ANTÓNIO ALMEIDA COSTA

SÔBRE
A
DINÂMICA DOS SISTEMAS HOLÓNOMOS

1932
IMPRENSA PORTUGUESA
Rua Formosa, 116 — PÔRTO

Dissertação para o concurso a um lugar de professor catedrático da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto (2.º grupo).

PREFÁCIO

O trabalho que apresentamos pretende servir os estudantes de **Mecânica Racional** *que desejem tomar contacto com os assuntos versados.*

No Curso ordinário da Faculdade faz-se hoje referência a alguns dêles; supomos, todavia, que não será inútil o que escrevemos.

Os quatro primeiros capítulos estão coordenados de modo a proporcionarem leitura fácil. No último, fomos forçados a desviar-nos dêsse propósito, em virtude da extensão que aqueles tomaram.

A correcção das provas, na parte ortográfica e gramatical, foi feita pelo Ex.mo Snr. Dr. Damião Marques de Moura, nosso Amigo e ilustre Professor de Cálculo Financeiro no Instituto Industrial e Comercial do Pôrto. Aqui lhe consignamos os maiores agradecimentos.

Igualmente nos cabe agradecer à Imprensa Portuguesa e ao seu gerente, Ex.mo Snr. Doutor Fernão Couceiro da Costa, nosso Colega e Amigo, a perfeição tipográfica da impressão.

Pôrto, 31 de Março de 1932.

A. Almeida Costa.

SÔBRE

A

DINÂMICA DOS SISTEMAS HOLÓNOMOS

CAPÍTULO I

Princípio de Hamilton. Equações canónicas

1. **Generalidades.** — Os sistemas materiais de ligações bilaterais, holónomas ou não, que satisfazem à condição dos trabalhos virtuais, têm os movimentos regidos pela equação geral da Dinâmica

$$\Lambda = \sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0.$$

Quando as notações e designações que empregarmos neste trabalho forem as que usam APPELL (1) e LEVI-CIVITA (2), dispensamo-nos de explicá-las pormenorizadamente. Outro tanto faremos quando entendermos que são suficientemente inteligíveis.

---

(1) APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle.*

(2) LEVI-CIVITA, *Lezioni di Meccanica Razionale.*

Uma transformação clássica do primeiro membro da equação anterior leva às importantes equações de LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

onde estão introduzidos os n parâmetros lagrangeanos q_i e as fôrças generalizadas Q_i.

Existem outras formas condensadas das leis dos movimentos dos sistemas em questão, eqüivalentes, bem entendido, ao princípio de D'ALEMBERT, mas que se prestam, por vezes, a enunciar propriedades características dos movimentos naturais, as quais não se enunciariam fàcilmente através da expressão do mesmo princípio. LEVI-CIVITA dedica, no seu tratado de Mecânica, um extenso capítulo ao estudo dessas formas ou *princípios gerais*.

Seja um movimento natural do sistema. Definamos uma família qualquer de movimentos síncronos (compatíveis com as ligações), com extremos variados, da qual faça parte o movimento natural. Partindo dêste, temos a relação

(1) $$\int_{t_0}^{t_1}\Lambda dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i-m_i\mathbf{a}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i)\,dt=0,^{(1)}$$

onde $\delta\mathbf{P}_i$ é o vector que leva do ponto P_i ao seu variado, $\mathbf{F}_i$ é a fôrça aplicada em P_i e $\mathbf{a}_i$ é a aceleração do mesmo ponto. E desta relação deduz-se

$$\int_{t_0}^{t_1}\Lambda dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i+\delta T\right)dt-\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i\right)_{t_0}^{t_1}=0,$$

(1) Notação vectorial do livro de EGNELL citado adiante.

pois, sendo $\mathbf{v}_i$ a velocidade de P_i, é $\sum m_i\mathbf{v}_i\overline{\delta\mathbf{v}}_i=\delta T$. Não deve igualmente esquecer-se que o símbolo δ é permutável com d.

O princípio de HAMILTON é precisamente caracterizado pela igualdade

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T+\sum\mathbf{F}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i\right)dt=0,$$

a qual traduz uma *condição realizada pelos movimentos naturais em confronto com os movimentos variados síncronos que levam o sistema da mesma configuração inicial à mesma configuração final.*

O teorema recíproco resulta de que, sendo verificada a relação anterior, é verificada a relação (1), e um raciocínio fácil vai mostrar que é

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i-m_i\mathbf{a}_i\overline{\delta\mathbf{P}}_i\right)=0.$$

Temos de verificar que o valor de Λ é nulo em cada instante τ, compreendido entre t_0 e t_1, qualquer que seja o modo como se tenham escolhido as funções $\delta\mathbf{P}_i$ (com a restrição, apenas, das ligações).

Seja r o número destas ligações; o número de parâmetros independentes será $3n-r$ e as componentes das deslocações $\delta\mathbf{P}_i$ obtêm-se afectando linearmente de coeficientes arbitrários $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{3n-r}$ certas deslocações particulares, em número de $3n-r$. Representemos com λ_i' os valores a dar aos λ_i no instante τ para se obterem os valores prèviamente atribuídos no mesmo instante às funções $\delta\mathbf{P}_i$.

Seja $t_0 \overline{<} t' \overline{<} \tau \overline{<} t'' \overline{<} t_1$; escolhamos os coeficientes λ_i, de modo que sòmente sejam diferentes de zero no intervalo (t', t'') e satisfaçam à condição anterior. Então

$$\int_{t'}^{t''}\Lambda dt=0.$$

O primeiro teorema da média (cuja possibilidade de aplicação se admite) dá

$$\Lambda^{*}(t''-t')=0.$$

O valor Λ' de Λ no instante τ será necessàriamente nulo, visto que t' e t'' se podem escolher tão próximos de τ quanto se queira.

Para fazermos uma aplicação imediata (1), consideremos um sistema para o qual é

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \, \delta\overline{\mathbf{P}}_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i, \qquad \delta T = \sum_{i=1}^{n} \left(B_i \, \delta q_i + C_i \frac{d}{dt} \delta q_i \right).$$

O princípio de HAMILTON dá

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + B_i - \frac{dC_i}{dt} \right) \delta q_i \, dt = 0;$$

e as equações do movimento são, pois,

$$\frac{dC_i}{dt} - B_i = Q_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ou sejam as equações de LAGRANGE no caso dos sistemas holónomos.

(1) — Para uma interessante aplicação do princípio de HAMILTON ao Electromagnetismo, veja-se «RODRIGO DE BEIRES, *A origem das equações fundamentais da teoria electrónica*». Há, todavia, necessidade duma hipótese ulterior.

— Para a teoria dinâmica do Electromagnetismo, pode ver-se igualmente «E. CARVALLO, *l'Électricité déduite de l'expérience et ramenée au principe des travaux virtuels*» (colecção *Scientia*).

Tratando-se dum sistema conservativo, o princípio de HAMILTON exprime-se pela fórmula variacional

$$\delta S = 0,$$

onde

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \qquad L = T + U.$$

A fórmula variacional $\delta S = 0$ não eqüivale às equações de LAGRANGE sòmente no caso dinâmico em referência. Dum modo geral, há eqüivalência (no sentido preciso já indicado) entre a igualdade

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0,$$

e o sistema lagrangeano generalizado

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{1'}$$

como resulta duma proposição simples de Cálculo das variações (1), ou pode demonstrar-se por um método análogo ao que acaba de ser exposto. E êste resultado subsiste mesmo que o sistema lagrangeano não seja normal, como, por exemplo, no caso de ser L uma função homogénea do primeiro grau nos q_i'. Se, além disso, L é independente do tempo, a eqüivalência indicada serve para precisar que o sistema lagrangeano é redutível a um sistema da mesma forma, com $n-1$ equações.

(1) Para o método das variações de LAGRANGE pode ver-se «GOMES TEIXEIRA, tomo III do *Curso de Análise Infinitesimal*». Veja-se igualmente o «*Précis*» de BOULIGAND citado adiante.

Consideremos os q_i como coordenadas dum espaço R_n a n dimensões. Uma solução de (1') representa uma curva C de R_n e é

$$\delta S = \delta \int_C L(q, dq_1, dq_2, \ldots, dq_n) = 0,$$

a fórmula variacional que define a totalidade das trajectórias. Tomando q_n como variável independente, temos

$$\delta S = \delta \int_{q_n^0}^{q_n^1} L\left(q, \frac{dq_1}{dq_n}, \ldots, \frac{dq_{n-1}}{dq_n}, 1\right) dq_n = 0,$$

onde q_n^0, q_n^1 são os valores de q_n nos extremos de C.

Esta igualdade é eqüivalente a um sistema lagrangeano, que definirá $q_1, \ldots, q_{n-1}$ em função de q_n, independentemente do tempo. Subsiste então a possibilidade de juntar ao sistema proposto uma lei temporal arbitrária. LEVI-CIVITA deduz daí as propriedades dos movimentos espontâneos. Não nos alongamos, porque trataremos o assunto por outra via.

2. Convenções. — Para evitar repetições inúteis, anotamos aqui o seguinte: chamaremos sistema S um sistema holónomo, de ligações perfeitas, no qual as fôrças e as ligações dependem do tempo; sistema Σ um sistema em que êsses elementos são independentes do tempo; sistemas S' e sistemas Σ' os sistemas análogos para os quais há função de fôrça. Em nenhum caso suporemos que as forças dependerão das velocidades lagrangeanas.

3. Teorema de Cartan. — CARTAN *(Leçons sur les invariants intégraux)* substitui ao princípio de HAMILTON, no caso dos sistemas S', um princípio eqüivalente, como vamos ver.

Exponhamos o cálculo desde o início.

Consideremos uma família de movimentos a um parâmetro λ e suponhamos que t_0 e t_1, bem como os valores iniciais

e finais dos parâmetros q_i, são igualmente funções de λ. À variação $\delta\lambda$ corresponde a variação

$$\delta S = \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]_{t=t_1} \delta t_1 - $$

$$- \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right]_{t=t_0} \delta t_0 + \sum m\left(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z\right)_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U - \sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\right] dt,$$

que, atendendo às igualdades

$$\delta x_1 = (\delta x)_{t_1} + x_1' \delta t_1, \ldots,$$

pode escrever-se

$$(1'') \quad \delta S = [\omega_\delta]_1 - [\omega_\delta]_0 + \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U - \sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\right] dt,$$

pondo

$$\omega_\delta = \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U\right]\delta t.$$

A fórmula (1'') demonstra o princípio de HAMILTON e dá $\delta S = (\omega_\delta)_1 - (\omega_\delta)_0$ quando se parte duma trajectória real e se consideram extremos e tempos variados. Considerando particularmente um tubo de trajectórias descritas no intervalo de tempo (t_0, t_1), variável com λ, como é nula a variação da acção hamiltoniana quando se regressa à trajectória inicial, vê-se que o integral $\int \omega_\delta$ é um *invariante integral para as equações do movimento,* no sentido preciso seguinte: imaginemos o espaço dos estados onde as coordenadas correntes são (x, y, z, x', y', z', t) e a variedade dêsse espaço definida pelas ligações; dado um tubo de trajectórias (assentes na variedade), o integral $\int \omega_\delta$ é independente da curva fechada que faz o contôrno do tubo e depende só do tubo.

À expressão diferencial ω_δ dá CARTAN o nome de «*tensor quantidade de movimento energia*»; e a propriedade demonstrada constitui o princípio a que se aludiu. Veremos, com efeito, que ela caracteriza as equações do movimento. Empreguemos os parâmetros q_i e ponhamos $L = T + U$. Será

$$\delta S = \left(\sum \frac{\partial L}{\partial q'_i}\delta q_i\right)_{t_0}^{t_1} + L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right)\right] dt,$$

igualdade donde se deduzem as equações de LAGRANGE. Uma transformação já empregada dá ainda

$$\delta S = \left\{\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right)_1 \delta q_i^1 - \left(\sum q'_i \frac{\partial L}{\partial q'_i} - L\right)_1 \delta t_1\right\} -$$
$$- \left\{\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right)_0 \delta q_i^0 - \left(\sum q'_i \frac{\partial L}{\partial q'_i} - L\right)_0 \delta t_0\right\} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{\partial q'_i}\right)\right] dt,$$

donde se conclui, introduzindo a *energia generalizada* $H = \sum q'_i \frac{\partial L}{\partial q'_i} - L$,

$$\omega_\delta = \sum \frac{\partial L}{\partial q'_i}\delta q_i - H\delta t.$$

Mediante a transformação invertível (por hipótese) de POISSON

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde são introduzidos os momentos p_i, um raciocínio clássico de HAMILTON leva às equações canónicas

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

eqüivalentes às equações de LAGRANGE.

Vamos estabelecer as equações anteriores, servindo-nos da propriedade indicada do integral $\int \omega_\delta$, o que nos levará à recíproca que temos em vista. Seja o sistema diferencial

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{T},$$

onde os denominadores são funções dos p, q, t, que admite o invariante $I = \int_{(C)} \sum p\delta q - H\delta t$. Imaginemos no espaço dos p, q, t um tubo de curvas integrais parametrado por meio das variáveis λ, τ, de sorte que $\lambda = \text{const.}$ represente uma curva integral. Seja α o período de λ. A variável τ pode escolher-se de modo que as curvas $\tau = \text{const.}$ constituam uma sucessão escolhida. Quando λ varia de α a curva $\tau = \text{const.}$ fecha-se. Ao longo duma curva integral é

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dt}{T} = \mu d\tau,$$

onde μ é uma função de ponto. À variação $d\tau$ corresponde a variação

$$dI = \int_{(C)} \sum (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) + dt\,\delta H - dH\,\delta t,$$

nula por hipótese, quaisquer que sejam a curva C e a função μ. Concluímos

$$dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dt = 0, \qquad -dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dt = 0, \qquad dH - \frac{\partial H}{\partial t}dt = 0;$$

mas devemos observar que a última equação é conseqüência das anteriores.

4. Transformações canónicas. — Um sistema de variáveis $\pi_i, \varkappa_i$, ligadas a p_i, q_i, t por $2\ n$ equações, leva a um sistema de equações canónicas, se existe uma relação diferencial da forma

$$\sum p_i \delta q_i = \sum \pi_i \delta \varkappa_i + H_0 \delta t + \delta \Omega,$$

onde H_0 e Ω são funções de todas as variáveis. É o que resulta de ser o sistema de equações canónicas o sistema associado do pfaffiano $\sum p_i \delta q_i - H \delta t$. Para ligar êste resultado ao princípio de CARTAN, escrevamos a relação

$$\sum p_i \delta q_i - H \delta t = \sum \pi_i \delta \varkappa_i - (H - H_0)\, \delta t + \delta \Omega. \tag{2}$$

Tendo em vista que ao longo duma curva fechada é $\int \delta \Omega = 0$, vê-se imediatamente que é

$$\frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial (H - H_0)}{\partial \varkappa_i}, \qquad \frac{d\varkappa_i}{dt} = \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \pi_i},$$

e a forma canónica é, pois, conservada. A nova função característica é $H - H_0$.

É clássica uma maneira de satisfazer à relação (2). Seja V uma função dos $2n+1$ argumentos q, $\varkappa$, t, e ponhamos

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varkappa_i} = -\pi_i.$$

Se fôr diferente de zero o hesseano $\left\| \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_i\, \partial \varkappa_j} \right\|$, estas relações, que são invertíveis, definem uma transformação canónica. A nova função característica é $H + \partial V / \partial t$. Quando a função caracterís-

tica é conservada, tem-se uma mudança *completamente canónica*. A importância das transformações dos sistemas canónicos leva-nos a apresentar ainda os dois parágrafos seguintes.

5. Transformações diversas. — Tomando $2n$ variáveis quaisquer $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ ligadas a p, q, t, um cálculo fácil leva às equações transformadas

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} + [z_k, t] + \sum_l \frac{dz_l}{dt} [z_k, z_l] = 0, \tag{3}$$

onde introduzimos os conhecidos parêntesis de LAGRANGE. Estas equações são sempre resolúveis em ordem às derivadas $\dfrac{dz_l}{dt}$.

Os parêntesis podem substituir-se (ANDOYER, *Mécanique Céleste*). Designemos com u, v, ... as variáveis z_k, t, e seja K uma função arbitrária de u, v, ...; pondo

$$J_u = \frac{\partial K}{\partial u} + \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial u}, \qquad H' = H - J_t,$$

as equações anteriores dão imediatamente

$$\frac{\partial H'}{\partial z_k} + \frac{\partial J_{z_k}}{\partial t} + \sum_l \frac{dz_l}{dt} \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k} \right) = 0.$$

Suponhamos que as variáveis z se partem em dois grupos: dum lado $\varkappa_i$ e doutro π_i, sendo $J_{\pi_i} = 0$ e $J_{\varkappa_i}$ ùnicamente função dos π_i e do tempo. As equações anteriores cindem-se igualmente em dois grupos

$$\frac{\partial H'}{\partial \varkappa_k} + \frac{\partial J_{\varkappa_k}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial J_{\varkappa_k}}{\partial \pi_j} \frac{d\pi_j}{dt} = 0, \qquad \frac{\partial H'}{\partial \pi_k} - \sum_j \frac{\partial J_{\varkappa_j}}{\partial \pi_k} \frac{d\varkappa_j}{dt} = 0;$$

se pusermos $\pi'_j = J_{\varkappa_j}$, temos o novo sistema canónico

$$\frac{d\pi'_k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial \varkappa_k}, \qquad \frac{d\varkappa_k}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \pi'_k};$$

e a transformação será completamente canónica na hipótese $J_t = 0$. Assim, se supusermos os q_i unicamente funções dos $\varkappa_i$ e do tempo, outro tanto sucedendo a K, não temos mais do que associar aos $\varkappa_i$ as variáveis $J\varkappa_j = \pi_j = \frac{\partial K}{\partial \varkappa_j} + \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \varkappa_j}$, para termos uma transformação canónica. Se os q_i forem lineares e homogéneos dos $\varkappa_i$, com coeficientes constantes, tomaremos $K=0$, de sorte que, sendo $\pi_j = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \varkappa_j}$, é verificada a relação $\sum \pi_i \varkappa_i = \sum p_i q_i$. Estas últimas transformações constituem um caso particular das *transformações homogéneas,* para as quais é $\sum p_h dq_h = \sum \pi_h d\varkappa_h$.

6. **Aplicação.** — Para fazermos uma aplicação da fórmula geral (3), útil em Mecânica Celeste, tomemos o sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e suponhamos que em F figuram duas séries de parâmetros $\alpha', \beta', \ldots$ dum lado, $\mu', \nu', \ldots$ doutro lado, podendo os da primeira série figurar isoladamente e encontrando-se os da segunda pelas combinações $M' = m't + \mu'$, $N' = n't + \nu', \ldots$, onde $m', n' \ldots$ são funções de $\alpha', \beta', \ldots$. Suponhamos mais que, depois de feita a integração do sistema, as constantes de integração se partem em dois grupos análogos $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu, \ldots$ figurando as do segundo grupo sob a forma $M = mt + \mu$, $N = nt + \nu, \ldots$ onde $m, n, \ldots$ são funções de $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$. Quanto às do primeiro grupo, podem figurar isoladamente.

Representemos com $u, v, \ldots$ as quantidades $t, \alpha', \beta', \ldots, M', N', \ldots, \alpha, \beta, \ldots, M, N, \ldots$ e seja K uma função arbitrária de $u, v, \ldots$. Introduzamos os símbolos δ e ∂ de derivadas parciais, o primeiro a empregar quando as funções se exprimem sem substituir x_i, y_i pelos resultados da integração, e o outro quando essa substituïção se faz. É

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\delta F}{\delta y_i} \frac{\partial y_i}{\partial u} \right),$$

e, atendendo ao sistema canónico,

(4) $$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + [t, u] + \sum m [M, u] + \sum m' [M', u],$$

onde os $\Sigma\Sigma$ têm significado evidente.

Continuando a empregar as funções J, ponhamos

$$J_t = F + \Phi - \sum m J_M - \sum m' J_{M'},$$

onde Φ é uma função de $u, v, \ldots$. Esta relação restringe a função K e, mediante ela, a igualdade (4) escreve-se

(5) $$\frac{dJu}{dt} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum \frac{\partial m}{\partial u} J_M - \sum \frac{\partial m'}{\partial u} J_{M'}.$$

Atendendo a que é

$$J_t = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = F + \Phi - \sum m \left(\frac{\partial K}{\partial M} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial M} \right) - $$
$$- \sum m' \left(\frac{\partial K}{\partial M'} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial M'} \right),$$

vê-se que é

$$\frac{dK}{dt} = F + \Phi - \sum y_i \frac{dx_i}{dt};$$

e esta relação, pondo de parte uma função de $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$, escolhida que seja a função Φ, determina K.

Se as funções $m', n', \ldots m, n, \ldots$, são identicamente nulas, e tomarmos para Φ uma função independente de t e das constantes de integração, a fórmula (5) mostra que os JJ relativos às mesmas constantes (que agora representaremos com $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2n}$) são constantes. Como conseqüência, vê-se que a mesma propriedade cabe aos parêntesis $[\beta_k, \beta_l]$. Dêste modo, se tomarmos no sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

para novas variáveis as constantes de integração do sistema primitivo, o sistema transformado fica sob a forma

$$\frac{\partial(H-F)}{\partial\beta_k} + \sum_j \left(\frac{\partial J_{\beta_k}}{\partial\beta_j} - \frac{\partial J_{\beta_j}}{\partial\beta_k} \right) \frac{d\beta_j}{dt} = 0,$$

onde são independentes de t os coeficientes das derivadas $\frac{d\beta_j}{dt}$.

O integral generalizado da energia é conseqüência da relação $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}$.

Quando as funções $m', \ldots, m, \ldots$ não são nulas, tomemos Φ unicamente função de $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$. Conclui-se que os J_M são constantes e que os $J_\alpha, J_\beta, \ldots$ são funções lineares do tempo, resultado que deve aproximar-se do anterior. O integral da energia é substituído do modo seguinte: é

$$\frac{dJ_t}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(F - \Sigma m' J_{M'} \right),$$

de sorte que, se F não contém o tempo a não ser por intermédio de $M', N', \ldots$, a função $F - \Sigma m' J_{M'}$ é constante.

Passemos agora a dar algumas proposições gerais relativas à integração dos sistemas canónicos. Suporemos tratar-se dum sistema da forma primeiramente indicada

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

7. Método de Hamilton-Jacobi. — Tomemos para a função V do § 4 um integral completo da equação

(6) $$H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Um tal integral depende de n constantes $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ e é diferente de zero o determinante $\nabla = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \varkappa_j} \right\|$. O sistema transformado admite o integral geral

$$\varkappa_i = a_i, \qquad \pi_i = b_i,$$

onde a_i e b_i são constantes. O sistema proposto admite o integral

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varkappa_i} = -\pi_i,$$

onde os $\varkappa_i$, π_i são as constantes a_i, b_i.

No caso de ser H independente do tempo, deu POINCARÉ o método seguinte:

Transformemos a equação (6) pela relação $V = -Et + W$, sendo E constante e W uma função independente do tempo. Temos

(7) $$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E,$$

e basta procurar um integral W dependente de n constantes $\varkappa_i$ e tal que seja $\nabla_1 = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \varkappa_j} \right\| \neq 0$. O segundo membro deve considerar-se uma constante, que mais tarde é uma função das constantes $\varkappa_i$.

JACOBI procedeu de modo diferente:

Determinemos um integral de (7) que dependa de $n-1$ constantes e tal que seja $\nabla' = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \varkappa_j} \right\| \neq 0 \; (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Fàcilmente se verifica, considerando E como a constante de ordem n, que é $\nabla \neq 0$. Suponhamos $\frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$. Temos, com LEVI-CIVITA,

$$\nabla = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} \left| \begin{array}{cccc} & & & \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial E} \\ & \nabla' & & \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial E} \\ & & & \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \varkappa_1} & \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \varkappa_2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial E} \end{array} \right| ,$$

determinante no qual os elementos da última linha podem substituir-se pelos seguintes

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \varkappa_1}, \quad \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \varkappa_2}, \ldots \quad \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial E}.$$

Ora a equação (7) mostra que o primeiro membro é independente dos qq e das constantes $\varkappa_i$ depois da substituïção do integral W. Assim, as quantidades anteriores são nulas, à excepção da última, que é igual à unidade, e podemos escrever

$$\nabla = \nabla' : \partial H / \partial p_n ,$$

donde se conclui o teorema em questão.

Fazendo intervir os integrais completos, há necessidade de dar ao menos uma proposição geral que leve à sua determinação. Partamos dos resultados seguintes:

α) Os integrais comuns às equações dum sistema linear homogéneo da forma

$$X_i(f) = a_{i_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{i_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_{i_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r < n),$$

são sempre os integrais comuns dum *sistema completo* de CLEBSCH, que é eqüivalente a um *sistema jacobiano* (GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*) (1);

β) A integração dum sistema completo de r equações como as anteriores é redutível à integração duma equação linear homogénea com $n - r + 1$ variáveis independentes.

8. Sistemas não lineares. — Tratando de sistemas não lineares, vamos supor, o que é sempre possível, que não intervém a função desconhecida. Seja o sistema

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r \leqq n).$$

Um integral do sistema é integral das equações $(F_\alpha, F_\beta) = 0$, cujos primeiros membros são os parêntesis de POISSON.

Juntando às equações propostas as equações distintas delas da forma $(F_\alpha, F_\beta) = 0$, e repetindo o método sôbre o novo sistema assim formado, chega a reconhecer-se a impossibilidade do problema ou a formar-se um número $m \leqq n$ de equações tais que as novas relações $(F_\alpha, F_\beta) = 0$ são conseqüências delas, quando não são relações idênticas. Se ao sistema proposto se substituir o sistema eqüivalente que resulta de resolver as equações em

(1) O sistema em questão diz-se *completo*, se os primeiros membros das equações $X_i\left[X_k(f)\right] - X_k\left[X_i(f)\right] = 0$ são combinações lineares dos primeiros membros das equações do sistema. E diz-se *jacobiano*, se as igualdades anteriores são identidades.

ordem a r das derivadas p_i (o que é sempre possível, como é sabido da teoria dos determinantes funcionais), obtemos, por exemplo, o sistema

$$p_i - \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_{r+1}, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r);$$

e aplicando o método anterior, obtêm-se equações distintas, se não são identicamente verificadas. Resolvendo tôdas as novas equações em ordem a algumas das derivadas $p_{r+1}, \ldots, p_n$, cujos valores se substituirão nas equações anteriores, e continuando, ou se reconhece que o problema não é possível, ou se formam $m \leqq n$ equações tais que tôdas as relações $(F_\alpha, F_\beta) = 0$ são identidades. Somos assim levados sempre a um *sistema em involução*.

Seja um tal sistema

$$F_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

resolúvel em ordem aos p_i, onde as constantes a_i são quaisquer. Neste caso de tantas equações quantas as variáveis independentes, podemos fazer a integração por quadraturas. Consideremos, na verdade, as n funções p_i definidas por (8). E

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \sum_l \frac{\partial F_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} + \sum_{k,l} \frac{\partial F_i}{\partial p_l} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_l}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{k,l} \frac{\partial F_i}{\partial p_l} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_l}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_l} \right) = 0,$$

donde se conclui a igualdade $\dfrac{\partial p_l}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p_k}{\partial x_l}$, pois é

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0.$$

Reconhecemos que $dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$ é uma diferencial exacta; e a função z assim definida depende das constantes a_i e duma constante aditiva. Se tomarmos agora nas r primeiras equações (8) valores determinados para os a_i, chegamos dêste modo a formar um integral completo z dessas r equações, o qual depende das $n - r$ constantes $a_{r+1}, \ldots, a_n$ e da constante aditiva. Podemos dispor destas $n - r$ constantes de modo que, se fôr (x_i^0, p_i^0) um sistema de valores satisfazendo a $F_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$, a função z admite derivadas p_i que se tornam p_i^0 para $x_i = x_i^0$. Se fôr

$$z = \Phi(x_1, \ldots, x_n, a_{r+1}, \ldots, a_n) + a_{n+1},$$

das relações $p_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ podem deduzir-se r equações independentes de $a_{r+1}, \ldots, a_n$. O número dos parâmetros que figuram em Φ é bem $n - r$.

Tratando agora do sistema em involução

$$F_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r < n),$$

onde os a_i são dados, formaremos um integral completo juntando ao sistema proposto $n - r$ equações

$$F_{r+j} = a_{r+j} \qquad (j = 1, \ldots, n - r),$$

que constituam com as anteriores um sistema análogo a (8). As constantes a_{r+j} serão arbitrárias.

