# ÜBER DIE FASTGRUPPENTHEORIE

VON

A. ALMEIDA COSTA

## EINFÜHRUNG

Der § 1 enthält eine Definition einer Fastgruppe, die in vielen Anwendungen nützlich ist. In der Nummer 1 desselben §, in bezug auf die BRUCKschen Fastgruppen, wird solche Definition zuträglich benutzt. Auch in § 1 wird die Existenz von nicht assoziativen (entweder kommutativ oder nicht kommutativ) Fastgruppen, jeder endlichen Ordnung, in einfacher Weise bewiesen.

Der § 2 gibt, in einer sehr direkten Art, eine Normalitätstheorie von KIOKEMEISTER wieder. Die Kommutativität der von diesem Verfasser eingeführten normalen Kongruenzen ist baldige Folgerung der gemachten Überlegungen. Es werden auch einen in sehr eigentümlichen Bedingungen Satz von ZASSENHAUS sowie einen konsequenten Satz von JORDAN-HÖLDER bewiesen. Der letzte zeigte auch KIOKEMEISTER, unter Benutzung einer Behauptung von ORE.

Der § 3 wird dem Studium von einseitigen Normalteilern gewidmet. Es handelt sich eines Begriffes zwischen der Definition von ALBERT, [1] (1), und der von KIOKEMEISTER,

---

(1) Die Angaben in rechteckigen Parenthesen beziehen sich auf das am Ende dieser Arbeit zitierte Literaturverzeichnis.

[5]. Das Hauptinteresse solches Begriffes liegt besonders darin, dass man, in diesem neuen Fall, die assoziativen Methoden von ALBERT, von disem Verfasser für Fastgruppen mit Einselement *(loops)* angewandt, auch hier benutzt werden dürfen. Es gibt keine tiefe Veränderungen. Die theorie von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER-ZASSENHAUS wird vollständig dargelegt.

Der § 4 läuft wie der vorangehende. Es handelt sich um zweiseitige Normalteiler.

In § 5 gibt man eine Definition einer einfachen Fastgruppe, etwas allgemeinere als bei der ALBERTschen. Es wird auch dort bewiesen, dass das Zentrum einer Fastgruppe dann und nur dann nicht leer ist, wenn sie Identität hat.

Die Erweiterungstheorie läuft in § 6 etwas anders als bei ALBERT, [8]. Gewisse Bemerkungen haben Satz 3 hervorbracht. Satz 6 desselben Paragraphen ist interessanter, da er erlaubt solche Lagen zu finden, die sich zwischen dem allgemeinen definierten Ausdehnungsfall und dem des direkten Produkts stellen. Ein Beispiel davon wird im Satze 9 des fraglichen § angegeben.

## § 1 – DEFINITION UND EXISTENZ VON FASTGRUPPEN

1) **Definition**—Eine Menge $Q = \{a, b, c, \cdots, x, y, \cdots\}$ heisst eine *Fastgruppe*, wenn die folgenden Axiome gelten: 1) Jedem Element $a \in Q$ entsprechen zwei Transformationen $T^{(r)}_a$ und $T^{(l)}_a$, die eineinseitig die Menge auf sich abbilden; 2) es gilt die Gleichheit $x\,T^{(r)}_a = a\,T^{(l)}_x$. Der gemeinsame Wert beider Glieder dieser Gleichheit heisst *Produkt* von $x$ mit $a$. Man schreibt $x\,T^{(r)}_a = a\,T^{(l)}_x = x \cdot a = xa$. Die Äquivalenz dieser definition zu den üblichen ([1], [2]) ersieht man ganz gleich.



Die Transformationen $T^{(r)}_a$ und $T^{(l)}_a$ haben folgende Einzelheit, die nützlich ist zu bemerken: wenn man $x\,T^{(r)}_a = x\,T^{(r)}_b$, für ein einziges $x$ hat, dann ist $a = b$. In der Tat, die Annahme ergibt $a\,T^{(l)}_x = b\,T^{(l)}_x$; dann ist $a = b$, da $T^{(l)}_x$ verschiedene Elemente auf verschiedenen Elementen abbildet.

Eine assoziative Fastgruppe ist eine Gruppe.

Q heisst eine BRUCKsche Fastgruppe, wenn eine dritte Bedingung erfült wird: 3) es gibt zwei Transformationen $L$ und $R$, von Q, für welche folgende Gleichheiten gelten: $T^{(l)}_a T^{(l)}_{aL} = I =$ Identitätstransformation, $T^{(r)}_a T^{(r)}_{aR} = I$. Eine direkte Definition würde man durch folgende beide Eigenschaften geben können: 1') jedem $a \in Q$ entsprechen zwei Abbildungen $T^{(r)}_a$ und $T^{(l)}_a$ von Q in sich, die die Bedingung $x\,T^{(r)}_a = a\,T^{(l)}_x$ erfüllen; 2') es existieren die Transformationen $L$ und $R$ wie in 3).

Man ersieht leicht, dass $T^{(l)}_{aL}$ eine Transformation ist: damit man $x\,T^{(l)}_{aL} = y \in Q$ habe, es genügt $x = y\,T^{(l)}_a$ zu setzen; andererseits jedes $T^{(l)}_{aL} = T^{(l)}_b$ (man nimmt $aL = b$) bildet verschiedene Elemente auf verschiedenen Elementen ab. Ähnlich ist $T^{(r)}_{aR}$ eine eineinseitige Abbildung von Q auf sich. Und, wie $aL$ und $aR$ beliebige Elemente von Q sind, es folgt, dass $T^{(l)}_a$ und $T^{(r)}_a$ Transformationen von Q bedeuten.

SATZ 1: *Für beliebiges $a \in Q$, die Transformationen $L$ und $R$ genügen folgenden Gleichheiten:* $L = T^{(r)}_a R\, T^{(l)}_a$, $R = T^{(l)}_a L\, T^{(r)}_a$.

Aus

$$a\,T^{(l)}_c T^{(l)}_{cL} = a, \quad \text{oder} \quad (cL)\,T^{(r)}_{aT^{(l)}_c} = a,$$

folgt dann

$$cL = a\,T^{(r)}_{aT^{(l)}_c R} = a\,T^{(l)}_c R\, T^{(l)}_a = c\,T^{(r)}_a R\, T^{(l)}_a,$$

was die erste angegebene Gleichheit ergibt. In bezug auf $R$, macht man eine ähnliche Überlegung. Wir werden auch folgenden Satz beweisen:

Satz 2: *In einer* Bruckschen *Fastgruppe, jeder involutorische Automorphismus ist mit $R$ und $L$ vertauschbar.* In allgemeinen, falls $S$ ein Automorphismus einer Fastgruppe Q ist, hat man $(ab)S = aS \cdot bS$, oder

$$T_a^{(l)} S = S T_{aS}^{(l)}, \quad T_a^{(r)} S = S T_{aS}^{(r)}.$$

Nun nehmen wir $S$ als involutorisch (d.h. $S^2 = I$) an. Man leitet

$$S T_a^{(l)} S = T_{aS}^{(l)}, \quad S T_a^{(r)} S = T_{aS}^{(r)}$$

ab. Irgendeine dieser Gleichheiten charakterisiert $S$ als involutorisch, falls $S$ Automorphismus ist.

