$$\psi(x) = \theta(x) + O\left(x^{1/2}\ln x\right) = O(x) \quad (x \to +\infty)\,.$$

■

Vamos agora provar o resultado principal de que depende a demonstração que daremos do teorema dos números primos. Trata-se de um teorema conhecido desde 1935 (numa formulação mais geral) cuja demonstração, embora ainda extensa, foi muito simplificada por Newman em 1980.

Teorema 23.18 (Ingham, 1935) - *Sejam $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e localmente integrável, e g a função definida por*

$$g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt \quad se \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Se g for prolongável analiticamente a um conjunto aberto que contenha a recta $\mathrm{Re}(z) = 0$ é então

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = g(0).$$

Demonstração (Newman, 1980). Sendo M um majorante de $|f|$ temos

$$\left|e^{-zt} f(t)\right| \leq M e^{-\mathrm{Re}(z)t}$$

e o teorema 22.13 mostra imediatamente que g é analítica no semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$. De acordo com a hipótese do enunciado g é então analítica num conjunto aberto D que contém o semiplano $\mathrm{Re}\,(z) \geq 0$.

Dado $\delta > 0$ tome-se agora $R_0 > 0$ tal que

$$\frac{M}{R_0} < \frac{\delta}{4}.$$

Sendo

$$\varepsilon_0 = \min\left\{|\mathrm{Re}(z)| : z \in \partial D \cap \overline{B}\,(0, R_0)\right\} > 0$$

e

$$D_0 = B\,(0, R_0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -\varepsilon_0\}\,,$$

a função g é analítica no conjunto aberto e convexo D_0. Escolham-se então $R \in \,]0, R_0[$ e $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0[$ tais que

$$\frac{M}{R} < \frac{\delta}{4} \quad \text{e} \quad \varepsilon < R,$$

e seja $\theta_\varepsilon = \arccos\,(-\varepsilon/R)$. Consideremos ainda o caminho γ_ε definido por

$$\gamma_\varepsilon\,(t) = Re^{it} \text{ com } -\theta_\varepsilon \leq t \leq \theta_\varepsilon$$

e seja σ_ε um caminho linear que liga o ponto $Re^{i\theta_\varepsilon}$ ao ponto $Re^{-i\theta_\varepsilon}$. Então $\tau_\varepsilon = \gamma_\varepsilon \dotplus \sigma_\varepsilon$ é um caminho fechado contido em D_0 e o exemplo 11.32 mostra que $Ind_{\tau_\varepsilon}(0) = 1$. Dado $T > 0$ e sendo g_T a função definida por

$$g_T(z) = \int_0^T e^{-zt} f(t)dt \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C},$$

como g_T é inteira, pela fórmula integral de Cauchy tem-se

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau\varepsilon} (g(z) - g_T(z)) \frac{e^{Tz}}{z} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz. \tag{23.23}$$

Pondo

$$h_T(z) = \frac{e^{Tz}}{z} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

vamos agora estimar o integral

$$I = \int_{\tau_\varepsilon} (g - g_T) h_T$$

e mostrar que ε pode ser escolhido de modo a que exista T_0 tal que $|I| < 2\pi\delta$ para todo o $T > T_0$. Vamos para isso decompor o caminho γ_ε na forma

$$\gamma_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \dotplus \rho \dotplus \beta_\varepsilon$$

em que α_ε, ρ e β_ε são as restrições de γ_ε respectivamente aos intervalos $[-\theta_\varepsilon, -\pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[\pi/2, \theta_\varepsilon]$. É então

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

com

$$I_1 = \int_\rho (g - g_T) h_T, \; I_2 = -\int_{\alpha_\varepsilon} g_T h_T - \int_{\sigma_\varepsilon} g_T h_T - \int_{\beta_\varepsilon} g_T h_T,$$

$$I_3 = \int_{\alpha_\varepsilon} g h_T + \int_{\beta_\varepsilon} g h_T \quad \text{e} \quad I_4 = \int_{\sigma_\varepsilon} g h_T.$$

Se $|z| = R$ temos

$$|h_T(z)| = \frac{e^{\text{Re}(z)T}}{R} \left|1 + \frac{z^2}{R^2}\right|$$

e sendo $\varphi = \arg z$ é

$$\left|1 + \frac{z^2}{R^2}\right| = \left|\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right| = \left|e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}\right| = 2\left|\cos\varphi\right| = \frac{2\left|\text{Re}(z)\right|}{R}$$

pelo que

$$|h_T(z)| = \frac{2\left|\text{Re}(z)\right| e^{\text{Re}(z)T}}{R^2} \quad \text{se} \quad |z| = R. \tag{23.24}$$

Se $\mathrm{Re}(z) > 0$ temos também

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^{+\infty} e^{-zt} f(t) \right| \leq M \int_T^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(z)t} dt = \frac{M}{\mathrm{Re}(z)} e^{-\mathrm{Re}(z)T}$$

e de (23.24) resulta

$$|(g(z) - g_T(z))\, h_T(z)| \leq \frac{2M}{R^2} \quad \text{se} \quad z \in [\rho]$$

pelo que

$$|I_1| \leq \frac{2\pi M}{R} < 2\pi \frac{\delta}{4}. \tag{23.25}$$

Para estimar I_2 consideremos agora o caminho λ_ε definido por

$$\lambda_\varepsilon(t) = Re^{it} \quad \text{com} \quad \theta_\varepsilon \leq t \leq 2\pi - \theta_\varepsilon.$$

Como λ_ε e σ_ε têm os mesmos pontos inicial e final e são ambos caminhos no semiplano $\mathrm{Re}(z) < 0$ onde $g_T h_T$ é analítica, tem-se

$$\int_{\sigma_\varepsilon} g_T h_T = \int_{\lambda_\varepsilon} g_T h_T$$

e portanto

$$I_2 = -\int_{\alpha_\varepsilon} g_T h_T - \int_{\lambda_\varepsilon} g_T h_T - \int_{\beta_\varepsilon} g_T h_T = -\int_\nu g_T h_T$$

em que ν é o caminho definido por

$$\nu(t) = Re^{it} \quad \text{com} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Dado que

$$|g_T(z)| = \left| \int_0^T e^{-zt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^T \left| e^{-zt} \right| dt < \frac{M}{|\mathrm{Re}(z)|} e^{-\mathrm{Re}(z)T} \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) < 0,$$

de (23.24) resulta

$$|g_T(z)\, h_T(z)| \leq \frac{2M}{R^2} \quad \text{se} \quad z \in [\nu]$$

pelo que

$$|I_2| \leq \frac{2\pi M}{R} < 2\pi \frac{\delta}{4}. \tag{23.26}$$

Seja agora

$$\mu(\varepsilon) = \max \{ |g(z)| : |z| \leq R \ \text{ e } \ -\varepsilon \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0 \}.$$

Atendendo a (23.24) temos então

$$|g(z)\, h_T(z)| \leq \frac{2\varepsilon \mu(\varepsilon)}{R^2} \quad \text{se} \quad z \in [\alpha_\varepsilon] \cup [\beta_\varepsilon]$$

e como

$$L(\alpha_\varepsilon) = L(\beta_\varepsilon) = \left(\theta_\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) R < \frac{\pi R}{2}$$

é

$$|I_3| \leq \frac{2\pi\varepsilon\mu(\varepsilon)}{R}.$$

Dado que $\mu(\varepsilon)$ é crescente pode escolher-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que seja $\varepsilon\mu(\varepsilon) \leq M$, e portanto

$$|I_3| \leq \frac{2\pi M}{R} < 2\pi\frac{\delta}{4}. \tag{23.27}$$

Se $z \in [\sigma_\varepsilon]$ temos finalmente

$$|g(z)\, h_T(z)| \leq \mu(\varepsilon)\, \frac{e^{-\varepsilon T}}{\varepsilon} \left(1 + \frac{|z|^2}{R^2}\right) \leq \frac{2M}{\varepsilon^2} e^{-\varepsilon T}$$

e como $L(\sigma_\varepsilon) < 2R$, é

$$|I_4| \leq \frac{4MR}{\varepsilon^2} e^{-\varepsilon T}.$$

Com ε fixo existe então $T_0 > 0$ tal que

$$|I_4| < \frac{2\pi M}{R} < 2\pi\frac{\delta}{4} \quad \text{se} \quad T > T_0$$

e das relações (23.23), (23.25), (23.26) e (23.27) conclui-se

$$|g(0) - g_T(0)| < \delta \quad \text{se} \quad T > T_0.$$

Temos assim

$$\lim_{T \to +\infty} g(T) = g(0)$$

pelo que

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = g(0).$$

■

Estamos agora em condições de provar o teorema dos números primos.

Teorema 23.19 (Hadamard e De La Vallée Poussin, 1896) - *Sendo $\pi(x)$ o número de números primos no intervalo $[1, x]$ tem-se*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty).$$

Demonstração. Atendendo ao teorema 23.15 o enunciado fica estabelecido se se provar a relação

$$\psi(x) \sim x \quad (x \to +\infty).$$

De acordo com o teorema 23.14 temos

$$-\frac{\zeta'(z)}{z\zeta(z)} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{z+1}}dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1$$

e como

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^z}dx = \frac{1}{z-1},$$

é então

$$-\frac{\zeta'(z)}{z\zeta(z)} - \frac{1}{z-1} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{z+1}}dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

Sendo φ a função definida no corolário do teorema 23.16 temos assim

$$\varphi(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{z+1}}dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1$$

pelo que

$$\varphi(z+1) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^{z+2}}dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

e a mudança de variável $x = e^t$ transforma este integral em

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt,$$

com

$$f(t) = \frac{\psi\left(e^t\right)}{e^t} - 1 \quad \text{se} \quad t \geq 0.$$

Atendendo ao teorema 23.17 a função f é limitada, e o corolário do teorema 23.16 mostra que a função g definida por $g(z) = \varphi(z+1)$ é prolongável analiticamente a um conjunto aberto que contém a recta $\mathrm{Re}(z) = 0$. Do teorema anterior resulta então a relação

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \varphi(1)$$

e atendendo ao corolário do teorema 23.16 ela traduz-se por

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx = -\gamma - 1.$$

Vamos agora provar que a convergência deste integral implica a relação assimptótica $\psi(x) \sim x$ quando $x \to +\infty$. Se para algum $\lambda > 1$ o conjunto dos x tais que $\psi(x) \geq \lambda x$ fosse ilimitado existia uma sucessão (x_n) de pontos deste conjunto com limite $+\infty$. Como ψ é crescente, para todo o n seria então

$$\int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx \geq \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\psi\left(x_n\right)-x}{x^2}dx \geq \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\lambda x_n - x}{x^2}dx = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - t}{t^2}dt > 0$$

mas a convergência do integral implica a relação

$$\lim \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx = 0.$$

Analogamente, se existisse $\lambda < 1$ e uma sucessão (x_n) de pontos tais que $\lim x_n = +\infty$ e $\psi(x_n) \leq \lambda x_n$, para todo o n teríamos

$$\int_{\lambda x_n}^{x_n} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx \leq \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - t}{t^2}dt < 0$$

o que contraria novamente a convergência do integral.
■

Nota 23.20 - Na demonstração do teorema dos números primos a relação

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx = -\gamma - 1$$

não foi utilizada na sua totalidade porque apenas se usou o facto de o integral ser convergente. A informação adicional fornecida pelo valor deste integral permite agora estabelecer uma nova propriedade da função de Von Mangoldt. Usando a identidade de Abel, para cada inteiro $n \geq 1$ temos efectivamente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Lambda(k)}{k} = \frac{\psi(n)}{n} + \int_{1}^{n} \frac{\psi(x)}{x^2}dx$$

pelo que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Lambda(k)}{k} = \ln n + \frac{\psi(n)}{n} + \int_{1}^{n} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx.$$

Como

$$\lim \frac{\psi(n)}{n} = 1 \ \text{ e } \lim \int_{1}^{n} \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx = -\gamma - 1$$

obtemos assim a relação

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Lambda(k)}{k} = \ln n - \gamma + o(1).$$

Corolário 1 - *Sendo (p_n) a sucessão dos números primos tem-se*

$$p_n \sim n \ln n.$$

Demonstração. Como $\pi(p_n) = n$, do teorema anterior resulta

$$n \sim \frac{p_n}{\ln p_n}, \tag{23.28}$$

ou seja,

$$n = \frac{p_n}{\ln p_n}\left(1 + o(1)\right).$$

Daqui vem

$$\ln n = \ln p_n - \ln\ln p_n + o(1)$$

pelo que

$$\frac{\ln n}{\ln p_n} = 1 - \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n} + o(1).$$

Como $\lim p_n = +\infty$, é

$$\lim \frac{\ln\ln p_n}{\ln p_n} = 0$$

o que implica

$$\ln n \sim \ln p_n,$$

e o enunciado resulta agora de (23.28).

■

Veremos posteriormente (cf. nota 23.41) que a *função logaritmo integral*, definida por

$$li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \quad \text{se} \quad x \geq 2$$

dá uma melhor aproximação de $\pi(x)$ que $x/\ln x$. Podemos desde já provar o seguinte resultado:

Corolário 2 - *Sendo $\pi(x)$ o número de números primos no intervalo $[1, x]$ tem-se*

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \quad (x \to +\infty).$$

Demonstração. Aplicando a regra de Cauchy para levantar a indeterminação temos

$$\lim_{x\to+\infty} li(x)\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$$

pelo que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty),$$

e o enunciado resulta directamente do teorema dos números primos.

■

Analisando a demonstração do teorema dos números primos verificamos que a não existência de zeros da função zeta na recta $\mathrm{Re}(z) = 1$ desempenhou um papel crucial pois foi isto que permitiu prolongar analiticamente a essa recta a função φ usada na demonstração. É mesmo possível provar que a relação $\psi(x) \sim x$ $(x \to +\infty)$ implica a ausência de zeros da função zeta naquela recta (cf. Ingham, 1932: 37).

Com vista a aprofundar a relação entre a distribuição do números primos e a localização dos zeros não triviais da função zeta de Riemann vamos agora prosseguir o estudo desta função. Começaremos por transformar a respectiva equação funcional de modo a obter uma versão mais simétrica e que envolve uma função inteira.

Teorema 23.21 (Riemann) - *A função ξ definida por*

$$\xi(z) = \frac{1}{2} z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) \tag{23.29}$$

é inteira, verifica a relação

$$\xi(z) = \xi(1-z) \tag{23.30}$$

e os seus zeros são os zeros não triviais da função zeta de Riemann.

Demonstração. O segundo membro de (23.29) mostra que os polos de

$$\frac{z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right)$$

coincidem com os zeros triviais de ζ, e como ζ tem um polo simples em $z = 1$ conclui-se que ξ é uma função inteira cujos zeros são os zeros não triviais de ζ.