Consideremos para isso o sistema linear e homogéneo

$$(F_i, f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{9}$$

onde a incógnita f será determinada em função dos x_i e dos p_i. Necessitamos unicamente que f seja distinta de $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Êste sistema é jacobiano, como resulta da identidade de POISSON

$$\Big((F_i, F_j), f\Big) + \Big((F_j, f), F_i\Big) + \Big((f, F_i), F_j\Big) = 0$$

e do próprio sistema. Obtida uma solução F_{r+1} de (9), formamos o novo sistema jacobiano

$$(F_i, f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1),$$

e assim até

$$(F_i, f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Finalmente há que encontrar o integral geral do sistema

$$F_i = a_i, \; F_{r+j} = a_{r+j}, \; f = a_n, \qquad \begin{matrix}(i=1, 2, \ldots, r),\\ (j=1, 2, \ldots, n-r-1).\end{matrix}$$

Para as aplicações à integração dos sistemas canónicos temos de supor $r = 1$. Consideremos então o caso de em (8) sòmente a_1 ter um valor determinado. A função Φ satisfaz à relação

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_i \, \partial x_j} \right\| \neq 0 \qquad \begin{cases} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Na verdade, dados x_0 e p_0, podemos supor que p_1^0 é a única quantidade a determinar compativelmente. Como as relações

$$\Psi_2 \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - p_2 = 0, \ldots, \Psi_n \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - p_n = 0,$$

determinam $a_2, \ldots, a_n$, a demonstração é imediata.

9. Separação de variáveis. — Posto o resultado geral precedente, vamos tratar um caso notável, devido a STÄCKEL, no qual se chega a formar efectivamente o integral completo por meio de quadraturas, usando dum método de separação de variáveis.

Seja o determinante $\Delta = \| \varphi_{i_j}(q_j) \| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$, onde o elemento φ_{i_j} (de cruzamento da linha de ordem i e da coluna de ordem j) depende unicamente de q_j, e consideremos um sistema Σ' para o qual é

$$2T = \frac{q_1'^2}{\Phi_1} + \frac{q_2'^2}{\Phi_2} + \ldots + \frac{q_n'^2}{\Phi_n}, \qquad U = \Phi_1 U_1 + \Phi_2 U_2 + \ldots + \Phi_n U_n,$$

onde Φ_i representa o recíproco do elemento φ_{n_i} e U_k depende unicamente de q_k. A equação de HAMILTON-JACOBI pode escrever-se

$$\Phi_1 \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + \ldots + \Phi_n \left(\frac{\partial W}{\partial q_n} \right)^2 = 2(\Phi_1 U_1 + \ldots + \Phi_n U_n) +$$
$$+ 2E \sum_{i=1}^{n} \varphi_{n_i} \Phi_i + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \varkappa_k \varphi_{k_i} \Phi_i,$$

onde os $\varkappa_k$ são constantes, para o que basta atender à definição de Φ_i.

Procuremos um integral da forma

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \ldots + W_n(q_n)$$

e ponhamos, por simplicidade, $\dfrac{\partial W}{\partial q_i} = \dfrac{\partial W_i}{\partial q_i} = W_i'$.

Vemos, imediatamente, que basta determinar W_i pela relação

$$W_i'^2 = 2\left(U_i + E\varphi_{n_i} + \sum_{k=1}^{n-1} \varkappa_k \varphi_{k_i} \right).$$

Para demonstrar agora que a função W é bem um integral completo, temos de verificar que é $\nabla' \neq 0$ (§ 7). Suporemos a escolha feita dos $\varphi\varphi$ dependente da condição $\frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$ e que é $\Delta \neq 0$. A condição $\nabla' \neq 0$ resulta da sua própria expressão:

$$\nabla' = \left\| \frac{\partial W'_i}{\partial x_j} \right\| = \frac{1}{W'_1 W'_2 \dots W'_{n-1}} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1,1} & \dots & \varphi_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Phi_n \Delta}{W'_1 \dots W'_{n-1}}.$$

O caso de LIOUVILLE, correspondente às hipóteses

$$2T = \left[A_1(q_1) + \dots + A_n(q_n) \right] \left[B_1(q_1) q_1'^2 + \dots + B_n(q_n) q_n'^2 \right],$$

$$U = \frac{U_1(q_1) + \dots + U_n(q_n)}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$

está incluído no anterior e será tratado adiante sob uma forma diferente.

CAPÍTULO II

Eqüivalência dinâmica. Princípio da menor acção

1. Generalidades. — É bem sabido que os desenvolvimentos taylorianos ilimitados se generalizam inteiramente às funções vectoriais. Partindo dêste resultado, estabelece-se fàcilmente, por via de desenvolvimento em série, que, dada a forma quadrática definida positiva

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

escrita à moda clássica, e pondo de parte as transformações métricas do espaço ordinário, existe uma infinidade de superfícies dêste espaço admitindo aquele elemento linear. As diferentes superfícies têm a mesma métrica euclideana local e dizem-se *isométricas*.

Ao estabelecer-se tão importante proposição, fazem-se intervir relações onde figuram elementos do espaço no qual a superfície se encontra mergulhada; todavia, é possível eliminar a métrica externa. BOULIGAND *(Leçons de Géométrie Vectorielle)* estuda directamente esta questão.

Anotemos a propósito que, se juntarmos ao elemento linear a forma métrica externa, continuando a pôr de parte simetrias e deslocamentos, determinamos uma única superfície, mediante condições de integrabilidade. (Vejam-se as nossas « *Notas de Cálculo Vectorial* »).

Imaginemos agora um sistema Σ' com dois graus de liberdade, de fôrça viva

$$2T = g^{11} q_1'^2 + 2g^{12} q_1' q_2' + g^{22} q_2'^2 \qquad (g^{ik} \text{ independente do tempo})$$

e solicitado por fôrças que realizam o trabalho virtual

$$\text{(1)} \qquad \delta\mathfrak{T} = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 .$$

Se considerarmos um ponto, de massa unitária, móvel sem atrito sôbre uma superfície de elemento linear

$$\text{(2)} \qquad ds^2 = g^{11}\, dq_1^{\,2} + 2g^{12}\, dq_1\, dq_2 + g^{22}\, dq_2^{\,2},$$

e solicitado por fôrças realizando o mesmo trabalho virtual, os dois sistemas dinâmicos são regidos pelas mesmas equações de LAGRANGE e dizem-se *eqüivalentes.* Na função de fôrça pode figurar o tempo. Em tal caso, o campo escalar U, definido sôbre a superfície, é determinado em cada instante.

Adoptemos as notações de EGNELL *(l'Ochématique,* Gauthier Villars et C.ie). As componentes generalizadas da fôrça são dadas sob forma covariante

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \mathbf{R}_{q_1}\, i\, \boldsymbol{\Delta} U, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = \mathbf{R}_{q_2}\, i\, \boldsymbol{\Delta} U,$$

onde $\boldsymbol{\Delta} U$ é o *gradiante de U sôbre a superfície.* A função U, que figura em (1), necessita ser definida unicamente sôbre a superfície.

Êste modo de interpretar o movimento é *permanente,* neste sentido, que precisaremos adiante: dado um sistema Σ', de n graus de liberdade, o seu movimento é realizado pelo de um *ponto* num determinado *espaço.* Tendo em vista que o emprêgo do algoritmo de LAGRANGE é um «método dos parâmetros omnibus» (BOULIGAND, *Précis de Mécanique Rationnelle),* percebe-se imediatamente que podemos tratar o elemento (2) pondo de parte o problema concreto em estudo.

2. Transformação do elemento linear. — É sempre possível determinar duas funções de ponto, u_1 e v_1, tais que no elemento linear

$$ds^2 = E_1\, du_1^2 + 2F_1\, du_1\, dv_1 + G_1\, dv_1^2$$

os coeficientes de GAUSS verifiquem duas relações arbitrárias distintas da relação $\sqrt{E_1 G_1 - F_1^{\,2}} = 0$. Designando com θ o ângulo $(\boldsymbol{\Delta} u_1, \boldsymbol{\Delta} v_1)$, as duas relações podem escrever-se

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} F_1'\left[(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2, (\boldsymbol{\Delta} v_1)^2, \cos\theta\right] &= 0, \\ F_2'\left[(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2, (\boldsymbol{\Delta} v_1)^2, \cos\theta\right] &= 0, \end{aligned}$$

para o que basta atender às relações (EGNELL)

$$E_1 = \frac{(\boldsymbol{\Delta} v_1)^2}{(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2(\boldsymbol{\Delta} v_1)^2 - (\boldsymbol{\Delta} u_1\, i\, \boldsymbol{\Delta} v_1)^2}, \qquad G_1 = \frac{(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2}{(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2(\boldsymbol{\Delta} v_1)^2 - (\boldsymbol{\Delta} u_1\, i\, \boldsymbol{\Delta} v_1)^2},$$

$$F_1 = \frac{-\boldsymbol{\Delta} u_1\, i\, \boldsymbol{\Delta} v_1}{(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2(\boldsymbol{\Delta} v_1)^2 - (\boldsymbol{\Delta} u_1\, i\, \boldsymbol{\Delta} v_1)^2}.$$

Podemos dar a (3) a forma

$$\text{(4)} \qquad (\boldsymbol{\Delta} v_1)^2 = f\left[(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2\right], \qquad \cos\theta = g\left[(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2\right],$$

donde se deduz a igualdade

$$\frac{\boldsymbol{\Delta} v_1}{\sqrt{f}} = e^{i\theta}\, \frac{\boldsymbol{\Delta} u_1}{\sqrt{(\boldsymbol{\Delta} u_1)^2}},$$

entre dois vectores unitários. Dêste modo será

$$\blacktriangle v_1 = e^{i\theta}\sqrt{\frac{f}{(\blacktriangle u_1)^2}}\,\blacktriangle u_1,$$

$$\blacktriangle\left[e^{i\theta}\sqrt{\frac{f}{(\blacktriangle u_1)^2}}\,\blacktriangle u_1\right]=0.$$

Conhecida uma função u_1, que satisfaça a esta equação às derivadas parciais, a primeira equação (4) define v_1. Na hipótese de ser $\theta=\frac{\pi}{2}$, as coordenadas u_1, v_1 são rectangulares e a equação anterior toma a forma

$$\blacktriangle i\left[\sqrt{\frac{f}{(\blacktriangle u_1)^2}}\,\blacktriangle u_1\right]=0.$$

Tratemos como aplicação o caso particular importante que corresponde às relações

$$(\blacktriangle v_1)^2=(\blacktriangle u_1)^2, \qquad \theta=\pi/2.$$

O beltramiano de u_1 é nulo; e sendo $\blacktriangle v_1 = i\,\blacktriangle u_1$, é igualmente nulo o beltramiano de v_1. O elemento linear tomará a forma $ds^2=E_1(du_1^{\,2}+dv_1^{\,2})$ e os parâmetros u_1, v_1 dizem-se *isotérmicos*. Conhecido um sistema de parâmetros, obtém-se fàcilmente o sistema geral.

Seja (u, v) o sistema conhecido. Se φ é uma coordenada do sistema geral, é uma função harmónica; e se considerarmos a função harmónica conjugada ψ, as igualdades

$$\blacktriangle\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\blacktriangle u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\blacktriangle v,$$

$$\blacktriangle\psi=\frac{\partial\psi}{\partial u}\blacktriangle u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\blacktriangle v,$$

levam à relação $\blacktriangle\psi=i\,\blacktriangle\varphi$.

O elemento linear pode ser expresso pela igualdade $ds^2 = Edu^2+Gdv^2$ e o sistema (u, v) ser isotérmico. É necessário e basta que seja $E/G=\theta(u)/\pi(v)$, onde θ e π são duas funções quaisquer. Que a condição é necessária vê-se imediatamente. Para mostrar que é suficiente, ponhamos

$$u_1=\int\sqrt{\theta(u)}\,du, \qquad v_1=\int\sqrt{\pi(v)}\,dv.$$

Vem logo

$$ds^2=\frac{E}{\theta(u)}\left(du_1^{\,2}+dv_1^{\,2}\right).$$

Dado um sistema (u, v), as curvas $\varphi(u, v)=$ constante fazem parte dum sistema isotérmico se existe uma função $\theta(\varphi)$ tal que seja $\blacktriangle^2\theta=0$. E como é

$$\blacktriangle^2\theta=\blacktriangle i\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\blacktriangle\varphi\right)=\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}(\blacktriangle\varphi)^2+\frac{d\theta}{d\varphi}\blacktriangle^2\varphi,$$

vê-se que a razão $\dfrac{\blacktriangle^2\varphi}{(\blacktriangle\varphi)^2}$ deve ser unicamente função de φ. Esta condição é suficiente, porque a igualdade

$$d^2\theta/d\varphi^2 : d\theta/d\varphi = -\blacktriangle^2\varphi/(\blacktriangle\varphi)^2$$

determina θ de sorte que é $\blacktriangle^2\theta=0$.

3. Caso de integrabilidade de Liouville. — Seja uma superfície de LIOUVILLE, isto é, realizando a fôrça viva de LIOUVILLE

$$2T=\Big[A_1(q_1)+A_2(q_2)\Big]\Big[B_1(q_1)\,q_1'^{\,2}+B_2(q_2)\,q_2'^{\,2}\Big].$$

Os parâmetros q_1, q_2 são isotérmicos, de modo que podemos imaginar sempre a fôrça viva sob a forma

$$2T = \left[\theta_1(q_1) + \theta_2(q_2)\right] (q_1'^2 + q_2'^2).$$

Na ausência de solicitação, as equações de LAGRANGE são

$$2\frac{d}{dt}\left[(\theta_1+\theta_2)q_1'\right] = \frac{\partial\theta_1}{\partial q_1}(q_1'^2+q_2'^2),$$

$$2\frac{d}{dt}\left[(\theta_1+\theta_2)q_2'\right] = \frac{\partial\theta_2}{\partial q_2}(q_1'^2+q_2'^2).$$

Fazendo intervir o integral das fôrças vivas $(\theta_1+\theta_2)(q_1'^2+q_2'^2)=2h$, deduzimos

$$\frac{d}{dt}\left[(\theta_1+\theta_2)\,q_i'\right]^2 = 2h\frac{\partial\theta_i}{\partial q_i}q_i' = 2h\frac{d\theta_i}{dt} \qquad (i=1,2),$$

$$\left[(\theta_1+\theta_2)\,q_i'\right]^2 = 2h\,\theta_i + \alpha_i,$$

onde α_i é constante. Verifica-se, de resto, que é $\alpha_1 = -\alpha_2$. A integração ultima-se por quadraturas, escrevendo

$$\frac{dq_1}{\sqrt{2h\theta_1+\alpha_1}} = \frac{dq_2}{\sqrt{2h\theta_2-\alpha_1}} = \frac{dt}{\theta_1+\theta_2} = du,$$

onde u é uma variável auxiliar.

4. Princípio da menor acção. — Na Mecânica Racional de LEVI-CIVITA encontra-se demonstrada uma fórmula variacional devida a HÖLDER, aplicável mesmo aos sistemas não holónomos, da qual se deduz imediatamente o *princípio da acção estacionária*. O aspecto dêste princípio no caso dos sistemas Σ' constitui o *princípio da menor acção*.

É fácil resumir a exposição de LEVI-CIVITA. Dado o movimento natural M dum sistema, define-se um movimento assíncrono M_a, fazendo corresponder à posição P_i do sistema, em M, a posição $P_i + \delta P_i$, em M_a. Ao mesmo tempo os instantes correspondentes serão, respectivamente, t e t_a, sendo $t_a = t + \delta t$. Na passagem de M para M_a, uma função Φ do tempo e da posição do sistema sofre uma variação $\delta^*\Phi$, que é idêntica à variação $\delta\Phi$ obtida na passagem de M a um movimento síncrono M_s (de trajectória idêntica à de M_a) *quando* Φ *não depende do tempo.* Para se ver o que sucede no caso geral, tomemos, por exemplo, a velocidade $\mathbf{v}_i$ dum ponto de P_i. É

$$\mathbf{v}_i + \delta^*\mathbf{v}_i = \frac{d(P_i+\delta\mathbf{P}_i)}{dt+d\delta t} = \frac{dP_i/dt + d(\delta\mathbf{P}_i)/dt}{1+d\delta t/dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i\frac{d\delta t}{dt} + \delta\mathbf{v}_i,$$

ou seja

$$\delta^*\mathbf{v}_i = \delta\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i\frac{d\delta t}{dt}.$$

Dêste modo temos

$$\delta^*T = \delta T - \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i^2\frac{d}{dt}\delta t = \delta T - 2T\frac{d}{dt}\delta t;$$

e o princípio de HAMILTON leva a escrever a igualdade

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta^*T + 2T\frac{d}{dt}\delta t + L')\,dt = 0.$$

Uma limitação da lei temporal sôbre M_a não restringe as trajectórias comparadas, que continuam a ser arbitrárias, contanto que sejam compatíveis com as ligações. Os movimentos M_a dizem-se *isoenergéticos* quando é $\delta^*T = L'$, igualdade que definirá a função δt, desde que os $\delta\mathbf{P}_i$ sejam determinados. Para tais movimentos, a relação anterior dá

$$\int_{t_0}^{t_1} 2(\delta^*T + T\frac{d}{dt}\delta t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta^*(2Tdt) = 0.$$

Diz-se *acção* o integral $A = \int_{t_0}^{t_1} 2Tdt$. A fórmula de HÖLDER é expressa pela igualdade $\delta^*A = 0$, que é não sòmente necessária mas ainda *suficiente* *para caracterizar o movimento natural em confronto com os movimentos variados assíncronos isoenergéticos.*

Notemos que a designação de movimentos isoenergéticos provém de que, na hipótese de existir uma função de fôrça U, independente do tempo, êles são caracterizados pela relação $\delta^*(T-U)=0$.

Tratemos a questão directamente e partamos do integral das forças vivas $T=U+h$. Atribuindo à constante h um valor determinado, vamos mostrar que, se compararmos o movimento natural, que leva o sistema do ponto $M_0(q_1^0, q_2^0)$ ao ponto $M_1(q_1^1, q_2^1)$ ~~num intervalo de tempo conhecido~~, com os movimentos variados virtuais que, ~~no mesmo tempo e~~ para o mesmo valor de h, levam o sistema da mesma configuração inicial à mesma configuração final, o movimento natural realiza as condições extremais de primeira ordem do integral

$$A=\int_{M_0}^{M_1}\sqrt{U+h}\,ds, \qquad (1)$$

chamado *acção* de M_0 a M_1 ao longo da trajectória.

Como U é independente do tempo e ds é o elemento linear de superfície, o integral A tem um carácter geométrico.

Determinemos as trajectórias pondo

$$q_1=f(\lambda), \qquad q_2=\varphi(\lambda),$$

onde λ é uma função do parâmetro privilegiado t. Ponhamos $\frac{dq_1}{d\lambda}=\dot q_1$, $\frac{dq_2}{d\lambda}=\dot q_2$, e escrevamos o integral A sob a forma

$$A=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\sqrt{U+h}\,\sqrt{\Theta}\quad d\lambda,$$

pondo, para abreviar, $\Theta=g^{11}\dot q_1^{\,2}+2g^{12}\dot q_1\dot q_2+g^{22}\dot q_2^{\,2}$.

(1) Pondo de parte a constante 2, esta definição está contida na definição geral anterior.

As condições extremais do nosso integral são

$$(5)\quad \begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_1}\sqrt{\Theta(U+h)}\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}\sqrt{\Theta(U+h)}=0,\\ &\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_2}\sqrt{\Theta(U+h)}\right]-\frac{\partial}{\partial q_2}\sqrt{\Theta(U+h)}=0.\end{aligned}$$

É fácil ver que são as equações de Lagrange, depois de feita a mudança de variável independente. Temos, por exemplo,

$$q_1'=\dot q_1\frac{d\lambda}{dt}, \quad 2T=\Theta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2, \quad 2\frac{\partial T}{\partial q_1'}=\frac{\partial\Theta}{\partial \dot q_1}\frac{d\lambda}{dt}, \quad 2\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2,$$

de sorte que a primeira equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial q_1}$$

dá imediatamente

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_1}\frac{d\lambda}{dt}\right)\frac{d\lambda}{dt}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=2\frac{\partial U}{\partial q_1},$$

ou, tendo em vista que é $\sqrt{2(U+h)}=\sqrt{\Theta}\,\frac{d\lambda}{dt}$, dá

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\frac{U+h}{\Theta}}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_1}\right)-\sqrt{\frac{U+h}{\Theta}}\,\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}-\sqrt{\frac{\Theta}{U+h}}\,\frac{\partial U}{\partial q_1}=0,$$

ou

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{U+h}{\sqrt{\Theta(U+h)}}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_1}\right)-\frac{1}{\sqrt{\Theta(U+h)}}\left[(U+h)\frac{\partial\Theta}{\partial q_1}+\Theta\frac{\partial(U+h)}{\partial q_1}\right]=0,$$

que é a primeira equação (5).

No caso de ser $U=0$, a trajectória natural entre dois pontos realiza as condições extremais do comprimento de arco de curva da superfície. As trajectórias correspondentes a um valor de h (feixe) tornam-se independentes de h; o número total de parâmetros baixa de uma unidade. Sôbre cada trajectória é possível uma infinidade de movimentos, os quais correspondem aos diferentes valores atribuídos a h.

A propriedade extremal a que acabamos de aludir caracteriza as linhas geodésicas da superfície; e, portanto, se não há fôrças activas, a acção é efectivamente mínima (pelo menos quando os deslocamentos do sistema são suficientemente pequenos). É o que demonstraremos para o caso geral.

Para verificar o princípio da menor acção, no caso de ser $U \neq 0$, basta notar que a superfície de elemento linear $d\sigma^2 = (U+h)\,ds^2$ (onde h tem um valor determinado) realiza as trajectórias pelas suas geodésicas. Êste raciocínio põe igualmente em evidência a intervenção do parâmetro h. Conhecida uma trajectória, a lei do movimento é geralmente determinada.

5. Regresso ao caso de Liouville. Transformação de Darboux. — Se existe uma função de fôrça de LIOUVILLE

$$U = \frac{U_1(q_1) + U_2(q_2)}{A_1 + A_2},$$

somos levados a procurar as geodésicas do elemento

$$d\sigma^2 = \Big[(U_1 + h\,A_1) + (U_2 + h\,A_2)\Big]\,(B_1\,dq_1^{\,2} + B_2\,dq_2^{\,2}),$$

que é um elemento de LIOUVILLE.

Para dar a transformação de DARBOUX, consideremos o novo sistema para o qual o $ds_1^{\,2}$ é da forma $(\alpha U + \beta)\,ds^2$ e a função de fôrça é do tipo $\dfrac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}$. As trajectórias são as geodésicas do elemento

$$d\sigma^2 = (\gamma + \alpha h_1)\left(U + \frac{\beta h_1 + \delta}{\alpha h_1 + \gamma}\right) ds^2,$$

e coincidem com as do primeiro sistema pondo $h = \dfrac{\beta h_1 + \delta}{\alpha h_1 + \gamma}$. Ao feixe $h = a$ corresponderá o feixe $h_1 = a_1$, onde a e a_1 se correspondem pela relação anterior.

Passemos aos sistemas com n graus de liberdade, para o que começaremos por lembrar certos resultados da geometria de RIEMANN.

6. Deslocamento paralelo e derivação absoluta. — WEYL (*Temps, Espace, Matière*, tradução francesa de JUVET) apresenta a teoria do deslocamento paralelo do modo que vai seguir-se e que é reproduzido por BOULIGAND na «*Géométrie Vectorielle*».

Dada uma multiplicidade riemanniana R_n, façamos corresponder ao vector contravariante ξ_i, ligado ao ponto M, o vector $\xi_i + d\xi_i$ ligado ao ponto M' infinitamente vizinho daquele. Suponhamos linear essa correspondência e redutível à transformação idêntica quando M' tende para M. Poremos

$$(6) \qquad d\xi_i = -\Gamma_i^{rs}\,\xi_r\,dx_s, \quad (1)$$

subentendendo os índices mudos r, s, como sempre faremos. Se fôr possível parametrar a multiplicidade de modo a *anular em M* as funções de ponto Γ_i^{rs} (símbolos de CHRISTOFFEL de 2.ª espécie), diremos tratar-se dum deslocamento paralelo. Esta definição implica a simetria de $d\xi_i$ com respeito a $d\mathbf{M}$ e ξ_i. Na verdade, se a transformação

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}n)$$

leva de ξ_i a $\bar{\xi}_i$ de modo que seja $d\bar{\xi}_i = 0$, da relação $\xi_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}\,\bar{\xi}_k$ deduzimos

$$d\xi_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_k\,\partial \bar{x}_h}\,\bar{\xi}_k\,d\bar{x}_h,$$

(1) $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas do espaço. Vejam-se GALBRUN (*Introduction à la théorie de la Relativité*) e SCIPIÃO DE CARVALHO (*As curvaturas das linhas num espaço riemanniano*).

que traduz a simetria apontada. Doutro lado, se é

$$\Gamma_i^{rs} = \Gamma_i^{sr},$$

procuremos n funções $x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ de modo que seja

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = \begin{cases} 1 & se\ (i = k) \\ 0 & se\ (i \neq k), \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_r \partial \bar{x}_s} = -\Gamma_i^{rs}.$$

Da relação

$$d\xi_i = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{\xi}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_h} \bar{\xi}_k d\bar{x}_h,$$

tendo em vista (6), deduz-se $d\bar{\xi}_i = 0$.

Weyl postula em seguida que os produtos escalares não são alterados pelo deslocamento paralelo. Nessas condições, o deslocamento é unívoco e uma simples diferenciação dum produto escalar leva à determinação dos símbolos de Christoffel. Introduzindo os símbolos de 1.ª espécie pelas igualdades $\Gamma^{k,rs} = g^{ik}\Gamma_i^{rs}$, temos as relações conhecidas

$$\Gamma^{k,rs} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{kr}}{\partial x_s} + \frac{\partial g^{ks}}{\partial x_r} - \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_k}\right).$$

O mesmo postulado leva também às igualdades

$$d\xi^i = \Gamma_r^{is}\xi^r dx_s,$$

e a definição de tensores por oposição permite estabelecer a fórmula geral da derivação covariante

$$\varphi_{r_1 r_2 \cdots r_p}^{s_1 s_2 \cdots s_q t} = \frac{\partial \varphi_{r_1 r_2 \cdots r_p}^{s_1 s_2 \cdots s_q}}{\partial x_t} + \sum_{r_\nu = r_1}^{r_p} \varphi_{r_1 r_2 \cdots r_{\nu-1} i r_{\nu+1} \cdots r_p}^{s_1 s_2 \cdots s_q} \Gamma_{r_\nu}^{it} - \sum_{s_\nu = s_1}^{s_q} \varphi_{r_1 r_2 \cdots r_p}^{s_1 s_2 \cdots s_{\nu-1} i s_{\nu+1} \cdots s_q} \Gamma_i^{s_\nu t}.$$

É fácil definir agora a derivação absoluta. Nesta operação passa-se dum tensor de certa ordem para outro tensor da mesma ordem, para o que bastará efectuar o produto contraído do tensor obtido na derivação covariante pelo vector unitário $\frac{dx_t}{ds}$. É o que representaremos com igualdades como a seguinte

$$D_\Delta \varphi_{ijk}^{lm} = \varphi_{ijk}^{lms} \frac{dx_s}{ds} = \varphi_{ijk}^{lms} \xi_s,$$

onde Δ significa a direcção da diferenciação definida pelo vector unitário ξ_s.

Seja $\lambda_i = \frac{dx_i}{dt}$ um vector obtido supondo as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ funções dum parâmetro t. A derivada absoluta do vector λ_i em ordem ao mesmo parâmetro é o vector

$$\mu_i = D_t \lambda_i = \lambda_i^s \frac{dx_s}{dt} = \frac{d\lambda_i}{dt} + \Gamma_i^{rs} \frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt}.$$

Opera-se assim a passagem da *velocidade* para a *aceleração*.