Wenn Q eine Brucksche Fastgruppe ist, dann gilt

$$T_{aS}^{(l)} S T_{aL}^{(l)} = S T_a^{(l)} T_{aL}^{(l)} = S, \quad T_{aS}^{(r)} S T_{aR}^{(r)} = S T_a^{(r)} T_{aR}^{(r)} = S.$$

Danach, setzen wir $R' = RS, L' = LS$, was z.B.

$$S T_{aS}^{(r)} S T_{aR'S}^{(r)} = I$$

herbringt. Hieraus entnimmt man

$$T_{aR'S}^{(r)} = S T_{aSR}^{(r)} S, \quad x T_{aR'S}^{(r)} = (xS) T_{aSR}^{(r)} S,$$

oder noch

$$(aR'S) T_x^{(l)} = (aSR) T_{xS}^{(l)} S.$$

Indem wir $x$ festsetzen, da $a$ beliebig ist, gewinnen wir $R'S T_x^{(l)} = SR T_{xS}^{(l)} S$. So gilt, für jedes $x$,

$$R' = SR T_{xS}^{(l)} S T_{xL}^{(l)} S, \quad R T_{xS}^{(l)} S T_{xL}^{(l)} = SR'S = SR.$$



Wir haben schon gesehen, dass $T_{xS}^{(l)} S T_{xL}^{(l)} = S$ ist. Dann haben wir $RS = SR$, wie erwünscht. In ähnlicher Weise würde man die Gleichheit $LS = SL$ beweisen.

2) **Der Begriff der Isotopie**—Der Begriff der Isotopie für multiplikative Systeme (auch *Gruppoide* gennant) findet man bei Bruck, [3], (hierbei verg. auch [9]). In diesem Augenblick beschränken wir auf die Definition der Isotopie für Fastgruppen. Denken wir uns einen Träger $\mathfrak{C} = \{a, b, c, \cdots, x, y, \cdots\}$ und auf $\mathfrak{C}$ eine definierte Fastgruppe Q; neben Q kann man eine zweite Fastgruppe $Q_0$ definieren, indem man drei eineinseitige Transformationen $P, Q, C$ von $\mathfrak{C}$ auf sich beliebig wählt und dann

$$T_a^{(r_0)} = P T_{aQ}^{(r)} C, \quad T_a^{(l_0)} = Q T_{aP}^{(l)} C$$

setzt. Tatsächlich gelten die Gleichheiten

$$x T_a^{(r_0)} = (xP) T_{aQ}^{(r)} C = (aQ) T_{xP}^{(l)} C = a T_x^{(l_0)}.$$

Die Fastgruppe $Q_0$ heisst ein *Isotop* von Q.

3) **Über die Existenz von nichtassoziativen endlichen Fastgruppen jeder Ordnung**—Auf Grund des Begriffs der Isotopie, lässt sich die Existenz von nichtassoziativen endlichen Fastgruppen jeder Ordnung leicht gewinnen. Natürlich werden die Ordnungen 1 und 2 ausgeschlossen.

Wir nehmen eine zyklische Gruppe der Ordnung $n \geqq 3$:

$$\mathfrak{G} = \{a^0 = 1, a = 2, a^2 = 3, \cdots, a^{n-1} = n\}.$$

Wenn man $p = a^i, q = a^j$, $poq = (pP \cdot qQ)C$ setzt, dann wird eine Fastgruppe $\mathfrak{Q}_0$ definiert, mit dem Träger $\mathfrak{G}$. Für jedes $n \geqq 3$, machen wir

$$1P = 1, \quad 2P = 3, \quad 3P = 2; \qquad 1Q = 1, \quad 2Q = 2, \quad 3Q = 3.$$

Es folgt:

$$1 o 2 = (1 \cdot 2)C = 2C; \quad 2 o 1 = (3 \cdot 1)C = 3C \neq 2C.$$

Die Fastgruppe $\mathfrak{Q}_0$ ist nicht kommutativ. Im Fall $n \geqq 3$, ist $\mathfrak{Q}_0$ nichtassoziativ, sonst wäre $\mathfrak{Q}_0$ eine Gruppe und damit kommutativ. Wenn nun $n > 3$ angenommen wird, machen wir $C = I =$ Identitätstransformation. Es gilt

$$(2 o 2) o 1 = (3 \cdot 2)P \cdot 1Q = 4P \cdot 1 = 4P,$$
$$2 o (2 o 1) = 2P \cdot (2P \cdot 1Q)Q = 3 \cdot (3 \cdot 1)Q = 3 \cdot 3Q = a^4.$$

Die Annahme $n = 4$ darf $4P = a^4$ nicht ergeben, da $a^4 = 1, 4P \neq 1P = 1$ ist. $\mathfrak{Q}_0$ ist nichtassoziativ. Für den Fall $n > 4$, es genügt die neue Bedingung $4P = 4 \neq a^4 = 5$ hinzufügen. Man kommt zu

Satz 3: *Es gibt nichtassoziative und nichtkommutative Fastgruppen jeder endlichen Ordnung, ausser 1 und 2.*

Kehren wir zu der zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}$ zurück. Wir nehmen $P = Q = V$ und somit $poq = (pV \cdot qV)C = qop$. Die Fastgruppe $\mathfrak{Q}_0$ ist immer kommutativ. Die Annahme $1V = 1, 2V = 3, 3V = 2$ zeigt, falls $C = I$ ist, die Gültigkeit folgender Gleichheiten:

$$(2 o 2) o 1 = (3 \cdot 3)V \cdot 1V = (3 \cdot 3)V,$$
$$2 o (2 o 1) = 2V \cdot (2V \cdot 1V)V = 3 \cdot 3V = 3 \cdot 2.$$

Für $n = 3$, hat man $(3 \cdot 3)V = 2V = 3$, sowie $3 \cdot 2 = 1$; für $n = 4$ gewinnt man $(3 \cdot 3)V = 1V = 1 \neq 3 \cdot 2 = 4$. Endlich, wenn $n > 4$ ist, dann gilt



$$(3 \cdot 3)V = a^4V, \quad 3 \cdot 2 = a^3,$$

wodurch es genügt die neue Bedingung $a^4V \neq a^3$ einzuführen, um erreichen, dass $\mathfrak{Q}_0$ nichtassoziativ ist. Also:

Satz 4: *Es gibt nichtassoziative und kommutative Fastgruppe jeder endlichen Ordnung, ausser* 1 *und* 2.

Bei [2] wird eine grosse Anzahl von Existenzprobleme für Fastgruppen behandelt. Die fraglichen Fastgruppen, die gewisse Eigenschaften haben werden, können sowohl endlich als unendlich sein. Im Fall der unendlichen Ordnung, Bruck, ([2] S. 26-33), geht von einem nichtassoziativen Ring, wie in Seiten 29-30 verwirklicht wird, aus, und lehrt die Bildung, auf dem Träger des Ringes, einer mit Einselement nichtassoziativen Fastgruppe, die auch nichtkommutativ ist. Die fragliche Fastgruppe hat unendliche Elemente soviel wie die des Ringes von welchen man ausgeht; und zwar ist der Ring eine endliche nichtassoziative Algebra über einem Körper mit unendlichen Elementen.