Para cada $z \in \mathbb{C}$ é ainda

$$\xi(1-z) = \frac{1}{2} z(z-1)\pi^{(z-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)$$

e a relação (23.30) fica estabelecida se se mostrar que

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) = \pi^{-z+1/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z). \tag{23.31}$$

Pondo $w = (z+1)/2$ e aplicando a fórmula dos complementos da função gama temos

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = \Gamma(1-w) = \frac{\pi}{\Gamma(w)\sin \pi w} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\cos\frac{\pi z}{2}}.$$

Por outro lado, de (23.12) resulta

$$\zeta(1-z) = \frac{\zeta(z)}{2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\sin\frac{\pi z}{2}}$$

pelo que

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) = \frac{\pi\zeta(z)}{(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\sin \pi z}.$$

Aplicando de novo a fórmula dos complementos obtém-se então

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)=\frac{\Gamma(z)\,\zeta(z)}{(2\pi)^{z-1}\,\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}$$

e (23.31) deduz-se agora directamente do teorema de Legendre 22.11.

■

Corolário 1 - *A função ξ é real na recta real e na recta crítica* $\mathrm{Re}(z)=1/2$, *e para cada $z\in\mathbb{C}$ tem-se*

$$\overline{\xi(z)}=\xi(\overline{z}). \tag{23.32}$$

Demonstração. Atendendo ao corolário 1 do teorema 23.10, da relação (23.29) resulta que a função ξ é real em $\mathbb{R}$ e isto por sua vez implica a relação (23.32). Dado $t\in\mathbb{R}$ e atendendo a (23.30) temos agora

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)=\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)=\overline{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)}$$

pelo que $\xi(1/2+it)$ é real.

■

Corolário 2 - *Os zeros não triviais da função ζ são simétricos relativamente à recta real e à recta crítica* $\mathrm{Re}(z)=1/2$.

Demonstração. Seja ρ um zero não trivial da função ζ e ponha-se $\rho=1/2+\sigma+it$ com $\sigma,t\in\mathbb{R}$. É então $\xi(1/2+\sigma+it)=0$ e das relações (23.30) e (23.32) resulta $\xi(1/2-\sigma-it)=0$, $\xi(1/2+\sigma-it)=0$ e $\xi(1/2-\sigma+it)=0$.

■

Atendendo ao corolário do teorema 23.11 e ao teorema 23.16, podemos agora concluir que os zeros não triviais da função zeta estão situados na faixa $0<\mathrm{Re}(z)<1$.

Num célebre artigo de 1859 sobre a função zeta, Riemann afirmou que lhe parecia "muito provável" que todos os zeros não triviais estivessem situados na recta crítica $\mathrm{Re}(z)=1/2$. Trata-se da famosa *Hipótese de Riemann* cuja veracidade permanece desconhecida e que constitui um dos mais importantes problemas em aberto na matemática contemporânea (cf. nota 23.29).

De acordo com corolário anterior, e recordando que a função zeta não tem zeros não triviais em $\mathbb{R}$, um zero não trivial fora da recta crítica implica a existência de quatro zeros não triviais distintos.

Nota 23.22 - Outra conjectura importante sobre a função zeta de Riemann diz respeito à rapidez de crescimento de $|\zeta|$ na recta crítica $\mathrm{Re}(z)=1/2$. Pondo, para cada $\sigma\in\mathbb{R}$,

$$\mu(\sigma)=\inf\left\{\alpha>0:\zeta(\sigma+it)=O\left(t^{\alpha}\right)\quad(t\to+\infty)\right\},$$

a *hipótese de Lindelöf* é a de que se tem $\mu(1/2) = 0$.

Dado $\sigma > 1$, como a função ζ é limitada na recta $\mathrm{Re}(z) = \sigma$, tem-se $\mu(\sigma) = 0$. Aplicando então o corolário do teorema 18.17 na semifaixa vertical definida por $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 1$, vemos que a hipótese de Lindelöf implica $\mu(\sigma) = 0$ se $1/2 \leq \sigma \leq 1$.

Esta hipótese não está provada e a melhor estimativa de $\mu(1/2)$ actualmente conhecida (Bourgain, 2017) é a relação

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{13}{84} < \frac{1}{6.46}.$$

A hipótese de Lindelöf está directamente relacionada com a distribuição dos zeros da função ζ na faixa crítica, como mostra o seguinte resultado (cf. Edwards, 1974: 188-190):

Teorema (Backlund, 1918) - *Dados $\sigma \in]1/2, 1[$ e $T > 0$, seja $N_\sigma(T)$ o número de zeros de ζ no rectângulo definido por*

$$\sigma \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \quad e \quad 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq T.$$

Então a hipótese de Lindelöf é verdadeira sse

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{N_\sigma(T+1) - N_\sigma(T)}{\ln T} = 0,$$

para todo o $\sigma \in]1/2, 1[$.

Como a hipótese de Riemann equivale a $N_\sigma(T) = 0$ para todo o $\sigma \in]1/2, 1[$, vemos que a hipótese de Lindelöf é implicada pela hipótese de Riemann.

O teorema seguinte traduz outra propriedade fundamental da função ξ.

Teorema 23.23 - *A função ξ tem ordem* 1.

Demonstração. Atendendo a (23.29) e ao exemplo 20.4 temos

$$Ord(\xi) = Ord\left(\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)\right).$$

Por outro lado, a relação (23.30) mostra que basta estudar o comportamento da função quando $\sigma = \mathrm{Re}(z) \geq 1/2$. Aplicando o teorema 23.2 e a relação (23.3) obtemos a majoração

$$\left|\zeta(z) - \frac{1}{z-1}\right| \leq |z| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}} = |z|\,\zeta(\sigma+1) \leq |z|\,\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{se} \quad \sigma \geq \frac{1}{2},$$

pelo que

$$\zeta(z) = O(z) \quad (z \to \infty).$$

Notando agora que $\sigma > 0$ implica $|\arg z| < \pi/2$, do corolário do teorema 22.41 resulta

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{(z-1)/2}(\pi e)^{-z/2} \qquad (z \to \infty)$$

e daqui vem

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{1}{2}z\ln z + O(z)\right) \quad (z \to \infty)\,. \tag{23.33}$$

Para todo o $\varepsilon > 0$ é então

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta\left(z\right) = O\left(\exp\left(|z|^{1+\varepsilon}\right)\right)$$

e isto mostra que $Ord\,(\xi) \leq 1$. Por outro lado, dado $\sigma > 1$ é $\zeta\,(\sigma) > 1$ e de (23.33) resulta

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{\pi^{-\sigma/2}\Gamma\left(\sigma/2\right)\zeta\left(\sigma\right)}{e^{\sigma}} = +\infty$$

Verifica-se assim que é falsa a relação $\xi\,(z) = O\,(\exp\,(|z|))$ quando $z \to \infty$, e isto implica $Ord\,(\xi) = 1$.

■

Corolário - *A função ζ tem uma infinidade de zeros não triviais.*

Demonstração. A função f definida por $f(z) = \xi\,(z + 1/2)$ é uma função inteira par e tem a mesma ordem de ξ. Como o desenvolvimento de f em série de potências de z tem a forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n}z^{2n}$, segue-se que a função $f\left(z^{1/2}\right)$ também é inteira. Da definição de ordem resulta que esta nova função tem ordem $1/2$ e o teorema 20.14 mostra então que ela tem uma infinidade de zeros. Conclui-se assim que a função ξ tem também uma infinidade de zeros o que estabelece o enunciado.

■

No que se segue representaremos por $(\rho_n)_{n\geq1}$ uma sucessão admissível dos zeros não triviais da função ζ em que a sucessão $(|\rho_n|)$ é crescente, $\mathrm{Im}\left(\rho_{2n-1}\right) > 0$ e $\rho_{2n} = \overline{\rho}_{2n-1}$.

Podemos agora representar a função ξ sob a forma de produto infinito, um resultado anunciado por Riemann em 1859 e demonstrado finalmente por Hadamard em 1893 com base no seu teorema da factorização.

Teorema 23.24 (Hadamard, 1893) - *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\xi(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{e^{1+\gamma/2}}\right)^{z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{\rho_n}\right)e^{z/\rho_n}, \tag{23.34}$$

e o produto infinito converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Demonstração. Atendendo ao exemplo 20.18 a função ξ admite uma representação do tipo

$$\xi(z) = ce^{\lambda z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_n}\right) e^{z/\rho_n}$$

em que o produto infinito converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Escrevendo a relação (23.29) na forma

$$\xi(z) = (z-1)\, \pi^{-z/2} \Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right) \zeta(z)$$

e atendendo ao exemplo 23.8, temos $\xi(0) = -\zeta(0) = 1/2$ pelo que $c = 1/2$. É então

$$\zeta(z) = \frac{\pi^{z/2} e^{\lambda z}}{2(z-1)\Gamma(1+z/2)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\rho_n}\right) e^{z/\rho_n} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

e o teorema 17.6 permite derivar logaritmicamente o produto infinito nos pontos que não anulam a função ζ. Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e $\zeta(z) \neq 0$ obtemos assim

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \lambda + \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+z/2)}{\Gamma(1+z/2)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \qquad (23.35)$$

e daqui resulta

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \lambda + \frac{1}{2}\ln\pi + 1 + \frac{\gamma}{2}.$$

Aplicando a relação (23.13) conclui-se então

$$\lambda = \frac{1}{2}\ln\pi + \ln 2 - 1 - \frac{\gamma}{2} \qquad (23.36)$$

pelo que

$$ce^{\lambda z} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{e^{1+\gamma/2}}\right)^z.$$

■

Corolário - *Se* $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *e* $\zeta(z) \neq 0$ *tem-se*

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \ln 2\pi - \frac{\gamma}{2} - \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+z/2)}{\Gamma(1+z/2)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right). \qquad (23.37)$$

Demonstração. Esta identidade resulta directamente das relações (23.35) e (23.36).

■

Atendendo ao corolário anterior, a relação

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)=-\ln 2\pi+\frac{\gamma}{2}+\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+z/2)}{\Gamma(1+z/2)}$$

ficou estabelecida quando $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ e $\zeta(z)\neq 0$. No entanto, como o segundo membro representa uma função analítica no semiplano $\mathrm{Re}(z)>-2$ privado do ponto 1, podemos supôr a identidade válida em toda esta região. Sobre a função definida por esta identidade vamos agora provar um resultado auxiliar.

Lema 23.25 - *A função φ definida por*

$$\varphi(z)=-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(|\mathrm{Im}(z)|\right)$$

é limitada no conjunto

$$E=\{z=\sigma+it:-1\leq\sigma\leq 2\ \ e\ \ |t|\geq 1\}.$$

Além disso, na faixa $1\leq\mathrm{Re}(z)\leq 2$ tem-se

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\left(z\right)\right)<0\ \ se\ \ |t|\geq 2, \tag{23.38}$$

e

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\left(z\right)\right)<\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\ \ se\ \ |t|\geq 4. \tag{23.39}$$

Demonstração. Pondo

$$c=-\ln 2\pi+\frac{\gamma}{2}+1$$

e

$$f(z)=\frac{\Gamma'(1+z/2)}{\Gamma(1+z/2)}-\ln|t|$$

é

$$\varphi\left(z\right)=c+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}f(z).$$

Atendendo agora à equação funcional (22.8) da função digama e ao teorema 22.43, temos

$$\frac{\Gamma'(1+z/2)}{\Gamma(1+z/2)}=\frac{\Gamma'(z/2)}{\Gamma(z/2)}+\frac{2}{z}=\ln z-\ln 2+\frac{1}{z}+r(z)$$

em que

$$|r(z)|\leq\frac{1}{2\left|z\right|^2\sin^3\theta}\ \ \text{com}\ \ \theta=\frac{1}{2}\inf\left\{\pi-|\arg z|:z\in E\right\}=\frac{\pi}{8}. \tag{23.40}$$

É então

$$f(z)=-\ln 2+\ln|z|-\ln|t|+i\arg z+\frac{1}{z}+r(z),$$

e como

$$\ln |z| = \ln |t| + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{t^2}{\sigma^2}\right)$$

resulta

$$\varphi(z) = c - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right) + \frac{i}{2} \arg z + \frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} + \frac{r(z)}{2}, \tag{23.41}$$

pelo que φ é limitada em E.

Supondo agora $1 \leq \sigma \leq 2$, em (23.40) é $\theta = \pi/4$ pelo que

$$\operatorname{Re}(r(z)) \leq |r(z)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2 + t^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{1 + t^2}$$

De (23.41) deduz-se então

$$\operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq c - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1}\right) + \frac{1/\sqrt{2}}{1+t^2},$$

e se $|t| \geq 1 \geq \sigma - 1$ é

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

e também

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + t^2} \leq \frac{2}{4 + t^2}.$$

Como

$$\ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \leq \frac{4}{t^2}$$

temos assim

$$\operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq c - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{4 + t^2} + \frac{1 + 1/\sqrt{2}}{1 + t^2} \tag{23.42}$$

e se $|t| \geq 2$ resulta

$$\operatorname{Re}(\varphi(z)) \leq c - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1 + 1/\sqrt{2}}{5} < 0.$$

Finalmente, derivando a série que representa ζ quando $\operatorname{Re}(z) > 1$, obtemos

$$-\zeta'(2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Como

$$\frac{\ln n}{n^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{\ln u}{u^2} du \quad \text{se} \quad n \geq 3,$$

temos

$$-\zeta'(2) < \sum_{n=2}^{3} \frac{\ln n}{n^2} + \int_3^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2} du = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 3}{9} + \frac{1+\ln 3}{3} < 1,$$

e dado que $\zeta(2) = \pi^2/6$ é então

$$\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} > -\frac{6}{\pi^2} > -0.61.$$

Fazendo agora $t = 4$ em (23.42) obtém-se

$$\mathrm{Re}\,(\varphi(z)) < -0.68 < \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \quad \text{se} \quad |t| \geq 4.$$

■

Para cada zero não trivial ρ_n da função ζ usaremos a notação

$$\beta_n = \mathrm{Re}\,(\rho_n) \ \text{ e } \gamma_n = \mathrm{Im}\,(\rho_n)\,,$$

e a informação que temos sobre estes zeros mostra que $0 < \beta_n < 1$. Podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 23.26 - *Dado $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| \geq 4$ tem-se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (t - \gamma_n)^2} < \ln|t| \tag{23.43}$$

e

$$\sum_{n:|t-\gamma_n|\geq 1} \frac{1}{(t-\gamma_n)^2} < \frac{5}{4} \ln|t|\,. \tag{23.44}$$

Demonstração. Sendo φ a função definida no lema 23.25, dado $z = 2 + it$ com $|t| \geq 4$ temos

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)\right) = \mathrm{Re}\,(\varphi(z)) + \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right) + \frac{1}{2}\ln|t|$$

e aplicando a relação (23.39) resulta

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2+it-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)\right) < \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right) + \frac{1}{2}\ln|t|\,. \tag{23.45}$$

Por outro lado, do teorema 23.12 deduz-se

$$\left|\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}$$

pelo que

$$\left|\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right| \leq -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}. \tag{23.46}$$

Temos então

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right) \leq -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)},$$

e a relação (23.45) transforma-se em

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2+it-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)\right) < \frac{1}{2}\ln|t|. \tag{23.47}$$

Pondo agora

$$u_n(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2+it-\rho_n}\right)$$

é

$$u_n(t) = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} > 0$$

e como

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2} > 0,$$

de (23.47) deduz-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) < \frac{1}{2}\ln|t|. \tag{23.48}$$

Dado que $1 < 2-\beta_n < 2$ temos também

$$\frac{1}{u_n(t)} = 2-\beta_n+\frac{(t-\gamma_n)^2}{2-\beta_n} \leq 2+(t-\gamma_n)^2$$

pelo que

$$\frac{1}{1+(t-\gamma_n)^2} \leq \frac{2}{2+(t-\gamma_n)^2} \leq 2u_n(t)$$

e (23.43) resulta de (23.48).