7. Ponto móvel num espaço de Riemann. — Imaginemos, conforme uma generalização evidente, uma função de fôrça U definida em R_n. Um ponto móvel de massa unitária desloca-se na multiplicidade sob a acção da fôrça que deriva de U quando a aceleração é idêntica ao gradiante de U. As equações do movimento serão pois

$$\mu^i = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

ou, desenvolvendo e substituindo x_i por q_i, para conformidade de notações com o que vai seguir-se,

$$g^{ik}\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \Gamma^{i,rs}\frac{dq_r}{dt}\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{7}$$

O algoritmo de LAGRANGE é aplicável. Pondo com efeito

$$P^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad 2T = g^{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt},$$

vamos verificar que é $P^i = \mu^i$. É

$$P^i = \frac{d}{dt}\left(g^{ik} q'_k\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{rs}}{\partial q_i} q'_r q'_s = g^{ik}\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{is}}{\partial q_r} + \frac{\partial g^{ir}}{\partial q_s} - \frac{\partial g^{rs}}{\partial q_i}\right) q'_r q'_s =$$

$$= g^{ik}\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \Gamma^{i,rs} q'_r q'_s .$$

Êste resultado mostra bem a eqüivalência entre o movimento dum sistema material Σ' e o dum ponto num espaço de RIEMANN. Dada a fôrça viva $2T = g^{ik} q'_i q'_k$, é sôbre a variedade $ds^2 = g^{ik} dq_i dq_k$ que é realizável o movimento.

Para demonstrar o princípio da menor acção temos de reconhecer a propriedade do mínimo nas linhas geodésicas dum R_n. O estudo destas curvas pode fazer-se, como no espaço ordinário, pela comparação de arcos variados da multiplicidade.

8. Variação do comprimento dum arco de curva. Linhas geodésicas. — Comecemos por uma nota preliminar: se o ponto M da variedade é função de dois parâmetros θ e τ, a derivada absoluta $D_\tau \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}$ é igual a $D_\theta \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tau}$. O valor comum das derivadas é na verdade

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial\theta\partial\tau} + \Gamma_i^{rs}\frac{\partial x_r}{\partial\theta}\frac{\partial x_s}{\partial\tau}.$$

Para estudar agora a variação do integral

$$L' = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{M}'}{ds}\right)^2}\, ds,$$

suporemos o ponto M' função não só do arco s mas ainda dum parâmetro λ tal que a família de curvas definidas fazendo variar λ reproduza a curva inicial quando $\lambda = 0$. A derivação de L' em ordem a λ obtém-se anotando que a derivação absoluta dum escalar coincide com a derivação ordinária e que a derivação absoluta dum produto escalar segue a regra ordinária da derivação dum produto. Temos assim

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial \lambda}\right)_0 = \int_A^B \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \cdot D_\lambda\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{M}}}{\partial s}\right) ds = \int_A^B \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \cdot D_s\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{M}}}{\partial \lambda}\right) ds$$

$$= \int_A^B \left[D_s\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}\frac{\partial \overline{\mathbf{M}}}{\partial \lambda}\right) - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} D_s\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{M}}}{\partial s}\right)\right] ds,$$

onde A e B representam os pontos extremos do arco inicial. E deduz-se

$$\text{(8)} \qquad \delta L = (\delta L')_0 = \mathbf{T}_B \overline{\delta \mathbf{B}} - \mathbf{T}_A \overline{\delta \mathbf{A}} - \int_A^B D_s\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}\right) \overline{\delta \mathbf{M}}\, ds,$$

onde $\mathbf{T}$ é o tangente da curva e $\delta\mathbf{M}$ é o vector que define o ponto variado do ponto inicial M.

Como em geometria euclideana, as linhas geodésicas são as curvas para as quais o termo integral desaparece. Ao longo delas é nulo o vector $D_s\left(\frac{d\mathbf{M}}{ds}\right)$, o que podemos ainda exprimir dizendo que o vector unitário tangente se desloca paralelamente. O sistema diferencial das linhas geodésicas será assim

$$\text{(9)} \qquad g^{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 1, \qquad \frac{d^2 x_j}{ds^2} + \Gamma_j^{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 0,$$

devendo considerar-se i e k como índices mudos e escrever-se n equações semelhantes à segunda e correspondentes aos diferentes valores do índice j. As equações anteriores não são tôdas distintas. Derivando a primeira, temos

$$\frac{dg^{ik}}{ds}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} + g^{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} + g^{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{d^2x_k}{ds^2} = 0,$$

ou, por uma coordenação de índices,

$$\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} - g^{lk}\,\Gamma_l^{ri} - g^{il}\,\Gamma_l^{kr}\right)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{dx_r}{ds} = 0,$$

que é uma identidade.

O teorema de CAUCHY mostra que em cada ponto passa uma geodésica tangente a uma direcção, mas os valores iniciais de $\frac{dx_i}{ds}$ devem satisfazer à primeira das equações (9). Sendo, por outro lado, invariante para a mudança de s em $s+C$ ($C=$ constante arbitrária) o mesmo sistema (9), conclui-se que as geodésicas dependem de $2n-2$ parâmetros.

Posto isto, consideremos uma $(n-1)$ — variedade da multiplicidade inicial e as geodésicas ortogonais correspondentes, que constituirão uma família a $n-1$ parâmetros. Marcando um dado comprimento s sôbre as diferentes geodésicas, a partir do ponto P da $(n-1)$ — variedade, obtém-se uma nova $(n-1)$ — variedade, que se diz *paralela* à primeira, por ser perpendicular às mesmas geodésicas, como o mostra (8). Tomemos como coordenadas o arco s e os $(n-1)$ parâmetros que definem os pontos da $(n-1)$ — variedade inicial. Atendendo à definição do tensor fundamental, será $d\mathbf{M}^2 = ds^2 + d'\mathbf{M}^2$, onde $d'\mathbf{M}$ é um vector infinitamente pequeno da variedade $s=$ const. Concluímos daqui que a propriedade do mínimo é realizada pelas linhas geodésicas, pelo menos numa região de R_n suficientemente pequena contendo a $(n-1)$ — variedade inicial.

9. Conclusão. — Retomemos agora o sistema Σ' com n graus de liberdade. Para cada valor da constante h das fôrças vivas,

o movimento natural entre duas configurações conhecidas realiza as condições extremais do integral $\int d\sigma = \int \sqrt{U+h}\,ds$, e o ponto representativo do movimento na multiplicidade $d\sigma^2 = (U+h)\,ds^2$ descreve uma geodésica. Fica demonstrado completamente o princípio da menor acção e bem assim que a totalidade dos parâmetros de que dependem as trajectórias é $2n-2+1=2n-1$ quando fôr $U \neq 0$ e $2n-2$ quando fôr $U=0$.

A uma última conclusão nos levam as equações (7) e (9): quando fôr $U=0$, as linhas geodésicas são percorridas com movimento uniforme.

CAPÍTULO III

Estabilidade. Os dois métodos de Liapounoff

1. Generalidades. — É bem conhecido o teorema de LAGRANGE sôbre a estabilidade do equilíbrio. Diz o teorema que, dado um sistema Σ', é estável tôda a posição de equilíbrio que confere à função de fôrça um máximo no sentido estrito (Veja-se APPELL, *Mécanique Rationnelle)*. A proposição recíproca tem sido demonstrada parcialmente. Neste capítulo referir-nos-emos aos resultados dados por LIAPOUNOFF na sua importante memória «*Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction des forces n'est pas un maximum*», publicada no «*Journal de Jordan*».

O primeiro método de LIAPOUNOFF é baseado na consideração das *soluções assintóticas* de certas equações diferenciais, soluções que foram introduzidas pelo eminente matemático russo e por POINCARÉ. Trataremos a questão com ÉMILE PICARD *(Traité d'Analyse)*, desenvolvendo convenientemente a análise a empregar. O segundo método será tratado tendo em vista a memória citada e a exposição feita por E. GOURSAT no seu «*Cours d'Analyse*».

2. Nota preliminar. — Sejam os p números inteiros e positivos $m_1, m_2, \ldots, m_p$ e as quantidades reais ou imaginárias $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

¿Em que condições será de módulo superior a um número conveniente (não nulo) o cociente $\alpha = \dfrac{\lambda_1(m_1-1)+\lambda_2 m_2+\ldots+\lambda_p m_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p-1}$,

cujo numerador se supõe diferente de zero? Basta que os pontos λ_i se possam considerar interiores a um contôrno convexo que não contenha a origem. O número $\dfrac{\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_p m_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p}$ é afixo dum ponto do interior do mesmo contôrno e o seu módulo é superior a um número positivo l determinado; e sendo

$$\alpha = \frac{\dfrac{\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_p m_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p} - \dfrac{\lambda_1}{m_1+m_2+\ldots+m_p}}{1-\dfrac{1}{m_1+m_2+\ldots+m_p}},$$

vê-se que se pode fixar um número N tal que, sendo $\sum m_i \geqq N$, o módulo desta expressão é superior a um número conveniente. Quando fôr $\sum m_i < N$, sucede outro tanto e existe um número $\varepsilon > 0$ inferior ao módulo de α.

Para uma expressão da forma

$$\beta = \frac{\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_p m_p - \lambda_i}{m_1+m_2+\ldots+m_p-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n>p),$$

as conclusões são análogas. A circunstância de se anular o numerador para $m_i=1$, $m_1=m_2=\ldots=m_{i-1}=m_{i+1}=\ldots=m_p=0$ pode pôr-se de parte supondo $\sum m_i \geqq 2$. A mesma hipótese se formulará quanto a α.

3. Sôbre certas singularidades das equações diferenciais. — É bem conhecida a ligação entre a equação

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

e o sistema

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_i}{X_i}, \tag{2}$$

onde os X_i são funções das variáveis x_i. Vamos supor $X_i = 0$ na origem e estudar os integrais do sistema no domínio dêste ponto.

Seja

$$X_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n + \ldots,$$

onde os termos não escritos são do segundo grau pelo menos. Uma mudança linear de variáveis mostra podermos supor geralmente

$$X_i = \lambda_i x_i + \ldots,$$

sem outros termos do primeiro grau. As quantidades λ são raízes da equação determinante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Supõem-se diferentes todos os $\lambda\lambda$. Vai interessar-nos a equação

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i + \ldots) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda_1 f, \tag{3}$$

para a qual vamos demonstrar a existência de integral holomorfo no domínio da origem. Tudo está em provar a convergência do desenvolvimento formal cujos coeficientes são obtidos por derivações sucessivas de (3). A derivada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ fica indeterminada na origem, as outras derivadas primeiras são nulas e o coeficiente

da derivada $\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n} f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$ é $\lambda_1 (m_1 - 1) + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_n m_n$. Êste coeficiente supõe-se diferente de zero quando é $\sum m_i \geqq 2$.

Designando com C_1 uma constante arbitrária, ponhamos em (3) $f = C_1 x_1 + v$. Obtemos

$$\sum \lambda_i x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \lambda_1 v = \sum \psi_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \psi,$$

onde os desenvolvimentos dos $\psi\psi$ começam por termos do segundo grau. Designando com M uma quantidade superior aos módulos dos $\psi\psi$ quando as variáveis são interiores ou ficam sôbre um círculo de raio r, desenhado nos planos em que elas se representam, o método do Cálculo dos limites leva a considerar a equação

$$\varepsilon \left(\sum x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - V \right) = \left(\frac{M}{1 - \frac{\Sigma x_i}{r}} - M - M \frac{\Sigma x_i}{r} \right) \left(\sum \frac{\partial V}{\partial x_i} + 1 \right),$$

onde ε é a quantidade da nota preliminar.

A existência de integral holomorfo V no domínio da origem (necessàriamente nulo e com derivadas parciais primeiras nulas) leva à existência de integral v nas mesmas condições e demonstra o teorema que temos em vista. As derivações sucessivas dão para coeficiente de $\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n} V}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$ na origem o número $\varepsilon (m_1 - 1 + m_2 + \ldots + m_n)$. Por simetria, V é função composta dos x_i por meio de $u = \sum x_i$. Somos levados assim à equação

$$\varepsilon \left(u \frac{dV}{du} - V \right) = \left(\frac{M}{1 - \frac{u}{r}} - M - M \frac{u}{r} \right) \left(n \frac{dV}{du} + 1 \right).$$

Vê-se fàcilmente (usando o método de variação de constantes) que existe integral holomorfo no domínio da origem, necessàriamente nulo neste ponto, com derivada nula. O integral holomorfo f dependerá duma constante arbitrária.

Para afastar a hipótese de ser em (3) $\lambda_i \neq \lambda_1$, basta notar que deveria ser arbitrária a derivada $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e que, por conseqüência, a passagem à função v se deveria fazer pela relação $f = C_1 x_1 + C_i x_i + v$, onde C_i é uma constante arbitrária.

Suponhamos agora que nenhuma das relações

$$\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_i (m_i - 1) + \ldots + \lambda_n m_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

é verificada quando fôr $\sum m_i \geq 2$.

As $n-1$ equações análogas a (3), que se obtêm substituindo λ_1 por λ_i, levam a considerar mais $n-1$ integrais holomorfos f_i, análogos ao integral que acabamos de encontrar e que designaremos com f_1. As duas relações idênticas

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j + \ldots) \frac{\partial f_1}{\partial x_j} = \lambda_1 f_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j + \ldots) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lambda_i f_i,$$

levam à relação

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j + \ldots) \frac{\partial}{\partial x_j} \log \left(f_i^{\frac{1}{\lambda_i}} : f_1^{\frac{1}{\lambda_1}} \right) = 0,$$

e a equação (1) admite os $n-1$ integrais

$$f_j^{\frac{1}{\lambda_j}} : f_1^{\frac{1}{\lambda_1}} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

que são sempre distintos, pois o determinante funcional

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

não é identicamente nulo, como resulta de podermos sempre supor

$$f_1 = A_1 x_1 + \ldots,$$
$$f_2 = A_2 x_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = A_n x_n + \ldots,$$

sem mais termos do primeiro grau e sendo os AA constantes arbitrárias.

É dos resultados precedentes que vamos partir para o estudo das curvas integrais do sistema (2) que passam na origem, na hipótese de serem nulas nesse ponto as funções X_i, que continuamos a supor da mesma forma. As curvas integrais vão ser obtidas sob forma paramétrica, mediante o sistema auxiliar

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_i}{X_i} = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{t}. \tag{4}$$

A unidade não tem que intervir nas hipóteses dos $\lambda\lambda$, como resulta de podermos satisfazer às equações

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + t \frac{\partial f_i}{\partial t} = \lambda_i f_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_j} + t \frac{\partial f_{n+1}}{\partial t} = f_{n+1},$$

com as funções precedentes f_i e a função $f_{n+1}=t$. Atribuindo aos A_i valores numéricos, somos levados aos integrais seguintes do sistema (4)

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)-C_1\,t^{\lambda_1}=0,\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)-C_n\,t^{\lambda_n}=0,$$

dos quais se tiram $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em séries ordenadas segundo as potências de $C_1 t^{\lambda_1}, \ldots, C_n t^{\lambda_n}$. A convergência é assegurada quando os módulos destas quantidades são suficientemente pequenos. Se as partes reais de p dos números $\lambda\lambda$ $(p \leq n)$ são positivas (hipótese que supomos verificada por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ e só por êles), pondo $C_{p+1}=\ldots=C_n=0$ obtêm-se desenvolvimentos das variáveis x que tendem para zero com t e que representam soluções do sistema (4) dependentes de p constantes arbitrárias. Pondo em seguida $t=\frac{1}{t'}$, $C_1=C_2=\ldots=C_p=0$, obtemos sob forma paramétrica outras curvas passando pela origem, pois que os x_i tendem para zero com t'. Estas soluções dependem de $n-p$ constantes arbitrárias.

O sistema (4) entra no tipo mais geral dos sistemas da forma

$$\text{(5)}\qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n,t)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n,t)}=\frac{dt}{t},$$

onde as funções X_i se anulam no ponto $x_1=\ldots=x_n=t=0$.

Uma mudança linear do tipo

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+\beta_i t \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

mostra que podemos supor $X_i=\lambda_i x_i+\ldots$, onde os termos não escritos são pelo menos do segundo grau nos xx e no tempo. A unidade figura agora nas condições relativas aos $\lambda\lambda$ e, mediante elas, o sistema (5) admite os seguintes integrais

$$f_1(t,x_1,\ldots,x_n)-C_1\,t^{\lambda_1}=0,\ldots,f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)-C_n\,t^{\lambda_n}=0,$$

onde os desenvolvimentos das funções holomorfas f_i começam por um único termo do primeiro grau em x_i. As curvas integrais do sistema (5) obtêm-se pelas séries que definem os x_i, e dependem de n constantes arbitrárias quando muito. Quanto à convergência das séries, tem lugar o que atrás se disse, salvo, bem entendido, o que respeita à mudança de t em $\frac{1}{t'}$. (1)

As restrições impostas aos $\lambda\lambda$ podem diminuir-se por um estudo directo do sistema (4). Suponhamos que p das quantidades λ $(p<n)$ verificam as seguintes condições:

α) as condições *análogas* às anteriores que respeitam a *todos* os $\lambda\lambda$;

β) não são possíveis as igualdades

$$\lambda_1 p_1+\ldots+\lambda_p m_p-\lambda_i=0 \qquad (i=p+1,\ldots,n),$$

quando fôr $m_1+\ldots+m_p \geqq 2$.

Podemos obter os xx em séries de $y_1=t^{\lambda_1},\ldots,y_p=t^{\lambda_p}$, como faz PICARD. Consideremos os xx funções dos yy. São verificadas as equações às derivadas parciais

$$\text{(6)}\qquad \sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,y_k\frac{\partial x_i}{\partial y_k}=\lambda_i x_i+\ldots \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

as quais permitem obter desenvolvimentos formais dos xx em séries dos yy. Supondo $i \leqq p$, o único termo do primeiro grau do desenvolvimento de x_i é $A_i y_i$, sendo A_i uma constante arbitrária. Se fôr $i>p$, não há termos do primeiro grau nos desenvolvimentos. No cálculo de $\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_p}x_i}{\partial y_1^{m_1}\partial y_2^{m_2}\ldots\partial y_p^{m_p}}$ na origem, temos, no primeiro caso, para coeficiente desta derivada, a expressão $\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_i(m_i-1)+\ldots+\lambda_p m_p$, e, no segundo, $\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_p m_p-\lambda_i$. Conforme o que se disse na nota preliminar, tais

(1) Deve ter-se em vista que as funções f_i são também ordenadas segundo as potências de t.

coeficientes são de módulo superior a $\varepsilon(m_1 + \ldots + m_p - 1)$. Escrevendo o sistema (6) sob a forma

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} - \lambda_i x_i = \varphi_i,$$

onde φ_i começa por termos do segundo grau, percebe-se o emprêgo do sistema dominante

$$\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{p} y_k \frac{\partial V_i}{\partial y_k} - V_i\right) = \frac{M}{1 - \frac{\sum_1^n V_i}{r}} - M - M\frac{\sum_1^n V_i}{r},$$

e, em seguida, da equação diferencial única

$$\varepsilon\left(u\frac{dV}{du} - V\right) = \frac{M}{1 - \frac{nV}{r}} - M - M\frac{nV}{r} \qquad (u = y_1 + \ldots + y_p),$$

que integramos directamente. Existe um integral V, holomorfo no domínio da origem, nulo neste ponto e com derivada arbitrária. Quanto aos integrais x_i, que conterão p constantes arbitrárias, podemos afirmar que êles se anulam com t se fôr possível escolher leis segundo as quais se anulem com t as quantidades $t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_p}$.

Pode proceder-se da mesma forma com o sistema (5). Entre os $\lambda\lambda$ figura a unidade, e as condições a que devem satisfazer estabelecem-se fàcilmente. De resto, a análise anterior é imediatamente aplicável, fazendo intervir a unidade nos p valores de λ. Basta escrever o sistema sob a forma

$$t\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$t\frac{dx_{n+1}}{dt} = x_{n+1},$$

tendo o cuidado de dar o valor *1* à constante arbitrária que figura no desenvolvimento de x_{n+1}. Esta nota justifica que os integrais dependerão de $p-1$ constantes arbitrárias.

Os resultados anteriores permitem introduzir fàcilmente as soluções assintóticas a que nos referimos.

4. Soluções assintóticas. — Seja o sistema

$$(7) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde as funções X_i, independentes do tempo t, se anulam na origem. Passemos para o sistema (4), pondo $\tau = e^t$, e suponhamos que os X_i contêm apenas $\lambda_i x_i$ como termo do primeiro grau. O sistema

$$\tau\frac{dx_i}{d\tau} = \lambda_i x_i + \ldots$$

admite soluções que são séries ordenadas segundo as potências de $C_1 \tau^{\lambda_1}, \ldots, C_p \tau^{\lambda_p}$. O regresso à variável t determina séries ordenadas segundo $C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_p e^{\lambda_p t}$. Êste resultado pode estabelecer-se directamente procurando desenvolvimentos formais que satisfaçam a (7) e demonstrando a convergência de tais desenvolvimentos. Dado um intervalo $(0, T)$ da variável t, as séries são convergentes nesse intervalo contanto que as constantes C_i sejam suficientemente pequenas. Querendo fazer tender t para ∞, bastará fazer iguais a zero as constantes que correspondem aos $\lambda\lambda$ de partes reais positivas. No caso favorável de serem negativos todos os $\lambda\lambda$, os desenvolvimentos são convergentes para quaisquer valores das constantes e do tempo e tendem para zero quando t aumenta indefinidamente; as soluções obtidas são tôdas *assintóticas* da solução nula.

5. Estabilidade e instabilidade. — Seja o sistema

$$(8) \qquad \frac{dx_i}{dt} = A^i_{p_1 p_2 \ldots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde os segundos membros não contêm termo independente dos x_i e são séries ordenadas segundo as potências das incógnitas com coeficientes unicamente funções do tempo; tais funções são contínuas quando $t \geqq t_0$. A convergência supõe-se ter lugar quando $t \geqq t_0$ e $|x_i| \leqq \rho$, ainda que as incógnitas tomem valores complexos. Diremos, com LIAPOUNOFF, que a solução nula do sistema é *estável*, se a cada valor $\rho' < \rho$ pudermos associar um número $\rho'' \leqq \rho'$ tal que as soluções x_i, que correspondem às condições iniciais $|x_i^0| < \rho''$, verificam as desigualdades $|x_i(t)| < \rho'$, quando $t > t_0$. Se, pelo contrário, existir um número positivo $\rho' < \rho$, ao qual não seja possível associar um número ρ'' como o precedente, a solução nula diz-se *instável*.

Postas estas definições, vamos demonstrar um primeiro teorema de LIAPOUNOFF: *se entre os λλ do sistema* (7) *houver um que seja positivo, a solução nula é instável.*

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ os λλ positivos e seja λ o maior dêles. Temos uma solução da forma $x_i = f_i(Ce^{\lambda t})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, onde figura uma só constante arbitrária C e onde os coeficientes reais dos f_i são independentes de C [o sistema (7) supõe-se real]. Tomando $C > 0$, a convergência dos desenvolvimentos tem lugar mediante a relação $Ce^{\lambda t} \leqq h$, sendo h suficientemente pequeno e independente de C. Os valores iniciais dos x_i (fazemos $t_0 = 0$) são $a_i = f_i(C)$ e, escolhendo C, estes valores são tão pequenos quanto se queira em valor absoluto. Por mais pequenos que êles sejam, serão todavia atingidos os valores $f_i(h)$ quando o tempo toma o valor $\frac{1}{\lambda} \log \frac{h}{C}$. Ora os valores $f_i(h)$ não são todos nulos, porque h é arbitrário; a solução nula é instável.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de LIAPOUNOFF relativo ao equilíbrio dum sistema Σ'.

Suponhamos $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ uma posição de equilíbrio para a qual é $U = 0$; que U é uma função analítica no domínio da origem e que outro tanto sucede com os coeficientes g^{ik}.

Conforme um método usado no estudo das pequenas oscilações (não esquecer que $2T$ é uma forma definida positiva), imaginaremos que os parâmetros q_i representam as *variáveis*

principais (1). Será

$$2T = (q_1'^2 + q_2'^2 + \ldots + q_n'^2) + \sum a_{ik} q_i' q_k',$$

$$2U = \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \ldots + \lambda_n q_n^2 + \ldots,$$

onde os a_{ik} são de primeira ordem nos qq, não havendo outros termos do segundo grau na expressão de U. As equações de LAGRANGE, que são resolúveis em ordem às derivadas segundas, dão (2)

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \lambda_i q_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde os termos não escritos são pelo menos de segunda ordem nos qq e $q'q'$. O sistema normal

$$\frac{dq_i}{dt} = q_i', \qquad \frac{dq_i'}{dt} = \lambda_i q_i + \ldots,$$

leva a uma equação determinante, cujas raízes são $\pm\sqrt{\lambda_i}$ e se um dos λλ é positivo há instabilidade. Em tal hipótese *reconhece-se a não existência de máximo pelos termos do segundo grau de U.*

Passemos ao segundo método de LIAPOUNOFF.

6. Teorema geral sôbre a estabilidade. — Modifiquemos a definição de estabilidade e instabilidade. A solução nula do sistema (8) é estável, quando a condição $\sum x_i^{02} < \rho''^2$ arrasta a desigualdade $\sum \{x_i(t)\}^2 < \rho'^2$ e instável, quando o número ρ' não tiver correspondente ρ''.

(1) Veja-se ROUTH «*Dynamics of a system of rigid bodies*, part II».

(2) Escrita a fôrça viva sob a forma indicada, torna-se fácil estabelecer êste resultado.

Feito isto vamos supôr que os termos do primeiro grau em $x_1, \ldots, x_n$ dos segundos membros das equações (8) têm coeficientes constantes e seja $Q(x_1, \ldots, x_n)$ uma forma quadrática dos x_i com coeficientes constantes. Esta forma é uma função do tempo ao longo de cada solução de (8) e a sua derivada Q' pode escrever-se sob a forma

$$Q' = Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

onde Q_1 é uma forma análoga e F uma série ordenada segundo as potências dos x_i, começando por termos do terceiro grau pelo menos e com coeficientes funções do tempo. O teorema que vamos demonstrar é o seguinte: *Se fôr possível encontrar uma forma Q tal que a forma Q_1 seja definida positiva, a solução nula do sistema é estável se Q fôr uma forma definida negativa, e instável se fôr definida positiva ou indefinida.*

Consideremos o ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dum espaço a n dimensões e atribuamos às suas coordenadas a forma $(r\xi_1, r\xi_2, \ldots, r\xi_n)$, de sorte que o ponto $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ percorra uma hiperesfera de raio unitário. Temos

$$Q' = r^2 \left[Q_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + rV \right],$$

onde a função V dos ξ_i, do número positivo r e do tempo é contínua quando $t \overline{>} t_0$ e $r \overline{<} \rho$. Sendo Q_1 por hipótese uma forma positiva, a função $Q_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é superior a um mínimo absoluto m; e, se M é um limite superior de V, a derivada Q' é positiva em todos os pontos do interior da hiperesfera de raio R inferior ao menor dos números ρ e $\frac{m}{M}$, exceptuada a origem, onde é $Q' = 0$.

Se supomos que Q é definida negativa, seja $\rho' < R$; quando o ponto x_i percorre a hiperesfera de raio ρ', Q fica inferior a um máximo absoluto $-K$ e podemos determinar um número $\lambda < \rho'$ tal que no interior da hiperesfera de raio λ seja $Q > -K$, visto que Q se anula na origem. Quando o móvel, no instante inicial t_0, parte dum ponto x_i^0 interior à hiperesfera de raio λ, ficará

interior à hiperesfera de raio ρ', porque, se no instante $t_1 > t_0$ a atingisse, o valor $Q(t_1)$ de Q seria igual ou menor que $-K$ e, sendo $Q(t_0) > -K$, seria $Q(t_1) < Q(t_0)$, o que é absurdo, em virtude do sinal de Q'. A solução nula é pois estável. E, dum modo mais particular, as soluções suficientemente vizinhas da solução nula são *assintóticas* desta solução. Na verdade, o limite da função Q não pode ser negativo quando t cresce indefinidamente. Se, para certas condições iniciais como as anteriores, Q tendesse para o limite $-L$, como seria possível determinar um número λ' tal que no interior da hiperesfera de raio λ' fôsse $Q > -L$, o móvel estaria constantemente no exterior desta hiperesfera e entre ela e a do raio ρ' se efectuaria o movimento. A derivada Q' seria superior a um número $\tau > 0$ e no instante $t_1 > t_0$ era $Q(t_1) > Q(t_0) + \tau(t_1 - t_0)$, resultado absurdo, porque Q não poderia exceder $-L$.

Se a derivada Q' se anula para valores diferentes da origem, mas não é nunca negativa, dos resultados anteriores só pode deixar de subsistir o assintotismo.