## § 2–KONGRUENZKLASSEN IN FASTGRUPPEN

**1) Über die Homomorphismen von Fastgruppen**— Denken wir uns einen Homomorphismus $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}'$ von zwei Fastgruppen. Wenn er die Abbildung $a \to a', x \to x'$, usw. bestimmt, gewinnen wir eine Einteilung von $\mathfrak{Q}$ in fremde Klassen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots$, wenn wir die Elemente mit demselben Bild in eine Klasse vereinigen. Wir haben z. B.

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots, \mathfrak{P}, \cdots, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \cdots\} \qquad (1)$$

als Quotientraum. Dieser Raum (1) ist eine Fastgruppe. Falls $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$, das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ stellt die Elemente der Form $ab$ dar. Erstens erkennen wir, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sich genau der Elemente deren Bild $(ab)' = a'b'$ ist zusammensetzt. Wenn $x \rightarrow x' = a'b'$ ist, dann die Gleichung $x = at, (t \in Q)$, ergibt $x' = a't' = a'b'$, d.h. $t' = b', t \in \mathfrak{B}$. Es ist in der Tat $x \in a\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Der Beweis zeigt sogar, dass man, für jedes $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = a\mathfrak{B}$ hat. Zweitens betrachten wir die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$. Die Gleichung $ax = b$ hat die Lösung $x \in Q$. Dann wird $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$ erfüllt, wenn wir die Klasse $\mathfrak{X}$ nehmen wo $x$ liegt. Irgendeine Klasse $\mathfrak{Y}$, für welche man auch $\mathfrak{A}\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}$ hat, ergibt, für jedes $y \in \mathfrak{Y}$, $ay \in \mathfrak{B}$, wodurch $a'y' = b'$. Da auch $a'x' = b'$ ist, hat man $a'y' = a'x', y' = x'$. Hieraus entnimmt man, dass $x$ und $y$ in derselben Klasse liegen, was $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ erfordet. In ähnlicher Weise würde man die Eindeutigkeit der Lösung von $\mathfrak{X}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ beweisen.

Als Anwendung der Tatsache, dass die Gleichheit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = a\mathfrak{B}$ besteht, können wir entnehmen, dass es nicht zwei verschiedenen Quotientenräume (1) existieren, die beide Fastgruppen sind und eine gemeinsame Klasse haben. Wenn $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{X}_1, \cdots\}$ der zweite Raum ist, betrachten wir eine Klasse $\mathfrak{C}_1$ und nehmen $\mathfrak{B}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1$ an. Falls $b_1 \in \mathfrak{B}_1$, dann ist $b_1\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1$. Da man aber z. B. $b_1 \in \mathfrak{B}$ hat, hat man auch $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = b_1\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1$ als eine Klasse des ersten Raumes. Irgendeine Klasse eines Raumes gehört zum anderen. Beide Räume sind identisch.

Wir gehen aus von dem Raum (1). Wenn eine Klasse $\mathfrak{P}$ der Gleichheit $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ genügt, gilt auch $p\mathfrak{P} = \mathfrak{P}, (p \in \mathfrak{P})$. Die Elemente von $\mathfrak{P}$ setzen ein Unterfastgruppe von $Q$ zusammen, wie man genau ersieht der Tatsache, dass es, für beliebiges $p \in \mathfrak{P}$, die Gleichheiten $p\mathfrak{P} = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}p$ gelten.

Es besteht folgenden Wortlaut, der die vorangehenden Überlegungen zusammenfasst:



Satz 1: *Wenn $Q \sim Q'$ ein Homomorphismus von zwei Fastgruppen ist, dann ist der Quotientraum* (1) *eine Fastgruppe. Das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von zwei Klassen darf man unter den Formen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = a\mathfrak{B} = \mathfrak{A}b$ schreiben, wobei $a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}$ beliebig sind. Zwei Zerlegungen einer Fastgruppe in fremde Klassen, die Fastgruppen bilden, sind identisch, falls es eine gemeinsame Klasse gibt. Und wenn es in* (1) *eine Klasse $\mathfrak{P}$ existiert für welche man $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ (oder $p\mathfrak{P} = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}p$, für jedes $p \in \mathfrak{P}$) hat, dann ist $\mathfrak{P}$ eine Unterfastgruppe von $\mathfrak{P}$.* Dieser Satz kann man mit dem folgenden vervollständigen:

Satz 2: *Wenn zwei Zerlegungen einer Fastgruppe in fremde Klassen Fastgruppen bilden und die erste eine Klasse $\mathfrak{A}$ besitzt, die eine Klasse $\mathfrak{A}_1$ der zweiten enthält, dann die Klassen der ersten Zerlegung setzen sich genau von Klassen der zweiten zusammen.* Um diese Behauptung zu erkennen, es genügt zu bemerken, dass es für die Klassen $\{\mathfrak{A}_1, x\mathfrak{A}_1, y\mathfrak{A}_1, \cdots\}$ der zweiten Zerlegung die Inklusionen $x\mathfrak{A}_1 \subseteq x\mathfrak{A}, y\mathfrak{A}_1 \subseteq y\mathfrak{A}$, usw. gelten, wie aus $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$ folgt. Aber $x\mathfrak{A}, y\mathfrak{A}$, usw. sind Klassen der ersten Zerlegung.

Wir betrachten wieder zwei Zerlegungen von $Q$

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots\}, \qquad \{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots\}, \tag{2}$$

die Fastgruppen zu $Q$ homomorph bilden. Das Bild von $a \in Q$ ist die Klasse, die $a$ enthält. Die Anzahl der Klassen einer Zerlegung ist beliebig. Jedes Produkt $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ setzt sich genau von Klassen $\mathfrak{A}_k$ und auch von Klassen $\mathfrak{B}_l$ zusammen, wie wir zeigen wollen. Erstens bemerken wir, dass wenn $a_i \in \mathfrak{A}_i$ dann auch $a_i \in \mathfrak{B}_r$, wodurch, wie bereits gesehen, $a_i\mathfrak{B}_j = \mathfrak{B}_r\mathfrak{B}_j = \mathfrak{B}_s$. Danach, wenn $a_i$ die Klasse $\mathfrak{A}_i$ läuft, das Produkt $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ setzt sich genau der entsprechenden Klassen $\mathfrak{B}_s$. Eine ähnliche Überlegung, auf die Produkte $\mathfrak{A}_i b_j$ $(b_j \in \mathfrak{B}_j)$ angewandt, zeigt, dass $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ eine genaue Menge von Klassen $\mathfrak{A}_t$ ist.

Nun denken wir uns zwei Produkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ und $\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}_l$. Wenn es ein Element $c \in Q$ gibt, das zu beiden Produkten gehört, wollen wir zeigen, dass beide Produkte gleich sind. Wir setzen $c=a_i b_j=a_k b_l$, wobei die Buchstaben gleich anzeigen die Klassen zu denen die entsprechenden Elemente gehören. Falls $b_j$ die Klasse $\mathfrak{B}_j$ durchläuft, dann durchläuft $a_i b_j$ eine Klasse $\mathfrak{B}_t$; diese letzte Klasse enthält $a_k b_l$, mit $a_k \in \mathfrak{B}_r$, $b_l \in \mathfrak{B}_l$, was $\mathfrak{B}_r\mathfrak{B}_l=a_k\mathfrak{B}_l=\mathfrak{B}_t$ mitbringt. So, für jedes $\bar{b}_j \in \mathfrak{B}_j$, können wir $\bar{b}_l \in \mathfrak{B}_l$ finden, so dass $a_i\bar{b}_j=a_k\bar{b}_l$. Nun setzen wir $\bar{b}_j$ fest und machen $a_i$ die Klasse $\mathfrak{A}_i$ durchlaufen. Für jedes $\bar{a}_i \in \mathfrak{A}_i$, können wir $\bar{a}_k \in \mathfrak{A}_k$ finden, so dass $\bar{a}_i\bar{b}_j=\bar{a}_k\bar{b}_l$. Man entnimmt, dass alle Elemente von $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ zu $\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}_l$ gehören; die umgekehrte, Inklusion ist auch gültig und die Behauptung wird somit bewiesen.