Notando agora que

$$2-\beta_n+\frac{1}{2-\beta_n} < \frac{5}{2},$$

se $|t-\gamma_n| \geq 1$ temos

$$(t-\gamma_n)^2\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2-\beta_n}\right) \geq \frac{5}{2}-\frac{1}{2-\beta_n} > 2-\beta_n$$

pelo que

$$\frac{5}{2}(t-\gamma_n)^2 > \frac{1}{u_n(t)}$$

e de (23.48) deduz-se (23.44).

■

Corolário 1 - *Para cada* $T > 0$ *seja* $N(T)$ *o número de zeros não triviais* ρ *da função* ζ *tais que* $0 < \mathrm{Im}(\rho) \leq T$. *Temos então*

$$N(T+1) - N(T-1) < 2 \ln T \quad se \quad T \geq 4.$$

Demonstração. Se $T - 1 < \gamma_n \leq T + 1$ é então $(T - \gamma_n)^2 \leq 1$ pelo que

$$\begin{aligned} N(T+1) - N(T-1) &= \sum_{T-1<\gamma_n \leq T+1}^{+\infty} 1 \leq \sum_{T-1<\gamma_n \leq T+1}^{+\infty} \frac{2}{1 + (T - \gamma_n)^2} \\ &< 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \end{aligned}$$

e o enunciado resulta de (23.43).

■

Corolário 2 - *Existe uma constante* c *tal que, para todo o* $T > 0$ *é*

$$\sum_{0<\gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n} \leq c + \frac{1}{2} \ln^2 T.$$

Demonstração. Dado $T > 4$ e atendendo ao corolário anterior temos

$$\begin{aligned} \sum_{4<\gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n} &\leq \sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{N(2k+2) - N(2k)}{2k} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln(2k+1)}{k}. \end{aligned}$$

Como

$$\ln(2k+1) < \ln 2k + \frac{1}{2k}$$

temos ainda

$$\sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln(2k+1)}{k} < \sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln 2k}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{1}{k^2}$$

e portanto

$$\sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln(2k+1)}{k} < \sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln 2k}{k} + \frac{1}{2}(\zeta(2) - 1).$$

Notando agora que para todo o $k \geq 3$ é

$$\frac{\ln 2k}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{\ln 2t}{t} dt,$$

temos também

$$\sum_{k=2}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln 2k}{k} - \frac{\ln 4}{2} < \int_{2}^{T/2} \frac{\ln 2t}{t} du = \frac{1}{2} \ln^2 T - \frac{1}{2} \ln^2 4$$

e daqui resulta

$$\sum_{4 < \gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n} < \frac{1}{2} \ln^2 T + \frac{1}{2} \left(\zeta(2) - 1\right).$$

Tomando

$$c = \frac{1}{2} \left(\zeta(2) - 1\right) + \sum_{0 < \gamma_n \leq 4} \frac{1}{\gamma_n}$$

o enunciado é então válido para $T > 4$ e é trivial se $0 < T \leq 4$.

■

Nota 23.27 - Sabe-se que $\gamma_1 = 14.1347...$, e no apêndice 1 provaremos que $\gamma_1 > 12$. Isto permite substituir a restrição $T \geq 4$ no corolário 1 por $T > 1$ e pode ainda ver-se que o corolário 2 permanece válido com $c = 0$. Supondo sem perda de generalidade $T > 6$ temos efectivamente

$$\sum_{0 < \gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{6 < \gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n}$$

e pondo $a = \left(\zeta(2) - 1\right)/2$, como na demonstração anterior obtém-se agora

$$\sum_{0 < \gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n} \leq \sum_{k=3}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln(2k+1)}{k} < a + \sum_{k=3}^{\lfloor T/2 \rfloor} \frac{\ln 2k}{k} < a + \int_{2}^{T/2} \frac{\ln 2t}{t} dt$$

pelo que

$$\sum_{0 < \gamma_n \leq T} \frac{1}{\gamma_n} < \frac{\zeta(2) - 1 - \ln^2 4}{2} + \frac{1}{2} \ln^2 T < \frac{1}{2} \ln^2 T.$$

Corolário 3 - *Se* $-1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2$, $\mathrm{Im}(z) = t$ *e* $\zeta(z) \neq 0$, *quando* $|t| \geq 4$ *existe uma constante* C *tal que*

$$\left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \sum_{n:|t-\gamma_n|<1} \frac{1}{z - \rho_n} \right| \leq C \ln|t|$$

e o número de parcelas do somatório é inferior a $2 \ln|t|$.

Demonstração. Do lema 23.25 resulta

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) + \varphi\left(2+it\right) - \varphi\left(z\right)$$

em que φ é uma função limitada. Atendendo agora a (23.46) segue-se que existe uma função limitada h tal que

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) + h(z). \tag{23.49}$$

Pondo $\sigma = \operatorname{Re}(z)$ temos

$$\left| \frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right| = \frac{|2-\sigma|}{|\sigma+it-\rho_n|\,|2+it-\rho_n|}$$

e como

$$t-\gamma_n = \operatorname{Im}\left(\sigma+it-\rho_n\right) = \operatorname{Im}\left(2+it-\rho_n\right),$$

é

$$\left| \frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right| \leq \frac{|2-\sigma|}{|t-\gamma_n|^2} \leq \frac{3}{|t-\gamma_n|^2}.$$

Atendendo a (23.44) deduz-se então

$$\left| \sum_{n:|t-\gamma_n|\geq 1} \left(\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) \right| < 4\ln|t|\,.$$

Se $|t-\gamma_n| < 1$ temos $t-1 < \gamma_n < t+1$ pelo que o número das parcelas correspondentes na série que figura em (23.49) é

$$N(|t|+1) - N\left(|t|-1\right).$$

O corolário 1 mostra agora que este número é inferior a $2\ln|t|$, e como

$$|2+it-\rho_n| \geq |2-\beta_n| > 1$$

segue-se que

$$\left| \sum_{n:|t-\gamma_n|<1} \frac{1}{2+it-\rho_n} \right| < 2\ln|t|\,.$$

Sendo M um majorante de $|h|$, de (23.49) resulta assim

$$\left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \sum_{n:|t-\gamma_n|<1} \frac{1}{z-\rho_n} \right| < 6\ln|t| + M,$$

e a desigualdade do enunciado é válida com

$$C = 6 + \frac{M}{\ln 4}.$$

■

Podemos agora provar um resultado anunciado por Riemann em 1859 e demonstrado por Von Mangoldt em 1905.

Teorema 23.28 (Von Mangoldt, 1905) - *Para cada $T > 0$ seja $N(T)$ o número de zeros não triviais ρ da função ζ tais que $0 < \mathrm{Im}(\rho) \leq T$. Temos então*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T) \qquad (T \to +\infty).$$

Demonstração. Seja λ um caminho rectangular da forma

$$(2 - iT, 2 + iT, -1 + iT, -1 - iT, 2 - iT)$$

e suponha-se, sem perda de generalidade, que $\xi(z) \neq 0$ quando $\mathrm{Im}(z) = T$. Como λ é um caminho fechado elementar orientado positivamente (cf. exemplo 11.34), pelo teorema 16.4 o número de zeros da função ξ no interior deste caminho é dado por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\lambda \frac{\xi'}{\xi}.$$

Dado que os zeros de ξ são os zeros não triviais de ζ e são simétricos em relação ao eixo horizontal, temos então

$$N(T) = \frac{1}{4\pi i} \int_\lambda \frac{\xi'}{\xi} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{Im} \left(\int_\lambda \frac{\xi'}{\xi} \right).$$

Tomando a derivada logarítmica de (23.29) obtemos

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{\eta'(z)}{\eta(z)}$$

em que

$$\eta(z) = \pi^{-.z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z). \tag{23.50}$$

Pelo teorema dos resíduos é

$$\int_\lambda \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) = 4\pi i$$

e temos assim

$$N(T) = 1 + \frac{1}{4\pi} \mathrm{Im} \left(\int_\lambda \frac{\eta'}{\eta} \right). \tag{23.51}$$

Como
$$\eta(z) = \frac{2\xi\,(z)}{z(z-1)},$$
da relação $\xi\,(z) = \xi\,(1-z)$ resulta $\eta\,(z) = \eta\,(1-z)$ e portanto $\eta'(z) = -\eta'(1-z)$ pelo que, pondo $f = \eta'/\eta$, é $f(z) = -f(1-z)$. Dado que f toma valores reais quando z é real, o teorema 9.15 mostra que é também
$$f\,(\overline{z}) = \overline{f(z).}$$

Da relação $f(z) = -f(1-z)$ resulta agora
$$\int_2^{2+iT} f = \int_{-1}^{-1-iT} f, \ \int_{-1+iT}^{-1} f = \int_{2-iT}^{2} f \quad \text{e} \quad \int_{2+iT}^{-1+iT} f = \int_{-1-iT}^{2-iT} f$$
pelo que
$$\int_\lambda f = 2\left(\int_2^{2+iT} f + \int_{2+iT}^{-1+iT} f + \int_{-1+iT}^{-1} f\right).$$

Aplicando as relações $f\,(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ e $f(z) = -f(1-z)$ obtém-se ainda
$$\operatorname{Im}\left(\int_2^{2+iT} f\right) = \operatorname{Im}\left(\int_{-1+iT}^{-1} f\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\left(\int_{2+iT}^{1/2+iT} f\right) = \operatorname{Im}\left(\int_{1/2+iT}^{-1+iT} f\right)$$
pelo que (23.51) se reduz a
$$N(T) = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_\mu \frac{\eta'}{\eta}\right) \tag{23.52}$$
em que μ é um caminho da forma $(2, 2+iT, 1/2+iT)$.

Derivando logaritmicamente a identidade (23.50) temos agora
$$\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} = -\frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\,(z/2)}{\Gamma(z/2)} + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$$
pelo que
$$N(T) = 1 - \frac{T\ln\pi}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_\mu \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\,(z/2)}{\Gamma(z/2)} + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)dz. \tag{23.53}$$

Como
$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\,(z/2)}{\Gamma(z/2)} = (\log\Gamma(z/2))' \ \text{ quando } z \in [\mu]\,,$$
é então
$$\int_\mu \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\,(z/2)}{\Gamma(z/2)}\right)dz = \operatorname{Im}\left(\log\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right)\right)$$
e a aproximação de Stirling (22.19) dá
$$\operatorname{Im}\,(\log\Gamma(z)) = \operatorname{Im}\left(\left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z\right) - \operatorname{Im}\,(z) + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \to \infty)\,.$$

Quando $T \to +\infty$ temos agora

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right) &= \ln\frac{T}{2}+\ln i+\ln\left(1-\frac{i}{2T}\right)\\ &= \ln\frac{T}{2}+i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2T}\right)+O\left(\frac{1}{T^2}\right)\end{aligned}$$

pelo que

$$\operatorname{Im}\left(\left(-\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\right)=\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{T}\right).$$

É então

$$\operatorname{Im}\left(\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\right)=\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}+O\left(\frac{1}{T}\right),$$

e de (23.53) resulta

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+O\left(\frac{1}{T}\right)+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_{\mu}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right). \tag{23.54}$$

Quando z percorre o segmento $[2,2+iT]$ é $\operatorname{Re}(\zeta(z))>0$, pois

$$1-\operatorname{Re}(\zeta(z))\le|\zeta(z)-1|=\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{2+it}}\right|\le\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

Então a função $\ln\zeta(z)$ é analítica nos pontos de $[2,2+iT]$ pelo que

$$\left|\operatorname{Im}\left(\int_2^{2+iT}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right)\right|=|\arg\zeta(2+iT)|<\frac{\pi}{2}. \tag{23.55}$$

Atendendo ao corolário 3 do teorema anterior temos ainda

$$\operatorname{Im}\left(\int_{1/2+iT}^{2+iT}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right)=O(\ln T)+\sum_{n:|t-\gamma_n|<1}\operatorname{Im}\left(\int_{1/2+iT}^{2+iT}\frac{1}{z-\rho_n}dz\right), \tag{23.56}$$

e o número de parcelas deste somatório é $O(\ln T)$. Se $z\in[1/2+iT,2+iT]$ é $\operatorname{Im}(z-\rho_n)=T-\gamma_n\neq 0$ e isto mostra que para cada n a função $\ln(z-\rho_n)$ é analítica. Temos então

$$\int_{1/2+iT}^{2+iT}\frac{1}{z-\rho_n}dz=\ln(2+iT-\rho_n)-\ln\left(\frac{1}{2}+iT-\rho_n\right)$$

pelo que

$$\left|\operatorname{Im}\left(\int_{1/2+iT}^{2+iT}\frac{1}{z-\rho_n}\right)\right|=\left|\arg(2+iT-\rho_n)-\arg\left(\frac{1}{2}+iT-\rho_n\right)\right|<\pi.$$

e de (23.56) deduz-se

$$\operatorname{Im}\left(\int_{1/2+iT}^{2+iT}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right)=O(\ln T).$$

O enunciado resulta agora de (23.54) e (23.55).
■

Nota 23.29 - Uma versão mais precisa da fórmula (23.54), válida quando ζ não se anula no segmento $[1/2+iT, 1+iT]$, está na base dos cálculos intensivos que têm sido feitos para determinar $N(T)$ com valores elevados de T.