Passemos ao caso em que Q é uma forma definida positiva ou indefinida. Vamos mostrar que é possível tomar condições iniciais interiores à hiperesfera Σ_λ de raio λ, por mais pequeno que seja λ, tais que a hiperesfera $\Sigma_{\rho'}$ de raio ρ' é atingida pelo móvel. Considerando um ponto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ interior àquela hiperesfera, para o qual seja $Q_0 = Q(x_1^0, \ldots, x_n^0) > 0$, e um valor de $\lambda' < \lambda$ suficientemente pequeno para que no interior de $\Sigma_{\lambda'}$ seja $Q < Q_0$, a solução do sistema correspondente às condições iniciais (t_0, x_i^0) acaba por sair de $\Sigma_{\rho'}$, porque, se não saísse, o valor de Q cresceria sempre a partir de Q_0 e o movimento teria lugar entre $\Sigma_{\lambda'}$ e $\Sigma_{\rho'}$. E como o valor de Q se podia tornar tão grande quanto se quisesse, não seria inferior ao seu limite superior preciso entre as duas hiperesferas.

O teorema da instabilidade não se modifica quando a forma Q se substitui por uma função V cuja derivada V' é uma função definida (LIAPOUNOFF, loc. cit.), ou seja, uma função que não muda de sinal mediante as desigualdades $|x_i| \overline{<} \rho$, sendo ρ um número conveniente.

Teremos sòmente de supor que os segundos membros do sistema proposto não contêm o tempo e que a desigualdade $VV' > 0$ é possível, por mais pequenos que sejam os valores absolutos das variáveis x_i.

É sob esta forma que vai ser aplicado no § seguinte.

7. Teorema de Liapounoff. — Vamos fazer intervir na questão da instabilidade os resultados anteriores. Ponhamos as mesmas hipóteses do § 5, sòmente não sendo necessário fazer intervir as variáveis principais. Das equações de LAGRANGE deduz-se um sistema normal de $2n$ equações de primeira ordem; e do desenvolvimento de U

$$U = U_2 + U_3 + \ldots + U_m + \ldots,$$

onde U_m é do grau m, e da função $V = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ deduz-se, mediante as mesmas equações de LAGRANGE,

$$\frac{dV}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial T}{\partial q_i} + 2U_2 + 3U_3 + \ldots + mU_m + \ldots.$$

Ora $T = T_0 + T_1$, onde T_0 é uma forma quadrática nos q_i', com coeficientes constantes, e T_1 é uma forma quadrática nas mesmas variáveis, com coeficientes funções dos q_i. Supomos êsses coeficientes funções analíticas no domínio da origem e nulos neste ponto. Se a função U é mínima, U_2 é uma forma positiva e a forma $Q_1 = 2(T_0 + U_2)$ é definida positiva. Como a função V se pode tornar positiva, há *instabilidade*. Podemos acrescentar que, se a existência de mínimo se reconhecer pelos termos de ordem menos elevada do desenvolvimento de U, há ainda instabilidade, o que completa em parte o resultado já obtido.

8. Nota. — O teorema geral sôbre a estabilidade presta-se a tratar os sistemas da forma (7) na hipótese de ter raízes múltiplas a equação determinante. A discussão reclama que recordemos alguns resultados.

9. Sistemas lineares com coeficientes constantes. Redução a uma forma canónica. — A um sistema linear com coeficientes constantes da forma

(9) $$y_i' = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pode sempre dar-se uma forma simples de integração imediata. Substituamos aos y_i as incógnitas

(10) $$z_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \ldots + b_{in} y_n,$$

supondo $\| b_{ik} \| \neq 0$. O sistema transformado é semelhante ao sistema dado. Podemos escrever

(11) $$z_i' = A_{i1} z_1 + A_{i2} z_2 + \ldots + A_{in} z_n,$$

sendo fácil procurar os A_{ik}. Vamos mostrar, seguindo uma análise devida a JORDAN, que é possível determinar combinações lineares z_i dos y_i, tais que as combinações análogas dos segundos membros de (9) repartem os z_i em grupos $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ verificando as relações canónicas

(11') $$z_1' = sz_1, \quad z_2' = s(z_1 + z_2), \ldots, z_p' = s(z_{p-1} + z_p),$$

de integração imediata. Comecemos por procurar (10), de sorte que a primeira equação (11) seja da forma $z_1' = sz_1$. É precisamente a equação determinante ou característica de (9) que determina s, bastando dispor da primeira equação (10) para obter o resultado. Se tôdas as raízes s são distintas, obtemos o grupo único

$$z_i' = s_i z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

como se esperava. Se há raízes múltiplas, admitamos o teorema para o caso de $n-1$ variáveis e escolhamos y_1 de sorte que o sistema (9) tenha a forma

$$y_1' = \tau y_1,$$

$$(12) \qquad y_i' = A_i y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n \qquad (i = 2, 3, \dots, n).$$

O sistema $Y_i' = a_{i2} Y_2 + \dots + a_{in} Y_n$, para o qual é $\| a_{ik} \| \neq 0$, é susceptível de ser levado à forma canónica, que será composta de grupos como o seguinte:

$$Z_1' = s Z_1, \quad Z_2' = s(Z_1 + Z_2), \dots, Z_p' = s(Z_{p-1} + Z_p).$$

O sistema (12), mediante a mesma transformação, conduzirá aos grupos correspondentes

$$(12') \qquad Z_1' = s Z_1 + \Lambda_1 y_1, \quad Z_2' = s(Z_1 + Z_2) + \Lambda_2 y_1, \dots,$$

$$Z_p' = s(Z_{p-1} + Z_p) + \Lambda_p y_1,$$

aos quais se junta a equação $y_1' = \tau y_1$, onde figuram as constantes Λ. Fazendo aqui a transformação

$$(13) \qquad u_1 = Z_1 + \tau_1 y_1, \quad u_2 = Z_2 + \tau_2 y_1, \dots, u_p = Z_p + \tau_p y_1,$$

onde figuram as constantes τ_i, temos

$$u_1' = s u_1 + [\Lambda_1 + \tau_1(\tau - s)] y_1,$$

$$u_i' = s(u_{i-1} + u_i) + [\Lambda_i + (\tau - s)\tau_i - s\tau_{i-1}] y_1 \qquad (i > 1),$$

e, se fôr $\tau - s \neq 0$, podemos determinar os τ_i de modo que seja

$$(14) \qquad u_1' = s u_1, \quad u_2' = s(u_1 + u_2), \dots, u_p' = s(u_{p-1} + u_p).$$

A redução canónica fica operada dêste modo quando τ é uma raiz simples da equação determinante (1). Aos grupos (14) há a juntar o grupo composto da equação única $y_1' = \tau y_1$. Mas, se τ é raiz múltipla, há grupos (12') para os quais é $s = \tau$. Precisemos: suponhamos existir o grupo

$$Z_1' = \tau Z_1 + \Lambda_1 y_1, \; Z_2' = \tau(Z_1 + Z_2) + \Lambda_2 y_1, \dots,$$

$$Z_q' = \tau(Z_{q-1} + Z_q) + \Lambda_q y_1;$$

uma transformação (13) leva às relações

$$u_1' = \tau u_1 + \Lambda_1 y_1, \; u_2' = \tau(u_1 + u_2), \dots, u_q' = \tau(u_{q-1} + u_q),$$

às quais juntaremos $y_1' = \tau y_1$. Basta fazer $u_0 = \frac{\Lambda_1}{\tau} y_1$ para se ter imediatamente o grupo único de $q+1$ equações

$$u_0' = \tau u_0, \; u_1' = \tau(u_0 + u_1), \dots, u_q' = \tau(u_{q-1} + u_q).$$

Se em (11') se faz $z_i = s^i u_i$ $(s \neq 0)$, vem

$$(15) \qquad u_1' = s u_1, \; u_2' = s u_2 + u_1, \dots, u_p' = s u_p + u_{p-1};$$

e, pondo ainda $u_i = t_i e^{\lambda x}$, temos

$$(16) \qquad t_1' = (s - \lambda) t_1, \; t_2' = (s - \lambda) t_2 + t_1, \dots, t_p' = (s - \lambda) t_p + t_{p-1}.$$

Quando é $s = 0$, vê-se que a forma canónica (15) é aplicável. Na verdade o sistema (16) e os sistemas análogos obtêm-se na

(1) É muito fácil verificar que as raízes da equação determinante de (12) são as mesmas que as da equação determinante de (9).

ordem dos sistemas (15) fazendo no sistema proposto a mudança $\eta_i = e^{\lambda x} y_i$. À antiga raiz $s=0$ corresponde a nova raiz $-\lambda$, pois que as novas equações se apresentam sob a forma

$$\eta_i' = a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \ldots + (a_{ii}+\lambda)\eta_i + \ldots + a_{in}\eta_n.$$

10. Estudo do caso excepcional. — Retomemos o sistema (8) na hipótese do § 6 e suponhamos que a equação determinante relativa às equações às variações (1)

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

correspondentes à solução nula, admite uma raiz múltipla. Suponhamos mais que esta raiz é imaginária e, para fixarmos ideias, que lhe corresponde o grupo seguinte de três equações

$$(17) \qquad \frac{dy_1}{dt} = s_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = s_1 y_2 + y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = s_1 y_3 + y_2.$$

O grupo conjugado será

$$\frac{dz_1}{dt} = s_1' z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = s_1' z_2 + z_1, \quad \frac{dz_3}{dt} = s_1' z_3 + z_2,$$

onde s_1' é conjugado de s_1 e as incógnitas são conjugadas das anteriores. Se em (17) pomos $u_1 = \rho\sigma y_1$, $u_2 = \sigma y_2$, reconhece-se que podemos tratar o sistema

$$\frac{du_1}{dt} = s_1 u_1, \quad \frac{du_2}{dt} = s_1 u_2 + \frac{u_1}{\rho}, \quad \frac{dy_3}{dt} = s_1 y_3 + \frac{u_2}{\sigma},$$

(1) Os segundos membros reduzem-se aos termos do primeiro grau dos segundos membros das equações propostas.

cujos coeficientes (salvo s_1) são de módulos tão pequenos quanto se queira. Partiremos assim dos dois grupos de sistemas conjugados

$$\frac{dy_1}{dt} = s_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = s_1 y_2 + \tau y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = s_1 y_3 + \mu y_2,$$

$$\frac{dz_1}{dt} = s_1' z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = s_1' z_2 + \tau z_1, \quad \frac{dz_3}{dt} = s_1' z_3 + \mu z_2.$$

Da forma quadrática auxiliar $\chi = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3$ deduz-se

$$\frac{d\chi}{dt} = (s_1 + s_1')(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) + \tau y_1 z_2 + \tau z_1 y_2 + \mu y_2 z_3 + \mu z_2 y_3.$$

Como os valores absolutos de τ e de μ se podem supor inferiores a um número positivo dado qualquer, $\frac{d\chi}{dt}$ é uma forma definida se $s_1 + s_1'$ é um número real não nulo 2α. A forma quadrática $\varkappa = 2\alpha(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3)$ leva a $\frac{d\varkappa}{dt} = 2\alpha\frac{d\chi}{dt}$, que é definida positiva. Operando do mesmo modo com todos os grupos, somos levados a uma forma $Q = \Sigma\varkappa$, da qual se deduz por derivação, tendo em vista o sistema (8), transformado como deixa ver o raciocínio precedente,

$$Q' = Q_1 + F.$$

A forma $Q_1 = \sum 2\alpha\frac{d\chi}{dt}$ é definida positiva e a forma Q será definida negativa se forem negativas as quantidades α, isto é, se forem negativas as partes reais de tôdas as raízes da equação determinante; há, pois, estabilidade. Se uma raiz faz excepção, há instabilidade.

Para sermos completos, restaria tratar o caso em que existe raiz de parte real nula. Levantaremos a dúvida sòmente na hipótese de haver algumas raízes de parte real positiva.

Uma mudança de variáveis, já indicada, mostra podermos partir do sistema de equações às variações

$$\frac{d\eta_i}{dt} = a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \cdots + (a_{ii} + \lambda)\eta_i + \cdots + a_{in}\eta_n,$$

podendo λ ser escolhido de sorte que as raízes da nova equação característica sejam de partes reais negativas. No entanto, a estabilidade dos η_i não garante a dos x_i como o mostra a relação $\eta_i = e^{\lambda t} x_i$. Raciocinemos directamente. Em face da hipótese formulada, o número negativo λ pode escolher-se de modo que entre as novas raízes as haja de parte real positiva, nenhuma delas tendo parte real nula. Existe então uma forma quadrática $Q(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ que tomará valores positivos no interior duma hiperesfera de raio tão pequeno quanto se queira e da qual se passa à relação

$$Q_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial \eta_i}\left[a_{i1}\eta_1 + \cdots + (a_{ii} + \lambda)\eta_i + \cdots + a_{in}\eta_n\right],$$

sendo Q_1 uma forma definida positiva. Se considerarmos a forma $Q(x_1, \ldots, x_n)$ e a derivarmos mediante o sistema proposto, resulta

$$Q' = Q_1(x_1, \ldots, x_n) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} + F(x_1, \ldots, x_n, t) = Q_1 - 2\lambda Q + F.$$

Seja R o raio duma hiperesfera no interior da qual é $Q_1 + F > 0$, de sorte que é também $Q' + 2\lambda Q > 0$, e seja $\eta \overline{<} \varepsilon \overline{<} R$. Se no instante inicial t_0 o móvel ocupa uma posição x_i^0, interior à hiperesfera de raio η, é fácil ver que o movimento não pode ter lugar no interior da hiperesfera de raio ε. Se assim fôsse, como teríamos $Q' = -2\lambda Q + (Q_1 + F)$, a função Q seria superior a $Q_0 e^{-2\lambda(t-t_0)}$, onde Q_0 designa o valor de Q na origem do movimento. Êste

resultado é absurdo, pois que Q é inferior ao seu limite superior preciso no campo considerado. Há instabilidade.

11. Nota. — Na ordem de ideias que vimos seguindo, é natural falar das soluções periódicas e das soluções assintóticas de certas soluções periódicas introduzidas por POINCARÉ, que as usou no estudo do problema dos três corpos e as trata na sua grande obra «*Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*».

12. Considerações gerais. — Resumiremos neste § alguns resultados importantes necessários ao fim que nos propomos.

I) *Sistemas com coeficientes periódicos. Expoentes característicos.* — Dado o sistema

(18) $$x_k' = a_k^i x_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

em cujos segundos membros suprimimos o sinal de soma, suponhamos os coeficientes a_k^i funções contínuas periódicas do tempo, de período $\omega > 0$. Os integrais não têm singularidades e, dado o sistema fundamental x_i^j, quando t acresce de ω, obtêm-se novos integrais X_i^j que satisfazem às igualdades

$$X_i^j = A_l^j x_i^l,$$

onde os A_l^j são constantes. Consideremos as n substituições lineares assim definidas e escrevamos desenvolvidamente uma delas

$$X_i^1 = A_1^1 x_i^1 + A_2^1 x_i^2 + \cdots + A_n^1 x_i^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_i^n = A_1^n x_i^1 + A_2^n x_i^2 + \cdots + A_n^n x_i^n;$$

os coeficientes não dependem do índice i e são os mesmos nas diferentes substituïções. Assim, se operarmos uma redução canónica duma delas, fica operada a das outras. Os resultados obtidos numa questão análoga anterior permitem-nos afirmar que é possível formar n sistemas de n integrais tais que cada sistema comporta um certo número de grupos (o mesmo número para os diferentes sistemas), verificando cada grupo relações do tipo

$$x_i^1(t+\omega)=sx_i^1(t),$$
$$x_i^2(t+\omega)=s\left[x_i^2(t)+x_i^1(t)\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_i^p(t+\omega)=s\left[x_i^p(t)+x_i^{p-1}(t)\right].$$

A forma analítica dos integrais dum grupo pode obter-se tratando convenientemente estas equações. Pondo $\alpha=\frac{1}{\omega}\log s$, onde deve tomar-se uma determinação de $\log s$, definem-se os números α, que se dizem *expoentes característicos*. A parte real de α diz-se *número característico*. Os integrais dum grupo podem deduzir-se da expressão do integral $x_i^p(t)$, que fàcilmente se verifica ser da forma (veja-se GOURSAT, loc. cit., tomo II)

$$x_i^p=e^{\alpha t}\left[\varphi_p(t)+\theta_1\varphi_{p-1}(t)+\ldots+\theta_{p-1}\varphi_1(t)\right], \tag{18'}$$

onde os φ_i são funções contínuas periódicas de período ω e $\theta_k(t)$ é um polinómio do grau k em t. Torna-se assim importante o cálculo dos números s, que são raízes duma equação de grau n, chamada ainda equação característica.

Para definir os coeficientes dessa equação tomemos os n sistemas de valores iniciais $(x_i^j)_0$ formando um determinante não nulo. Se conhecermos os valores dos integrais correspondentes no ponto $t_0+\omega$ (t_0 é o instante inicial), as igualdades

$$x_i^j(t_0+\omega)=A_l^j x_i^l(t_0),$$

permitirão determinar A_l^j. Ora se substituirmos o sistema proposto pelo sistema

$$x'_k=\lambda a_k^i x_i, \tag{19}$$

onde figura o parâmetro λ, os integrais dêste sistema são funções inteiras de λ e podemos escrever

$$x_k=x_{k0}+\lambda x_{k1}+\lambda^2 x_{k2}+\ldots, \tag{20}$$

onde os x_{km} são funções de t. Dêstes desenvolvimentos e de (19) deduz-se

$$\frac{dx_{k0}}{dt}=0,\quad \frac{dx_{k1}}{dt}=a_k^1 x_{10}+a_k^2 x_{20}+\ldots+a_k^n x_{n0},\ \ldots$$

e deveremos supor que o valor inicial de x_{k0} é precisamente o de x_k e que o valor inicial de x_{km} é nulo. Basta agora substituir em (20) λ pela unidade para podermos determinar $x_k(t_0+\omega)$. Resulta, pois, que os coeficientes da equação característica são determinados por aproximações.

II) *Os integrais como funções dos valores iniciais.* — Desenvolvamos o método sôbre as duas equações

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y,z),\quad \frac{dz}{dt}=\varphi(t,y,z). \tag{21}$$

As funções f e φ são contínuas com derivadas contínuas em ordem a y e z e são inferiores a M em valor absoluto no domínio D assim definido

$$\alpha-a\leqq t\leqq\alpha+a,\quad \beta-b\leqq y\leqq\beta+b,\quad \gamma-c\leqq z\leqq\gamma+c.$$

Os valores iniciais (t_0, y_0, z_0) pertencem a D e as condições

$$|y_0-\beta|+M|t-t_0|<b,\quad |z_0-\gamma|+M|t-t_0|<c,$$

garantem a continuïdade das funções $\theta(t;t_0,y_0,z_0)$, $\omega(t;t_0,y_0,z_0)$, que são obtidas pelo emprêgo do método das aproximações sucessivas de PICARD no cálculo dos integrais de (21), no domínio D' assim definido

$$|t-\alpha|<h, \quad |t_0-\alpha|<h, \quad |y_0-\beta|<\frac{b}{2}, \quad |z_0-\gamma|<\frac{c}{2},$$

onde h é inferior a a, $\frac{b}{4M}$, $\frac{c}{4M}$. E as funções contínuas θ e ω admitem derivadas contínuas em D' com respeito a t_0, y_0, z_0, como vamos mostrar. Ponhamos

$$\frac{\partial\theta}{\partial t_0}=x_1, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y_0}=x_2, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z_0}=x_3,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t_0}=\xi_1, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y_0}=\xi_2, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z_0}=\xi_3,$$

o que leva ao sistema

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial y}x_1+\frac{\partial f}{\partial z}\xi_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial y}x_2+\frac{\partial f}{\partial z}\xi_2, \quad \frac{dx_3}{dt}=\frac{\partial f}{\partial y}x_3+\frac{\partial f}{\partial z}\xi_3,\\ &\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}x_1+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}x_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\xi_2, \quad \frac{d\xi_3}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}x_3+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\xi_3, \end{aligned}$$

e procuremos satisfazer a (21) e (22) e às condições iniciais

$$t=t_0, \left\{ \begin{aligned} &y=y_0, \quad x_1=-f(t_0,y_0,z_0), \quad x_2=1, \quad x_3=0,\\ &z=z_0, \quad \xi_1=-\varphi(t_0,y_0,z_0), \quad \xi_2=0; \quad \xi_3=1. \end{aligned}\right.$$

Sabe-se que, aplicando o método de PICARD ao sistema (21) (22), as aproximações convergem uniformemente em D'. Seja a primeira aproximação

$$y=y_0, \quad x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=0,$$
$$z=z_0, \quad \xi_1=0, \quad \xi_2=0, \quad \xi_3=1,$$

e a segunda

$$y=y_0+\int_{t_0}^t f(\tau,y_0,z_0)\,d\tau, \quad x_1=-f(t_0,y_0,z_0), \quad x_2=1+\int_{t_0}^t f'_y(\tau,y_0,z_0)\,d\tau,$$

$$z=z_0+\int_{t_0}^t \varphi(\tau,y_0,z_0)\,d\tau, \quad \xi_1=-\varphi(t_0,y_0,z_0), \quad \xi_2=\int_{t_0}^t \varphi'_y(\tau,y_0,z_0)\,d\tau,$$

$$x_3=\int_{t_0}^t f'_z(\tau,y_0,z_0)\,d\tau, \quad \xi_3=1+\int_{t_0}^t \varphi'_z(\tau,y_0,z_0)\,d\tau.$$

Tem-se imediatamente nesta aproximação, como já na anterior,

$$\frac{\partial y}{\partial t_0}=x_1, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0}=x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial z_0}=x_3, \quad \frac{\partial z}{\partial t_0}=\xi_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y_0}=\xi_2, \quad \frac{\partial z}{\partial z_0}=\xi_3.$$

Na aproximação de ordem n (afectaremos de índice superior n as incógnitas e usaremos a mesma notação na aproximação de ordem $n-1$) temos

$$y^n=y_0+\int_{t_0}^t f\left[\tau, y^{n-1}(\tau), z^{n-1}(\tau)\right]d\tau,$$

$$z^n=z_0+\int_{t_0}^t \varphi\left[\tau, y^{n-1}(\tau), z^{n-1}(\tau)\right]d\tau,$$

$$x_1^n=-f(t_0,y_0,z_0)+\int_{t_0}^t f'_y\left[\tau, y^{n-1}(\tau), z^{n-1}(\tau)\right]x_1^{n-1}\,d\tau$$

$$+\int_{t_0}^t f'_z\left[\tau, y^{n-1}(\tau), z^{n-1}(\tau)\right]\xi_1^{n-1}\,d\tau, \text{ etc.,}$$

e também

$$\frac{\partial y^n}{\partial t_0}-x_1^n=\int_{t_0}^t f'_y\left[\tau, y^{n-1}(\tau), z^{n-1}(\tau)\right]\left(\frac{\partial y^{n-1}}{\partial t_0}-x_1^{n-1}\right)d\tau$$

$$+\int_{t_0}^t f'_z\left[\tau, y^{n-1}(\tau), z^{n-1}(\tau)\right]\left(\frac{\partial z^{n-1}}{\partial t_0}-\xi_1^{n-1}\right)d\tau, \text{ etc.,}$$

igualdades donde se conclui a proposição que temos em vista.

Se no sistema proposto figura um certo número de parâmetros, o mesmo método é aplicável. Os integrais serão funções metros, o mesmo método é aplicável. Os integrais serão funções contínuas dos parâmetros com derivadas, desde que se juntem as condições de terem derivadas contínuas em ordem aos parâmetros os segundos membros das equações propostas.

III) *Integrais infinitamente vizinhos.* — Quando é conhecido um integral do sistema proposto, podem estabelecer-se condições que bastam para a existência de integrais infinitamente vizinhos no mesmo domínio da variável independente. Seja, por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda), \tag{23}$$

que admite para $\lambda = 0$ o integral $y_1(t)$, contínuo no intervalo (t_0, t_1). Supondo as funções f, f'_y, f'_λ contínuas no domínio D assim definido

$$t_0 \overline{<} t \overline{<} t_1, \quad y_1(t) - a \overline{<} y \overline{<} y_1(t) + a, \quad |\lambda| < b,$$

vamos mostrar que o método de PICARD leva, quando $|\lambda|$ é suficientemente pequeno, a aproximações convergentes, no intervalo (t_0, t_1), para o integral de (23) que se torna $y_0 = y_1(t_0)$ quando $t = t_0$. Tomemos as aproximações

$$Y_1(t) = y_1(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[\tau, Y_{n-1}(\tau), \lambda]\, d\tau;$$

vamos mostrar que êste cálculo se prolonga indefinidamente. Na verdade é

$$Y_n(t) - y_1(t) = \int_{t_0}^{t} \{ f[\tau, Y_{n-1}(\tau), \lambda] - f[\tau, Y_1(\tau), 0] \}\, d\tau,$$

e, mediante a condição clássica de LIPSCHITZ,

$$| Y_n(t) - y_1(t) | < \int_{t_0}^{t} \{ H | Y_{n-1} - Y_1 | + K |\lambda| \}\, d\tau,$$

onde H e K são constantes apropriadas. Consideremos as aproximações sucessivas obtidas pela equação

$$\frac{dx}{dt} = Hx + K|\lambda|,$$

no cálculo do integral que se anula quando é $t = t_0$. Tomando $x^1 = 0$, vê-se que tem lugar a desigualdade

$$x^n > | Y_n(t) - y_1(t) |,$$

de sorte que é

$$| Y_n(t) - y_1(t) | < \frac{K|\lambda|}{H} \left[e^{H(t-t_0)} - 1 \right].$$

Basta escolher $|\lambda|$ suficientemente pequeno para que $|Y_n - y_1| < a$. Com as aproximações $Y_n(t)$ constroi-se, como é habitual, uma série que converge uniformemente no domínio (t_0, t_1), quando $|\lambda|$ é suficientemente pequeno, para uma função contínua $Y(t, \lambda)$, que admite derivada Y'_λ contínua no mesmo domínio.

Devemos observar (transportando-nos ao caso geral) que os valores iniciais de t e dos y_i são fixos. Para passar ao caso em que são variados, consideremos o sistema auxiliar

$$\frac{dY_i}{dT} = f_i(T + \alpha, Y_1 + \beta_1, \ldots, Y_n + \beta_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p), \tag{24}$$

onde figuram os antigos parâmetros λ_k e os parâmetros novos α, β_j. É conhecida uma solução correspondente aos valores nulos dos parâmetros α, β_j, λ_k, contínua no intervalo (t_0, t_1) de T

e tomando o valor $y_i(t_0)$ para $T=t_0$. Mediante a continuïdade das derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial t}$, as soluções de (24) vizinhas da solução conhecida e correspondentes a valores suficientemente pequenos dos parâmetros são funções contínuas deriváveis de T, α, β_j, λ_k, quando T varia de t_0 a t_1, e que se tornam $y_i(t_0)$ quando é $T=t_0$. O sistema primitivo admitirá soluções que são funções contínuas de t, α, β_j, λ_k, com derivadas em ordem a estas variáveis, as quais se tornam $y_i(t_0)+\beta_i$ para $t=t_0+\alpha$. Se o valor inicial de t é conservado, o domínio referente a esta variável é ainda de t_0 a t_1.

IV) *Equações às variações de* POINCARÉ. — Tratando das *equações às variações*, consideremos o sistema

$$
\frac{dx}{dt}=X(x,y,z,t,\mu),\qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,y,z,t,\mu),
$$

(25)

$$
\frac{dz}{dt}=Z(x,y,z,t,\mu),
$$

que, para $\mu=0$, admite o sistema de soluções

$$
x=\varphi_1(t),\qquad y=\varphi_2(t),\qquad z=\varphi_3(t),
$$

contínuas no intervalo (t_0, t_1). Supomos verificadas as hipóteses das alíneas anteriores, pelo que temos uma infinidade de soluções vizinhas daquela. Mantendo t_0, podemos imaginar os valores iniciais variados de x, y, z definidos por três funções $x_0(\mu)$, $y_0(\mu)$, $z_0(\mu)$ do parâmetro μ, contínuas, bem como as suas derivadas, e que tomam os valores $\varphi_1(t_0)$, $\varphi_2(t_0)$, $\varphi_3(t_0)$ para $\mu=0$. Seja

$$
x=\Phi_1(t,\mu),\qquad y=\Phi_2(t,\mu),\qquad z=\Phi_3(t,\mu),
$$

o sistema de soluções em questão. Quando é $\mu=0$, temos

$$
\Phi_1(t,0)=\varphi_1(t),\qquad \Phi_2(t,0)=\varphi_2(t),\qquad \Phi_3(t,0)=\varphi_3(t),
$$

e, quando $t=t_0$,

$$
\Phi_1(t_0,\mu)=x_0(\mu),\qquad \Phi_2(t_0,\mu)=y_0(\mu),\qquad \Phi_3(t_0,\mu)=z_0(\mu).
$$

Do sistema proposto deduzimos

$$
\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t\,\partial\mu}=\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mu}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\mu}+\frac{\partial X}{\partial\mu},
$$

$$
\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t\,\partial\mu}=\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}+\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mu}+\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\mu}+\frac{\partial Y}{\partial\mu},
$$

$$
\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t\,\partial\mu}=\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}+\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mu}+\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\mu}+\frac{\partial Z}{\partial\mu}.
$$

Fazendo $\mu=0$ e designando com $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ as derivadas $\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\Phi_3}{\partial\mu}$, onde se faz também $\mu=0$, deduzimos

(26)

$$
\frac{du}{dt}=X'_x(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,t,0)\,u+X'_y(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,t,0)\,v
$$
$$
+X'_z(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,t,0)\,w+X'_\mu(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,t,0),
$$

e mais duas equações análogas, nas quais os primeiros membros são $\frac{dv}{dt}$ e $\frac{dw}{dt}$. São estas as equações às variações de POINCARÉ. Elas determinam a parte principal dos incrementos dos integrais conhecidos correspondentes à variação infinitamente pequena $\delta\mu$. Os valores iniciais dêsses incrementos são conhecidos e a determinação aludida é feita no intervalo (t_0, t_1), o que é conseqüência do conhecimento que se tem *à priori* das singularidades dos integrais definidos por equações diferenciais lineares.