Wenn eine feste Klasse $\mathfrak{A}$ mit allen Klassen $\mathfrak{B}_j$ multipliziert wird, gewinnt man bereits alle Produkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$. Deshalb gibt es eine Zerlegung von Q in fremde Klassen der Form

$$\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_i, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_j, \cdots\}, \tag{3}$$

aus (2) hergeleitet. In diesem Fall, können wir behaupten, dass dann und nur dann $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_r=\mathfrak{A}\mathfrak{B}_s$ ist falls es ein $b_r$ und ein $b_s$ gibt, die zu derselben Klasse $\mathfrak{A}_k$ gehören. Statt (3), darf man auch

$$\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_j\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_k\mathfrak{B}, \cdots\} \tag{3'}$$

schreiben, um dieselben Klassen darzustellen.

Nun betrachten wir gleichfalls die Produkte $\mathfrak{B}_j\mathfrak{A}_i$. Ähnliche Überlegungen, wie diejenigen die uns gezeigt haben, dass $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ und $\mathfrak{A}_k\mathfrak{B}_l$ gleich sind, falls es ein gemeinsames Element gibt, können auch die Gleichheit



von $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ und $\mathfrak{B}_k\mathfrak{A}_l$ unter derselben Bedingung ergeben. So hat man

$$\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_i, \cdots\}=\{\mathfrak{B}\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_j\mathfrak{A}, \cdots\};$$

im allgemeinen aber ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

Es erhebt sich die Frage, ob die Klassen (3) Fastgruppe bilden. Ein Produkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i)$ setzt sich genau von Klassen $\mathfrak{A}_j\mathfrak{B}_l$. In genauerer Weise, wollen wir zeigen, dass es, für gegebenes $i$, ein $k$ gibt, für welches

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i) \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{B}_k. \tag{4}$$

Für bestimmtes $k$, haben wir

$$(ab)(\bar{a}b_i) \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}_k, \qquad (a, \bar{a} \in \mathfrak{A};\ b \in \mathfrak{B};\ b_i \in \mathfrak{B}_i).$$

Wennn $a$ die Klasse $\mathfrak{A}$ durchläuft, nehmen wir $\bar{\bar{a}} \in \mathfrak{A}$; dann ist $(\bar{\bar{a}}b)(\bar{a}b_i) \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}_k$, da $ab$ und $\bar{\bar{a}}b$ zu derselben Klasse $\mathfrak{A}_j$ gehören und deshalb gehören zu derselben Klasse $\mathfrak{A}_j\mathfrak{B}_r=\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k$ die Elemente $(ab)(\bar{a}b_i)$ und $(\bar{\bar{a}}b)(\bar{a}b_i)$. Danach, setzen wir $\bar{\bar{a}} \in \mathfrak{A}$ fest und betrachten das Element $(\bar{\bar{a}}b)(\bar{a}b_i)$ sowie die Elemente die man gewinnt, wenn $b$ die Klasse $\mathfrak{B}$ durchläuft. Solche Elemente gehören zu derselben Klasse $\mathfrak{B}_t\mathfrak{A}_s=\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k$, da $\bar{\bar{a}}b$ und $\bar{\bar{a}}\bar{b}$, mit $b \in \mathfrak{B}$, zu derselben Klasse $\mathfrak{B}_t$ gehören und $(\bar{\bar{a}}b)(\bar{a}b_i)$ sowie $(\bar{\bar{a}}\bar{b})(\bar{a}b_i)$ in der Klasse $\mathfrak{B}_t(\bar{a}b)=\mathfrak{B}_t\mathfrak{A}_s$ liegen. Die Überlegungen setzt man fort, indem man das Element $(\bar{\bar{a}}\bar{b})(\bar{a}b_i)$ betrachtet und $\bar{a}$ in $\mathfrak{A}$ variieren lässt. Endlich wird $b_i$ variieren. Die Inklusion (4) wird somit bewiesen, was die Gleichheit

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i)=\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k$$

mitbringt. Die Lösbarkeit einer Gleichung der Form

$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{X}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k$ erkennt man unmittelbar, indem man eine Klasse $\mathfrak{A}_i$, in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k$ enthalten, und auch eine Klasse $\mathfrak{A}_j$, in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, zusammennimmt, und dann die Gleichung $\mathfrak{A}_j\mathfrak{Y}=\mathfrak{A}_i$ löst. Die Unbekannte $\mathfrak{X}$ wird das Produkt $\mathfrak{A}_r\mathfrak{B}_s$ sein, das $\mathfrak{Y}$ enthält. Was die Eindeutigkeit der Lösung betrifft, gehen wir von einer Gleichung $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i)=$ $=(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_j)$ aus. Falls $\mathfrak{A}_r\subseteq\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_t$ in beiden Glieder derselben Gleichung liegt, das erste Glied kann $\mathfrak{A}_r\mathfrak{B}_k$ geschrieben werden, wenn $\mathfrak{B}_k\subseteq\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i$. Die Inklusion $\mathfrak{A}_t\subseteq$ $\subseteq\mathfrak{A}_r\mathfrak{B}_k$ ergibt $a_t=a_r b_k$; folglich wenn $\mathfrak{A}_t=\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s$, hat man $b_k\in\mathfrak{A}_s$, $\mathfrak{A}_s\subseteq\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i$. In ähnlicher Weise beweist man die Existenz von $\mathfrak{A}_q\subseteq\mathfrak{A}\mathfrak{B}_j$, mit $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_q=\mathfrak{A}_t$. Es folgt $\mathfrak{A}_q=\mathfrak{A}_s$ und somit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i=\mathfrak{A}\mathfrak{B}_j$.