Tomando $m=2$ no desenvolvimento de $\log\Gamma\,(1/4+iT/2)$ dado por (22.36) e desenvolvendo $\ln(1/4+iT/2)-\ln T/2$ em potências de $1/T$ obtém-se a relação

$$\operatorname{Im}\left(\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\right)=\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48T}+\varepsilon(T),$$

em que o erro $\varepsilon(T)$ é inferior a $1/\left(285T^3\right)$ se $T\geq 10$. Pondo então

$$S(T)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_{2}^{2+iT}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz+\int_{2+iT}^{1/2+iT}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right),$$

$\pi S(T)$ é a variação do argumento de ζ ao longo do caminho $(2, 2+iT, 1/2+it)$ e temos

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+\delta(T)+S(T),$$

com

$$\delta(T)=\frac{1}{48\pi T}+\frac{\varepsilon(T)}{\pi}.$$

Para calcular $N(T)$ basta assim estimar $S(T)$ com a precisão necessária para obter um valor aproximado de $N(T)$ suficientemente próximo de um número inteiro. Esta estimação é feita actualmente de modo indirecto com base em métodos que não iremos aqui abordar e que apenas exigem dados sobre o comportamento da função ζ ao longo da recta crítica $\operatorname{Re}(z)=1/2$.

Quanto aos zeros situados na recta crítica, como a função ξ é real nesta recta os seus zeros podem ser determinados usando técnicas de Análise Real, nomeadamente estudando as mudanças de sinal respectivas. Estes cálculos ficam muito facilitados se se utilizar a chamada *fórmula de Riemann-Siegel* que foi encontrada em 1932 por Siegel quando examinava manuscritos não publicados de Riemann. Trata-se de um desenvolvimento assimptótico de demonstração laboriosa (cf. Edwards, 1974: 136-154), relativo a uma função estreitamente relacionada com ξ e que permite calcular os seus valores na recta crítica com grande eficiência. É de assinalar ainda que nos cálculos em larga escala mais recentes tem sido usado um método inovador introduzido por Odlyzko e Schönhage em 1988 que, embora baseado na fórmula de Riemann-Siegel, praticamente dispensa a utilização daquela fórmula na sua forma original.

Representando por $N_0(T)$ o número dos zeros da função zeta no segmento $[1/2, 1/2+iT]$, sabe-se hoje (Platt & Trudgian, 2021) que

$$N_0(T) = N(T) \text{ se } T = 3 \times 10^{12}$$

e que neste segmento existem cerca de 1.236×10^{13} zeros, todos eles simples. Ainda no sentido favorável à hipótese de Riemann provou-se também (Pratt et al, 2020) que

$$\underline{\lim}_{T \to +\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} \geq 0.417293962 > \frac{5}{12}.$$

Corolário 1 - *Tem-se*

$$\gamma_{2n-1} \sim \frac{2\pi n}{\ln n}.$$

Demonstração. Atendendo ao teorema anterior é

$$N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \ln T \text{ se } T \to +\infty$$

e como

$$n = N\left(\gamma_{2n-1}\right)$$

é então

$$n \sim \frac{1}{2\pi} \gamma_{2n-1} \ln \gamma_{2n-1}. \tag{23.57}$$

Temos assim

$$\ln n = \ln \gamma_{2n-1} + \ln \ln \gamma_{2n-1} - \ln 2\pi + o\,(1)$$

e portanto

$$\frac{\ln n}{\ln \gamma_{2n-1}} = 1 + \frac{\ln \ln \gamma_{2n-1}}{\ln \gamma_{2n-1}} + o(1)$$

Como $\lim \gamma_{2n-1} = +\infty$, é

$$\lim \frac{\ln \ln \gamma_{2n-1}}{\ln \gamma_{2n-1}} = 0$$

o que implica

$$\ln n \sim \ln \gamma_{2n-1}.$$

e o enunciado resulta agora de (23.57).

■

A relação assimptótica do corolário anterior é frequentemente descrita pela fórmula

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\ln n}$$

porque a sucessão dos zeros não triviais da função zeta, que aqui representamos por $(\rho_n)_{n\geq 1}$, é muitos vezes apresentada na forma

$$\rho_1, \rho_{-1}, ...\rho_n, \rho_{-n}, ... \text{ com } \rho_{-n} = \overline{\rho_n}.$$

Corolário 2 - *As séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{2n-1}} \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|}$$

são divergentes.

Demonstração. Temos efectivamente

$$-\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\rho_{2n-1}}\right) = \frac{\gamma_{2n-1}}{\beta_{2n-1}^2 + \gamma_{2n-1}^2} \geq \frac{\gamma_{2n-1}}{1+\gamma_{2n-1}^2} \sim \frac{1}{\gamma_{2n-1}},$$

e como do corolário anterior resulta

$$\frac{1}{\gamma_{2n-1}} \sim \frac{\ln n}{2\pi n}$$

conclui-se a divergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\rho_{2n-1}}\right),$$

o que prova a primeira parte do enunciado. A segunda parte resulta agora de se ter, para todo o $m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{2m} \frac{1}{|\rho_n|} = 2\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{|\rho_{2n-1}|}.$$

■

A ideia que presidiu à demonstração do teorema 23.16 pode ser usada para determinar uma região na faixa crítica $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ onde a função ζ não tem zeros. Começaremos por provar um resultado auxiliar.

Lema 23.30 - *Se* $1 < \sigma \leq 2$ *tem-se*

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} - \frac{1}{6}\ln 2. \tag{23.58}$$

Demonstração. Atendendo à identidade (23.37) temos

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = c + \frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+\sigma/2)}{\Gamma'(1+\sigma/2)} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\rho_n} - \frac{1}{\rho_n}\right)$$

com
$$c = -\ln 2\pi + \frac{\gamma}{2} + 1.$$
Como
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + \gamma_n^2} + \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} > 0,$$
é então
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1} < c + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1 + \sigma/2)}{\Gamma(1 + \sigma/2)}.$$
Dado que a função digama é crescente em $\mathbb{R}^+$, usando as relações (22.6) e (22.8) temos
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1} < c + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = c + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$$
e a desigualdade do enunciado resulta de ser
$$c + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} = -\ln 2\pi + \frac{3}{2} < -\frac{1}{6}\ln 2.$$
■

Podemos agora estabelecer o resultado que tínhamos anunciado.

Teorema 23.31 - *A função ζ não se anula nos pontos $z = \sigma + it$ tais que*
$$|t| \geq 2 \quad e \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{35\ln|t|}.$$

Demonstração. A relação (23.22), obtida na demonstração do teorema 23.16, mostra que se tem
$$\operatorname{Re}\left(-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}\right) \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma > 1. \tag{23.59}$$

Dados t tal que $|t| \geq 2$ e $\sigma \in]1, 2]$, atendendo ao lema anterior temos
$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{1}{2}\ln 2 \tag{23.60}$$
e de (23.38) resulta
$$\operatorname{Re}\left(-4\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right) < 2\ln|t| - 4\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma + it - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)\right).$$
Como os termos da série são positivos, para cada $k \geq 1$ é então
$$\operatorname{Re}\left(-4\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right) < 2\ln|t| - 4\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma + it - \rho_k} + \frac{1}{\rho_k}\right),$$

e dado que

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\rho_k}+\frac{1}{\rho_k}\right) &= \frac{\sigma-\beta_k}{(\sigma-\beta_k)^2+(t-\gamma_k)^2}+\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\gamma_k^2}\\ &> \frac{\sigma-\beta_k}{(\sigma-\beta_k)^2+(t-\gamma_k)^2}\end{aligned}$$

temos ainda

$$\mathrm{Re}\left(-4\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < 2\ln|t| - \frac{4\,(\sigma-\beta_k)}{(\sigma-\beta_k)^2+(t-\gamma_k)^2}. \tag{23.61}$$

Mudando t em $2t$ nesta desigualdade e suprimindo a segunda parcela do segundo membro obtemos também

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < \frac{1}{2}\ln(2\,|t|)\,, \tag{23.62}$$

e substituindo em (23.59) as desigualdades (23.60), (23.61) e (23.62) resulta

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4\,(\sigma-\beta_k)}{(\sigma-\beta_k)^2+(t-\gamma_k)^2}+\frac{5}{2}\ln|t|>0 \quad \text{se} \quad 1<\sigma\leq 2 \quad \text{e} \quad |t|\geq 2.$$

Seja agora k tal que $|\gamma_k|\geq 2$. Aplicando a desigualdade anterior com $t=\gamma_k$ e

$$\sigma = 1+\frac{1}{5\ln|\gamma_k|}<2,$$

obtemos

$$\frac{35}{2}\ln|\gamma_k| > \frac{4}{\sigma-\beta_k}$$

pelo que

$$\beta_k < 1-\frac{1}{35\ln|\gamma_k|},$$

e isto mostra que o zero ρ_k está situado fora da região referida no enunciado.
■

Nota 23.32 - Com outras constantes o resultado anterior foi obtido por De La Vallée Poussin em 1896, e permite tornar substancialmente mais preciso o enunciado do teorema dos números primos (cf. teoremas 23.37 e 23.40).

Convém salientar que a constante 35 do enunciado está longe de ser a melhor possível e uma escolha diferente de σ na parte final da demonstração permitiria substituir 35 por 34.8. Sabe-se actualmente que o enunciado se mantém verdadeiro com a constante 5.573412 (Mossinghoff & Trudgian, 2014).

Para relacionarmos a função ψ de Chebyshev com os zeros da função zeta de Riemann vamos começar por estabelecer dois lemas.

Lema 23.33 - *Dados $a, c, T \in \mathbb{R}^+$ temos*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a^z}{z}dz\right| \leq \frac{a^c}{\pi T\ln(1/a)} \quad se \quad a<1$$

e

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a^z}{z}dz-1\right| \leq \frac{a^c}{\pi T\ln a} \quad se \quad a>1.$$

Demonstração. Supondo $a<1$ tome-se $r>c$ e considere-se um caminho rectangular γ da forma

$$(c-iT, c+iT, r+iT, r-iT, c-iT)\,.$$

Como a^z/z é analítica no interior de γ temos

$$\int_\gamma \frac{a^z}{z}dz = 0$$

pelo que

$$\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a^z}{z}dz = -\int_{c+iT}^{r+iT}\frac{a^z}{z}dz + \int_{r-iT}^{r+iT}\frac{a^z}{z}dz + \int_{c-iT}^{r-iT}\frac{a^z}{z}dz.$$

Se $z \in [r-iT, r+iT]$ é

$$\left|\frac{a^z}{z}\right| = \frac{a^r}{|z|} \leq \frac{a^r}{r}$$

e conclui-se

$$\left|\int_{r-iT}^{r+iT}\frac{a^z}{z}dz\right| \leq \frac{2Ta^r}{r}.$$

Tomando agora o caminho $u+iT$ com $c \leq u \leq r$ temos

$$\left|\int_{c+iT}^{r+iT}\frac{a^z}{z}\right| = \left|\int_c^r \frac{a^{u+iT}}{u+iT}du\right| \leq \int_c^r \frac{a^u}{|u+iT|}du \leq \frac{1}{T}\int_c^r a^u du,$$

e do mesmo modo se obtém

$$\left|\int_{c-iT}^{r-iT}\frac{a^z}{z}\right| \leq \frac{1}{T}\int_c^r a^u du.$$

Temos assim, para todo o $r>c$,

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a^z}{z}dz\right| \leq \frac{2}{T}\int_c^r a^u du + \frac{2Ta^r}{r},$$

e fazendo $r \to +\infty$ resulta

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{a^z}{z} dz\right| \leq \frac{2}{T} \int_{c}^{+\infty} a^u du = -\frac{2a^c}{T \ln a}$$

que equivale à primeira relação do enunciado.

Supondo agora $a > 1$ seja $r > 0$ e considere-se um caminho rectangular σ da forma

$$(c - iT, c + iT, -r + iT, -r - iT, c - iT) .$$

Como o ponto 0 é interior a σ e

$$\lim_{z \to 0} a^z = 1,$$

pelo teorema dos resíduos é

$$\int_{\sigma} \frac{a^z}{z} dz = 2\pi i.$$

Temos assim

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{a^z}{z} dz - 2\pi i = \int_{-r+iT}^{c+iT} \frac{a^z}{z} dz + \int_{-r-iT}^{-r+iT} \frac{a^z}{z} dz - \int_{-r-iT}^{c-iT} \frac{a^z}{z} dz,$$

e como no caso anterior obtém-se

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{a^z}{z} dz - 2\pi i\right| \leq \frac{2}{T} \int_{-r}^{c} a^u du + \frac{2Ta^{-r}}{r}.$$

Fazendo $r \longrightarrow +\infty$ resulta então

$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{a^z}{z} dz - 2\pi i\right| \leq \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{c} a^u du = \frac{2a^c}{T \ln a}$$

que equivale à segunda relação do enunciado.

■

Um número real diz-se *semi-inteiro* se tiver a forma $n + 1/2$ com n inteiro.

Lema 23.34 - *Seja $x \in \mathbb{R}^+$ semi-inteiro. Quando $x \to +\infty$ é então*

$$\sum_{x/2 < n < 2x} \frac{1}{|\ln x/n|} = O(x \ln x).$$

Demonstração. Dado $x = N + 1/2$ com $N \in \mathbb{Z}^+$, suponha-se $x/2 < n \leq N - 1$ e seja $r_n = N - n$. Temos então

$$\left|\ln \frac{x}{n}\right| \geq \ln \frac{N}{n} = \ln \frac{N}{N - r_n} = \left|\ln \left(1 - \frac{r_n}{N}\right)\right| \geq \frac{r_n}{N}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\sum_{x/2<n\leq N-1}\frac{1}{|\ln x/n|} &\leq N\sum_{x/2<n\leq N-1}\frac{1}{r_n}\leq N\sum_{k=1}^{\lfloor N/2\rfloor}\frac{1}{k}=N\ln N+O(N)\\ &\leq x\ln x+O(x).\end{aligned}$$

Suponha-se agora $N+2\leq n\leq 2N$ e seja $r_n=n-(N+1/2)$. Temos então

$$\left|\ln\frac{x}{n}\right|=\left|\ln\frac{N+1/2}{n}\right|=\left|\ln\frac{n-r_n}{n}\right|=\left|\ln\left(1-\frac{r_n}{n}\right)\right|\geq\frac{r_n}{n}\geq\frac{r_n}{2N}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\sum_{N+2\leq n\leq 2N}\frac{1}{|\ln x/n|} &\leq 2N\sum_{N+2\leq n\leq 2N}\frac{1}{r_n}=2N\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1/2}\leq 2N\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\\ &= 2N\ln N+O(N)\leq 2x\ln x+O(x).\end{aligned}$$

Temos finalmente

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|\ln\frac{x}{N}\right|}+\frac{1}{\left|\ln\frac{x}{N+1}\right|} &= \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{2N}\right)}+\frac{1}{\left|\ln\left(1-\frac{1}{2N+2}\right)\right|}\\ &< 2N+1+2N+2=O(x)\end{aligned}$$

e conclui-se

$$\sum_{x/2<n<2x}\frac{1}{|\ln x/n|}\leq 3x\ln x+O(x)=O(x\ln x).$$

■

Podemos agora obter uma nova representação da função ψ de Chebyshev.