Devemos observar que o conhecimento do integral geral do sistema (25),

$$x = F(t, \mu, a, b, c), \qquad y = G(t, \mu, a, b, c),$$
$$z = H(t, \mu, a, b, c),$$

onde figuram as três constantes arbitrárias a, b, c, leva imediatamente ao integral geral do sistema (26). Do sistema (25) deduzem-se as equações

$$(27) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial a} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial a}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial b} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial b} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial b}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial c} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial c} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial c}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \mu} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial \mu} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial \mu} + \frac{\partial X}{\partial \mu}, \end{aligned}$$

e mais oito equações semelhantes. Supondo que o integral particular conhecido corresponde a $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$, $\mu = 0$, vê-se que $F'_a(t, 0, a_0, b_0, c_0)$, G'_a, H'_a, constituem um sistema particular de soluções do sistema (26), suposto sem termos independentes, havendo ainda mais duas soluções análogas. Bastará conhecer agora uma solução particular de (26) e essa é precisamente

$$u_1 = F'_\mu(t, 0, a_0, b_0, c_0), \qquad v_1 = G'_\mu(t, 0, a_0, b_0, c_0),$$
$$w_1 = H'_\mu(t, 0, a_0, b_0, c_0),$$

como o mostram a última das equações (27) e mais duas semelhantes. As modificações a efectuar na hipótese do parâmetro μ

ser introduzido unicamente pelas condições iniciais são bem aparentes.

13. Integrais periódicos. — Retomemos as equações (25) e suponhamos que os segundos membros são funções periódicas do tempo, de período ω. Os raciocínios que vamos fazer estendem-se imediatamente ao caso dum movimento num espaço a n dimensões. Se as soluções $\varphi_i(t)$ admitem o mesmo período, o móvel encontra-se no instante $t_0 + \omega$ nas mesmas condições que no início do movimento e as soluções em questão são periódicas. Para o estudo das soluções periódicas vizinhas, tomemos a mesma época inicial t_0 e as posições iniciais variadas $\varphi_1(t_0) + \alpha_1$, $\varphi_2(t_0) + \alpha_2$, $\varphi_3(t_0) + \alpha_3$, bem como um valor de μ diferente de zero. As soluções correspondentes

$$(28) \qquad x = \Phi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu), \qquad y = \Phi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu),$$
$$z = \Phi_3(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu),$$

são funções contínuas quando os parâmetros α_1, α_2, α_3, μ são suficientemente pequenos. A continuïdade tem lugar na época $t_0 + \omega$ e nas épocas posteriores; e se pusermos

$$(29) \qquad \Phi_i(t_0 + \omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu) - \varphi_i(t_0) - \alpha_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

os integrais anteriores são funções periódicas, de período ω.

A existência de raízes do sistema (29), para valores de μ suficientemente pequenos, é conseqüência de ser diferente de zero o jacobiano correspondente quando é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \mu = 0$. Para fazer o estudo dêsse jacobiano, ponhamos

$$u_i = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i}, \qquad v_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_i}, \qquad w_i = \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha_i},$$

depois de se fazer nos segundos membros $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \mu = 0$.

As funções (u_i, v_i, w_i) são soluções particulares do sistema (26), suposto sem termos independentes, e os valores iniciais são

$$u_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0,$$
$$u_2 = 0, \quad v_2 = 1, \quad w_2 = 0,$$
$$u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = 1.$$

O jacobiano apresenta-se com a forma

$$J = \begin{vmatrix} u_1(t_0+\omega)-1 & v_1(t_0+\omega) & w_1(t_0+\omega) \\ u_2(t_0+\omega) & v_2(t_0+\omega)-1 & w_2(t_0+\omega) \\ u_3(t_0+\omega) & v_3(t_0+\omega) & w_3(t_0+\omega)-1 \end{vmatrix},$$

e supô-lo nulo é supor que existem as relações

$$A\left[u_1(t_0+\omega)-1\right]+B\,u_2(t_0+\omega)+C\,u_3(t_0+\omega)=0,$$
$$A\,v_1(t_0+\omega)+B\left[v_2(t_0+\omega)-1\right]+C\,w_2(t_0+\omega)=0,$$
$$A\,w_1(t_0+\omega)+B\,w_2(t_0+\omega)+C\left[w_3(t_0+\omega)-1\right]=0,$$

onde as constantes A, B, C não são tôdas nulas, e, por conseqüência, que existem os integrais periódicos

$$u = A u_1 + B u_2 + C u_3, \quad \text{etc.}$$

do sistema homogéneo considerado de equações às variações. Um dos seus números característicos é nulo; e dizendo que é um número característico da solução periódica conhecida $x_i = \varphi_i(t)$, temos o teorema seguinte: *A uma solução periódica do sistema* (25), *correspondente a* $\mu = 0$, *corresponde uma infinidade de soluções periódicas vizinhas, relativa a valores de* μ *vizinhos de zero, se os números característicos da solução conhecida são todos diferentes de zero.*

14. Sistemas redutíveis de Liapounoff. — Para definir estes sistemas, consideremos o sistema

$$x'_h = a^i_h\, x_i, \tag{30}$$

cujos coeficientes se supõem reais, contínuos e limitados quando é $t > t_0$. A mudança de incógnitas pelas igualdades

$$z_i = b^l_i x_l,$$

onde os coeficientes b^l_i gozam das mesmas propriedades que os a^i_k e, além disso, admitem derivadas nas mesmas condições e formam um determinante cujo inverso é limitado, leva ao sistema

$$z'_i = b'^l_i\, x_l + b^l_i\, a^j_l\, x_j = c^l_i\, x_l,$$

no qual os c^l_i têm as mesmas propriedades que os a^i_k e onde se devem substituir os x_l pelos seus valores expressos nos z_i. Se a mudança de incógnitas se pode determinar por forma que o sistema anterior seja de coeficientes constantes, o sistema proposto diz-se *redutível*.

Vamos demonstrar que é redutível todo o *sistema linear de coeficientes contínuos, reais e periódicos, do mesmo período* ω.

Consideremos o seu *sistema adjunto* de incógnitas X_i e a equação característica dêste. Dum modo geral, à raiz s e ao respectivo expoente característico α correspondem n grupos de p integrais

$$e^{\alpha t} X_i, \quad e^{\alpha t} DX_i, \quad \ldots, \quad e^{\alpha t} D^{p-1} X_i,$$

podendo cada grupo assim escrito deduzir-se de (18'): X_i representará x^p_i e o símbolo D^k deve interpretar-se como a derivada de ordem k de x^p_i obtida considerando constantes os coeficientes periódicos do polinómio de grau $p-1$, que figura em (18').

O sistema (30) admite os seguintes integrais lineares

$$e^{\alpha t}\left(x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_n X_n\right) = C_1,$$

$$e^{\alpha t}\left(x_1 DX_1 + x_2 DX_2 + \ldots + x_n DX_n\right) = C_2,$$

. . . .

$$e^{\alpha t}\left(x_1 D^{p-1} X_1 + x_2 D^{p-1} X_2 + \ldots + x_n D^{p-1} X_n\right) = C_p,$$

que podem escrever-se, ordenados segundo as potências de t,

$$e^{\alpha t}\left[\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}y_1 - \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}y_2 + \ldots + (-1)^{p-1}y_p\right] = C_1,$$

$$e^{\alpha t}\left[\frac{t^{p-2}}{(p-2)!}y_1 - \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}y_2 + \ldots + (-1)^{p-2}y_{p-1}\right] = C_2,$$

. . . .

$$e^{\alpha t}\, y_1 = C_p,$$

representando com $y_1, y_2, \ldots, y_p$ expressões lineares distintas dos x_i, com coeficientes periódicos. Se, na verdade, existisse uma relação entre os yy, existiria uma relação entre o tempo e as constantes arbitrárias $C_1, \ldots, C_p$. Tomando os yy como incógnitas, verifica-se imediatamente que as relações precedentes representam o integral geral do sistema

$$(31)\qquad \frac{dy_1}{dt} = -\alpha y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\alpha y_2 + y_1, \ldots, \quad \frac{dy_p}{dt} = -\alpha y_p + y_{p-1},$$

de sorte que, operando do mesmo modo com tôdas as raízes distintas da equação característica e com todos os grupos, somos levados, para obter um sistema com coeficientes constantes, a transformar o sistema dado por fórmulas do tipo

$$y_i = b_i^l x_l,$$

onde os coeficientes são funções contínuas periódicas, de período ω. Resta verificar se o determinante dos b_i^l se não anula quando t varia de t_0 a $t_0+\omega$, se os mesmos b_i^l se podem considerar funções

reais e se outro tanto sucede com as constantes α. A primeira propriedade é conseqüência imediata de não poder anular-se o determinante de n sistemas distintos de integrais dum sistema linear, os quais substituem um sistema fundamental. Na verdade, o determinante correspondente do sistema transformado pelas relações anteriores é o produto do primeiro determinante pelo determinante dos b_i^l. A segunda propriedade demonstra-se por partes: podemos supor que a equação característica não tem raízes negativas e, nesse caso, o modo como aparecem as funções b_l^i mostra que estas podem supor-se reais, quando correspondem a raízes positivas, outro tanto sucedendo com os α; havendo raízes imaginárias, ao lado dum grupo de p integrais do sistema adjunto aparece um grupo de p integrais conjugados, ao lado de p variáveis y_i aparecem p variáveis conjugadas, em vez do sistema (31) aparecem dois sistemas conjugados e as variáveis do sistema com coeficientes constantes reais aparecem sob a forma que resulta de se combinarem linearmente duas a duas as variáveis y_i.

15. Generalização de alguns resultados sôbre a estabilidade. — Suponhamos que o sistema (8) contém termo independente e que $x_i = \varphi_i(t)$ é uma solução conhecida contínua quando é $t > t_0$. O método de PICARD refere-se a um intervalo restrito da variável independente, no interior do qual são comparadas as soluções vizinhas correspondentes a condições iniciais variadas. Para decidir da estabilidade da solução $x_i = \varphi_i(t)$, basta fazer a mudança de incógnitas pelas relações $y_i = x_i - \varphi_i(t)$, onde os y_i são as novas variáveis; somos levados a discutir a estabilidade duma solução nula. Tratando-se, por exemplo, dum sistema com coeficientes constantes ou funções periódicas do tempo, que admite a solução periódica $x_i = \varphi_i(t)$, a mudança indicada leva a um sistema com coeficientes periódicos. A êste corresponde um sistema redutível de equações às variações podendo determinar-se uma substituïção linear que o leve a um sistema de coeficientes constantes. Aplicando a mesma substituïção ao sistema proposto, somos levados por fim ao problema estudado anteriormente.

16. Regresso ao estudo de soluções assintóticas. — Para estendermos as noções dadas no § 4 sôbre soluções assintóticas, tomemos o sistema (8) e suponhamos que os coeficientes são funções analíticas periódicas do tempo, de período 2π. Façamos a redução do sistema de equações às variações correspondente à solução nula e suponhamos diferentes as raízes da equação característica correspondente, de modo que podemos partir do sistema

$$(32) \qquad \frac{dx_h}{dt} = \lambda_h x_h + \dots,$$

sem outros termos do primeiro grau. Admitamos que os coeficientes são holomorfos numa região do plano da variável t limitada por duas paralelas ao eixo real e compreendendo êste eixo, de tal sorte que os círculos do plano da variável $u = e^{it}$ que correspondem àquelas paralelas limitam uma corôa circular contendo circunferências de raio superior à unidade. Então os coeficientes desenvolvem-se sob a forma análoga à de LAURENT,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m e^{mit} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m u^m,$$

no interior das paralelas. Escrevendo

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m u^m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n u^{-n},$$

a primeira série do segundo membro é convergente em todos os pontos do interior dum círculo de raio $R > 1$. A segunda série é convergente no exterior do mesmo círculo. Se pusermos $u = \frac{1}{v}$, temos o desenvolvimento

$$\sum A_n u^n + \sum B_n v^n, \qquad (u = e^{it}, \quad v = e^{-it})$$

convergente no interior dum círculo de raio $R > 1$. Vamos procurar soluções do sistema (32), ordenadas segundo as potências de

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, \quad y_p = e^{\lambda_p t}, \quad u = e^{it}, \quad v = e^{-it}, \qquad (p \leq n)$$

seguindo um método devido a PICARD. O ilustre geómetra procede ainda como no § 3 numa questão análoga. Considera o seguinte sistema de equações às derivadas parciais, que deduz de (32),

$$(33) \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k \frac{\partial x_h}{\partial y_k} + iu \frac{\partial x_h}{\partial u} - iv \frac{\partial x_h}{\partial v} - \lambda_h x_h = \varphi_h(x_1, \dots, x_n, u, v)$$
$$(h = 1, 2, \dots, n),$$

no qual os segundos membros começam por termos do segundo grau nos xx. Podemos satisfazer a (33) com séries ordenadas segundo as potências dos y_k, u, v, sem que haja termos constantes ou termos que contenham unicamente as variáveis u e v. No cálculo das derivadas $\frac{\partial^{m+n} x_h}{\partial u^m \partial v^n}$ não há efectivamente incompatibilidade e estas derivadas são nulas na origem. Admitiremos mais que não são nulos os coeficientes dos termos do primeiro grau nos yy. Serão então arbitrárias as derivadas $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial x_p}{\partial y_p}$. O cálculo da derivada geral $\frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_p+k+l} x_h}{\partial y_1^{m_1} \partial y_2^{m_2} \dots \partial y_p^{m_p} \partial u^k \partial v^p}$ na origem introduz o coeficiente $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_p m_p + ki - il - \lambda_h$, que poderá anular-se, quando fôr $h \overline{<} p$, para valores inteiros dos mm, de k e de l; no entanto, a hipótese adoptada para os desenvolvimentos exclui êsses casos, se supusermos que a expressão $\Delta = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_p m_p + \alpha i - \lambda_h$ não pode anular-se quando fôr $m_1 + m_2 + \dots + m_p \overline{>} 2$, sendo α positivo ou negativo. É muito fácil verificar que $|\Delta|$ ficará superior a um número positivo fixo ε se existirem dois contornos convexos não compreendendo a origem, um dêles compreendendo os pontos λ_k e $+i$ e outro os pontos λ_k e $-i$ $(k=1, \dots, p)$. Para demonstrar a convergência dos desenvolvimentos extraídos de (33), tomemos a função dominante dos segundos membros

$$\psi(x_1,\dots,x_n,u,v)=\frac{1}{\left(1-\frac{u}{R}\right)\left(1-\frac{v}{R}\right)}\left(\frac{M}{1-\frac{x_1+\dots+x_n}{a}}-M-M\frac{x_1+\dots+x_n}{a}\right)$$

e consideremos o sistema finito

$$(34)\qquad \begin{aligned} \varepsilon X_h &= \varepsilon y_h + \psi(X_1,\dots,X_n,u,v) \qquad (h=1,2,\dots,p),\\ \varepsilon X_k &= \psi(X_1,\dots,X_n,u,v) \qquad (k=p+1,\dots,n),\end{aligned}$$

que define as variáveis X em série dos yy, u, v. Tais desenvolvimentos não contêm termos onde figurem unicamente as variáveis u e v e para que possam ser comparados aos desenvolvimentos formais extraídos de (33) deverão tomar-se nestes para coeficientes dos termos do primeiro grau em y valores iguais à unidade, quando muito. Importa precisar agora se os desenvolvimentos convergentes que satisfazem a (34) deixam às variáveis u e v a faculdade de tomar valores de módulo superior à unidade. Esta condição é essencial para que o regresso à variável t deixe o eixo real desta variável compreendido no domínio complexo correspondente. Se considerarmos o sistema

$$X_j=y+\frac{1}{\varepsilon}\psi(X_1,\dots,X_n,u,v) \qquad (j=1,2,\dots,n),$$

somos levados ao estudo da equação única

$$X=y+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{M}{1-\frac{nX}{a}}-M-M\frac{nX}{a}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{u}{R}\right)\left(1-\frac{v}{R}\right)},$$

devendo estudar-se o desenvolvimento de X segundo as potências de y, u, v. Para o fazer, basta resolver a equação em ordem a X e considerar a raiz que se anula com y, u, v. Reconhece-se que é possível dispor da variável y de forma que u e v (de módulos inferiores a $R>1$) tomem valores de módulos superiores à unidade.

O regresso à variável t determina para o sistema (32) a existência de soluções que são séries ordenadas segundo as potências de $C_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, C_p e^{\lambda_p t}, e^{it}, e^{-it}$. Podemos supor tratar-se de séries das p primeiras quantidades com coeficientes periódicos, de período 2π. Mediante hipóteses bem conhecidas e relativas aos $\lambda\lambda$, podemos obter soluções assintóticas da solução nula.

Os raciocínios do § 15 levam a introduzir *soluções assintóticas duma solução periódica conhecida*, mesmo no caso de ter coeficientes constantes o sistema (32).

Para terminar êste estudo, vamos tratar um caso no qual fazemos intervir os valores iniciais das soluções assintóticas que se determinam. O problema obriga-nos a demonstrar um

Lema de Poincaré. — Consideremos, por exemplo, um sistema de duas equações da forma

$$(35)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax+By+C\lambda+\dots,\\ \frac{dy}{dt} &= A_1x+B_1y+C_1\lambda+\dots,\end{aligned}$$

em que os segundos membros deram séries inteiras de x, y, λ, com coeficientes funções contínuas do tempo, convergentes no domínio de $t=0$ a $t=t_0$, contanto que $|x|$, $|y|$, $|\lambda|$ sejam suficientemente pequenos. Quando é $\lambda=0$, o sistema admite a solução nula. O lema de Poincaré consiste em demonstrar que a solução $x=x(t,\lambda)$, $y=y(t,\lambda)$ do sistema, nula para $t=0$, pode desenvolver-se em série ordenada segundo as potências de λ, em todo o domínio $(0, t_0)$ da variável real t, contanto que $|\lambda|$ seja suficientemente pequeno.

Vamos procurar transformar o sistema proposto noutro semelhante, mas cujos segundos membros não contenham termos do primeiro grau. Designando com x', y' as novas incógnitas, ponhamos

$$x = \lambda u + a x' + b y', \qquad y = \lambda v + a_1 x' + b_1 y',$$

onde u, v, a, b, a_1, b_1, são funções contínuas de t no domínio $(0, t_0)$. Para determinar estas funções, suporemos que u e v se anulam com t, por forma que também se anulam x', y' quando é $t=0$. A substituïção no sistema proposto leva a pôr

$$\frac{du}{dt} = Au + Bv + C, \qquad \frac{da}{dt} = Aa + Ba_1,$$

$$\frac{dv}{dt} = A_1 u + B_1 v + C_1, \qquad \frac{da_1}{dt} = A_1 a + B_1 a_1,$$

devendo notar-se que b e b_1 satisfazem ao último dêstes sistemas. Escolheremos (a, a_1) e (b, b_1) de modo a constituirem um sistema fundamental. O sistema transformado apresenta-se sob a forma

$$(36) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = Dx'^2 + 2Ex'y' + 2Fx'\lambda + 2Gy'\lambda + Hy'^2 + I\lambda^2 + \dots, \\ \dfrac{dy'}{dt} = D_1 x'^2 + 2E_1 x'y' + \dots, \end{cases}$$

e suporemos que os segundos membros são absolutamente convergentes quando é $|x'| \leqq \rho$, $|y'| \leqq r$, $|\lambda| \leqq r'$, variando t de 0 a t_0.

O método das aproximações sucessivas leva a séries uniformemente convergentes, de termos analíticos quanto a λ, no domínio da variável real t, de $t=0$ a $t=t_1$, sendo t_1 a menor das quantidades t_0, $\frac{\rho}{M}$, $\frac{r}{M}$, e M o valor absoluto máximo dos segundos membros de (36) quando é $0 \leqq t \leqq t_0$, $|x'| \leqq \rho$, $|y'| \leqq r$, $|\lambda| \leqq r'$.

Podemos substituir M pelo máximo das duas séries

$$\Delta = |D|\rho^2 + 2|E|\rho r + 2|F|\rho r' + \dots,$$

$$\Delta' = |D_1|\rho^2 + 2|E_1|\rho r + \dots,$$

quando t varia de zero a t_0. Ora se considerarmos os cocientes $\frac{\rho}{\Delta}$, $\frac{r}{\Delta'}$, vemos que podemos dar a ρ, r, r', valores independentes, de sorte que os mesmos cocientes sejam superiores a t_0. Os integrais de (36) e, portanto, os de (35) são funções analíticas de λ quando $|\lambda| < r'$ e t varia de zero a t_0, como se queria provar.

A demonstração estende-se a um número qualquer de equações contendo um número qualquer de parâmetros. Se no sistema proposto não figura o parâmetro λ e supomos variados os valores iniciais x_0, y_0 de x, y, os integrais x, y desenvolvem-se em séries de forma

$$x = \sum a_{pq} x_0^p y_0^q, \qquad y = \sum b_{pq} x_0^p y_0^q,$$

contanto-que $|x_0|$ e $|y_0|$ sejam suficientemente pequenos.

Posto isto, coloquemo-nos no caso dum sistema da forma

$$(37) \qquad \frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i + \dots \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

onde as constantes λ_i são tôdas positivas. Os coeficientes supõem-se funções contínuas do tempo, que ficam em valor absoluto inferiores a um número fixo quando $t \geqq 0$, e os segundos membros supõem-se convergentes nessa hipótese, contanto-que os valores absolutos dos x_i sejam suficientemente pequenos. Às condições iniciais $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ correspondem desenvolvimentos em série dos x_i ordenados segundo as potências dos x_i^0 e convergentes num intervalo (t_0, T) dado, contanto-que os $|x_i^0|$ sejam suficientemente pequenos. Tais desenvolvimentos anulam-se quando é $x_i^0=0$, $t=t_0$, de sorte que os termos do primeiro grau nos x_i^0 são unicamente os que se escrevem a seguir

$$x_i = x_i^0 \, e^{-\lambda_i(t-t_0)} + \dots .$$

Seja ρ um número fixo entre zero e $T-t_0$. Quando $t=t_0+\rho$, temos

$$x_i^\rho = x_i^0 \, e^{-\lambda_i \rho} + \dots ,$$

onde x_i^ρ designa o valor correspondente de x_i. Imaginemos $|x_i^0|$ suficientemente pequeno para que $|x_i^\rho|$ seja inferior a $h\,|x_i^0|$, sendo $0<h<1$. Em virtude da possibilidade de se poder comparar o sistema (37) a um sistema com coeficientes constantes dominantes dos seus coeficientes, resulta que no ponto $t_0+\rho$ os desenvolvimentos que satisfazem a (37) e que são ordenados segundo as potências de x_i^ρ têm lugar quando $|x_i^\rho|$ varia dentro do mesmo domínio que $|x_i^0|$. Nestas condições verifica-se que é

$$|x_i^{2\rho}| < h^2 \, |x_i^0|, \text{ etc.}$$

e como é $h<1$, as soluções x_i são assintóticas da solução nula.

CAPÍTULO IV

Trajectórias

1. Generalidades. — A importância dos resultados que vamos expor neste capítulo resulta da impossibilidade em que geralmente nos encontramos de integrar as equações do movimento.

O algoritmo de LAGRANGE não deixa de aplicar-se aos sistemas holónomos quando as velocidades lagrangeanas figuram nas fôrças. Se bem que façamos o estudo das trajectórias conforme PAINLEVÉ (*Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*) e HADAMARD (*Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique, Journal de Jordan*, tome III), que desenvolvem a idea principal na hipótese dos sistemas Σ ou Σ', tem interêsse evidente a determinação do número de parâmetros de que elas dependem no caso geral (LEVI-CIVITA, *Lezioni di Meccanica Razionale*). Supondo normal o sistema de LAGRANGE, escrevamos

$$q_i'' = \varphi_i(q \,|\, q' \,|\, t), \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

e tomemos os q_i como coordenadas dum espaço R_n a n dimensões. Um integral particular do sistema representará uma curva de modo paramétrico. Consideremos um dos q_i como variável independente (hipótese que exclui unicamente as soluções constantes do sistema) e ponhamos, se q_1 é essa variável,

$$\frac{dt}{dq_1} = \dot{t}, \qquad \frac{d^2t}{dq_1^2} = \ddot{t}, \qquad \frac{dq_i}{dq_1} = \dot{q}_i, \qquad \frac{d^2q_i}{dq_1^2} = \ddot{q}_i .$$

Somos levados ao sistema normal

$$(1)\qquad \begin{aligned} \ddot{t} &= -\dot{t}^3 \varphi_1, \\ \ddot{q}_i &= \dot{t}^2 (\varphi_i - \dot{q}_i \varphi_1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}$$

o qual nos mostra que por cada ponto de R_n, tangente a uma direcção, passa ao menos uma trajectória. Na verdade, dado o valor q_1^0, podemos escolher arbitràriamente q_i^0 e $\dot{q}_i^0$; mas, como podemos igualmente dispor de t^0 e $\dot{t}^0$, não se fixa *a priori* se as trajectórias dependerão de $2n$, $2n-1$ ou $2n-2$ parâmetros. Por outras palavras: dum ponto de R_n parte uma infinidade dupla de trajectórias tangentes a uma direcção, podendo essa infinidade reduzir-se a uma infinidade simples ou mesmo a uma única trajectória.

2. Caso em que as ligações e as fôrças são independentes do tempo. — Não se trata ainda dum sistema Σ, porque as fôrças podem introduzir as velocidades lagrangeanas. O número de parâmetros é de $2n-1$, como se conclui quer notando que o sistema de LAGRANGE é invariante para a mudança de t em $t+\tau$, sendo τ uma constante arbitrária, quer tendo em vista o sistema (1) no qual se pode tomar $\dot{t}$ como uma das incógnitas. Êsse sistema pode escrever-se

$$(2)\qquad \ddot{t} = -\beta_1 \dot{t}^3 - \mathfrak{N}_1 \dot{t},$$

$$(3)\qquad \ddot{q}_i = \mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_1 \dot{q}_i + \dot{t}^2 (\beta_i - \beta_1 \dot{q}_i) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

representando com β_1, β_i os cocientes pelo descriminante de $2T$ das expressões que se obtêm substituindo no mesmo descriminante os elementos das colunas de ordens *1*, i pelas componentes generalizadas das fôrças. Quanto a $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_i$, deduzem-se imediatamente das expressões transformadas das formas quadráticas que aparecem nos segundos membros das equações de LAGRANGE escritas sob forma normal.

O sistema anterior presta-se ao exame das condições em que o número de parâmetros baixa a $2n-2$. É necessário e basta que $\dot{t}^2$ não apareça em (3), o que certamente sucede se as expressões $\beta_i q_1' - \beta_1 q_i'$ forem homogéneas do terceiro grau nos $\frac{dq_k}{dt}$. Como as geodésicas do contínuo de RIEMANN $ds^2 = g^{ik} dq_i dq_k$ dependem de $2n-2$ parâmetros, é natural procurar se as trajectórias em questão se podem identificar com essas linhas. Devendo ser

$$\beta_i : q_i' = \beta_1 : q_1',$$

conclui-se das expressões dos $\beta\beta$ que é necessário e basta que as fôrças Q_i sejam proporcionais às derivadas $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$.