Eine Zusammenfassung der vorangehenden Betrachtungen lautet folgendermassen:

Satz 3: *Es seien* $\{\mathfrak{A},\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\cdots\}$ *und* $\{\mathfrak{B},\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\cdots\}$ *zwei Zerlegungen einer Fastgruppe Q in Äquivalenzklassen, die beide Fastgruppe bilden. Dann sind auch* $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B},\cdots$ $\cdots,\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j,\cdots\}$ *und* $\{\mathfrak{B}\mathfrak{A},\cdots,\mathfrak{B}_k\mathfrak{A}_l,\cdots\}$ *Zerlegungen von Q in Äquivalenzklassen, die Fastgruppe bilden. Diese letzten Zerlegungen sind identisch und gilt* $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j=\mathfrak{B}_k\mathfrak{A}_l$, *für eine passende Wahl der Indices. Irgendeine Klasse* $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j$ *darf auch die Form* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_q$ *oder* $\mathfrak{A}_r\mathfrak{B}$ *nehmen; ähnlich, irgendeine Klasse* $\mathfrak{B}_k\mathfrak{A}_l$ *darf man* $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_r$ *oder* $\mathfrak{B}_t\mathfrak{A}$ *schreiben. Es ist* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i=\mathfrak{B}\mathfrak{A}_j$, *für bestimmte i und j.*

Neben den Produkten der Klassen der Zerlegungen (2), betrachten wir nun die Durchschnitte

$$\{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B},\cdots,\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}_i,\cdots,\mathfrak{A}_j\cap\mathfrak{B}_k,\cdots\}, \tag{5}$$

die nicht leer sind. Man gewinnt eine neue Zerlegung von Q, die auch eine Fastgruppe bildet. Das Produkt von zwei Klassen ist durch die Regel

$$(\mathfrak{A}_j\cap\mathfrak{B}_k)\cdot(\mathfrak{A}_l\cap\mathfrak{B}_m)=\mathfrak{A}_j\mathfrak{A}_l\cap\mathfrak{B}_k\mathfrak{B}_m \tag{6}$$



gegeben. Zweifellos ist das erste Glied von (6) im zweiten enthalten. Umgekehrt, es sei $x$ ein Element des zweiten Gliedes für welches

$$x=a_j a_l=b_k b_m,\quad (a_j\in\mathfrak{A}_j,\ \text{usw.}).$$

Wenn $t\in\mathfrak{A}_j\cap\mathfrak{B}_k$ und $x=tv=a_j a_l$ ist, aus der Tatsache, dass $t$ und $a_j$ zu $\mathfrak{A}_j$ gehören entnimmt man $v\in\mathfrak{A}_l$. Sodann, da wir $tv=b_k b_m$ haben, aus der Tatsache, dass $t$ und $b_k$ zu $\mathfrak{B}_k$ gehören entnimmt man $v\in\mathfrak{B}_m$. Es folgt

$$x=tv,\quad t\in\mathfrak{A}_j\cap\mathfrak{B}_k,\quad v\in\mathfrak{A}_l\cap\mathfrak{B}_m,$$

wie erwünscht.

2) **Die Kommutativität der normalen Kongruenzen in Fastgruppen**— In dem Buche von G. Birkhoff, ([4], 5.85), findet man Begriffe die Kiokemeister, in [5], auf eine interessante Weise ausgedehnt und angewandt hat. Kiokemeister definiert eine *normale Kongruenz* $\alpha$, in einer Fastgruppe Q, wie eine Äquivalenzrelation, unter folgenden Bedingungen: sind $a$, $b$, $c$, $d$ Element von Q, so gilt:

1) wenn $a\equiv b(\alpha)$, $c\equiv d(\alpha)$, dann ist $ac\equiv bd(\alpha)$;
2) wenn $ac\equiv bc(\alpha)$, dann ist $a\equiv b(\alpha)$;
3) wenn $ca\equiv cb(\alpha)$, dann ist $a\equiv b(\alpha)$.

Man sieht unmittelbar, dass eine normale Kongruenz ein Homomorphismus zwischen zwei Fastgruppen hervorruft, und dass, umgekehrt, ein solcher Homomorphismus zu einer normalen Kongruenz führt.

Nehmen wir an, dass $\alpha$ und $\beta$ die normalen Kongruenzen sind, die die Zerlegungen (2) hervorrufen. Künftig werden wir $a\alpha\bar{a}$, statt $a\equiv\bar{a}(\alpha)$, schreiben.

Falls $c, d \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, dürfen wir $c = ab$, $d = \bar{a}\bar{b}$, mit $a\alpha\bar{a}$, $b\beta\bar{b}$ schreiben. Es folgt $(ab)\alpha(\bar{a}b)$, $(\bar{a}b)\beta(\bar{a}\bar{b})$ oder $c\alpha(\bar{a}b)$, $(\bar{a}b)\beta d$. In der Theorie der *Algebra der Relationen*, (Vgl. [6], S. 93 und folgende), wenn eine feste nichtleere Menge $M$ vorgegeben wird, für zwei beliebige Relationen $\alpha$ und $\beta$, über $M$, bedeutet $\alpha\beta$ die Relation über $M$ für welche das Bestehen von $a(\alpha\beta)b$ mit dem Bestehen von $a\alpha x$, $x\beta b$ gleichwertig ist, $(x \in M)$. Die frühere Annahme $c, b \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ führt zu $c(\alpha\beta)d$. Umgekehrt, wen $\alpha$ und $\beta$ normale Kongruenzen sind und $c(\alpha\beta)d$ ist, wollen wir gleich zeigen, dass $c$ und $d$ zu einer Klasse $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gehören. Aus der Annahme folgt die Existenz von $x$ für welches $c\alpha x$, $x\beta d$. Dann sind $c$ und $x$ in einer Klasse $\mathfrak{A}_i$ und $x$ und $d$ in einer Klasse $\mathfrak{B}_j$. Wenn wir annehmen, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Klasse $\mathfrak{B}_i$ enthält, dann gehört $x$ zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_j \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, was $d \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ herbringt.

Wir haben bereits gesehen, dass jede Klasse $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i$ die Form $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_j$ nehmen darf. Deshalb, unter Benutzung der Sprache der normalen Kongruenzen, aus der Annahame $c(\alpha\beta)d$ ergibt sich $c(\beta\alpha)d$, d. h.:

mit $c\alpha x$, $x\beta d$, hat man auch $c\beta y$, $y\alpha d$,

und umgekehrt. In der Algebra der Relationen drückt man sich folgendermassen aus: $\alpha$ und $\beta$ sind *vertauschbar*. Im Sinne dieses Ausdruckes, kann man die Ergebnisse zusammenfassen in dem

Satz 4: *Bei gegebener Fastgruppe* Q, *dann und nur dann gehören zwei Elemente* $c$, $d$, *von* Q, *zu derselben Klasse* (3), *oder* (3'), *wenn dieselben Elemente in der Kongruenzrelation stehen, die man gewinnt mit dem Produkte der beiden Kongruenzrelationen, die den Faktorenklassen von* (3) *oder* (3') *entsprechen. Zwei normale Kongruenzrelationen sind immer vertauschbar; ihr Produkt ist eine normale Kongruenz. Zwei Elemente die in bezug auf* $\alpha$ *oder* $\beta$ *kongruent sind, sind auch kongruent in bezug auf* $\alpha\beta$.



Mit der Ausdrucksweise und Bezeichnungen der Algebra der Relationen, kann man folgendes behaupten: das *Supremum* der normalen Kongruenzen $\alpha$ und $\beta$ ist $\alpha \cup \beta = \alpha\beta$; das *Infimum* $\alpha \cap \beta$ ist die normale Kongruenz, die der Zerlegung (5) entspricht.

3) **Normalteiler** – Denken wir wieder einen Homomorphismus $Q \sim Q'$ von zwei Fastgruppen. Wenn es in (1) eine Klasse $\mathfrak{P}$ gibt, für welche $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ gilt, dann gibt es in Q' ein Idempotent. $\mathfrak{P}$ heisst, nach Kiokemeister, ein *Normalteiler*. Der entsprechende Homorphiesatz ist leicht anzugeben. Q' darf mehrere Idempotente haben. Der Homomorphismus erzeugt dann mehrere Normalteiler; der Quotientraum aber ist immer von denselben Klassen verwirklicht.