Teorema 23.35 - *Dado $T\geq 1$, para cada semi-inteiro $x>1$ tem-se*

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz+O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right)\quad(x\to+\infty)$$

em que

$$c=1+\frac{1}{\ln x}.$$

Demonstração. Como

$$\left|\frac{\Lambda\,(n)}{n^z}\right|\leq\frac{\ln n}{n^c}\quad\text{se}\quad z\in[c-iT,c+iT],$$

o critério de Weierstrass mostra que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$$

converge uniformemente no segmento $[c - iT, c + iT]$. Pondo

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^z \frac{1}{z} dz \quad \text{se} \quad x > 1$$

e atendendo ao teorema 23.12 temos então, para cada $x > 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n)\, I_n(x)$$

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n)\, I_n(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) + \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\,(I_n(x) - 1) + \sum_{n > x} \Lambda(n)\, I_n(x)$$

é então

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz - R(x) \tag{23.63}$$

com

$$R(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\,(I_n(x) - 1) + \sum_{n > x} \Lambda(n)\, I_n(x).$$

Como x tem a forma $\lfloor x \rfloor + 1/2$, é $x/n \neq 1$ e do lema 23.33 resulta

$$|R(x)| \leq \frac{1}{\pi T} \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \frac{(x/n)^c}{|\ln x/n|}. \tag{23.64}$$

Pondo agora

$$S_1(x) = \sum_{n \leq x/2} \Lambda(n) \frac{(x/n)^c}{|\ln x/n|} + \sum_{n \geq 2x} \Lambda(n) \frac{(x/n)^c}{|\ln x/n|}$$

e

$$S_2(x) = \sum_{x/2 < n < 2x} \Lambda(n) \frac{(x/n)^c}{|\ln x/n|}$$

temos

$$S_1(x) \leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^c = \frac{x^c}{\ln 2} \left(-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}\right) = \frac{ex}{\ln 2} \left(-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}\right).$$

Como do lema 23.30 resulta

$$-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)} < \frac{1}{c-1} = \ln x \quad \text{se} \quad \ln x \geq 1,$$

conclui-se

$$S_1(x) < \frac{e}{\ln 2} x \ln x \quad \text{se} \quad x \geq e.$$

Dado que

$$\left(\frac{x}{n}\right)^c < 2 \quad \text{se} \quad n > \frac{x}{2}$$

e

$$\Lambda\left(n\right) < \ln\left(2x\right) \quad \text{se} \quad n < 2x,$$

temos também

$$S_2(x) \leq 2^c \ln\left(2x\right) \sum_{x/2<n<2x} \frac{1}{|\ln x/n|}$$

e do lema 23.34 deduz-se

$$S_2(x) = O\left(x \ln^2 x\right) \qquad (x \to +\infty)\,.$$

Atendendo a (23.64), quando $x \to +\infty$ é pois

$$|R(x)| \leq \frac{S_1(x) + S_2(x)}{\pi T} = O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right)$$

e o enunciado resulta agora de (23.63).

■

Estamos finalmente em condições de relacionar de forma explícita a função ψ de Chebyshev com os zeros não triviais da função ζ.

Teorema 23.36 - *Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ semi-inteiro e $T \leq x$. Quando $T \to +\infty$ tem-se*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

Demonstração. Dado $T \geq e^2$ sejam $m = N(T+1) - N(T)$ e (α_n) uma sucessão de partes imaginárias consecutivas dos zeros de ζ tais que

$$T < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_m \leq T + 1.$$

Pondo ainda $\alpha_0 = T$, $\alpha_{m+1} = T + 1$ e sendo

$$d = \max_{1 \leq k \leq m+1} \left(\alpha_k - \alpha_{k-1}\right)$$

existe $T_0 \in \left]T, T+1\right[$ tal que a função ζ não se anula no intervalo

$$\left]T_0 - \frac{d}{2}, T_0 + \frac{d}{2}\right[.$$

Como é $d\,(m+1) \geq \alpha_{m+1} - \alpha_0 = 1$, e do corolário 1 do teorema 23.26 resulta

$$d > \frac{1}{2\ln T + 1} \geq \frac{2}{5\ln T}$$

conclui-se que

$$|T_0 - \gamma_n| > \frac{1}{5\ln T_0} \quad \text{se} \quad n \geq 1. \tag{23.65}$$

Dado $x \geq 2$ sejam agora

$$c = 1 + \frac{1}{\ln x},$$

λ um caminho rectangular da forma

$$\left(c - iT_0, c + iT_0, -\frac{1}{2} + iT_0, -\frac{1}{2} - iT_0, c - iT_0\right),$$

e f a função definida por

$$f(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z}.$$

No ponto $z = 0$ a função f tem um polo simples com resíduo $-\zeta'(0)/\zeta(0)$ e os restantes polos de f no interior do caminho λ são os polos de $-\zeta'/\zeta$ nessa região. Atendendo a (23.37) temos

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{z}{z-1} - \sum_{|\gamma_n| \leq T_0} \left(\frac{1}{z - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) - \sum_{|\gamma_n| > T_0} \left(\frac{1}{z - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + g(z)$$

em que g é analítica quando $\mathrm{Re}(z) > -2$, e o teorema 17.6 mostra que a função definida pelo segundo somatório é também analítica no rectângulo fechado limitado por λ.

A soma dos resíduos de f no interior de λ é então

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{|\gamma_n| \leq T_0} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}$$

e pelo teorema dos resíduos temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\lambda f = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{|\gamma_n| \leq T_0} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}.$$

Supondo agora que x é semi-inteiro e aplicando o teorema anterior resulta

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n| \leq T_0} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T_0}\right) + \frac{R\,(x, T_0)}{2\pi i} \quad (x \to +\infty). \tag{23.66}$$

com

$$R\,(x, T_0) = \int_{-1/2+iT_0}^{c+iT_0} f + \int_{-1/2-iT_0}^{-1/2+iT_0} f - \int_{-1/2-iT_0}^{c-iT_0} f.$$

Analisando o primeiro destes integrais temos

$$\int_{-1/2+iT_0}^{c+iT_0} f = \int_{-1/2}^{c} f\left(\sigma + iT_0\right) d\sigma = \int_{-1/2}^{c} -\frac{\zeta'(\sigma+iT_0)}{\zeta(\sigma+iT_0)} \frac{x^{\sigma+iT_0}}{\sigma+iT_0} d\sigma$$

pelo que

$$\left| \int_{-1/2+iT_0}^{c+iT_0} f \right| \leq \frac{x^c}{T_0} \int_{-1/2}^{c} \left| -\frac{\zeta'(\sigma+iT_0)}{\zeta(\sigma+iT_0)} \right| d\sigma. \tag{23.67}$$

Como $T_0 > e^2 > 4$, o corolário 3 do teorema 23.26 mostra que existe uma constante C tal que

$$\left| -\frac{\zeta'(\sigma+iT_0)}{\zeta(\sigma+iT_0)} \right| \leq C \ln T_0 + \sum_{n:|T_0-\gamma_n|<1} \frac{1}{|\sigma+iT_0-\rho_n|} \quad \text{se} \quad -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq c$$

e mostra também que o número de parcelas do somatório é inferior a $2\ln T_0$. Dado que

$$|\sigma + iT_0 - \rho_n| \geq |T_0 - \gamma_n|,$$

de (23.65) resulta

$$\sum_{n:|T_0-\gamma_n|<1} \frac{1}{|\sigma+iT_0-\rho_n|} \leq 10 \ln^2 T_0$$

e isto implica

$$\left| -\frac{\zeta'(\sigma+iT_0)}{\zeta(\sigma+iT_0)} \right| = O\left(\ln^2 T_0\right) \quad (T_0 \to +\infty). \tag{23.68}$$

Notando ainda que $x^c = xe$, de (23.67) obtém-se então a estimativa

$$\int_{-1/2+iT_0}^{c+iT_0} f = O\left(\frac{x \ln^2 T_0}{T_0}\right) \quad (T_0 \to +\infty)$$

e é analogamente

$$\int_{-1/2-iT_0}^{c-iT_0} f = O\left(\frac{x \ln^2 T_0}{T_0}\right) \quad (T_0 \to +\infty).$$

Temos agora

$$\int_{-1/2-iT_0}^{-1/2+iT_0} f = i \int_{-T_0}^{T_0} f\left(-\frac{1}{2} + it\right) dt = i \int_{-T_0}^{T_0} -\frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)} \frac{x^{-1/2+it}}{-1/2+it} dt$$

pelo que

$$\left| \int_{-1/2-iT_0}^{-1/2+iT_0} f \right| \leq x^{-1/2} \int_{-T_0}^{T_0} \left| -\frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)} \right| \frac{1}{\sqrt{1/4+t^2}} dt.$$

Como a função $-\zeta'/\zeta$ é analítica no segmento $[-1/2-4i,-1/2+4i]$, ela é limitada neste segmento e daqui resulta

$$\int_{-4}^{-4}|f| = O(1).$$

Se $|t|\geq 4$, atendendo de novo ao corolário 3 do teorema 23.26 temos

$$\left|-\frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)}\right| \leq C\ln|t| + \sum_{n:|t-\gamma_n|<1}\frac{1}{|-1/2+it-\rho_n|}.$$

Como para cada n é

$$\left|-\frac{1}{2}+it-\rho_n\right| \geq \left|-\frac{1}{2}-\beta_n\right| > \frac{1}{2}$$

e o número de parcelas do somatório não excede $2\ln|t|$, pondo $A=C+4$ temos

$$\left|-\frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)}\right| \leq A\ln|t|\,.$$

É então

$$\int_4^{T_0}\left|-\frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)}\right|\frac{1}{\sqrt{1/4+t^2}}dt \leq A\int_4^{T_0}\frac{\ln t}{t}dt < \frac{A}{2}\ln^2 T_0$$

e analogamente para o integral entre $-T_0$ e -4, donde se conclui

$$\left|\int_{-1/2-iT_0}^{-1/2+iT_0} f\right| = O\left(\ln^2 T_0\right) \quad (T_0\to+\infty)\,.$$

De (23.66) resulta assim a relação assimptótica, quando $x\to+\infty$ e $T_0\to+\infty$,

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma_n|\leq T_0}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T_0}\right) + O\left(\frac{x\ln^2 T_0}{T_0}\right) + O\left(\ln^2 T_0\right). \quad (23.69)$$

Vamos agora analisar o efeito de substituir T_0 por T na relação anterior. Como $T<T_0<T+1$, então $T_0\sim T$ e $\ln^2 T_0\sim\ln^2 T$ quando $T_0\to+\infty$, pelo que aquela relação se conserva válida substituindo T_0 por T nas três últimas parcelas. Pondo ainda

$$h(T) = \sum_{|\gamma_n|\leq T}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} = 2\sum_{0<\gamma_n\leq T}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n},$$

e notando que

$$|x^{\rho_n}| = x^{\beta_n} < x$$

temos
$$|h(T) - h(T_0)| \leq 2\,|N(T) - N(T_0)|\,\frac{x}{T}.$$
Como
$$|N(T) - N(T_0)| \leq N(T+1) - N(T) = O(\ln T)$$
é então
$$h(T_0) = h(T) + O\left(\frac{x \ln T}{T}\right)$$
pelo que a substituição de T_0 por T em (23.69) introduz uma parcela que está já incorporada no termo
$$O\left(\frac{x \ln^2 T}{T}\right).$$

Finalmente, se $T \leq x$ é
$$O\left(\frac{x \ln^2 T}{T}\right) = O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right)$$
e
$$O\left(\ln^2 T\right) = O\left(\ln^2 x\right) = O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right)$$
o que acaba de estabelecer a fórmula do enunciado.

■

O teorema anterior relaciona a função ψ com uma sucessão finita dos zeros não triviais da função zeta, mas é possível exprimir ψ em termos da totalidade destes zeros através da *identidade de Von Mangoldt*
$$\frac{\psi(x^-) + \psi(x^+)}{2} = x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{se} \quad x > 1 \qquad (23.70)$$
que estabeleceremos no apêndice 2.

A diferença $\psi(x) - x$ é o chamado *termo do erro do teorema dos números primos*, e o teorema anterior mostra que ela pode ser estimada a partir da localização dos zeros da função zeta. Usando a informação fornecida pelo teorema 23.31 provaremos o seguinte resultado:

Teorema 23.37 - *Quando $x \to +\infty$ tem-se*
$$\psi(x) = x + O\left(\frac{x \ln^2 x}{e^{c\sqrt{\ln x}}}\right)$$
com
$$c = \frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Demonstração. Considerando inicialmente x semi-inteiro e dado $T \leq x$, do teorema anterior resulta

$$|\psi(x) - x| = \left| \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} \right| + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) \quad (T \to +\infty).$$

Como

$$\left| \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} \right| \leq \sum_{|\gamma_n| \leq T} \frac{x^{\beta_n}}{|\gamma_n|} = 2 \sum_{0 < \gamma_n \leq T} \frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n}$$

é então

$$\psi(x) - x = O\left(\sum_{0 < \gamma_n \leq T} \frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} \right) + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) \quad (T \to +\infty). \tag{23.71}$$

Atendendo ao teorema 23.31 temos agora

$$\beta_n < 1 - \frac{c^2}{\ln \gamma_n} \quad \text{se} \quad \gamma_n \geq 2,$$

pelo que

$$\sum_{2 \leq \gamma_n \leq T} \frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} \leq x \sum_{2 \leq \gamma_n \leq T} \frac{x^{-c^2/\ln \gamma_n}}{\gamma_n},$$

e como

$$\frac{x^{-c^2/\ln \gamma_n}}{\gamma_n} = \frac{1}{\exp\left(\ln \gamma_n + \frac{c^2 \ln x}{\ln \gamma_n}\right)},$$

da desigualdade elementar

$$\ln \gamma_n + \frac{c^2 \ln x}{\ln \gamma_n} \geq 2c\sqrt{\ln x}$$

resulta

$$\sum_{2 \leq \gamma_n \leq T} \frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} \leq x N(T) \exp\left(-2c\sqrt{\ln x}\right).$$

Se houver zeros com $\gamma_n \in]0, 2[$, tomando $\theta > 0$ tal que $\beta_n \leq 1 - \theta$ para todo o $\gamma_n \in]0, 2[$, é

$$\sum_{0 < \gamma_n < 2} \frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} = O\left(x^{1-\theta}\right)$$

e obtém-se

$$\sum_{0 < \gamma_n \leq T} \frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} \leq x N(T) \exp\left(-2c\sqrt{\ln x}\right) + O(x^{1-\theta})$$

Como o teorema 23.28 implica

$$N(T) = O\left(T \ln T\right),$$

a relação (23.71) transforma-se assim em

$$\psi(x) - x = O\left(xT \ln T \exp\left(-2c\sqrt{\ln x}\right)\right) + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) + O(x^{1-\theta}),$$

e escolhendo

$$T = \exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)$$

conclui-se

$$\psi(x) - x = O\left(x\frac{c\sqrt{\ln x} + \ln^2 x}{\exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)}\right) + O(x^{1-\theta}) \ = O\left(\frac{x \ln^2 x}{\exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)}\right)$$

quando $x \to +\infty$.