3. Caso dos sistemas Σ. — Vamos tratar detalhadamente êste caso fazendo desde já a hipótese de serem isoladas as posições de equilíbrio do sistema. Só na ausência de fôrças as trajectórias dependerão de $2n-2$ parâmetros. Supondo que sucede assim, para obtermos a lei temporal sôbre cada trajectória bastará recorrermos ao integral das fôrças vivas. Temos com efeito

$$\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 g^{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = h,$$

onde h é constante. Sôbre cada trajectória é possível uma infinidade de movimentos, mas todos êles se deduzem dum movimento determinado multiplicando as velocidades lagrangeanas por um mesmo número.

Se as fôrças existem ($Q_i \neq 0$), podemos obter as equações diferenciais das trajectórias do modo que se segue: ponhamos, com PAINLEVÉ,

$$\ddot{q}_i + \dot{q}_i \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_i = \chi_i, \qquad \beta_i - \beta_1 \dot{q}_i = \psi_i,$$

de sorte que temos as relações

$$\frac{\chi_i}{\varphi_i} = \dot{t}^2 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Tendo em vista as relações (2) e (3), obtemos o sistema diferencial das trajectórias

$$\frac{\chi_i}{\psi_i} = \frac{\chi_2}{\psi_2} \qquad (i = 3, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\chi_2}{\psi_2}\right) = -2\frac{\chi_2}{\psi_2}\left(\frac{\beta_1 \chi_2}{\psi_2} + \mathfrak{N}_1\right). \tag{4'}$$

Esta última equação introduz a derivada terceira $\dddot{q}_2$, de sorte que podemos tomar como parâmetro de ordem $2n-1$ quer $\ddot{q}_2^0$, quer t^0. Uma conclusão a tirar das equações anteriores é que as geodésicas fazem parte das trajectórias. A lei temporal correspondente a cada trajectória é dada pela equação (4). Revela esta equação a existência de dois movimentos em sentidos contrários, a partir de cada posição inicial, e êste resultado põe em evidência o carácter de reversibilidade do movimento em face da invariância das equações de LAGRANGE para a mudança de t em $-t+\tau$, onde τ é uma constante arbitrária.

4. Trajectórias notáveis. — PAINLEVÉ chama *trajectórias notáveis* às trajectórias excepcionais que realizam as condições

$$\ddot{q}_i + \dot{q}_i \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_i = 0, \qquad \dot{q}_i \beta_1 - \beta_i = 0.$$

Se considerarmos o campo vectorial covariante Q^i (afectamos de índice superior a componente Q_i da fôrça generalizada), em virtude de ser

$$\beta_i = g_{ik}\, Q^k = Q_i,$$

concluímos que tais trajectórias são geodésicas tangentes ao campo das fôrças. Se existem, dependem de $n-1$ parâmetros e por cada ponto do contínuo R_n passará uma só. Sôbre cada uma delas é possível uma infinidade de movimentos e esta propriedade é necessàriamente característica. A lei temporal, que pode fazer-se resultar da igualdade

$$d\left\{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 g^{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k\right\} = 2\,(Q^1 + Q^2\,\dot{q}_2 + \ldots + Q^n\,\dot{q}_n)\,dq_1,$$

apresenta a forma

$$\frac{dt}{dq_1} = \sqrt{\frac{\varphi(q_1)}{2\left[\theta(q_1) + h\right]}},$$

onde h é uma constante arbitrária.

Verifiquemos directamente que é característica a propriedade da infinidade de movimentos. Visto que a constante h pode crescer indefinidamente, é $\frac{dt}{dq_1} = 0$ em particular e trata-se duma geodésica. Que ela é tangente ao campo resulta de que, deslocando-se o vector $\frac{d\mathbf{M}}{ds}$ paralelamente ao longo da trajectória, é

$$D_t\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\frac{d^2 q_i}{ds^2} + \Gamma_i^{rs}\frac{dq_r}{ds}\frac{dq_s}{ds}\right] + \frac{dq_i}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dq_i}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2},$$

e a aceleração tem a direcção da tangente.

5. Propriedades gerais do movimento. — No que vai seguir-se (sempre para os sistemas Σ) supomos que os g^{ik} admitem derivadas contínuas das duas primeiras ordens, salvo em pontos excepcionais, aos quais corresponderão posições singulares do sistema. Escrevamos as equações (2) e (3) sob a forma

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{dt}{dq_1} = r, && \frac{dr}{dq_1} = -\beta_1 r^3 - \mathfrak{N}_1 r, \\ &\frac{dq_i}{dq_1} = \dot{q}_i, && \frac{d\dot{q}_i}{dq_1} = \mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_1 \dot{q}_i + r^2(\beta_i - \beta_1 \dot{q}_i), \end{aligned}$$

e estudemos êste sistema na hipótese do movimento subseqüente às condições iniciais (t^0, q_i^0, $q_i'^0$) que realizam as desigualdades $q_1'^0 \geqq q_i'^0$. Seja um sistema de valores fixos para os q_i, representado por a_i, e suponhamos que as condições

$$(6)\qquad |q_i - a_i| \leqq \delta, \qquad |\dot{q}_i| \leqq 1 + \frac{\delta}{2}, \qquad |r| \leqq A > \delta$$

garantem que os módulos dos segundos membros de (5) são inferiores a M_1. Sendo

$$|q_i^0 - a_i| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad |\dot{q}_i^0| \leqq 1, \qquad |r^0| \leqq \frac{A}{2},$$

verifica-se que são inferiores a M_1 os segundos membros de (5) mediante

$$|q_i - q_i^0| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad |\dot{q}_i - \dot{q}_i^0| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad |r - r^0| \leqq \frac{A}{2}.$$

Às condições iniciais em referência corresponde um movimento cujas características são dadas pelos integrais contínuos de (5) no intervalo de $q_1^0 - \frac{\delta}{2M_1}$ a $q_1^0 + \frac{\delta}{2M_1}$. Como à condição inicial $r^0 = 0$ corresponde uma geodésica, vê-se que será $r \neq 0$, e existe pois uma correspondência biunívoca entre t e q_1 no intervalo indicado para q_1. Por meio dela podem supor-se dados os integrais $q_i = q_i(t)$, os quais ficarão definidos no intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon')$ correspondente ao anterior.

Posto isto, imaginemos que, mediante as desigualdades análogas a (6) e correspondentes às hipóteses de tornarmos q_k como variável independente (em vez de q_1), desigualdades em que manteremos δ e A, se chega a estabelecer a menor das quantidades $\frac{\delta}{2M_k}$, que chamaremos η. É então fácil demonstrar que, se, *quando o tempo tende para um valor finito* t_1, *o sistema tende para uma posição não singular* a_i, *o movimento é regular para além de* t_1. Excluído o caso evidente de virem a anular-se tôdas as velocidades, suponhamos que é $|q_k'| > \frac{2}{A}$ a partir duma época suficientemente vizinha de t_1. Consideremos a quantidade η e seja t' tal que, sendo $t' \leqq t \leqq t_1$, é $|q_i - a_i| \leqq \alpha < \frac{\eta}{2}$. Notemos que é $\eta < \delta$. Numa época t_0 posterior a t', seja $|q_1'^0| \geqq |q_i'^0|$ e, portanto, $|q_1'^0| > \frac{2}{A}$. Se considerarmos t_0 como época inicial, sabemos que se realiza um movimento regular de $q_1^0 - \eta$ a $q_1^0 + \eta$ num intervalo de tempo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon')$, que pode ser ou não do mesmo sentido. Ora a época t_1 é necessariamente anterior a $t_0 + \varepsilon'$, como se concluiu de não poder ser superior a 2α a oscilação de q_1 no intervalo (t_0, t_1).

A trajectória do sistema no contínuo de RIEMANN prolonga-se analiticamente para além do ponto a_i, e devemos notar que êste resultado abrange mesmo o caso em que a fôrça viva se anula nesse ponto. Nesta última hipótese o ponto a_i não pode ser uma posição regular de equilíbrio, os integrais serão dados por funções pares de $t - t_1$ e a conclusão anterior é imediata porque não podem ser nulos todos os coeficientes de $(t - t_1)^2$ nos desenvolvimentos dos q_i. O sistema tem em a_i um *ponto de recuo.*

As conclusões são diferentes se o ponto a_i é um ponto regular *assintótico. A fôrça viva tende necessàriamente para zero e o ponto* a_i *é uma posição de equilíbrio.* A primeira propriedade resulta de considerações análogas às anteriores e pode também deduzir-se da aplicação do teorema seguinte às coordenadas q_i: *Se, quando o tempo cresce indefinidamente, a função* V (t) *tende* *para um limite e se as suas derivadas, até à de ordem* n + 1, *são finitas, as* n *primeiras derivadas tendem para zero.* Quanto à segunda propriedade, verifica-se imediatamente pondo $t = \frac{1}{\tau}$, fazendo tender τ para zero e recordando que as posições de equilíbrio correspondem a $\beta_i = 0$. Nada poderemos dizer sôbre se a trajectória se prolonga ou não analiticamente para lá de a_i. Enunciemos também a proposição inversa seguinte: o sistema só pode tender para uma posição regular de equilíbrio, com uma fôrça viva que tende para zero, quando o tempo aumenta indefinidamente.

6. Trajectórias verdadeiras, conjugadas e mistas. — Façamos uma nota preliminar. As equações (4′) podem tomar a forma

$$\ddot{q}_i = \ddot{q}_2 \frac{(\beta_i : \beta_1) - \dot{q}_i}{(\beta_2 : \beta_1) - \dot{q}_2} + A_i,$$

$$\dddot{q}_2 = \lambda_2 \frac{d}{dq_1} \log (\beta_2 - \beta_1 \dot{q}_2) + B = \lambda_2 \frac{d}{dq_1} \log \beta_1 + B',$$

onde A_i, B, B' dependem dos q_i e suas derivadas e também das fôrças por intermédio das relações $\frac{\beta_i}{\beta_1}$. Se as fôrças são modificadas e se se representam com β_i' as expressões transformadas dos β_i, reconhece-se que é condição necessária, para se conservarem as trajectórias, que seja

$$\frac{\beta_i'}{\beta_i} = \frac{\beta_1'}{\beta_1} = \text{const.}$$

Esta condição é depois suficiente, porque em A_i e B' figuram os β_i unicamente pela forma $\frac{\beta_i}{\beta_1}$. Introduzindo as componentes covariantes, temos as condições necessárias e suficientes

$$(Q^i)' = c\, Q^i.$$

Posto isto, substituamos nas equações de Lagrange t por it. As equações transformadas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - Q^i,$$

mostram que há conservação das trajectórias. O novo movimento diz-se *conjugado* do verdadeiro. Revela-nos a lei temporal (4) que, dada uma trajectória real, se ela é sede dum movimento verdadeiro real, é também sede dum movimento conjugado imaginário e reciprocamente. Dizem-se *trajectórias verdadeiras* as que correspondem a movimentos verdadeiros reais e *trajectórias conjugadas* aquelas que correspondem a movimentos conjugados reais. A existência de trajectórias intermediárias ou *mistas* é conseqüência da existência de pontos de recuo. Cada ponto do contínuo de Riemann pode considerar-se como ponto de recuo e as trajectórias mistas são excepcionais porque dependem de n parâmetros, salvo se cada um dos seus pontos se pode considerar como ponto de recuo num movimento sôbre ela realizado. Êste caso excepcional exige a existência da família das trajectórias notáveis, que sabemos depender de $n - 1$ parâmetros. Inversamente, se estas existem, há abaixamento do número de parâmetros de que dependem as trajectórias mistas.

7. Resultados qualitativos. — Os resultados já encontrados podem resumir-se do modo que se segue. Dada uma porção de trajectória, que não seja notável, não passe por ponto singular ou posição de equilíbrio e não contenha ponto de recuo (caso geral), será percorrida num tempo *finito* no mesmo sentido num dos movimentos verdadeiro ou conjugado. O arco em questão é regular. Se existe ponto de recuo, ela é sede de dois movimentos reais correspondentes a dois fragmentos em que se divide, cada um dos quais é percorrido num tempo finito, se não há ponto de equilíbrio. O ponto de recuo é ainda um ponto regular. Se há posição regular de equilíbrio, essa posição só pode ser atingida num tempo infinito, tanto no movimento verdadeiro como no conjugado, e pode tratar-se dum ponto singular da trajectória.

Posto isto, recordemos ter feito de comêço a hipótese de serem isoladas as posições de equilíbrio. É o que sempre admitiremos.

Para esclarecer a distribuïção dos pontos de recuo sôbre uma trajectória que não seja notável, comecemos por observar que na vizinhança do ponto de recuo os integrais são da forma

$$q_i = a_i + b_i(t - t_0)^2 + c_i(t - t_0)^4 + \dots,$$

supondo analíticas as funções em jôgo. As quantidades b_i não são tôdas nulas. Se tomarmos a origem dos arcos no ponto de recuo e os contarmos em sentido contrário ao do movimento verdadeiro real, anterior à época t_0, fácil é estabelecer a relação

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = s\left(-k^2 + \varepsilon\right) = s\varphi(s) \qquad (k \neq 0),$$

onde ε tende para zero com s. Na passagem para o movimento conjugado real, que podemos supor seguir-se ao movimento anterior, a relação supra é da forma

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = s\left(-k^2 + \varepsilon'\right) = s\varphi(s),$$

e a função $\varphi(s)$ é, pois, contínua e diferente de zero para $s = 0$. Somos levados a concluir que os pontos de recuo são isolados.

Continuando a hipótese de ausência de ponto de equilíbrio, suponhamos finalmente que se trata duma trajectória notável. A lei temporal correspondente mostra que podemos dispor da constante arbitrária de modo que a porção de trajectória considerada seja percorrida no mesmo sentido num tempo finito. Se

há um ponto de recuo para o movimento considerado, êste ponto é único, como vamos ver (1). Sejam M_1 e M_2 dois pontos de recuo e imaginemos a lei do movimento sob a forma

$$T = \Phi(s) + h.$$

A derivada $\Phi'(s)$ anula-se entre M_1 e M_2 e, se forem M_0 o ponto e s_0 o valor correspondente de s, temos

$$\Phi'(s) = (s - s_0)^{\alpha}\psi(s),$$

com $\psi(s_0) \neq 0$, podendo o inteiro α ser superior à unidade. Deduz-se

$$\Phi(s) - \Phi(s_0) = (s - s_0)^{\alpha+1}\Pi(s),$$

com $\Pi(s_0) \neq 0$. Partindo duma posição convenientemente próxima de M_0 com a lei de movimento

$$T = (s - s_0)^{\alpha+1}\Pi(s),$$

verifica-se, substituindo T, que essa lei é da forma

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (s - s_0)^{\alpha+1}F(s),$$

com $F(s_0) \neq 0$, o que leva a concluir que M_0 seria uma posição de equilíbrio. Assim, poderemos dispor de h de modo que a porção considerada de trajectória notável seja inteiramente percorrida no mesmo sentido, quer no movimento verdadeiro, quer no conjugado, existindo, todavia, valores de h entre dois valores h_1 e h_2 aos quais corresponde a existência dum ponto de recuo.

(1) No sentido de não haver movimento periódico sôbre a trajectória notável em questão.

Podemos verificar directamente que M_0 é uma posição de equilíbrio. Sendo, na verdade,

$$\frac{dT}{ds} = \Phi'(s) = \frac{Q^1\, dq_1 + \ldots + Q^n\, dq_n}{ds},$$

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dq_n}{Q_n},$$

concluímos que será nula a fôrça no ponto M_0, pois é

$$Q^1\, Q_1 + \ldots + Q^n\, Q_n = 0.$$

8. Trajectórias com posições de equilíbrio. — Seja a porção $M_0 M$ de trajectória (não notável) e suponhamos que, partindo de M_0, encontramos em N o primeiro ponto de equilíbrio. A equação do movimento

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \psi(s)$$

permite prosseguir de M_0 até N, ainda mesmo que haja pontos de recuo. Estudemos o movimento na parte adjacente a N, onde não há ponto de recuo. Vamos mostrar que $\psi(s)$ tende necessàriamente para um limite. Suponhamos que $\psi(s)$ não tende para zero. Conservando-se $\psi(s)$ em valor absoluto superior a uma quantidade determinada, o mesmo sucederá a uma das derivadas q'_k, pelo menos, e então o método do § 5 permite estabelecer que o movimento prossegue regularmente através do ponto de equilíbrio, que é um ponto regular da trajectória.

Ficamos em presença dum único caso, de resto já discutido: aquele em que $\psi(s)$ tende para zero. O móvel só poderá atingir N num tempo infinito e o ramo de trajectória pode ser singular. Assim as *trajectórias singulares* que partem dum ponto de equilíbrio obtêm-se pelos integrais dum sistema da forma

$$-\tau^2 \frac{dq_i}{d\tau} = q'_i, \qquad -\tau^2 \frac{dq'_i}{d\tau} = P_i + \beta_i,$$

que resulta do sistema de LAGRANGE pondo $t = \frac{1}{\tau}$. Os integrais em questão são aqueles em que os q_i tendem para as coordenadas do ponto de equilíbrio e os q'_i tendem para zero, quando τ tende para zero.

Tratando-se duma trajectória notável, cada ponto é necessàriamente regular. Uma posição de equilíbrio que é atingida assintòticamente para um valor de h é atravessada regularmente para outros valores de h.

9. Resumo. — Podemos formular, como resultados de tôda a discussão anterior, as seguintes proposições de PAINLEVÉ: Por um ponto M que não é um ponto singular nem um ponto de equilíbrio passa uma infinidade de trajectórias dependente de n parâmetros, admitindo tôdas o ponto M como regular. Entre elas há uma que admite o ponto M como ponto de recuo, a qual faz parte da família de trajectórias mistas a um parâmetro que passa em cada ponto. Êste resultado sofre excepção quando existe a família de trajectórias notáveis, pois então por cada ponto passa uma única trajectória mista. Se o ponto M é uma posição de equilíbrio, há a entrar em conta com as trajectórias que atingem assintòticamente o ponto M e para as quais êsse ponto pode ser singular. A velocidade tende para zero. Quanto à trajectória que tem em M o seu ponto de recuo, fica reduzida ao único ponto M.

Se é certo ficarem caracterizadas importantes propriedades do movimento, é certo também que há todo o interêsse em conhecer uma disposição geral das trajectórias. São desta ordem de ideias os resultados de HADAMARD. O ilustre geómetra refere-se aos sistemas Σ' e aos movimentos verdadeiros reais. É fácil compreender o seu ponto de vista.

Imaginemos um ponto material livre no espaço ordinário. Num ponto da trajectória em que U é máximo, a fôrça é normal à superfície de nível e dirigida, segundo a normal principal, no sentido da concavidade da trajectória. Sendo a fôrça dirigida no sentido dos UU crescentes, a convexidade da superfície de nível deve ser oposta à fôrça. Os pontos do espaço onde esta circunstância não tem lugar constituem uma região *repulsiva* onde uma trajectória não pode permanecer indefinidamente a não ser que U varie sempre no mesmo sentido. Como as superfícies de nível podem ser de curvaturas opostas, há a considerar ainda o caso de U poder tornar-se máximo num ponto em que tal suceda. Tratemos a questão dum modo geral.

10. Caso geral. — Em virtude de ser

$$\beta_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)},$$

onde F é a forma quadrática adjunta de $2T$, a expressão da derivada segunda $\frac{d^2 V}{dt^2}$ duma função de ponto V sôbre R_n é

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)} + Q(q_1', \dots, q_n'), \tag{7}$$

sendo Q uma forma quadrática. Em particular é

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = F\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) + Q.$$

Um máximo de U realiza as condições

$$\frac{dU}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2 U}{dt^2} \leqq 0, \tag{8}$$

de sorte que só pode ter lugar nos pontos de R_n para os quais é $Q \leqq 0$. Mediante a primeira das condições anteriores, Q é uma forma quadrática a $n-1$ variáveis; e deve considerar-se como uma região repulsiva, na qual, em geral, a trajectória não se desenvolve inteiramente, tôda a porção de R_n onde Q é definida positiva.

Podemos aplicar anàlogamente a igualdade (7), mas o resultado fica restringido a um feixe de trajectórias. Seja h a constante das fôrças vivas. O cociente $\frac{Q}{2T}$ é superior a um mínimo $m\,(q_1, \dots, q_n)$ função de ponto. O máximo de V é interior à região

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)} + 2m\,(U+h) \leqq 0,$$

que é assim, no geral, atravessada uma infinidade de vezes por cada trajectória do feixe.

Para estudarmos o caso de V não ter uma infinidade de máximos e mínimos, suporemos que V tende para um limite quando t aumenta indefinidamente. Raciocinaremos sempre supondo U limitado sôbre R_n, para excluirmos a hipótese de poderem as velocidades crescer indefinidamente. Por outro lado, colocamo-nos em condições que assegurem um limite superior às quantidades q_i''': basta que não seja degenerada a transformação autométrica derivada de $2T$ (Vejam-se as nossas «*Notas de Cálculo Vectorial*») e que admitam derivadas segundas os coeficientes g^{ik}. Então $\frac{dV}{dt}$ e $\frac{d^2 V}{dt^2}$ tendem para zero.

O móvel pode permanecer indefinidamente na região repulsiva e afastar-se indefinidamente. Se esta última hipótese não tem lugar, ΔU tende para zero. Se $\frac{\partial U}{\partial q_1}$ (ou outra derivada $\frac{\partial U}{\partial q_i}$), fôsse em valor absoluto superior a um número determinado quando $t > t'$, a igualdade

$$\frac{dU}{dt} = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i'$$

permitiria substituir q_1' na expressão de $\frac{d^2 U}{dt^2}$, o que daria

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = F\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) + Q_1\,(q_2', \dots, q_n') + Q_2 \frac{dU}{dt},$$

onde Q_2 só conteria $\frac{\partial U}{\partial q_1}$ em denominador. Como Q_1 era, por hipótese, definida positiva, $F\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)$ tenderia para zero.

Tôda a trajectória abandonará a região repulsiva quando não se afasta indefinidamente ou não tende assintòticamente para uma posição de equilíbrio instável.

A utilidade dêste resultado é imediata, pois existe, no geral, região repulsiva. No domínio dum mínimo estrito de U, a forma Q é efectivamente definida positiva. Se a região repulsiva preenche todo o espaço, o móvel não permanece indefinidamente a distância finita, a não ser quando se aproxima duma posição de equilíbrio.

Dispunhamos das condições iniciais e das derivadas de V de modo que o segundo membro de (7) seja positivo. As trajectórias do feixe correspondente saïrão da região onde essa circunstância tem lugar.

HADAMARD dá uma demonstração do teorema de LIAPOUNOFF, nas condições enunciadas no § 5 do cap. III, utilizando as noções que acabamos de dar. O que há, porém, de mais interessante na sua exposição é uma segunda demonstração do mesmo teorema com o estudo das trajectórias sôbre as quais a instabilidade se não manifesta. Dá-se uma ideia em poucas palavras.

Seja

$$2T = \sum_i (1 + \ldots)\, q_i'^2 + \sum_k (1 + \ldots)\, q_k'^2 + \ldots,$$

$$2U = \sum_i a_i q_i^2 - \sum_k b_k q_k^2 + \ldots,$$

onde a_i, b_k são constantes positivas. Suporemos que existe, pelo menos, uma variável q_i, de modo que a não existência de máximo se reconhece pelos termos do segundo grau. Da expressão

$$2V = \sum_i \alpha_i q_i^2 - \sum_k \beta_k q_k^2 + \sum_i A_i q_i'^2 - \sum_k B_k q_k'^2,$$

de coeficientes constantes positivos, deduz-se, mediante as equações de LAGRANGE, escritas sob forma normal, e as que delas resultam por derivação,

$$\frac{d^2V}{dt^2} = 2\rho V + \Phi + \ldots, \tag{9}$$

onde ρ é um número positivo qualquer e

$$\Phi = \sum_i q_i^2 \left[A_i a_i^2 + \alpha_i (a_i - \rho)\right] + \sum_k q_k^2 \left[-B_k b_k^2 + \beta_k (b_k + \rho)\right]$$
$$+ \sum_i q_i'^2 \left[\alpha_i + A_i (a_i - \rho)\right] + \sum_k q_k'^2 \left[-\beta_k + B_k (b_k + \rho)\right].$$

A forma Φ será definida positiva mediante as condições,

$$\rho \overline{<} a_i, \qquad \frac{b_k^2}{b_k + \rho} < \frac{\beta_k}{b_k} < b_k + \rho.$$

No domínio Ω da posição de equilíbrio a condição $V > 0$ arrastará a condição $\frac{d^2V}{dt^2} > 0$. Se inicialmente é $V > 0$, $\frac{dV}{dt} \overline{>} 0$, a trajectória correspondente não se desenvolve no domínio Ω. Na verdade, se assim sucedesse, $\frac{dV}{dt}$ cresceria constantemente e V cresceria indefinidamente, o que é absurdo. A instabilidade fica demonstrada. Se inicialmente é $V > 0$, $\frac{dV}{dt} < 0$, pode suceder que $\frac{dV}{dt}$ se torne nula ou positiva dentro de Ω sem que V mude de sinal. Recai-se no caso anterior. Mas podemos supor que $\frac{dV}{dt}$ é constantemente negativa e, portanto, que V tende para um limite positivo ou nulo (V não muda de sinal por hipótese). A igualdade (9), visto que $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendem para zero, mostra que V tende para zero. Então $\Phi\,(q, q')$ tende para zero e o móvel tende assintòticamente para a posição de equilíbrio. Uma tal trajectória pode desenvolver-se na região Ω.

Seja inicialmente $V>0$, $\frac{dV}{dt}<0$ e suponhamos que V se torna negativa. Se volta depois a tornar-se positiva, recai-se no primeiro caso. Se V se torna negativa e se mantém indefinidamente negativa, pode haver trajectórias estáveis compatíveis com esta hipótese. Para que o móvel possa tender para a posição de equilíbrio é necessário que $\frac{dV}{dt}$ se torne prèviamente positiva.

Para vermos agora quais são as trajectórias que ficam por considerar, observemos que podemos dispor de β_k e de B_k de modo que a condição $V>0$ seja satisfeita. Sòmente quando q_i e q_i' são infinitamente pequenos pode o carácter estável da solução correspondente não ser revelado pela discussão anterior.

11. Sistemas com dois graus de liberdade. — Alguns dos resultados precedentes podem precisar-se no caso de dois graus de liberdade. Vamos, nessa ordem de ideias, supor um ponto material de massa unitária, móvel sem atrito sôbre uma superfície. Bem entendido que não haveria necessidade de imaginar realizado o elemento ds^2; se o fazemos, temos unicamente em vista facilitar o estudo dum problema importante com o emprêgo dum simbolismo mais corrente.

Sejam u, v as coordenadas curvilíneas e U, V duas funções de ponto sôbre a superfície. Os parâmetros de BELTRAMI — primeiro, segundo e misto — serão apresentados com

$$(\mathbf{\Delta} V)^2, \quad \mathbf{\Delta}^2 V, \quad \mathbf{\Delta} U i \mathbf{\Delta} V. \text{ (1)}$$

Como sempre, representaremos com U a função de fôrça e com T a energia cinética.

(1) Veja-se DARBOUX «*Leçons sur la théorie des surfaces courbes*». As nossas notações são as de EGNELL.

HADAMARD dá à expressão de $\frac{d^2V}{dt^2}$ a forma

$$\text{(10)} \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = \mathbf{\Delta} U i \mathbf{\Delta} V + \frac{2(U+h)}{(\mathbf{\Delta} V)^2} I_V + \frac{dV}{dt}(\lambda u' + \mu v'),$$

onde λ, μ contêm como único denominador $(EG-F^2)(\mathbf{\Delta} V)^2$. A quantidade I_V é da forma

$$I_V = (\mathbf{\Delta} V)^2 \mathbf{\Delta}^2 V - \frac{1}{2} \mathbf{\Delta} V i \mathbf{\Delta} \left[(\mathbf{\Delta} V)^2\right].$$

Para estabelecer a igualdade (10) basta recorrer às equações de LAGRANGE e ao teorema das fôrças vivas. Aplicada à função U reconhece-se que um máximo de U exige que seja

$$\text{(11)} \qquad I_U \overline{<} 0.$$

Tem de considerar-se uma região repulsiva a parte da superfície para a qual é

$$\text{(12)} \qquad I_U \overline{>} 0,$$

de sorte que a totalidade da superfície fica decomposta em duas partes, uma — a *região atractiva* — definida por (11), a outra — a *região repulsiva* — definida por (12).