Als einfache Folgerung vom Satz 2, kann man behaupten, dass eine Klasse einer Zerlegung von Q in Klassen, die zusammen eine Fastgruppe bilden, eine Normalteiler ist, falls sie einen Normalteiler (bezuglich einer anderen Zerlelung) enthält.

Die Multiplikationsregel (6) zeigt, dass der Durchschnitt von zwei Normalteilern $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler ist, falls er nicht leer ist. Das Produkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ ist auch ein Normalteiler, falls $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ gemeinsame Elemente haben. In diesem Fall, $\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ stellt die kleinste Fastgruppe die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ enthält, d. h. die Fastgruppe von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ erzeugt, dar. Wir haben $\mathfrak{P}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{P}$.

Q sei eine Fastgruppe. Man gibt $\mathfrak{P}$ als Unterfastgruppe und $\mathfrak{H}$ als Normalteiler und nimmt $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{H}$ nicht leer an. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{H}$ Normalteiler in $\mathfrak{P}$ ist. Wir betrachten die Fastgruppe $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \cdots\}$, die dem Normalteiler $\mathfrak{H}$ entspricht, und sodann

$$\{\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}, \mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_i, \cdots\}. \tag{7}$$

Man gewinnt in (7) eine Zerlegung von $\mathfrak{P}$ in Klassen, die Fastgruppe bilden. In der Tat, wenn $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j=\mathfrak{A}_k$ ist, hat man

$$(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_i)\cdot(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_j)\subseteq\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_k;$$

andererseits, bei gegebenem $x\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_k$, machen wir

$$x=p=a_ia_j=a_k, \quad (p\in\mathfrak{P},\ a_i\in\mathfrak{A}_i, \text{ usw.}),$$

und bezeichnen mit $p_i$ ein Element von $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_i$. Es ist $p=p_ip'=a_ia_j$, wobei $p'\in\mathfrak{P}$; man leitet $p'\in\mathfrak{A}_j$ ab, wodurch $x=p_ip'$, mit $p_i\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_i$ und $p'\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}_j$.

Nun seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ Normalteiler mit gemeinsamen Elementen. Es gilt folgender Isomorphismus

$$\mathfrak{P}\mathfrak{T}/\mathfrak{T}\simeq\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}, \tag{8}$$

wie wir gleich beweisen wollen. Wir betrachten die Zerlegungen

$$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \cdots\};\ \{\mathfrak{T}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \cdots\};\ \{\mathfrak{P}\mathfrak{T}, \mathfrak{P}\mathfrak{B}, \cdots, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \cdots\}.$$

Das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ setzt sich genau von Klassen der zweiten Zerlegung zusammen: $\mathfrak{T}, \mathfrak{B}_{i_1}, \mathfrak{B}_{i_2}, \cdots$. Da $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ ist, können wir

$$\mathfrak{P}\mathfrak{T}/\mathfrak{T}=\{\mathfrak{T}, \mathfrak{B}_{i_1}, \mathfrak{B}_{i_2}, \mathfrak{B}_{i_3}, \cdots\} \tag{9}$$

schreiben. Sodann zeigen wir, dass $\mathfrak{P}$ mit jeder Klasse (9) geneinsame Elemente hat. Es sei $p\in\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}$. Bei gegebenem $b_{i_1}\in\mathfrak{B}_{i_1}$, setzen wir $b_{i_1}=p't$, $(p'\in\mathfrak{P}, t\in\mathfrak{T})$. Aus der Tatsache, dass $p\in\mathfrak{T}$ ist, entnimmt man, dass $p'p$ und $p't=b_{i_1}$ zu derselben Klasse von (9) gehören. Es ist aber $p'p\in\mathfrak{P}$. Deswegen, die fremden Klassen



$$\{\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}, \mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_1}, \mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_2}, \cdots\} \tag{10}$$

ergeben eine Zerlegung von $\mathfrak{P}$. Ein Produkt $(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_1})\cdot(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_2})$ hat die Form $(\mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_3})$; die Klassen (10) bilden eine Fastgruppe. Man hat

$$\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}=\{\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}, \mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_1}, \cdots\}. \tag{11}$$

Die Fastgruppen (9) und (11) sind isomorph; es besteht die Abbildung $\mathfrak{T}\to\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}, \mathfrak{B}_{i_1}\to\mathfrak{P}\cap\mathfrak{B}_{i_1}$, usw.. Der Isomorphismus (8) wird hiermit bewiesen. Im Sinne der Überlegungen dieser Nummer, kann man die Ergebnisse in zwei Sätzen zusammenfassen:

Satz 5: *Es sei $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler in* Q. *Wenn $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \cdots\}$ eine Zerlegung von* Q *in Klassen, die Fastgruppe bilden, ist, dann die Annahme $\mathfrak{T}\supset\mathfrak{P}$ hat die Folge, dass $\mathfrak{T}$ Normalteiler ist. Für zwei Normalteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$, deren Durchschnitt nicht leer ist, sind $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ Normalteiler; der letzte enthält $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$. Und wenn $\mathfrak{P}$ eine Unterfastgruppe und $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler in* Q *sind, dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}$, falls nicht leer ist, ein Normalteiler in $\mathfrak{P}$.*

Satz 6: *Zwei Normalteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ in* Q, *die gemeinsame Elemente haben, genügen folgender Isomorphismusrelation: $\mathfrak{P}\mathfrak{T}/\mathfrak{T}\simeq\mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cap\mathfrak{T}$.*

Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, dass es möglich ist, andere Definitionen non Normalteilern zu geben, von denen die vorangehende eine Ausdehnung ist, und keine Vorbehaltung im Wortlaut des Satzes 6 brauchen. Es wird sogar geschehen, dass eine Unterfastgruppe und ein Normalteiler immer gemeinsame Elemente haben werden.

Satz 6 ist als zweiter Isomorphiesatz bekannt. Der erste lautet folgendermassen:

Satz 7: *$Q$ und $\bar{Q}$ seien Fastgruppen und $\bar{Q}$ homomorphes Bild von $Q$, das Idempotentelement $\bar{a}$ besitzt. Jedem Normalteiler $\mathfrak{N}$ in $Q$, der den in $\bar{a}$ abgebildeten Normalteiler $\mathfrak{H}$ enthält, entspricht durch den Homomorphismus einen Normalteiler $\bar{\mathfrak{N}}$, für welches $Q/\mathfrak{N} \cong \bar{Q}/\bar{\mathfrak{N}}$, $\bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}/\mathfrak{H}$. Umgekehrt, von einem Normalteiler $\bar{\mathfrak{N}}$ ausgehend, der $\bar{a}$ enthält, geht man zu $\mathfrak{N}$ über, in solcher Weise, dass die oben gennanten Bedingungen erfüllt sind.*

Immerhin wollen wir nur mit solchen Normalteilern fortsetzen, die mindestens ein gemeinsames Element $a$ haben.