Podemos finalmente remover a restrição de x ser semi-inteiro, pois se x não tiver esta forma existe um semi-inteiro x' tal que

$$\psi\left(x\right) = \psi\left(x'\right) \quad \text{e} \quad |x - x'| \leq 1/2.$$

■

Nota 23.38 - Na demonstração do teorema anterior o termo $O(x^{1-\theta})$ pode ser removido se se usar o facto de a função ζ não ter zeros ρ_n para os quais $\gamma_n \in \,]0, 2[$ (cf. nota 23.27 e apêndice 1).

Para aplicar o resultado anterior a $\pi(x)$ é conveniente introduzir uma nova função, estreitamente relacionada, que se define por

$$\Pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \quad \text{se} \quad x \geq 2. \tag{23.72}$$

Começaremos por provar um resultado auxiliar.

Lema 23.39 - *Quando $x \to +\infty$ tem-se*

$$\pi(x) = \Pi(x) + O\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\right).$$

Demonstração. Representando por p um número primo genérico, da definição de $\Pi(x)$ resulta

$$\Pi(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\Lambda(p)}{\ln p} + \sum_{k \geq 2} \sum_{p^k \leq x} \frac{\Lambda(p^k)}{k \ln p} = \pi(x) + \sum_{k \geq 2} \sum_{p \leq x^{1/k}} \frac{1}{k}.$$

Sendo

$$m = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$$

temos então

$$\Pi(x) - \pi(x) = \sum_{k=2}^{m} \frac{\pi\left(x^{1/k}\right)}{k} = \frac{\pi\left(x^{1/2}\right)}{2} + \sum_{k=3}^{m} \frac{\pi\left(x^{1/k}\right)}{k}$$

pelo que o enunciado resulta das relações

$$\frac{\pi\left(x^{1/2}\right)}{2} \sim \frac{x^{1/2}}{\ln x}$$

e

$$\sum_{k=3}^{m} \frac{\pi\left(x^{1/k}\right)}{k} \leq m\pi\left(x^{1/3}\right) \leq x^{1/3}\frac{\ln x}{\ln 2} = o\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\right).$$

■

Teorema 23.40 - *Quando $x \to +\infty$ tem-se*

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\frac{x \ln x}{e^{c\sqrt{\ln x}}}\right).$$

com

$$c = \frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Demonstração. Aplicando o teorema 23.13 à relação (23.72) temos

$$\Pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \ln^2 t} dt,$$

e do teorema anterior resulta

$$\Pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}} \ln x\right) + \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt + \int_2^x O\left(e^{-c\sqrt{\ln t}}\right) dt.$$

Integrando por partes temos por outro lado

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt + O(1)$$

o que conduz a

$$\Pi(x) - li(x) = O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}} \ln x\right) + O\left(\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln t}} dt\right).$$

Como a função definida por

$$t \exp\left(-c\sqrt{\ln t}\right)$$

é crescente se $t \geq 2$, temos ainda

$$\int_2^x \frac{te^{-c\sqrt{\ln t}}}{t} dt \leq xe^{-c\sqrt{\ln x}} \int_2^x \frac{1}{t} dt = O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}} \ln x\right).$$

É pois

$$\Pi(x) = li(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}} \ln x\right)$$

e o enunciado resulta agora do lema anterior.

■

Corolário - *Quando $x \to +\infty$, para cada inteiro $m \geq 1$ é*

$$\pi(x) = li(x) + o\left(\frac{x}{\ln^m x}\right).$$

Demonstração. Resulta directamente do teorema anterior pois

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{\exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)} \frac{\ln^m x}{x} = 0.$$

■

Nota 23.41 - O corolário anterior explica porque motivo $li(x)$ é uma aproximação melhor de $\pi(x)$ do que $x/\ln x$. Integrando por partes, para cada inteiro $k \geq 1$ temos efectivamente

$$\int_2^x \frac{1}{\ln^k x} dx = \frac{x}{\ln^k x} - \frac{2}{\ln^k 2} + k \int_2^x \frac{1}{\ln^{k+1} x} dx$$

pelo que

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!x}{\ln^m x} + m! \int_2^x \frac{1}{\ln^{m+1} x} dx + O(1).$$

É então

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!x}{\ln^m x} + o\left(\frac{x}{\ln^m x}\right),$$

e aplicando o corolário anterior com $m = 2$ resulta

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x} = li(x) - \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) = \frac{x}{\ln^2 x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

o que implica

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x} \sim \frac{x}{\ln^2 x} \quad (x \to +\infty).$$

O exemplo seguinte mostra uma aproximação simples de $\pi(x)$ que é preferível a $x/\ln x$.

Exemplo 23.42 - *Tem-se*

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x - 1} \sim \frac{x}{\ln^3 x} \quad (x \to +\infty)\,.$$

Temos efectivamente, quando $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln x - 1} &= \frac{x}{\ln x}\frac{1}{1-\frac{1}{\ln x}} = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x} + o\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right) \\
&= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{x}{\ln^3 x} + o\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)
\end{aligned}$$

Como é

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{2x}{\ln^3 x} + o\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right),$$

aplicando o corolário anterior com $m = 3$ temos

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x - 1} = li(x) - \frac{x}{\ln x - 1} + o\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right) = \frac{x}{\ln^3 x} + o\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

e obtém-se a relação pretendida.

O exemplo seguinte descreve uma aproximação ao número primo p_n mais exacta que $n \ln n$.

Exemplo 23.43 - *Sendo* (p_n) *a sucessão dos números primos tem-se*

$$p_n = n\ln n + n \ln\ln n - n + o(n).$$

Efectivamente, aplicando o exemplo anterior com $x = p_n$ temos

$$n - \frac{p_n}{\ln p_n - 1} \sim \frac{p_n}{\ln^3 p_n}$$

pelo que

$$n\ln p_n - n - p_n \sim \frac{p_n}{\ln^3 p_n}(\ln p_n - 1) \sim \frac{p_n}{\ln^2 p_n}.$$

Usando agora a relação $p_n \sim n\ln n$ obtém-se

$$\ln p_n = \ln n + \ln\ln n + o(1)$$

pelo que

$$n\ln n + n\ln\ln n - n - p_n + o\,(n) \sim \frac{p_n}{\ln^2 p_n} \sim \frac{n}{\ln n} = o(n),$$

o que conduz ao resultado anunciado.

A zona mais ampla onde se provou que a função ζ não tem zeros é a dos números $\sigma + it$ da forma

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{C\left(\ln|t|\right)^{2/3}\left(\ln\ln|t|\right)^{1/3}}$$

com C constante e $|t| \geq 3$. Este resultado permite alguma melhoria na estimativa do termo do erro do teorema dos números primos mas não exclui a existência de zeros $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ em que os β_n estejam arbitrariamente próximos de 1.

O teorema seguinte mostra as consequências de existir um número $\theta < 1$ tal que $\operatorname{Re}(\rho) \leq \theta$ para todo o zero não trivial ρ da função zeta.

Teorema 23.44 - *Seja*

$$\theta = \sup\left\{\operatorname{Re}(\rho) : \zeta(\rho) = 0\right\}.$$

Quando $x \to +\infty$ tem-se então

$$\psi(x) - x = O\left(x^{\theta}\ln^2 x\right) \tag{23.73}$$

e

$$\pi(x) - li\,(x) = O\left(x^{\theta}\ln x\right). \tag{23.74}$$

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade x semi-inteiro, como na demonstração do teorema 23.37 temos

$$|\psi(x) - x| \leq 2\sum_{0<\gamma_n\leq T}\frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right)$$

quando $T \longrightarrow +\infty$. Atendendo ao corolário 2 do teorema 23.26 é então

$$\sum_{0<\gamma_n\leq T}\frac{x^{\beta_n}}{\gamma_n} \leq x^{\theta}\sum_{0<\gamma_n\leq T}\frac{1}{\gamma_n} = x^{\theta}O\left(\ln^2 T\right)$$

pelo que

$$\psi(x) - x = O\left(x^{\theta}\ln^2 T\right) + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right)$$

e tomando $T = x$ obtém-se (23.73).

Como na demonstração do teorema 23.40 temos agora

$$\begin{aligned}\Pi(x) - li(x) &= O\left(x^{\theta}\ln x\right) + O\left(\int_2^x t^{\theta-1}dt\right)\\ &= O\left(x^{\theta}\ln x\right) + O\left(x^{\theta}\right) = O\left(x^{\theta}\ln x\right)\end{aligned}$$

e atendendo ao lema 23.39 obtém-se (23.74).

■

Se $\theta = 1$ as estimativas (23.73) e (23.74) são triviais, mas se $\theta < 1$ elas dão resultados melhores que os dos teoremas 23.37 e 23.40 pois a função

$$\exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)$$

cresce mais lentamente que qualquer potência de x com expoente positivo. Em particular, como a hipótese de Riemann equivale a ter-se $\theta = 1/2$, vemos que ela conduz aos menores termos do erro possíveis no teorema dos números primos.

O teorema seguinte traduz que, reciprocamente, as relações (23.73) e (23.74) exigem que a função ζ não tenha zeros com parte real superior a θ.

Teorema 23.45 - *Se alguma das relações* (23.73) *ou* (23.74) *for verdadeira, então a função zeta não tem zeros no semiplano* $\mathrm{Re}(z) > \theta$.

Demonstração. Suponha-se em primeiro lugar que (23.73) é válida. Quando $x \to +\infty$ para todo o $\varepsilon > 0$ é então

$$\psi(x) - x = O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right),$$

e dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) = \sigma$ temos

$$\frac{\psi(x) - x}{x^{z+1}} = O\left(\frac{1}{x^{\sigma+1-\theta-\varepsilon}}\right).$$

Como o integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1-\theta-\varepsilon}} dx$$

converge se $\sigma > \theta + \varepsilon$, pondo

$$\varphi(z) = z\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{z+1}} dx$$

o teorema 22.13 mostra que φ é uma função analítica no semiplano $\mathrm{Re}(z) > \theta + 2\varepsilon$, e dado que $\varepsilon >$ é arbitrário conclui-se que φ é analítica no semiplano $\mathrm{Re}(z) > \theta$. Atendendo ao teorema 23.14 temos no entanto

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{z}{z-1} = z\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{z+1}} dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1$$

e resulta assim que a função $-\zeta'/\zeta$ se pode prolongar analiticamente ao semiplano $\mathrm{Re}(z) > \theta$ privado do ponto 1. Então ζ não se anula nesta região, pois o exemplo 14.22 mostra que um zero de ζ corresponde a um polo de $-\zeta'/\zeta$.

Supondo agora que a relação (23.74) é válida, a demonstração fica concluída se se provar que ela implica a relação (23.73). Como

$$\psi(x) = \sum_{2 \le n \le x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \ln n,$$

aplicando o teorema 23.13 temos

$$\psi(x) = \Pi(x)\ln x - \int_2^x \frac{\Pi(t)}{t}dt.$$

Atendendo ao lema 23.39 é também

$$\Pi(x) - li\,(x) = O\left(x^\theta \ln x\right)$$

e daqui resulta

$$\psi(x) = li\,(x)\ln x + O\left(x^\theta \ln^2 x\right) - \int_2^x \frac{li(t)}{t}dt - O\left(\int_2^x t^{\theta-1}\ln t dt\right).$$

Integrando por partes deduz-se

$$li\,(x)\ln x - \int_2^x \frac{li(t)}{t}dt = x + O(1)$$

pelo que

$$\psi(x) - x = O\left(x^\theta \ln^2 x\right) - O\left(\int_2^x t^{\theta-1}\ln t dt\right),$$

e como

$$\int_2^x t^{\theta-1}\ln t dt \leq \frac{x^\theta}{\theta}\ln x$$

obtém-se a relação (23.73).

■

Atendendo aos dois teoremas anteriores podemos agora formular a hipótese de Riemann em novos termos.

Teorema 23.46 - *A hipótese de Riemann equivale a qualquer das relações assimptóticas, quando $x \to +\infty$,*

$$\psi(x) - x = O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)$$

ou

$$\pi(x) - li\,(x) = O\left(\sqrt{x}\ln x\right).$$

■

Vemos assim que a hipótese de Riemann é equivalente, num sentido bem preciso, a minimizar as irregularidades da sucessão dos números primos. Isto ajuda a compreender uma declaração atribuída a David Hilbert, um dos maiores matemáticos do século XX:

"Se eu acordasse depois de um sono de mil anos, a minha primeira pergunta seria: já demonstraram a hipótese de Riemann?".

APÊNDICE 1 - Zona sem zeros da função zeta de Riemann

Vamos provar que função zeta de Riemann não se anula na faixa crítica quando $0 < \mathrm{Im}(z) \leq 12$, e para isso começaremos por estabelecer uma versão de um teorema de Hardy e Littlewood que permite estimar esta função em faixas horizontais do semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Teorema 1 (Hardy & Littlewood, 1921) - *Sejam $x > 0$ um número semi-inteiro e*

$$E = \{s \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \mathrm{Re}(s) > 0 \text{ e } |\mathrm{Im}(s)| < 2\pi x\}.$$

Se $s \in E$ tem-se então

$$\left|\zeta(s) - \sum_{1 \leq n < x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{1-s}\right| < \frac{1}{\pi x^{\mathrm{Re}(s)}} \left(1 - \left(\frac{\mathrm{Im}(s)}{2\pi x}\right)^2\right)^{-1}.$$

Demonstração. Dado um número semi-inteiro $x > 0$ seja $s = \sigma + it$ com $\sigma, t \in \mathbb{R}$, $\sigma > 1$ e $|t| < 2\pi x$. Como a função f definida por

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{z^s} \quad \text{se } \mathrm{Re}(z) > 0$$

tem polos simples nos pontos $n \in \mathbb{Z}^+$ com resíduos

$$Res(f; n) = \frac{1}{\pi n^s},$$

para cada inteiro positivo N é

$$\sum_{x<n<x+N} \frac{1}{n^s} = \pi \sum_{x<n<x+N} Res(f; n).$$

Tomando então um caminho rectangular γ_N da forma

$$(x - iN, x + N - iN, x + N + iN, x + iN, x - iN),$$

do teorema dos resíduos resulta

$$\sum_{x<n<x+N} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_N} f \tag{1}$$

e vamos agora analisar o efeito de fazer $N \to +\infty$ nesta identidade.