Introduzindo a normal geodésica $\mathbf{G}$ duma curva de nível $U=$const., a curvatura geodésica $\frac{1}{\gamma}$ pode escrever-se, supondo $\mathbf{\Delta} U$ directamente paralelo a $\mathbf{G}$,

$$\frac{1}{\gamma} = div\,\mathbf{G} = div\,\frac{\mathbf{\Delta} U}{\sqrt{(\mathbf{\Delta} U)^2}} = \frac{\mathbf{\Delta}^2 U}{\sqrt{(\mathbf{\Delta} U)^2}} + \mathbf{\Delta} U i \mathbf{\Delta}\left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{\Delta} U)^2}}\right),$$

ou seja

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{I_U}{(\mathbf{\Delta} U)^2 \sqrt{(\mathbf{\Delta} U)^2}}.$$

Fazendo intervir o vector de curvatura geodésica, reconhece-se que um máximo de U só pode ter lugar na região em que as curvas de nível têm aquela curvatura dirigida no sentido dos UU crescentes.

A linha que separa as regiões atractiva e repulsiva é lugar dos pontos das curvas de nível onde é nula a curvatura geodésica; nos pontos em questão, o plano osculador é normal à superfície, a não ser que seja nula a curvatura normal, isto é, que a curva de nível tenha uma direcção assintótica *(Notas de Cálculo Vectorial)*.

Para estudar as trajectórias que não atravessam uma infinidade de vezes a linha $I_U = 0$, colocamo-nos nas mesmas hipóteses do § 10. Como $\frac{dU}{dt}$, $\frac{d^2U}{dt^2}$ tendem para zero (1), a igualdade (10) mostra que, se o móvel não tende para uma posição de equilíbrio, é

$$\lim \left[(\blacktriangle U)^2 + \frac{2(U+h)}{(\blacktriangle U)^2} I_U \right] = 0;$$

e, por isso, a trajectória, a partir duma época suficientemente afastada, desenvolve-se inteiramente na região atractiva.

Se o móvel tende assintòticamente para uma posição regular isolada de equilíbrio, a conclusão anterior pode deixar de subsistir, mas a fôrça viva tende para zero.

No entanto, a totalidade da trajectória passa necessàriamente na região atractiva. Quando t decresce indefinidamente, se o móvel tende para uma posição de equilíbrio, a equação das fôrças vivas mostra que U tende, por valores decrescentes, para o mesmo valor constante que quando t aumenta indefinidamente. A totalidade da trajectória dará, pelo menos, um máximo a U, e a posição correspondente será interior à região atractiva.

(1) Supõe-se $\frac{d^3U}{dt^3}$ finito, de modo que, como deve já subentender-se no § em referência, admitimos serem finitas as derivadas parciais até à 3.ª ordem de U e V.

A existência da região repulsiva demonstra-se como anteriormente.

Temos mantido sempre a hipótese de serem isoladas as posições de equilíbrio. Se existe uma linha de equilíbrio, nada impede que a trajectória faça uma infinidade de voltas que tendam para a linha, sem que a velocidade do móvel tenda para zero. Seja $\varphi(u, v) = 0$ a equação dessa linha. Admitamos, visto que φ tende para um limite, que $\frac{d\varphi}{dt}$ e $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ tendem para zero. A igualdade (10) mostra que é lim. $I_\varphi = 0$ e, portanto, que a linha de equilíbrio é uma geodésica.

12. Restrição da constante das fôrças vivas. — Seja h um valor dado. As desigualdades

$$\delta = \blacktriangle U i \blacktriangle V + \frac{2(U+h)}{(\blacktriangle V)^2} I_V \leqq 0,$$

$$\delta = \blacktriangle U i \blacktriangle V + \frac{2(U+h)}{(\blacktriangle V)^2} I_V \geqq 0,$$

correspondem a uma divisão da superfície em duas regiões, a primeira compreendendo os máximos, a segunda os mínimos da função V. Uma trajectória do feixe atravessa, no geral, uma infinidade de vezes a linha de separação.

Se, excepcionalmente, V tende para um limite V_0 ao mesmo tempo que $\frac{dV}{dt}$ e $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendem para zero, então tendendo a trajectória assintòticamente para uma curva limite L, isto é sendo cada ponto m de L limite duma série de pontos $M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots$ da trajectória, a quantidade δ tende para zero e será nula em m ou seja sôbre a curva $V = V_0$.

Há a resolver o caso de $\blacktriangle V$ tender para zero. Então o móvel tenderá assintòticamente para uma posição determinada da curva $V = V_0$, se $\blacktriangle V$ é nulo num número limitado de pontos de L. Se $\blacktriangle V = 0$ tem lugar sôbre tôda a curva L, substituiremos a V uma função nula sôbre L, sem que o sejam as suas derivadas primeiras.

Regressando ao caso em que é $\partial = 0$ sôbre L, é fácil verificar que L é uma trajectória possível. Escolhamos as coordenadas curvilíneas u, v de modo que $v = 0$ seja a equação de L. Basta tomar para u o arco contado sôbre L a partir dum ponto desta curva e para v a distância geodésica dum ponto qualquer à linha L. Às equações do movimento

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Phi(u, v, u', v'), \tag{13}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \Psi(u, v, u', v'), \tag{14}$$

juntemos a equação das fôrças vivas $E u'^2 + v'^2 = 2(U + h)$. A equação (14) é da forma

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \Theta(u, v) + v' \Pi(u, v, u', v'),$$

onde Θ se anula, por hipótese, sôbre L (1). Dêste modo, $v = 0$ é solução de (14) e a equação (13), pondo $v = 0$, dá o integral $u = \varphi(t)$, que terá de satisfazer à condição inicial $u' = \sqrt{\frac{2(U+h)}{E}}$.

Se, em vez de atribuirmos a h um valor determinado, fixarmos um limite superior h_0 de h, as desigualdades

$$U + h > 0, \qquad (\Delta U)^2 + \frac{2(U+h)}{(\Delta U)^2} I_U \overline{<} 0,$$

arrastam

$$U + h_0 > 0, \qquad (\Delta U)^2 + \frac{2(U+h_0)}{(\Delta U)^2} I_U \overline{<} 0.$$

Ora estas últimas desigualdades definem uma região que conterá

(1) Deve ter-se em vista que a função V se reduz a uma constante quando é $v = 0$.

a que é definida pelas anteriores, mas que é interior à região $I_U \overline{<} 0$.

Anàlogamente, se h_0 representa um limite inferior de h, o mínimo de U encontra-se na região

$$(\Delta U)^2 + \frac{2(U+h_0)}{(\Delta U)^2} I_U \overline{>} 0,$$

a qual compreende a totalidade da região repulsiva e uma parte da região atractiva.

13. Sôbre as linhas geodésicas. — Suponhamos $U = 0$. Verifica-se que tôda a geodésica atravessa uma infinidade de vezes a linha $I_V = 0$, salvo se tende assintòticamente para essa linha, que será uma geodésica fechada.

Seja agora uma geodésica fechada L. Escolhendo as coordenadas u, v como se fêz no § anterior, o elemento linear afecta a forma

$$ds^2 = C^2 du^2 + dv^2,$$

sendo $C = 1$ sôbre a curva $v = 0$. Tomando $V = v$, como é

$$I_v = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial v},$$

vê-se que é $\frac{\partial C}{\partial v} = 0$ sôbre a curva L. Se a superfície dada é de curvatura total positiva, reconhece-se imediatamente que é $\frac{\partial^2 C}{\partial v^2} < 0$.

Não pode então uma geodésica ser assintótica da geodésica fechada $v = 0$. Na verdade, se v tende para zero por valores positivos por exemplo, $\frac{dv}{dt}$ é negativa e tende para zero. Então $\frac{d^2v}{dt^2}$ é positiva para valores de t suficientemente grandes e isso não pode ser, porque $\frac{\partial C}{\partial v}$ é negativa para todo o valor positivo de v.

Excluído o assintotismo, podemos afirmar que tôda a geodésica fechada duma superfície de curvatura total positiva é atravessada uma infinidade de vezes por uma geodésica qualquer (1).

14. Sôbre a realização do elemento linear. — Tem sido várias vezes posto em evidência que não há necessidade de realizar no espaço euclideano o elemento ds^2. Uma tal realização, de resto, é geralmente imprópria em virtude do seu carácter local. Ainda mesmo que tenha lugar num domínio finito, surgem dificuldades como a que é posta em relêvo no exemplo a seguir.

Estudemos o feixe de trajectórias relativo à constante h por meio da realização do contínuo R_h de elemento

$$d\sigma^2 = (U + h)\, ds^2.$$

Os pontos dêste contínuo correspondem aos da multiplicidade inicial para os quais é $U + h > 0$ e que são limitados pela linha eqüipotencial $U + h = 0$. A realização euclideana, necessàriamente *conforme*, teria de fazer corresponder um ponto de R_h a todos os pontos da linha $U + h = 0$, o que é evidentemente absurdo. Assim, sejam R um plano, (x, y) as coordenadas rectangulares e $U = -(x^2 + y^2)$. É

$$d\sigma^2 = (h - x^2 - y^2)(dx^2 + dy^2) = (h - \rho^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2),$$

onde (ρ, θ) são coordenadas polares. BOULIGAND realiza êste elemento sôbre uma superfície de revolução, pondo

$$\xi = f(\rho) \cos m\theta, \qquad \eta = f(\rho) \operatorname{sen} m\theta, \qquad \zeta = \varphi(\rho).$$

Somos levados às relações

$$m^2 f^2(\rho) = (h - \rho^2)\rho^2, \qquad f'^2(\rho) + \varphi'^2(\rho) = h - \rho^2,$$

(1) Para as demonstrações rigorosas ver a memória citada de HADAMARD.

a primeira das quais determina $f(\rho)$. E sendo

$$f'^2(\rho) = \frac{(h - 2\rho^2)^2}{m^2 (h - \rho^2)},$$

$$\varphi'^2(\rho) = \frac{\left[(m-1)h - (m-2)\rho^2\right]\left[(m+1)h - (m+2)\rho^2\right]}{m^2 (h - \rho^2)},$$

o numerador de φ'^2 é negativo quando é $\rho = \sqrt{h}$. Os pontos do interior da linha eqüipotencial $x^2 + y^2 = h$ não podem ser totalmente representados sôbre a superfície de revolução. A necessidade de ser $\rho < \sqrt{h}$ obrigaria a uma limitação das trajectórias.

Dum modo geral, pois, as variedades riemannianas devem ser consideradas *in abstracto*.

Muitas vezes, mesmo, basta a intervenção da *Analysis situs* para satisfazer unicamente condições de continuïdade e biunivocidade. Suponhamos, por exemplo, que existe uma correspondência biunívoca completa entre os pontos duma superfície e as configurações dum sistema. As trajectórias que ligam dois pontos A, B da superfície constituem uma família a um parâmetro, a constante das fôrças vivas. Mas serão unicamente possíveis as trajectórias para as quais é $U + h > 0$, desde A até B. A um valor particular de h corresponderá uma trajectória se os pontos A e B se encontrarem na mesma região da superfície limitada pela linha eqüipotencial $U + h = 0$.

Regressando, todavia, ao estudo da distribuïção das trajectórias, vamos, no capítulo que vai seguir-se, tratar alguns casos em que compatibilizamos a realização topológica com a realização métrica. Abstraïremos da existência de fôrça activa e, começando pelos sistemas com dois graus de liberdade, que estudaremos no caso de curvatura constante, completaremos finalmente a perspectiva aberta, estudando a distribuïção das geodésicas nos espaços riemannianos multidimensionais de curvatura negativa ou nula em cada ponto e em cada direcção plana.

Seguiremos de perto o «*Précis*» de BOULIGAND e a bela obra de CARTAN «*Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*» (1).

A extensão, um pouco propositada, que demos aos capítulos anteriores, não se repetirá agora. Sempre que haja deficiências de raciocínios ou de notações é à última obra referida que deverá recorrer o leitor, certo de que tudo ali encontrará, salvo indicação expressa da consulta a fazer. Só lamentamos nesta altura que as notações do capítulo II dêste nosso trabalho não deixem aos índices tensoriais a disposição mais vulgar, disposição que é seguida por CARTAN.

(1) Para o caso de dois graus de liberdade pode consultar-se a bela memória de HADAMARD «*Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*», publicada no tomo IV do «*Journal de Jordan*».

CAPÍTULO V

Geodésicas

1. Generalidades sôbre os espaços localmente euclideanos. Geodésicas. — As condições necessárias e suficientes para que um ds^2 seja euclideano podem deduzir-se fàcilmente empregando um *reparo* móvel arbitràriamente ligado a cada ponto (E. CARTAN, *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fascículo IX) (1).

As coordenadas do ponto M', infinitamente vizinho de M, com respeito ao reparo ligado a M, são combinações lineares das diferenciais das coordenadas u_i

$$\omega_i(d) = \Gamma_i^r \, du_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que temos

$$d\mathbf{M} = \omega_k(d)\,\mathbf{e}^k,$$

onde os $\mathbf{e}^k$ são os vectores de coordenadas. Poremos ainda

$$d\mathbf{e}^i = \omega_k^i(d)\,\mathbf{e}^k = \Gamma_k^{ir}\,du_r\,\mathbf{e}^k.$$

Seja agora um *campo de pontos* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definido pelas suas coordenadas cartesianas com respeito ao reparo ligado ao

(1) Veja-se também a memória do mesmo autor «*Sur les équations de la gravitation d'Einstein*», publicada no «*Journal de Liouville*» (tomo I da direcção de H. VILLAT, 1922).

ponto M correspondente a P. Das igualdades anteriores resulta imediatamente a expressão da diferencial absoluta

$$Dx_i = dx_i + \omega_i(d) + \omega_i^k(d)\, x_k,$$

da qual se deduz, se P é fixo,

$$dx_i + \omega_i(d) + \omega_i^k(d)\, x_k = 0.$$

Obtêm-se condições necessárias exprimindo a integrabilidade dêste sistema. Se fôrem d, δ dois símbolos de diferenciação permutáveis, temos de igualar a zero os *covariantes bilineares* dos dx_i. (Veja-se LEVI-CIVITA, «*Lezioni di calcolo differenziale assoluto*»). Somos levados às relações

$$\delta\omega_i(d) - d\omega_i(\delta) = \left[\omega_i^k(d)\,\omega_k(\delta) - \omega_i^k(\delta)\,\omega_k(d)\right],$$

$$\delta\omega_i^k(d) - d\omega_i^k(\delta) = \left[\omega_l^k(\delta)\,\omega_i^l(d) - \omega_l^k(d)\,\omega_i^l(\delta)\right],$$

que CARTAN escreve (Veja-se «*Leçons sur les invariants intégraux*»)

(1) $$(\omega_i)' = \left[\omega_k\,\omega_i^k\right],$$

(2) $$(\omega_i^k)' = \left[\omega_l^k\,\omega_i^l\right].$$

As mesmas relações podem ser obtidas, supondo que P não é fixo, introduzindo as diferenciais absolutas D, Δ correspondentes a d, δ e escrevendo a igualdade

$$\Delta Dx_i - D\Delta x_i = 0.$$

As condições (1) juntas à relação $ds^2 = g^{ij}\,\omega_i\,\omega_j$ determinam os coeficientes Γ_k^{ir}. As condições (2) são depois suficientes para que

o ds^2 seja euclideano, porque exprimem o mesmo resultado que as condições análogas obtidas com o emprêgo do reparo natural. É costume empregar as quantidades

$$\omega^{ij} = g^{jk}\,\omega_k^i,$$

as quais verificam as igualdades

$$dg^{ij} = \omega^{ij} + \omega^{ji}.$$

Quando o reparo arbitrário é rectangular, temos

$$\omega^{ij} = -\omega^{ji};$$

podemos então dizer: as quantidades ω_i representam as componentes da translação que leva de M a M' enquanto que os ω^{ij} são as componentes covariantes da rotação que torna o reparo (R), ligado a M, paralelo ao reparo (R'), ligado a M'.

Com o emprêgo do reparo natural, as condições para que um ds^2 seja euclideano escrevem-se usualmente

$$\frac{\partial\Gamma_k^{ir}}{\partial u_s} - \frac{\partial\Gamma_k^{is}}{\partial u_r} + \Gamma_h^{ir}\,\Gamma_k^{hs} - \Gamma_h^{is}\,\Gamma_k^{hr} = 0 \qquad \begin{array}{l}(i, k, r, s = 1, 2, \dots, n)\\ (h = 1, 2, \dots, n),\end{array}$$

o que permite ligá-los à teoria do tensor de RIEMANN-CHRISTOFFEL.

Quando se procede ao *desenvolvimento* dum espaço localmente euclideano no espaço euclideano $\mathfrak{E}$ (desenvolvimento que realiza o ds^2 proposto) e se supõe que o ds^2 dado é *normal* e *regular*, obtêm-se todos os pontos do espaço $\mathfrak{E}$ e cada um dêles uma só vez. Se o espaço dado não é *simplesmente conexo* (isto é, se existem curvas fechadas do espaço às quais correspondem curvas abertas de $\mathfrak{E}$), o mesmo ponto M tem uma infinidade de representantes no espaço $\mathfrak{E}$. No caso contrário, é idêntico a $\mathfrak{E}$.

No caso de conexão múltipla, é possível encontrar um poliedro de $\mathfrak{E}$, limitado por um número finito de faces planas, tal que, no seu interior, existe um ponto e um só representante de cada ponto do espaço dado. Há excepção unicamente para os pontos situados sôbre a fronteira; vários pontos da fronteira podem ser representantes do mesmo ponto do espaço localmente euclideano. O espaço $\mathfrak{E}$ fica decomposto numa infinidade de poliedros fundamentais idênticos, e as operações que levam os poliedros a coincidir constituem grupo designado sob o nome de *grupo de holonomia*. Êste grupo contém uma infinidade de operações, mas há um número limitado de *operações geratrizes:* as faces dum poliedro fundamental são duas a duas homólogas e as operações geratrizes são as que levam uma face à coincidência com outra face. O grupo de holonomia é *descontínuo* e *nenhuma* das suas operações, salvo a operação idêntica, *deixa invariante um ponto do espaço.*

Estas propriedades levam fàcilmente à construção dos espaços localmente euclideanos bidimensionais. Como as operações do grupo são transformações isométricas, no seio do grupo só pode haver translações e simetrias. Se há unicamente translações *(espaços orientáveis)*, temos duas hipóteses a formular: ou existe uma única direcção das translações, e somos levados ao cilindro planificado; ou existem duas direcções diferentes (máximo possível em virtude da descontinuidade do grupo), e somos levados aos espaços de CLIFFORD. Devem ser considerados idênticos os pontos da banda que representa o cilindro, situados sôbre as rectas terminais, na mesma perpendicular às geratrizes, assim como os pontos do paralelogramo de CLIFFORD, situados sôbre os lados nas mesmas paralelas a estes lados (1).

No primeiro caso dos espaços orientáveis, há um único tipo de *geodésicas fechadas*. São representadas por perpendiculares às rectas extremas da banda. Temos depois dois tipos de *geodésicas*

(1) Veja-se KLEIN *(Conférences faites à l'exposition de Chicago).*

abertas: as geratrizes do cilindro, a um lado, e as representantes das hélices, a outro. Estas últimas são sucessivos segmentos de rectas paralelas no interior da banda. Por dois pontos A e B passa geralmente uma infinidade de geodésicas, que se obtêm unindo o ponto A com os diferentes homólogos de B, situados no interior das bandas sucessivas, e transportando para um polígono fundamental as diferentes rectas assim obtidas.

No segundo caso dos espaços orientáveis, há dois tipos de geodésicas fechadas imediatamente evidentes. Mas há outras geodésicas fechadas não paralelas aos lados do paralelogramo. Seja $A\,B\,C\,D$ tal paralelogramo. Uma linha recta que parte do vértice A e encontra o lado $B\,C$ num ponto E, tal que $\frac{B\,C}{B\,E}$ é um número inteiro, representa uma geodésica fechada. Dum modo geral, é fechada tôda a geodésica que parte dum ponto de $A\,D$ com um coeficiente angular racional, desde que suponhamos $AD = AB = 1$. Se o coeficiente angular α é irracional, imaginemos uma sucessão de números racionais de limite α; a geodésica que corresponde a α é limite duma sucessão de geodésicas fechadas, cada uma das quais dá ideia do movimento durante um certo intervalo de tempo. A geodésica fechada é depois abandonada e o movimento aproxima-se de nova geodésica fechada (durante um intervalo de tempo que vai aumentando) e assim sucessivamente.

Passemos aos espaços *não orientáveis*. Se existe uma única direcção de translação, haverá necessàriamente simetria com respeito a essa direcção; o espaço é de primeira classe. Se há duas direcções de translação, parece à primeira vista que poderá haver simetria com respeito a uma recta não paralela a uma das translações; a descontinuïdade do grupo mostra que uma tal hipótese é impossível. Impossível é igualmente que a simetria não tenha lugar com respeito à recta paralelamente à qual se faz a translação, ainda em virtude da descontinuïdade do grupo.

Os espaços não orientáveis de segunda classe (tendo em vista que as operações do grupo não deixam ponto invariante) admitem duas direcções ortogonais de translação; a última operação do grupo é formada de translação seguida de simetria.

O polígono fundamental afecta, na primeira hipótese, a forma indicada na fig. 1 (que não é única), onde os pontos M e M' se deduzem pela translação a (com conservação da disposição dos eixos) e os pontos P e P' por translação $\left(\text{de grandeza } \frac{a}{2}\right)$ seguida de simetria. Temos geodésicas fecha-

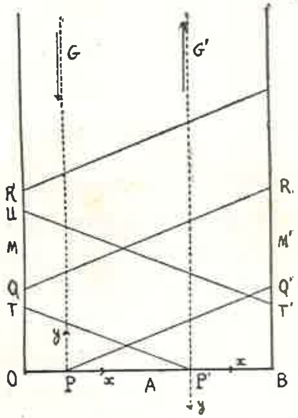

Fig. 1

das de comprimento a e uma única geodésica fechada de comprimento $\frac{a}{2}$.

Quanto às geodésicas abertas, temos as análogas a $(GP, G'P')$ e outras que construiremos do modo seguinte: parte-se dum ponto Q de OM para se chegar a um ponto R de BM', que é homólogo dum ponto R' de OM; a partir de R' constroi-se um segmento paralelo e assim sucessivamente. Para completar esta geodésica devemos efectuar a construção anterior até obter um ponto P de OB, de homólogo P' $\left(OA = AB = \frac{a}{2}\right)$; de P' a geodésica partirá com um coeficiente angular simétrico do anterior.

Na segunda hipótese o polígono fundamental afecta a forma

da fig. 2 (1), na qual se supõe uma construção referida a eixos rectangulares. O centro da forma de Klein é a origem das coordenadas. Os pontos M_1 e M_1' são homólogos, mas os sistemas de eixos ligados a êsses pontos são simétricos relativamente a $X'X$. Os pontos M_3 e M_3' são igualmente homólogos e a orientação dos eixos no plano é conservada. Há linhas geodésicas fechadas como $M_3 M_3'$. A linha $M_0 M_1 M_1' M_1 M_1' M_2 M_2' M_3 M_3' M_2 M_0$ é igualmente uma geodésica fechada. Na sua cons-

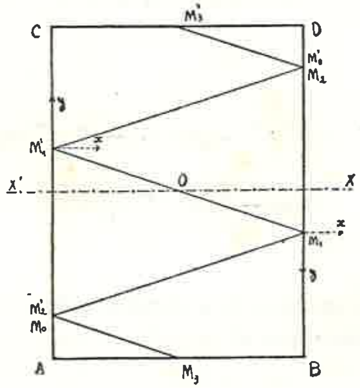

Fig. 2

trução deve ter-se em vista que podemos descrever um ciclo fechado sem restabelecer a direcção inicial.

2. Generalidades sôbre a curvatura riemanniana. — Quando se faz o desenvolvimento dum ciclo do espaço de Riemann no espaço euclideano, não se obtém geralmente uma curva fechada. Parte-se dum ponto M, com um reparo (R), e chega-se a um ponto M', com um reparo (R'), igual a (R).

Diz-se *deslocamento associado ao ciclo* o deslocamento do espaço euclideano que leva de M a M', e (R) a coincidir com (R').

(1) Veja-se Enriques (*Principes de la géométrie, Encyclopédie des sciences mathématiques*).

No caso dum ciclo infinitamente pequeno, eqüivalente a um bivector $(du_i,\ \delta u_i)$, o deslocamento associado reduz-se a uma rotação em tôrno da origem do ciclo. As componentes mistas dessa rotação são dadas pelas igualdades

$$\Omega^i_j(\delta, d) = \delta\omega^i_j(d) - d\omega^i_j(\delta) - \left[\omega^i_h(\delta)\,\omega^h_j(d) - \omega^i_h(d)\,\omega^h_j(\delta)\right],$$

ou seja

$$\Omega^i_j = (\omega^i_j)' - \left[\omega^i_k\,\omega^h_j\right]. \tag{3}$$

Escreveremos

$$\Omega^i_j(\delta, d) = R^i{}_j{}^{rs}\,\delta u_r\,du_s = -R^i{}_j{}^{rs}\,du_r\,\delta u_s =$$

$$= -\sum_{(r,\,s)} R^i{}_j{}^{rs}\,p_{rs},\ ^{(1)}$$

onde a soma final se estende a combinações.

Vê-se fàcilmente que é

$$R^i{}_j{}^{rs} = \frac{\partial\Gamma^{is}_j}{\partial u_r} - \frac{\partial\Gamma^{ir}_j}{\partial u_s} - \left(\Gamma^{ir}_k\,\Gamma^{ks}_j - \Gamma^{is}_k\,\Gamma^{kr}_j\right).$$

A intervenção das componentes covariantes da rotação faz-se pelas igualdades

$$\Omega^{ij} = g^{jk}\,\Omega^i_k = (\omega^{ij})' + \left[\omega^i_k\,\omega^{jk}\right] = (\omega^{ij})' + \left[\omega^{ik}\,\omega^j_k\right];$$

e se escrevermos

$$\Omega^{ij} = R^{ij,\,rs}\,\delta u_r\,du_s = -\sum_{(r,\,s)} R^{ij,\,rs}\,p_{rs},$$

(1) As quantidades p_{rs} representam as componentes contravariantes do bivector (ciclo).

as quantidades $R^{ij,\,rs}$ dizem-se *símbolos de* Riemann e definem o *tensor de* Riemann-Christoffel.

Êste tensor é introduzido da mesma maneira se empregarmos um reparo arbitrário. Em primeiro lugar, as fórmulas (1) estendem-se imediatamente e temos ainda num espaço de Riemann

$$(\omega_i)' = \left[\omega_k\,\omega^k_i\right]. \tag{1'}$$

Para obter as fórmulas eqüivalentes a (3) basta fazer intervir um ciclo representado pelo bivector $\left[\omega_i(d),\ \omega_i(\delta)\right]$. E temos anàlogamente

$$\Omega^i_j = -\sum_{(r,\,s)} R^i{}_j{}^{rs}\left[\omega_r\,\omega_s\right], \qquad \Omega^{ij} = (\omega^{ij})' + \left[\omega^i_k\,\omega^{jk}\right],$$

$$\Omega^{ij} = -\sum_{(r,\,s)} R^{ij,\,rs}\left[\omega_r\,\omega_s\right]. \tag{3'}$$

Postos estes preliminares, define-se duma maneira fácil a curvatura riemanniana do espaço numa direcção plana: é obtida precisamente fazendo o produto escalar do sistema de bivectores que representa a rotação pelo bivector eqüivalente ao ciclo e dividindo o resultado pelo quadrado da medida do bivector. Representando-a com K, temos

$$K = -\frac{\sum\limits_{(i,\,j)\,(r,\,s)} R^{ij,\,rs}\,p_{rs}\,p_{ij}}{\sum\limits_{(r,\,s)} p^{rs}\,p_{rs}}. \tag{4}$$

Diz-se que um espaço é *isótropo* num ponto quando a curvatura K é a mesma em tôdas as direcções planas que partem dêsse ponto. Sucede assim quando o espaço goza da *livre mobilidade* à volta do ponto. E, no caso mais geral do espaço satisfazer ao axioma da livre mobilidade, há isotropia em cada ponto e o valor de K é o mesmo em todos os pontos. É o que resulta da circunstância do espaço admitir as mesmas transformações isométricas que o espaço euclideano.

Torna-se fácil estabelecer condições analíticas para que o espaço seja de curvatura constante. Da relação (4) deduz-se

$$\sum_{(i,j)(r,s)} R^{ij,\,rs}\, p_{ij}\, p_{rs} = -K \sum_{(i,j)(r,s)} \left(g^{ir} g^{js} - g^{jr} g^{is} \right) p_{ij}\, p_{rs},$$

$$R^{ij,\,rs} = -K \left(g^{ir} g^{js} - g^{jr} g^{is} \right).$$

Temos assim

$$R^i{}_k{}^{rs} = g_{jk} R^{ij,\,rs} = K \left(\xi_{kr} g^{is} - \xi_{ks} g^{ir} \right),$$

onde $\xi_{mn} = 0$, salvo se é $m = n$, pois é então $\xi_{mn} = 1$.