$\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ erfüllen diese Bedingung, ebenso wie $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$, für die aber $\mathfrak{P}_1' \subseteq \mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2' \subseteq \mathfrak{P}_2$ gilt. Augenscheinlich ist $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1'$ Normalteiler in $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'$ und $(\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_2'$ Normalteiler in $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_2'$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' = \{\mathfrak{P}_1', \mathfrak{A}_1', \mathfrak{B}_1', \cdots\} \tag{12}$$

von dem man

$$\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \sim (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1' \cong \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2 \tag{13}$$

ableitet, wie folgende Einzelheiten ermitteln: 1) in einem Homomorphismus von zwei Fastgruppen, wird jede Unterfastgruppe auf eine Unterfastgruppe abgebildet; 2) im Homorphismus (12), das Bild von $a$ ist $\mathfrak{P}_1'$; 3) es ist $\mathfrak{A}_1'$ das Bild eines Elementes $a_1 \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$, das auch zu $\mathfrak{A}_1'$ gehört; 4) das Bild von $a_1 a$ ist $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{P}_1' = a_1\mathfrak{P}_1'$; 5) im allgemeinen, das Bild von $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ setzt sich von den



Klassen die in $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'$ enthalten sind zusammen, da jedes $b \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ die Form $b = a_1 a$ ($a$ fest, $a_1$ in einer Klasse (12)) nehmen darf.

(12) gibt noch

$$\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2' \sim (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1' \cong \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2'/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2',$$

ebenso wie

$$(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')(\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2) \sim (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1', \tag{14}$$

weil das Bild von $\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2$ das Element $\mathfrak{P}_1'$ ist.

Man beachte hierzu den Homomorphismus (13). Das Bildelement $\mathfrak{P}_1'$ ist idempotent. Deswegen, die Elemente von $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$, die zu $\mathfrak{P}_1'$ gehören, d. h. die Elemente von $\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2$, liefern den Normalteiler $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$, der im Satz 7, angegeben wurde. Eine ähnliche Beachtung von (14) führt, durch Satz 7, zu folgendem Isomorphismus

$$\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')(\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2) \cong ((\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1')/((\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1'). \tag{15}$$

Nun betrachten wir den Homomorphismus

$$(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1' \sim (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1', \tag{16}$$

welcher diesen anderen

$$(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1' \sim (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1'/\mathfrak{P}_1' \tag{17}$$

ergibt. Von (16) und (17), auf Anwendung des Satzes 7 und mit Hilfe von (15), entnimmt man

$$(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1' \cong \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')(\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2).$$

Die vorangehenden Ergebnisse formulieren wir als

Satz 8: *Wen die Normalteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1' \subseteq \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2' \subseteq \mathfrak{P}_2$ ein gemeinsames Element besitzen, dann gilt folgender Isomorphismus:* $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_1'/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2')\mathfrak{P}_1' \cong (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_2'/(\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{P}_2)\mathfrak{P}_2'$.

Man hat somit, unter einer sehr eigentümlichen Bedingung die Sätze von Noether-Zassenhaus bewiesen. Sodann folgen die Sätze von Schreier und Jordan-Hölder. Fur den letzten hat man zwei vollständige Ketten

$$\mathrm{Q}=\mathrm{Q}_1\supset\mathrm{Q}_2\supset\cdots\supset\mathrm{Q}_{s+1}=\mathfrak{H},$$
$$\mathrm{Q}=\mathfrak{P}_1\supset\mathfrak{P}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{P}_{t+1}=\mathfrak{H},$$

wobei sowohl die $\mathfrak{P}_i$ wie de $\mathrm{Q}_j$ Normalteiler mit gemeinsamen Elementen sind, zu vergleichen. Es ist $s=t$.

## § 3 – EINSEITIGE NORMALTEILER

1) **Allgemeinheiten** – Wenn $\mathfrak{C}$ eine beliebige Untermenge von Q ist, werden wir die Untergruppe der Transformationengruppe von Q, die durch Rechtsmultiplikationen der Elemente von Q mit den Elementen von $\mathfrak{C}$ erzeugt wird, mit $\mathfrak{C}_r$ bezeichnen; $\mathfrak{C}_l$ hat eine ähnliche Bedeutung, betrifft aber die Linksmultiplikationen; und $\mathfrak{C}_\tau$ wird die Untergrupe der Transformationengruppe von Q, durche $\mathfrak{C}_r$ und $\mathfrak{C}_l$ erzeugt, angeben. Man hat folgenden

Satz 1: *Dann und nur dann ist eine Untermenge $\mathfrak{P}$ von Q eine Unterfastgruppe, wenn $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_\tau$ ist, wobei $p\in\mathfrak{P}$ beliebig gewählt werden kann,* (Verg. [6], S. 512). Erstens: falls $\mathfrak{P}$ Unterfastgruppe ist, setzen wir $p\in\mathfrak{P}$ fest und nehmen $p'\in\mathfrak{P}$ beliebig. Die Gleichung $px=p'$ ist in $\mathfrak{P}$ lösbar, wodurch $\mathfrak{P}\subseteq p\mathfrak{P}_\tau$ ist, fur beliebig gewähltes $p$. Die umgekehrte Inklusion kann man so erkennen: indem man $p'\in\mathfrak{P}$ annimmt, gehören auch zu $\mathfrak{P}$ die Elemente $pT_{p'}^{(r)}$ und $pT_{p'}^{(l)}$; sodann setzt man, z. B. $p(T_{p'}^{(r)})^{-1}=x$, d. h. $p=xT_{p'}^{(r)}$; dann ist diese letzte Gleichung in $\mathfrak{P}$ lösbar und $x\in\mathfrak{P}$. Endlich wenn man $z\in\mathfrak{P}$ nimmt, dieselbe Überlegung wie früher beweist, dass man $zT_{p'}^{(r)}\in\mathfrak{P}$, $z(T_{p'}^{(r)})^{-1}\in\mathfrak{P}$, usw. hat, und deshalb $p\mathfrak{P}_\tau\subseteq\mathfrak{P}$, wie erwünscht.



Zweitens: Denken wir uns eine gegebene Menge $\mathfrak{P}\subseteq\mathrm{Q}$ für welche $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_\tau$, mit $p\in\mathfrak{P}$, ist. Man hat, falls $P_b, P_{b'}\in\mathfrak{P}_\tau$,

$$pP_b\cdot pP_{b'}=pP_b\,T_{pP_{b'}}^{(r)}=pP_{b'}\,T_{pP_b}^{(l)}.$$

Der Annahme halber, est ist $pP_{b'}=p'\in\mathfrak{P}$, woraus sich

$$pP_b\cdot pP_{b'}=pP_b\,T_{p'}^{(r)}=pP_{b''},\quad (P_{b''}=P_b\,T_{p'}^{(r)}),$$

ergibt. Es wird so erkannt, dass den Elemente von $\mathfrak{P}$ Transformationen entsprechen, die, auf $\mathfrak{P}$ angewandt, Element von $\mathfrak{P}$ ergeben; und, wenn man z. B. $T_{pP_b}^{(l)}$ nimmt, da die Gleichung $x\,T_{pP_b}^{(l)}=pP_{b'}$ in Q lösbar ist, und zwar mit

$$x=pP_{b'}(T_{pP_b}^{(l)})^{-1}=pP_{b'}(T_{p''}^{(l)})^{-1}=pP_{b'}P_{b''}=pP_{b'''},$$

entnimmt mann, dass $x\in\mathfrak{P}$. Die Menge $\mathfrak{P}$ erfüllt die Bedingungen der Fastgruppen. Nun wissen wir, dass das Element $p\in\mathfrak{P}$, für welches $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_\tau$ ist, beliebig genommen werden kann.