Temos
$$\int_{x-iN}^{x+N-iN} f = \int_{x}^{x+N} \frac{\cot \pi \left(r - iN\right)}{\left(r - iN\right)^{s}} dr$$
e das relações (10.26) e (10.27) deduz-se
$$\left|\cot \pi \left(r - iN\right)\right|^{2} = \frac{\cos^{2} \pi r + \sinh^{2} \pi N}{\sin^{2} \pi r + \sinh^{2} \pi N} \leq 1 + \frac{1}{\sinh^{2} \pi N} = O(1).$$
Como
$$\begin{aligned} \left|\left(r - iN\right)^{-s}\right| &= \left|r - iN\right|^{-\sigma} \exp\left(t \arg\left(r - iN\right)\right) \leq N^{-\sigma} \exp\left(\left|t\right| \frac{\pi}{2}\right) \\ &\leq N^{-\sigma} \exp\left(\pi^{2} x\right) = O\left(N^{-\sigma}\right) \end{aligned}$$
é então
$$\left|\int_{x-iN}^{x+N-iN} f\right| = O\left(\frac{1}{N^{\sigma-1}}\right)$$
o que implica
$$\lim_{N \to +\infty} \int_{x-iN}^{x+N-iN} f = 0,$$
e analogamente se verifica que
$$\lim_{N \to +\infty} \int_{x+N+iN}^{x+iN} f = 0.$$
Temos também
$$\int_{x+N-iN}^{x+N+iN} f = i \int_{-N}^{N} f\left(x + N + ir\right) dr,$$
e dado que $x + N$ é semi-inteiro obtém-se a majoração
$$\left|\cot \pi \left(x + N + ir\right)\right|^{2} = \frac{\sinh^{2} r}{1 + \sinh^{2} r} \leq 1.$$
Como anteriormente deduz-se ainda
$$\left|\left(x + N + ir\right)^{-s}\right| = O\left(N^{-\sigma}\right)$$
pelo que
$$\left|\int_{x+N-iN}^{x+N+iN} f\right| = O\left(\frac{1}{N^{\sigma-1}}\right)$$
e isto implica
$$\lim_{N \to +\infty} \int_{x+N-iN}^{x+N+iN} f = 0.$$

Fazendo $N \to +\infty$ na relação (1) resulta assim

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = -\frac{1}{2i} \lim_{N\to+\infty} \int_{x-iN}^{x+iN} f,$$

e como é

$$\int_{x-iN}^{x+iN} f = \int_{x-iN}^{x} \frac{\cot \pi z - i}{z^s} dz + \int_{x}^{x+iN} \frac{\cot \pi z + i}{z^s} dz + C$$

com

$$C = i \int_{x-iN}^{x} \frac{1}{z^s} dz - i \int_{x}^{x+iN} \frac{1}{z^s} dz = 2i \frac{x^{1-s}}{1-s} + o\left(1\right),$$

obtém-se

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = -\frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2i} \lim_{N\to+\infty} \left(\int_{x-iN}^{x} \frac{\cot \pi z - i}{z^s} dz + \int_{x}^{x+iN} \frac{\cot \pi z + i}{z^s} dz \right).$$

Pondo então

$$\varphi\left(s,x,r\right) = -\frac{\cot \pi\left(x-ir\right) - i}{2\left(x-ir\right)^s} - \frac{\cot \pi\left(x+ir\right) + i}{2\left(x+ir\right)^s}$$

esta identidade pode escrever-se na forma

$$\zeta(s) - \sum_{1\le n<x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \varphi\left(s,x,r\right)\ dr \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \quad (2)$$

Partindo agora da relação

$$\cot \pi z = i + \frac{2i}{e^{2\pi i z} - 1}$$

e notando que $e^{2\pi i x} = -1$, temos

$$\cot \pi\left(x-ir\right) - i = -\frac{2i}{e^{2\pi r} + 1}$$

e também

$$\cot \pi\left(x+ir\right) + i = \overline{\cot \pi\left(x-ir\right) - i} = \frac{2i}{e^{2\pi r} + 1}$$

pelo que

$$\varphi\left(s,x,r\right) = \frac{i}{e^{2\pi r} + 1} \left(\left(x-ir\right)^{-s} - \left(x+ir\right)^{-s} \right).$$

Temos ainda

$$\left| \left(x-ir\right)^{-s} - \left(x+ir\right)^{-s} \right| \le \left|x-ir\right|^{-\sigma} e^{t \arg(x-ir)} + \left|x+ir\right| e^{t \arg(x+ir)},$$

e pondo $\theta = \arg(x + ir)$ resulta

$$|\varphi(s, x, r)| \le \frac{2\cosh t\theta}{x^\sigma(e^{2\pi r} + 1)} = \frac{2\cosh|t|\theta}{x^\sigma(e^{2\pi r} + 1)}.$$

Por ser

$$\theta = \arctan\frac{r}{x} \le \frac{r}{x}$$

deduz-se

$$\cosh|t|\theta \le \cosh\left(\frac{|t|r}{x}\right) = \cosh\left(\frac{tr}{x}\right)$$

e obtém-se assim a majoração

$$|\varphi(s, x, r)| \le \frac{e^{tr/x} + e^{-tr/x}}{x^\sigma(e^{2\pi r} + 1)}. \tag{3}$$

Como por hipótese é $|t|/x < 2\pi$, conclui-se que o integral

$$I(s, x) = \int_0^{+\infty} \varphi(s, x, r)dr$$

é absolutamente convergente e que

$$|I(s, x)| \le \frac{1}{x^\sigma}\int_0^{+\infty}\frac{e^{tr/x} + e^{-tr/x}}{e^{2\pi r}}dr = \frac{1}{x^\sigma}\left(\frac{1}{2\pi - t/x} + \frac{1}{2\pi + t/x}\right),$$

ou seja,

$$|I(s, x)| \le \frac{1}{\pi x^\sigma}\left(1 - \frac{t^2}{4\pi^2x^2}\right)^{-1}.$$

Atendendo à identidade (2) esta relação estabelece a desigualdade pretendida quando $\mathrm{Re}(s) > 1$. Finalmente a relação (3) mostra que a função $s \mapsto I(s, x)$ é analítica na faixa E referida no enunciado. Do princípio do prolongamento analítico 9.10 resulta então que a identidade

$$\zeta(s) - \sum_{1\le n<x}\frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{1-s} = I(s, x)$$

é válida em E, o que completa a demonstração.

■

Nota - Partindo da relação

$$|\varphi(s, x, r)| \le \frac{2\cosh|t|\theta}{x^\sigma(e^{2\pi r} + 1)}$$

obtém-se também

$$|\varphi(s, x, r)| \le \frac{1}{x^\sigma(e^{2\pi r} + 1)} + \frac{e^{|t|r/x}}{x^\sigma e^{2\pi r}}$$

o que conduz a

$$|I(s,x)| \le \frac{\ln 2}{2\pi x^\sigma} + \frac{1}{x^\sigma \left(2\pi - |t|/x\right)},$$

e esta majoração é preferível à do teorema anterior quando

$$\frac{|t|}{2\pi x} < \frac{1}{\ln 2} - 1 = 0.442695... \, .$$

Podem ainda obter-se majorações mais precisas de $|I(s,x)|$ partindo do desenvolvimento

$$\frac{1}{e^{2\pi r}+1} = \frac{1}{e^{2\pi r}} \frac{1}{1+e^{-2\pi r}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{e^{2n\pi r}}.$$

Daqui resulta

$$|\varphi(s,x,r)| \le \frac{1}{x^\sigma} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{tr/x} + e^{-tr/x}}{e^{2n\pi r}}$$

pelo que

$$|I(s,x)| \le \frac{1}{\pi x^\sigma} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \left(\frac{t}{2n\pi x}\right)^2\right)^{-1},$$

e como o módulo do termo geral desta série é decrescente, para cada inteiro $m \ge 0$ tem-se

$$|I(s,x)| < \frac{1}{\pi x^\sigma} \sum_{n=1}^{2m+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \left(\frac{t}{2n\pi x}\right)^2\right)^{-1}.$$

Com base no teorema anterior vamos agora provar um resultado auxiliar.

Lema 2 - *Tem-se*

$$\operatorname{Re}(\zeta(\sigma + iT)) > 0 \quad se \quad \sigma \ge 1/2 \quad e \quad T = 12.$$

Demonstração. Sendo $z = \sigma + iT$ e tomando $x = 5/2$, é $2\pi x > 12$ pelo que do teorema anterior resulta

$$\zeta(\sigma + iT) = 1 + \frac{1}{2^{\sigma+iT}} - \frac{x^{1-z}}{1-z} + R(z),$$

com

$$|R(z)| < \frac{1}{\pi x^\sigma} \left(1 - \left(\frac{T}{2\pi x}\right)^2\right)^{-1} \le \frac{1}{\pi\sqrt{5/2}} \frac{1}{1 - \left(\frac{12}{5\pi}\right)^2}.$$

Temos agora

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{2^{\sigma+iT}}\right)=1+\frac{\cos\left(12\ln 2\right)}{2^{\sigma}},$$

e verifica-se que $\cos\left(12\ln 2\right)<0$. É então

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{1}{2^{\sigma+iT}}\right)\geq 1-\frac{\left|\cos\left(12\ln 2\right)\right|}{\sqrt{2}}>0.65,$$

pelo que das desigualdades

$$|R(z)|<0.5$$

e

$$\left|\frac{x^{1-z}}{1-z}\right|=\frac{x^{1-\sigma}}{|1-z|}\leq\frac{\sqrt{5/2}}{12}<0.15$$

resulta

$$\operatorname{Re}\left(\zeta\left(\sigma+iT\right)\right)>0.$$

■

Podemos finalmente demonstrar o resultado que tínhamos anunciado.

Teorema 3 - *Tem-se* $\zeta(z)\neq 0$ *se* $0<\operatorname{Im}(z)\leq 12$.

Demonstração. Retomando a demonstração do teorema 23.28 com $T=12$, temos

$$N(T)=1-\frac{T\ln\pi}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\right)+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_{\mu}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right)$$

em que μ é um caminho da forma $(2,2+iT,1/2+iT)$. Usando agora a aproximação de Stirling (22.19) com $z=1/4+iT/2$, o termo do erro $r(T)$ verifica

$$|r(T)|\leq\frac{1}{8\,|z|\cos^2(\frac{\arg z}{2})}\leq\frac{1}{8\,|z|\cos^2\pi/4}$$

pelo que

$$|r(T)|<\frac{1}{2T}.$$

Temos também

$$\ln\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)=\ln\frac{T}{2}+i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2T}\right)+\rho(T)$$

com

$$\rho(T)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{i}{2T}\right)^{n},$$

e daqui vem

$$\operatorname{Im}\left(\left(-\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right)\right)=\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8T}+R(T)$$

com

$$|R(T)|\leq\left|-\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right||\rho(T)|\,.$$

Como

$$|\rho(T)|\leq\frac{1}{8T^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2T}\right)^n=\frac{2T}{8T^2\left(2T-1\right)},$$

uma estimativa grosseira dá

$$|R(T)|<\frac{1}{8T}$$

pelo que

$$\frac{1}{8T}+r(T)+R(T)<\frac{3}{4T}.$$

Temos assim

$$N(T)<\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+\frac{3}{4\pi T}+S(T) \tag{4}$$

com

$$S(T)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_\mu\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz\right).$$

Pode agora ver-se que é $\operatorname{Re}\left(\zeta\left(z\right)\right)>0$ quando $z\in[\mu]$. Efectivamente isto resulta do lema anterior se $z\in[1/2+iT,2+iT]$, e se $z\in[2,2+iT]$ temos

$$1-\operatorname{Re}\left(\zeta\left(z\right)\right)\leq\left|\zeta\left(z\right)-1\right|\leq\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

Então a função $\ln\zeta$ está definida e é analítica num conjunto aberto que contém $[\mu]$, o que implica

$$\int_\mu\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}dz=\ln\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)-\ln\zeta\left(2\right).$$

É pois

$$|S(12)|=\frac{\left|\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right|}{\pi}<\frac{1}{2},$$

e de (4) deduz-se

$$N(12)<0.25+\frac{1}{2}<1.$$

■

APÊNDICE 2 - A identidade de Von Mangoldt

A identidade de Von Mangoldt (23.70) deduz-se a partir de uma variante do teorema 23.35 que é sugerida pela fórmula de inversão da transformada de Fourier. Pondo $\psi(x) = 0$ se $x \in [0, 1[$, a relação (23.17) pode escrever-se na forma

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)z} = \int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{z+1}}dx = \int_0^{+\infty} \psi(x)e^{-(z+1)\ln x}dx \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

Sendo $z = c + it$ com $c > 1$ e $t \in \mathbb{R}$, a mudança de variável $x = e^y$ conduz a

$$-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)}\frac{1}{c+it} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(e^y)\, e^{-cy}e^{-ity}dy$$

e aplicando informalmente a fórmula de inversão de Fourier obtém-se

$$\psi_0(e^y)\, e^{-cy} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \left(-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)\,(c+it)}\right) e^{ity}dt,$$

em que

$$\psi_0(x) = \frac{\psi(x^-) + \psi(x^+)}{2}.$$

Como é ainda

$$\int_{-T}^{T} \left(-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)\,(c+it)}\right) e^{ity}dt = \frac{1}{i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{e^{(z-c)y}}{z}dz,$$

regressando à variável inicial x resulta

$$\psi_0(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z}dz,$$

que é a variante do teorema 23.35 que tínhamos mencionado. Embora ela possa ser rigorosamente justificada com base na teoria da transformação de Fourier, vamos aqui deduzi-la a partir do lema 23.33.