As condições anteriores encontram-se usualmente sob a forma

$$\frac{\partial \Gamma^{is}_{k}}{\partial u_r} - \frac{\partial \Gamma^{ir}_{k}}{\partial u_s} - \left(\Gamma^{ir}_{h} \Gamma^{hs}_{k} - \Gamma^{is}_{h} \Gamma^{hr}_{k} \right) = K \left(\xi_{kr} g^{is} - \xi_{ks} g^{ir} \right).$$

Quando se procede ao estudo directo dos espaços localmente esféricos ou hiperbólicos, de curvatura dada K, encontram-se precisamente estas condições para caracterizar tais espaços; daqui se conclui: *os espaços não euclideanos têm curvatura riemanniana constante e reciprocamente.*

É fácil justificar esta afirmação. Consideremos no espaço projectivo a n dimensões a hiperquádrica *(absoluto)*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0,$$

definida empregando as $n+1$ coordenadas homogéneas $x_1, x_2, \dots, x_n, t$. Sujeitaremos as coordenadas à condição

$$f = \frac{1}{K},$$

onde K é uma constante dada (positiva ou negativa). Para elemento linear tomamos $ds^2 = f(dx_1, \dots, dx_n, dt)$.

Um sistema de valores $x_1, \dots, t$ define um *ponto analítico* que, no espaço projectivo, será considerado diferente doutro ponto analítico coincidente com aquele mas com coordenadas proporcionais.

O valor de f será chamado *quadrado escalar* do ponto. E, dados dois pontos (x_i, t) (x'_i, t'), diz-se *produto escalar* dêstes pontos a expressão

$$\frac{1}{2}\left(\sum_i x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + t' \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

O espaço que estamos estudando abrange os pontos analíticos de quadrado escalar igual a $\frac{1}{K}$.

Dado um vector definido por dois pontos vizinhos M, M' dêste espaço, o segundo dos quais tem por coordenadas $(x_i + dx_i,\ t + dt)$, o ponto analítico $(dx_i,\ dt)$ está no hiperplano polar de M com respeito ao absoluto e diz-se que representa o vector considerado. O quadrado escalar do ponto $(dx_i,\ dt)$ representa, de resto, o quadrado do comprimento do vector. Esta noção estende-se imediatamente aos vectores finitos.

Partamos dum ponto A de quadrado escalar $\frac{1}{K}$ e de n vectores $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ de origem A. Sendo M um ponto qualquer, podemos pôr

$$M = \theta A + \xi_1 \mathbf{e}^1 + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_n \mathbf{e}^n,$$

e tomar $(\xi_1, \dots, \xi_n, \theta)$ como um sistema de coordenadas projectivas.

Pondo

$$(\alpha) \qquad \mathbf{e}^i\, \mathbf{e}^j = g^{ij},$$

vê-se que é

$$M^2 = \frac{1}{K}\theta^2 + g^{ij} \xi_i \xi_j = \frac{1}{K},$$

pois é

$$(\beta) \qquad A^2 = \frac{1}{K}, \qquad A \cdot \mathbf{e}^i = 0.$$

A equação do absoluto fica sob a forma

$$\frac{1}{K}\theta^2 + g^{ij} \xi_i \xi_j = 0,$$

e temos

$$ds^2 = \frac{1}{K}\, d\theta^2 + g^{ij}\, d\xi_i\, d\xi_j.$$

As coordenadas em questão generalizam as *coordenadas de* WEIERSTRASS, obtidas a partir de n vectores rectangulares.

Se empregarmos um sistema de coordenadas projectivas não homogéneas $(u_i = \xi_i,\ \theta = 1)$ e tomarmos para vectores $\mathbf{e}^i$ os vectores $\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial u_i}$, a expressão de ds^2 torna-se

$$ds^2 = g^{ij}\, du_i\, du_j.$$

Inversamente, dado o ds^2 elíptico ou hiperbólico, podemos fazer a reconstrução local do espaço integrando o sistema

$$(\gamma) \qquad d\mathbf{M} = du_i\, \mathbf{e}^i,$$

$$(\delta) \qquad d\mathbf{e}^i = \omega_0^i\, M + \omega_k^i\, \mathbf{e}^k,$$

onde é

$$\omega_0^i = \Gamma_0^{ir}\, du_r, \qquad \omega_k^i = \Gamma_k^{ir}\, du_r.$$

Os pfaffianos ω_0^i, ω_k^i determinam-se tendo em vista (α) e (β) e escrevendo as condições de integrabilidade de (γ). Quanto às condições de integrabilidade de (δ), servirão para estabelecer que o espaço é localmente elíptico ou hiperbólico, de curvatura K. Encontram-se precisamente as equações do texto.

Consideremos agora os espaços não euclideanos. Supondo sempre uma métrica regular e normal, define-se também um grupo de holonomia análogo ao dos espaços localmente euclideanos. Se o nosso espaço é simplesmente conexo, é um espaço esférico ou um espaço hiperbólico. O espaço elíptico não é simplesmente conexo.

Comecemos por tratar os espaços localmente esféricos.

3. Espaços localmente esféricos. — Quando o número de dimensões é par, o grupo de holonomia comporta a operação idêntica e a operação em que são pontos homólogos os pontos antípodas da esfera. Se estes pontos são distintos, obtem-se o espaço esférico; se são idênticos, temos o espaço elíptico. Êste modo de raciocinar mostra que o espaço elíptico não é simplesmente conexo e estabelece que *o espaço elíptico com um número par de dimensões não é orientável* (1).

No caso dos espaços localmente esféricos a duas dimensões, as modalidades topológicas são pois a esfera e o plano elíptico. Na hipótese da esfera, as geodésicas reduzem-se aos círculos máximos. No plano elíptico, homeomorfo do plano projectivo, as linhas geodésicas têm ainda um comprimento finito. A distância elementar ou finita de dois pontos pode obter-se fazendo uma representação isométrica sôbre uma esfera, ou directamente por meio de noções projectivas introduzindo a métrica cayleyana. As linhas geodésicas são fechadas, a sua representação sôbre a esfera reduz-se a semicírculos máximos. Recorrendo à representação geodésica, a verificação das propriedades do movimento é ainda mais evidente.

4. Caso dos espaços localmente hiperbólicos. — A hipótese da conexão simples estuda-se fàcilmente. O estudo do plano hiperbólico confunde-se com a geometria lobatschewskyana. Vê-se imediatamente que o móvel tende assintòticamente para o absoluto. Recorrendo à representação conforme no *semi-plano de* POINCARÉ, as linhas geodésicas são representadas por semicírculos ortogonais à recta δ, representante do absoluto (2). Mas o que importa aqui é o estudo das transformações isométricas directas ou inversas, cuja existência é arrastada pelo *axioma da livre mobilidade*. No caso da representação geodésica, cai-se no estudo das transformações homográficas que conservam o absoluto. A cada homografia corresponde uma homografia sôbre o absoluto; e da natureza dos pontos duplos desta última depende a natureza da isometria. No caso da representação conforme

(1) As operações do grupo de holonomia são deslocamentos acompanhados de simetria. No caso dum número ímpar de dimensões, só ha deslocamentos.

(2) As geodésicas são tôdas *abertas*.

de POINCARÉ, temos de estudar as *transformações circulares de* MÖBIUS, que conservam o absoluto $\eth$, o qual tomaremos como eixo real. O tipo da transformação directa *(deslocamento não euclideano)* é definido pela relação

$$z' = \frac{az+b}{a'z+b'}, \tag{5}$$

onde é $z = x + iy$ e a, b, a', b' são constantes reais que verificam a desigualdade $ab' - ba' > 0$, contanto-que suponhamos $y > 0$. Dum modo mais preciso, suporemos $ab' - ba' = 1$. A transformação inversa (deslocamento acompanhado de simetria) é do tipo

$$z' = \frac{az_0+b}{a'z_0+b'} \tag{6}$$

onde é $z_0 = x - iy$ e $ab' - ba' < 0$.

Voltemos à homografia (5). Se os pontos duplos são imaginários (conjugados), são afixos de dois pontos simétricos A e A' com respeito ao absoluto. O deslocamento não euclideano é do *tipo elíptico* (rotação não euclideana de centro A, no semi-plano de POINCARÉ). Numa rotação contínua, a trajectória de cada ponto é uma *circunferência não euclideana* à volta de A. Tais circunferências constituem o feixe de círculos ortogonais aos círculos do feixe AA'; A é o centro não euclideano. Se os pontos duplos são reais, são afixos de dois pontos A, A' do absoluto. O deslocamento não euclideano é do *tipo hiperbólico* (translação euclideana tendo por eixo o semicírculo ortogonal a $\eth$, de diâmetro AA'). Numa translação contínua, a trajectória de cada ponto é um *hiperciclo* no plano hiperbólico, representado no semi-plano por uma circunferência passando por A e A'. Tais circunferências constituem o feixe de círculos ortogonais do feixe que admite A e A' como pontos limites. O eixo de translação representa uma geodésica. Se os pontos duplos são confundidos, são afixos do mesmo ponto A do absoluto. O deslocamento é do *tipo parabólico*, no plano hiperbólico a transformação faz corresponder entre elas as paralelas lobatschewskyanas de vértice A e num

deslocamento contínuo cada ponto descreve um *horiciclo*. No semi-plano os horiciclos são representados por circunferências tangentes em A ao absoluto e ortogonais aos semicírculos que representam as paralelas de LOBATSCHEWSKY.

No caso das isometrias inversas (6), os pontos duplos A, A' são reais. Obtemos uma translação cujo eixo é o semicírculo ortogonal ao absoluto de diâmetro AA', seguida duma simetria com respeito ao mesmo eixo.

Seja agora um espaço localmente hiperbólico. O seu desenvolvimento sôbre o plano de POINCARÉ cobre êste uma e uma só vez. A um ponto do espaço corresponde um certo conjunto E de pontos do semiplano. Só nos referiremos aos espaços orientáveis. O grupo de holonomia não deve conter deslocamentos do tipo elíptico, pois não há ponto invariante a distância finita. Recorreremos, em parte, à intuïção. Um estudo completo obrigava-nos à teoria dos *grupos fucsianos* de POINCARÉ, teoria que mereceu a atenção de HERMITE e foi desenvolvida por KLEIN em trabalhos notáveis.

No caso euclideano, fomos levados aos espaços de CLIFFORD e conseqüente rêde de paralelogramos do plano; aqui encontraremos uma rêde sôbre o semiplano de POINCARÉ, cujas malhas serão limitadas, quer por porções do eixo real, quer por arcos de círculo com centro no absoluto. Os lados duma malha (polígono fundamental) são dois a dois homólogos e as operações geratrizes do grupo de holonomia são precisamente os deslocamentos que põem em coincidência êsses dois lados. Há excepção para os lados situados sôbre o absoluto, os quais se encontram a uma distância infinita dos pontos do semiplano. Os pontos dum polígono fundamental são os representantes do espaço localmente hiperbólico orientável, com a hipótese de serem considerados idênticos os pontos homólogos sôbre a fronteira do polígono. Um ponto do polígono fundamental, que tenda para o absoluto, representa na variedade riemanniana em questão um ponto que se afasta indefinidamente. As geodésicas afectam na totalidade do semiplano de POINCARÉ a forma simples de circunferências ortogonais ao absoluto. Para obter a sua disposição na variedade considerada, devemos fazer o transporte (no sentido não euclideano) para o interior dum polígono fundamental qualquer. BOULIGAND resume do modo seguinte os resultados de HADAMARD: Temos *geodésicas fechadas* α correspondentes às porções de semicirculos que encontram pontos homólogos sôbre lados homólogos do polígono fundamental. Se admitirmos que o grupo de holonomia só comporta deslocamentos hiperbólicos, a operação que leva o polígono P_i a coincidir com o polígono P_k deixa dois pontos invariantes A, A' sôbre o absoluto, os quais são precisamente os extremos do diâmetro do círculo Γ, sôbre o qual está localizada a geodésica fechada. Assim, a cada par de polígonos fica associada uma única geodésica fechada. Para obter um representante único de cada uma delas, fixa-se o índice i e faz-se variar k. Uma conclusão a tirar é ainda que os pontos A, A' não são *interiores* a um polígono P. Temos *geodésicas assintóticas de geodésicas fechadas* -β-, que são representadas na totalidade do semiplano por semicírculos tangentes a Γ num dos pontos A, A'. As *geodésicas que se afastam indefinidamente* γ correspondem a semicírculos ortogonais ao absoluto, que encontram êste em pontos pertencentes a um lado dum polígono P. Finalmente, as *geodésicas situadas inteiramente a distância finita* ε, sem serem fechadas ou assintóticas destas. Para se ver que existem, tomemos um ponto M do semiplano e consideremos os semicírculos ortogonais a δ passando por M. Excluamos aqueles que cortam δ no interior dum polígono P. O conjunto E dos semicírculos assim obtidos contém particularmente os semicírculos que representam as linhas β passando por M e que formam um conjunto E'. Os conjuntos de pontos de δ correspondentes a E, E' serão designados com e, e'. O conjunto e contém e' e não pode preencher os pontos dum segmento de δ. Cada ponto de e é ponto limite de e', de sorte que e é um conjunto *descontínuo* e *perfeito* no sentido de CANTOR. Consideremos agora um ponto de e como ponto limite duma sucessão numerável de pontos de e'. O semicírculo C de E que lhe corresponde pode considerar-se, em face da definição de E', como limite duma infinidade numerável de semicírculos representantes de linhas β. Assim podemos fazer corresponder a C uma infinidade numerável de geodésicas fechadas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ tais que o móvel se desloca aproximando-se de cada

uma delas, que depois abandona para se aproximar da seguinte e assim sucessivamente.

A existência de geodésicas a distância finita não pode ter lugar no caso dum espaço simplesmente conexo ou ainda no caso evidente de se reduzir a dois pontos de δ o conjunto e' (as operações do grupo reduzem-se então a potências duma mesma transformação).

5. Espaços de curvatura riemanniana negativa ou nula. — No que vai seguir-se, suporemos que os g^{ik} têm derivadas contínuas das três primeiras ordens. As equações das geodésicas permitem [partindo dum ponto O (u_i^0), que será tomado para origem dos arcos] definir os u_i em função de s e de $n-1$ constantes arbitrárias. As igualdades

$$x_i = s\left(\frac{du_i}{ds}\right)_0$$

darão as *coordenadas normais* correspondentes a cada ponto u_i. E os métodos do capítulo III permitem mostrar que as diferenças $u_i - u_i^0$, consideradas como funções dos x_i, admitem derivadas contínuas das duas primeiras ordens. Para estabelecer êste resultado, deve ter-se em vista que a eliminação de s nos integrais se fará por intermédio da relação $\sum x_i^2 = s$.

O mesmo pode dizer-se dum vector definido pela sua posição inicial em O e determinado em cada ponto M por deslocamento paralelo ao longo da geodésica OM.

No que segue servimo-nos dum reparo arbitrário rectangular, que será definido pela sua forma inicial (R_0). As propriedades do espaço deduzidas desta maneira só respeitarão, por isso, aos pontos que possam ser atingidos pelas geodésicas que partem de O. Se várias geodésicas atingem o ponto M, corresponderão a êste ponto outros tantos sistemas de coordenadas normais.

Poremos

$$x_i = a_i t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde os a_i definem, relativamente a (R_0), a direcção da geodésica OM; assim os a_i são constantes ao longo de cada geodésica que parte de O. A variável t verifica a igualdade

$$s = t\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2},$$

na qual supomos $t > 0$.

Introduzindo as coordenadas superabundantes a_i, t, faremos

$$\omega_i = a_i\,dt + \pi_i, \qquad \omega_{ij} = 0 + \pi_{ij}.$$

Na verdade, o vector $d\mathbf{M}$ tangente a uma geodésica OM tem por componentes as quantidades $a_i\,dt$; a rotação correspondente é nula. Por isso π_i e π_{ij} são formas em $da_1, da_2, \ldots, da_n$, identicamente nulas para $t=0$.

Seja

$$\omega_i(d) = a_i\,dt, \qquad \omega_{ij}(d) = 0,$$

$$\omega_i(\delta) = \pi_i(\delta), \qquad \omega_{ij}(\delta) = \pi_{ij}(\delta);$$

as fórmulas (1′) e (3′) dão imediatamente

$$\delta a_i\,dt - d\pi_i(\delta) = -a_k\,\pi_{ki}(\delta)\,dt,$$

$$-d\pi_{ij}(\delta) = \sum_{(r,s)} R_{ij,rs}\left[a_s\,dt\,\pi_r(\delta) - a_r\,dt\,\pi_s(\delta)\right] = R_{ij,rs}\,a_s\,\pi_r(\delta)\,dt,$$

de sorte que é

(7) $$\frac{d\pi_i(\delta)}{dt} = \delta a_i + a_k\,\pi_{ki}(\delta)$$

$$\frac{d\pi_{ij}(\delta)}{dt} = R_{ij,rs}\,a_r\,\pi_s(\delta).$$

Temos assim

$$\frac{d^2\pi_i(\delta)}{dt^2} = R_{ki,rs}\,a_k\,a_r\,\pi_s(\delta),$$

$$\sum \pi_i(\delta)\frac{d^2\pi_i(\delta)}{dt^2} = R_{ki,rs}\,a_k\,a_r\,\pi_s(\delta)\,\pi_i(\delta) = -K\triangle^2,$$

onde $\triangle^2$ é o quadrado da medida do ciclo. Tendo em vista que é $K \leq 0$, concluímos ser

$$\sum \pi_i(\delta)\frac{d^2\pi_i(\delta)}{dt^2} \geq 0, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\sum \pi_i^2 \geq 2\sum\left(\frac{d\pi_i}{dt}\right)^2.$$

Considerada como função de t, a soma $\sum \pi_i^2$ só poderá anular-se num ponto t_0 diferente do ponto $t=0$ se fôr constantemente nula a derivada $\frac{d\pi_i}{dt}$, o que vai de encontro a (7).

Seguindo sempre a exposição de CARTAN, consideremos agora a função $\sqrt{\Sigma\,\pi_i^2}$. Mostra-se fàcilmente que a sua derivada segunda em ordem a t é também nula ou positiva. A derivada primeira tem no ponto $t=0$ o valor $\sqrt{da_1^2 + \ldots + da_n^2}$, pois que, sendo nesse ponto

$$\frac{\sum \pi_i \frac{d\pi_i}{dt}}{\sqrt{\Sigma\,\pi_i^2}} = \frac{\sum\left(\frac{d\pi_i}{dt}\right)^2 + \sum \pi_i \frac{d^2\pi_i}{dt^2}}{\sum \pi_i \frac{d\pi_i}{dt} : \sqrt{\Sigma\,\pi_i^2}},$$

deduz-se imediatamente

$$\frac{\sum \pi_i \frac{d\pi_i}{dt}}{\sqrt{\Sigma\,\pi_i^2}} = \sqrt{\Sigma\,da_i^2}.$$

Fica assim estabelecida a desigualdade

$$\sum \pi_i^2 \geqq t^2 \sum da_i^2,$$

ou, pondo $t=1$,

$$ds^2 \geqq \sum dx_i^2. \qquad (8)$$

Se sujeitássemos os parâmetros a_i à condição $\sum a_i^2 = 1$, a relação

$$ds^2 = \sum (a_i dt + \pi_i)^2 \geqq dt^2 + 2dt \sum a_i \pi_i + t^2 \sum da_i^2,$$

dava imediatamente, tendo em vista a propriedade das *superfícies paralelas*,

$$ds^2 \geqq dt^2 + t^2 \sum da_i^2,$$

onde t significa o comprimento da geodésica OM.

O que vai seguir-se supõe que o espaço considerado é normal. Sendo esta propriedade independente da parametragem, concluímos que será diferente de zero em todos os pontos atingidos pelas geodésicas procedentes de O o determinante funcional das variáveis x_i.

O espaço *euclideano normal*, onde são representadas as coordenadas cartesianas x_i, é *homeomorfo* do espaço $\mathfrak{E}'$ suposto definido fazendo intervir no espaço dado $\mathfrak{E}$ as coordenadas normais. Um resultado importante, que pode demonstrar-se fàcilmente, é o seguinte: *todo o ponto de $\mathfrak{E}$ tem, pelo menos, um representante em $\mathfrak{E}'$.*

Quando $\mathfrak{E}$ é simplesmente conexo, cada um dos seus pontos tem um *único* representante em $\mathfrak{E}'$; daí a seguinte conclusão: *um espaço de* RIEMANN *normal, simplesmente conexo, de curvatura negativa ou nula, é idêntico, sob o ponto de vista da Analysis situs, ao espaço euclideano.*

6. Geodésicas dos espaços simplesmente conexos. — Do que acabamos de ver, resulta imediatamente que, se o espaço $\mathfrak{E}$ é simplesmente conexo, dois pontos de $\mathfrak{E}$ definem uma única geodésica, a qual se prolonga indefinidamente nos dois sentidos *(geodésica aberta)*.

A fórmula (8) mostra que o comprimento riemanniano l duma curva que passa por dois pontos M, M', de coordenadas x_i, x_i', satisfaz à relação

$$l^2 \geqq \sum (x_i' - x_i)^2.$$

Posto isto, consideremos o triângulo geodésico OMM' de lados $\widehat{OM} = a$, $\widehat{OM'} = b$, $\widehat{MM'} = c$ e de ângulos A, B, C. No espaço euclideano normal é (conservando as letras)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

Como ao longo das geodésicas que partem de O os comprimentos riemannianos são idênticos aos euclideanos (e o ângulo C é mantido), temos

$$c^2 \geqq a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

Sejam A um ponto fixo e M um ponto qualquer duma geodésica Γ. Se a geodésica OA é normal a Γ, temos $\widehat{OA} < \widehat{OM}$.

Êste resultado leva a concluir que a distância $\widehat{OM}$ não pode passar por um máximo OA'. O cálculo da variação primeira de OA' levaria a concluir que a geodésica OA' seria normal a Γ, que teria todos os pontos à mesma distância de O, resultado absurdo. Mas haverá um mínimo (e um só), visto que as geodésicas são abertas; a distância $\widehat{OA}$ correspondente é a distância de O a Γ.

Ficamos agora em condições de compreender o seguinte modo de parametragem do espaço $\mathfrak{E}$.

É dada uma geodésica *(base)* Γ sôbre a qual se tomam uma origem A e um sentido dos arcos positivos; as diferentes geodésicas normais a esta preencherão o espaço $\mathfrak{E}$; as coordenadas dum ponto M de $\mathfrak{E}$ são:

I) a abcissa curvilínea u da normal a Γ que passa por M;

II) a distância de M a Γ;

III) os parâmetros directores $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ da geodésica normal a Γ com respeito ao reparo (R) obtido, no pé dessa geodésica, por deslocamento paralelo do reparo rectangular (R_0), êste arbitrado em A de modo que um dos vectores de coordenadas (o de ordem n) seja tangente a Γ.

A coordenada v indicada em II pode substituir-se pela quantidade $t \geqq 0$ dada pela relação

$$t\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2} = v.$$

Temos

$$\omega_i = a_i\,dt + \pi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\omega_n = 0 + \pi_n, \qquad \omega_{ij} = 0 + \pi_{ij}.$$

Quando é $t=0$, as formas lineares π_i, π_{ij} são identicamente nulas e a forma π_n reduz-se a du. E vê-se imediatamente que é

$$\frac{d\pi_i(\delta)}{dt} = \delta a_i + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \pi_{ki}(\delta), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\frac{d\pi_n(\delta)}{dt} = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \pi_{kn}(\delta),$$

$$\frac{d\pi_{ij}(\delta)}{dt} = R_{ij,rs}\, a_r \pi_s(\delta),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum \pi_i^2\right) \geqq 2\sum\left(\frac{d\pi_i}{dt}\right)^2.$$

Considerada como função de t, a soma $\sum \pi_i^2$ é superior a du^2, de modo que o ds^2 do espaço (obtido pondo $t=1$) goza da mesma propriedade, visto que se identifica com aquela soma.

Supondo que os a_i são cossenos directores, a fórmula 8 do § 8 do capítulo II mostra que é

$$ds^2 = dt^2 + \sum \pi_i^2 > dt^2 + du^2.$$

Empregando uma variável τ para significar tempo e identificando ds com $C\,d\tau$ (onde C é uma constante arbitrária), o algoritmo de LAGRANGE aplicado ao parâmetro t leva à equação

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{1}{ds^2}\sum \pi_i \frac{\partial \pi_i}{\partial t} = 0.$$

Se tivermos em vista que é

$$\sum \pi_i \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial t^2} \geqq 0,$$

concluímos que, ao longo duma linha geodésica G, a distância t dum ponto de G à geodésica de base Γ tem uma derivada segunda, com respeito a s, positiva ou nula. Assim t não pode passar por um máximo, sendo possíveis dois casos:

α) A quantidade t tem um mínimo. Então a fórmula há pouco invocada mostra que t corresponde (nesse mínimo) a uma geodésica que é perpendicular a Γ e a G (geodésica que pode desaparecer); e as duas linhas Γ, G, que admitem uma única perpendicular comum, afastam-se indefinidamente uma da outra nos dois sentidos.

β) A quantidade t varia sempre no mesmo sentido, partindo do valor $+\infty$ quando é $s=-\infty$, por exemplo. Deslocando-nos sôbre G, no sentido dos arcos positivos, t tende para um limite h, nulo ou positivo. A linha G, percorrida no sentido indicado, é *assíntota* de Γ.

Se, neste último caso, baixarmos de cada ponto M de G a geodésica perpendicular a Γ, o pé dessa perpendicular afasta-se indefinidamente num sentido determinado.

Sejam, com efeito, A um ponto fixo de G e α o pé da geodésica correspondente; M e μ dois pontos análogos, sendo M infinitamente vizinho de A e colocado no sentido dos arcos positivos. O cálculo da variação primeira de $M\mu$ mostra que o ângulo em M é sempre obtuso. Nessas condições, qualquer que seja M no sentido considerado, temos $\widehat{A\mu} > \widehat{AM}$. Desde o instante em que é $\widehat{AM} > \widehat{A\alpha}$, é também $\widehat{A\mu} > \widehat{A\alpha}$ e o ponto μ não pode atravessar α. Por outro lado, como a distância $A\mu$ aumenta indefinidamente, o ponto μ afasta-se indefinidamente, q. e. d.

Tomemos agora o ponto variável μ sôbre Γ; quando μ se afasta, a distância de μ a G (inferior a $M\mu$) é inferior a h; assim, *Γ é assíntota de G.*

Se duas geodésicas são assíntotas de Γ no mesmo sentido, são assíntotas entre si, porque, quando μ se afasta indefinidamente, os pontos M_1, M_2 correspondentes estão a uma distância inferior à soma $\widehat{M_1\mu} + \widehat{M_2\mu}$.

7. Espaços não simplesmente conexos. — Suponhamos finalmente que o espaço $\mathfrak{E}$ não é simplesmente conexo. Ao mesmo ponto de $\mathfrak{E}$ correspondem vários pontos de $\mathfrak{E}'$.

Estes diferentes pontos deduzem-se uns dos outros por transformações isométricas do espaço $\mathfrak{E}'$, transformações que constituem grupo designado sob o nome de *grupo de conexão* do espaço $\mathfrak{E}$.

O grupo é descontínuo e nenhuma das suas operações, salvo a operação idêntica, deixa invariante um ponto de $\mathfrak{E}'$.

É possível, por meio das operações do grupo, dividir o espaço $\mathfrak{E}'$ em domínios fundamentais (idênticos sob o ponto de vista métrico), cada um dêles contendo no seu interior um e um só representante de cada ponto de $\mathfrak{E}$. Um domínio é limitado por um número finito ou infinito de faces, que se correspondem duas a duas, e as *operações geratrizes* do grupo levam precisamente uma face a coincidir com a face correspondente.

Esta divisão de $\mathfrak{E}'$ permite-nos afirmar que é *possível cindir uma variedade riemanniana normal, de curvatura negativa ou nula, de modo a torná-la simplesmente conexa e homeomorfa do espaço euclideano.*

A um ponto de $\mathfrak{E}$ corresponde, na verdade, uma infinidade de pontos de $\mathfrak{E}'$, como pode demonstrar-se fàcilmente, tendo em vista as propriedades do grupo. Por isso, o número de domínios fundamentais, como o das transformações do grupo, é infinito. *Por cada dois pontos de $\mathfrak{E}$ passa uma infinidade de geodésicas irredutíveis.*

ÍNDICE