Lema 1 - *Dados $c, T > 1$, para cada $x > 1$ tem-se*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z}dz = \frac{\psi(x^-) + \psi(x^+)}{2}.$$

Demonstração. Partindo da relação

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z} \quad \text{se} \quad \mathrm{Re}(z) > 1$$

e atendendo a que a série é uniformemente convergente em todo o semiplano da forma $\mathrm{Re}(z) \geq a > 1$ temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz = \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)I_n(x,T) \tag{1}$$

com

$$I_n(x,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^z\frac{1}{z}dz.$$

Para cada inteiro positivo n e para cada $x > 1$ seja agora

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; n < x \\ 1/2 & \text{se } \; n = x \\ 0 & \text{se } \; n > x \end{cases}.$$

Temos então

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)I_n(x,T) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\delta_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\left(I_n(x,T) - \delta_n(x)\right) \tag{2}$$

e se x não é inteiro, do lema 23.33 resulta

$$|I_n(x,T) - \delta_n(x)| \leq \frac{x^c}{\pi T}\frac{1}{n^c\,|\ln{(x/n)}|}.$$

Neste caso temos pois

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\left(I_n(x,T) - \delta_n(x)\right)\right| \leq \frac{x^c}{\pi T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^c\,|\ln{(x/n)}|}$$

e como

$$\frac{\ln n}{n^c\,|\ln{(x/n)}|} \sim \frac{1}{n^c},$$

segue-se que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^c\,|\ln{(x/n)}|}$$

converge e conclui-se

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\left(I_n(x,T) - \delta_n(x)\right) = 0.$$

Suponha-se agora que x é um inteiro m. Temos então, como no caso anterior,

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n\neq m}\Lambda(n)\left(I_n(m,T) - \delta_n(m)\right) = 0$$

pelo que

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\left(I_n(x,T)-\delta_n(x)\right)=\Lambda(m)\lim_{T\to+\infty}\left(I_m(m,T)-\frac{1}{2}\right).$$

Como

$$\begin{aligned}I_m(m,T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1}{c+it}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{c}{c^2+t^2}dt\\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\frac{T}{c},\end{aligned}$$

temos

$$\lim_{T\to+\infty}I_m(m,T)=\frac{1}{2}$$

e conclui-se ainda

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\left(I_n(m,T)-\delta_n(m)\right)=0.$$

Das relações (1) e (2) resulta assim

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz=\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\delta_n(x),$$

e se x não é inteiro ou se é um inteiro para o qual $\Lambda(x)=0$, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\delta_n(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)=\psi(x)=\frac{\psi\left(x^-\right)+\psi\left(x^+\right)}{2}.$$

Finalmente, se x é um inteiro m da forma p^kcom p primo e $k\in\mathbb{Z}^+$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\delta_n(x) &= \sum_{n=1}^{m-1}\Lambda(n)+\frac{\ln p}{2}=\psi\left(m^-\right)+\frac{\ln p}{2}\\ &= \psi\left(m-\right)+\frac{\psi\left(m^+\right)-\psi\left(m^-\right)}{2}=\frac{\psi\left(m^-\right)+\psi\left(m^+\right)}{2}.\end{aligned}$$

■

Usaremos ainda o seguinte lema:

Lema 2 - *Sejam $m>1$ um inteiro ímpar e $T_m\in[m,m+1]$. Existem então constantes A e B tais que*

$$\left|\frac{\zeta'\left(\sigma+it\right)}{\zeta(\sigma+it)}\right|\le A\ln m\quad \textit{se}\ \ \sigma\in[-m,-1/2]\ \ \textit{e}\ \ |t|=T_m.$$

e
$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq B\ln m \quad \textit{se} \quad \sigma=-m \ \textit{e} \ |t|\leq T_m.$$

Demonstração. Tomando a derivada logarítmica da equação funcional (23.12) obtém-se

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \ln 2\pi - \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} - \frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos \pi z/2}{\sin \pi z/2}.$$

Suponha-se $z=\sigma+it$ com $\sigma\in[-m,-1/2]$ e $|t|=T_m$. Das relações (10.26) e (10.27) resulta então

$$\left|\frac{\cos \pi z/2}{\sin \pi z/2}\right|^2 = \frac{\cos^2\pi\sigma/2+\sinh^2\pi T_m/2}{\sin^2\pi\sigma/2+\sinh^2\pi T_m/2} \leq \frac{1+\sinh^2\pi T_m/2}{\sinh^2\pi T_m/2} \leq 1+\frac{1}{\sinh^2 3\pi/2}$$

e como $\sigma\leq -1/2$ implica $1-\sigma\geq 3/2$, temos também

$$\left|\frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1-\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{3/2}} = \left|\frac{\zeta'(3/2)}{\zeta(3/2)}\right|.$$

Atendendo às relações (22.29) e (22.30) temos por outro lado

$$\left|\frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)}\right| \leq |\ln(1-z)| + \frac{1}{2\,|1-z|} + \frac{\sqrt{2}}{4\,|1-z|^2},$$

e como $|t|=T_m$, é $|1-z|\geq T_m\geq m$ pelo que

$$\left|\frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)}\right| \leq |\ln(1-z)| + \frac{1}{2m} + \frac{\sqrt{2}}{4m^2}.$$

Dado que $1-\sigma\leq m+1$, é ainda $|1-z|\leq\sqrt{2}\,(m+1)$ e resulta

$$|\ln(1-z)| \leq \ln\sqrt{2}\,(m+1)+\frac{\pi}{2}.$$

Vemos assim que existe uma constante c tal que

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq \ln m + c \ \text{ se } \sigma\in[-m,-1/2] \ \text{ e } \ |t|=T_m,$$

e obtém-se a primeira parte do enunciado tomando

$$A = 1+\frac{c}{\ln 3}.$$

Suponha-se agora que $\sigma=-m$ e $|t|\leq T_m$. Como m é ímpar temos

$$\cos^2\frac{\pi\sigma}{2}=0 \ \text{ e } \ \sin^2\frac{\pi\sigma}{2}=1$$

e das relações (10.26) e (10.27) resulta

$$\left|\frac{\cos \pi z/2}{\sin \pi z/2}\right|^2 = \frac{\sinh^2 \pi \left|t\right|/2}{1+\sinh^2 \pi \left|t\right|/2} < 1.$$

Atendendo a (23.17) temos também

$$\left|\frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)}\right| \leq \left|\frac{\zeta'(m+1)}{\zeta(m+1)}\right| \leq \left|\frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)}\right|,$$

e dado que

$$m+1 \leq |1-z| \leq \sqrt{2}\,(m+1),$$

como anteriormente obtemos uma relação da forma

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq \ln m + c \quad \text{se} \quad \sigma = -m \quad \text{e} \quad |t| \leq T_m$$

que conduz à segunda parte do enunciado.

■

Estamos agora em condições de estabelecer a relação (23.70).

Teorema (Von Mangoldt, 1895) - *Se $x > 1$ e (ρ_n) é uma sucessão admissível dos zeros não triviais da função zeta de Riemann, tem-se*

$$\frac{\psi(x^-)+\psi(x^+)}{2} = x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Demonstração. Seja $m \geq 9 > e^2$ um inteiro ímpar. Como na demonstração do teorema 23.36 verifica-se que existe $T_m \in]m, m+1[$ tal que, para todo o zero não trivial da função ζ com parte imaginária γ, se tem

$$|T_m - \gamma| > \frac{1}{5\ln m}.$$

Dados $c > 1$ e $x > 1$, consideremos então um caminho rectangular λ_m da forma

$$(c-iT_m, c+iT_m, -m+iT_m, -m-iT_m, c-iT_m),$$

e seja f a função definida por

$$f(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\frac{x^z}{z}.$$

No ponto $z=0$ esta função tem um polo simples com resíduo $-\zeta'(0)/\zeta(0)$, e os restantes polos de f no interior do caminho λ_m são os polos de $-\zeta'/\zeta$ nessa região. Como se verificou na demonstração do teorema 23.36, a soma dos resíduos de f nos polos que correspondem ao polo de ζ em $z = 1$ e aos zeros não triviais de ζ é

$$x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\gamma_n| \leq T_m} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}.$$

Em cada inteiro $-2n$ tal que $2n < m$ a função zeta tem um zero simples que origina um polo simples de ζ'/ζ com resíduo 1 (cf. exemplo 14.22), e portanto um polo simples de f com resíduo $x^{-2n}/(2n)$. Atendendo ao teorema dos resíduos temos então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_m} f = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\gamma_n| \leq T_m} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + \sum_{2n < m} \frac{1}{2n x^{2n}}. \tag{3}$$

Consideremos agora o integral

$$\int_{c+iT_m}^{-m+iT_m} f.$$

Aplicando as relações (23.67) e (23.68) com T_m no lugar de T_0 verifica-se que existe uma constante K tal que

$$\left| \int_{c+iT_m}^{-1/2+iT_m} f \right| \leq \frac{K x^c \ln^2 T_m}{T_m}.$$

Por outro lado, da primeira parte do lema anterior resulta

$$\left| \int_{-1/2+iT_m}^{-m+iT_m} f \right| \leq A \ln m \int_{-m}^{-1/2} \frac{x^\sigma}{T_m} d\sigma \leq \frac{A \ln m}{T_m} \int_{-\infty}^{-1/2} x^\sigma d\sigma \leq \frac{A \ln m}{m} \frac{x^{-1/2}}{\ln x}.$$

Conclui-se assim

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{c+iT_m}^{-m+iT_m} f = 0$$

e analogamente,

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-m-iT_m}^{-c-iT_m} f = 0.$$

Atendendo agora à segunda parte do lema anterior temos

$$\left| \int_{-m+iT_m}^{-m-iT_m} f \right| \leq B \ln m \int_{-T_m}^{T_m} \frac{x^{-m}}{|-m+it|} dt \leq \frac{2BT_m \ln m}{m x^m} \sim 2B \frac{\ln m}{x^m}$$

pelo que é também

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{-m+iT_m}^{-m-iT_m} f = 0.$$

Da identidade (3) e do lema 1 deduz-se então

$$\frac{\psi(x^-) + \psi(x^+)}{2} = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \lim_{m \to +\infty} \left(- \sum_{|\gamma_n| \leq T_m} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} + \sum_{2n < m} \frac{1}{2n x^{2n}} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\psi\left(x^{-}\right)+\psi\left(x^{+}\right)}{2}=x-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2nx^{2n}},$$

pelo que o enunciado resulta da relação (23.13) e de ser

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2nx^{2n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^2}\right)^n=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

■

BIBLIOGRAFIA

Ahlfors, L. V. 1979 - Complex Analysis - McGraw-Hill

Beardon, A. F. 1979 - Complex Analysis - The Argument Principle in Analysis and Topology. Wiley.

Borwein, P. et al 2008 - The Riemann Hypothesis - A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike. Springer.

Burckel, R. B. 1979 - An Introduction to Classical Complex Analysis. Vol. 1. Academic Press.

Edwards, H. M. 1974 - Riemann's Zeta Function. Academic Press.

Gamelin, T. W. 2001 - Complex Analysis. Springer.

Karatsuba, A. A. 1993 - Basic Analytic Number Theory. Springer-Verlag.

Lang, S. 1993 - Complex Analysis, third edition. Springer-Verlag.

Remmert, R. 1998 - Classical Topics in Complex Function Theory. Springer-Verlag.

Remmert, R. 1991 - Theory of Complex Functions. Springer-Verlag.

Rudin, W. 1987 - Real and Complex Analysis, third edition. McGraw-Hill.

Stein, E. M. & Shakarchi, R. 2003 - Complex Analysis. Princeton University Press.

REFERÊNCIAS

Bourgain, J. 2017 - Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function - J. Amer. Math. Soc., 30 (1): 205–224.

Ingham, A. E. 1932 (reprinted 1992) - The Distribution of Prime Numbers. Cambridge University Press.

Mossinghoff, M. J. & Trudgian, T. S. 2014 - Nonnegative trigonometric polynomials and a zero-free region for the Riemann zeta-function - J. Number Theory, 157(1): 329-349.

Platt, D. & Trudgian, T. 2021 - The Riemann hypothesis is true up to 3×10^12 - Bull. London Math. Soc. 53(3): 792-797.

Pratt, K. et al, 2020 - More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line - Res. Math. Sci. 7(2).

LISTA DE SÍMBOLOS

$\overline{z}$ Conjugado de z - 1

$\mathrm{Im}(z)$ Parte imaginária de z - 1

$\mathrm{Re}(z)$ Parte real de z - 1

$|z|$ Módulo de z - 1

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}^+$ Conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{Z}^-$ Conjunto dos números inteiros negativos

$\mathbb{Z}_0^+$ Conjunto dos números inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_0^-$ Conjunto dos números inteiros não positivos

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$ Conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{R}^-$ Conjunto dos números reais negativos

$\mathbb{R}_0^+$ Conjunto dos números reais não negativos

$\mathbb{R}_0^-$ Conjunto dos números reais não positivos

$\mathbb{C}$ Conjunto dos números complexos

$\mathbb{C}_\infty$ - 14

o Desprezável relativamente a - 4, 17

O Dominado por - 4, 17

$\sim$ Assimptoticamente igual - 4, 17

γ Constante de Euler - 4

$B(a, r)$ Círculo aberto de centro a e raio r - 8

$B(a, r)$ Círculo fechado de centro a e raio r - 8

$B(\infty, r)$ Vizinhança de ∞ - 14

$C(a, r)$ Circunferência de centro a e raio r - 12

E° Interior do conjunto E - 8

$\overline{E}$ Aderência do conjunto E - 8

∂E Fronteira do conjunto E - 12

E' Conjunto dos pontos de acumulação do conjunto E - 12

$f[E]$ Imagem do conjunto E pela função f

$f^{-1}[E]$ Imagem inversa do conjunto E pela função f

$Res(f;a)$ Resíduo de f no ponto a - 184

B_n Número de Bernoulli de ordem n - 199

$B_n(z)$ Polinómio de Bernoulli de ordem n - 204

T_n Número da tangente de ordem n - 201

E_n Número de Euler de ordem n - 202

φ_a - 277

$Ord(f)$ Ordem da função inteira f - 300

$\lfloor \rho \rfloor$ Parte inteira de ρ

Γ Função gama - 332

ψ Função digama / Função de Chebyshev - 348 / 398

$\log \Gamma$ Logaritmo da função Γ - 359

ζ Função zeta de Riemann - 384

Λ Função de Von Mangoldt - 397

(p_n) Sucessão dos números primos

$\pi(x)$ Número de números primos em $[1, x]$

li Função logaritmo integral - 411

ξ Função csi - 412

(ρ_n) Sucessão admissível dos zeros não triviais da função ζ - 415

β_n Parte real do zero ρ_n da função ζ - 419

γ_n Parte imaginária do zero ρ_n da função ζ - 419

$\Pi(x)$ - 442

$\psi\left(x^{+}\right)$ Limite lateral direito de ψ no ponto x

$\psi\left(x^{-}\right)$ Limite lateral esquerdo de ψ no ponto x

ÍNDICE REMISSIVO