Wir machen bereits folgende Bemerkung: Es sei die Fastgruppe $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_\tau$ genommen; dann hat man auch $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_r=\mathfrak{P}p=p\mathfrak{P}_l$; dennoch, umgekehrt, falls eine Menge $\mathfrak{P}$ gegeben wird, die die Bedingung $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_r$, für gewisses $\mathfrak{P}$ erfüllt, ist $\mathfrak{P}$ im allgemeinen keine Fastgruppe. Die Gleichheit $\mathfrak{P}=p'\mathfrak{P}_r$, für jedes $p'\in\mathfrak{P}$, ist aber noch gültig.

Betrachten wir eine Unterfastgruppe $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_\tau$; man kann Q in fremde Klassen zerlegen, indem man

$$\mathrm{Q}_{\mathfrak{P}_\tau}=\{p\mathfrak{P}_\tau, a\mathfrak{P}_\tau, b\mathfrak{P}_\tau, \cdots\}$$

schreibt. Allgemeiner, ist $\Gamma$ eine Transformationengruppe von Q, so zerfällt Q in Teilmengen, die durch $\Gamma$ in sich transformiert werden:

$$Q_\Gamma = \{ a\Gamma, b\Gamma, c\Gamma, \cdots \}. \tag{1}$$

Jede Klasse $a\Gamma, \cdots$ wird Transitivitätsgebiet gennant. Falls $\Gamma$ eine invariante Untergruppe in $Q_\tau$ ist, dann bilden die Klassen (1) eine Fastgruppe mit der Multiplikationsregel $(a\Gamma)(b\Gamma)=(ab)\Gamma$. Somit entspricht jedem invarianten $\Gamma$ in $Q_\tau$ einen Homomorphismus $Q \sim Q_\Gamma$ zwischen zwei Fastgruppen.

Bei ([1], S. 512) und ([8], S. 401) wird ein sehr nutzlicher Begriff eingeführt. Wir betrachten Q und die Unterfastgruppe $\mathfrak{P}$. Man hat $\mathfrak{P}_\tau \subseteq Q_\tau$. Wenn $\Gamma$ eine Untergruppe in $\mathfrak{P}_\tau$ ist, dann wird $\Gamma^*_{\mathfrak{P}} = \{ R, S, T, \cdots \}$ die Menge der Elemente von $\mathfrak{P}_\tau$ darstellen, für welche man, bei beliebig $p \in \mathfrak{P}$, $pR, pS, \cdots \in p\Gamma$ hat. Man sieht leicht, dass $\Gamma^*_{\mathfrak{P}}$ eine Gruppe ist. Immer noch ist $\Gamma^*_{\mathfrak{P}}$ eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{P}_\tau$, wenn $\Gamma$ eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{P}_\tau$ ist.

Um künftige Auslegunsgsschwierigkeiten zu vermeiden, geben wir hier folgende Erklärungen: 1) $\mathfrak{P}_\tau$, falls $\mathfrak{P}$ eine Unterfastgruppe ist, niemals eine Transformationengruppe von $\mathfrak{P}$ darstellt; es ist immer Untergruppe in $Q_\tau$, wodurch in der allgemeinen Definition von $\mathfrak{C}_\tau$ hervortritt; 2) $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{P}_l$ sind auch Untergruppen in $Q_\tau$; sie treten in den Definitionen von $\mathfrak{C}_r$ und $\mathfrak{C}_l$ hervor; 3) wenn $\Gamma$ Untergruppe in $Q_\tau$ und nicht in $\mathfrak{P}_\tau$ betrachtet wird, werden wir $\Gamma^*$, statt $\Gamma^*_{\mathfrak{P}}$, einfacher schreiben.



3) **Rechtsnormalteiler** – Als besonderer Fall eines Homomorphismus $Q \sim Q'$ von zwei Fastgruppen, wollen wir uns mit der Hypothese beschäftigen, die die Existenz eine Rechtseinheit $u' \in Q'$ annimmt. Die Klasse $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$, auf $u'$ abgebildet, ist ein Normalteiler im Kiokemeisterchen Sinne. Wir dürfen hier

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{P} = p\,\mathfrak{P}_r = p\,\mathfrak{P}_r^*, \qquad \mathfrak{A} = a\,\mathfrak{P} = a\,\mathfrak{P}_r = a\,\mathfrak{P}_r^*, \cdots$$

schreiben, mit der Multiplikationsregel $a\mathfrak{P}_r \cdot b\mathfrak{P}_r = (ab)\mathfrak{P}_r$, wie wir zeigen wollen. Die Gleichheiten $\mathfrak{A} = a\mathfrak{P}$ sind schon bekannt. Augenscheinlich haben wir $a\mathfrak{P} \subseteq a\mathfrak{P}_r$; es bleibt die Inklusion $a\mathfrak{P}_r \subseteq a\mathfrak{P}$ zu beweisen. Hierzu braucht man, von $z \in \mathfrak{A}$ ausgehend, die Inklusionen $zT_p^{(r)}, z(T_p^{(r)})^{-1} \in \mathfrak{A}$ zu verifizieren. Dabei beschränken wir uns auf $z(T_p^{(r)})^{-1} = w$, dass $z = w\,T_p^{(r)}$ ergibt. Dann ist, mittels des Homomorphismus, $z \to z' = a' = w'p' = w'u' = w'$, was tatsächlich $w \in \mathfrak{A}$ mitbringt. Die Multiplikationsregel

$$a\mathfrak{P}_r \cdot b\mathfrak{P}_r = (ab)\mathfrak{P}_r, \qquad \text{oder} \qquad a\mathfrak{P}_r^* \cdot b\mathfrak{P}_r^* = (ab)\mathfrak{P}_r^*$$

folgt gleich. Die Fastgruppe

$$\{ \mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_r, \mathfrak{A} = a\mathfrak{P}_r, \cdots \}$$

besitzt die Rechtseinheit $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_r$.

Wir beweisen noch, dass $\mathfrak{P}_r^*$ eine invariante Untergruppe in $Q_\tau$ ist. Wir gehen aus von $S \in \mathfrak{P}_r^*$; dann müssen wir zeigen, dass die Transformationen

$$T_a^{(r)} S (T_a^{(r)})^{-1}, \; (T_a^{(r)})^{-1} S\, T_a^{(r)}, \; T_a^{(l)} S (T_a^{(l)})^{-1}, (T_a^{(l)})^{-1} S\, T_a^{(l)}$$

zu $\mathfrak{P}_r^*$ gehören. Wir beschränken uns die Inklusion

$$x\,T_a^{(l)} S (T_a^{(l)})^{-1} \in x\,\mathfrak{P}_r^*, \qquad (x \in Q),$$

zu rechtfertigen. Man hat

$$x T_a^{(l)} S (T_a^{(l)})^{-1} = (ax) S (T_a^{(l)})^{-1} = w,$$

$$(ax) S = w T_a^{(l)} = aw, \quad a'x' = a'w' \quad x' = w', \quad w \in x\mathfrak{P}_r.$$

Die Ergebnisse fassen wir folgendermassen zusammen:

Satz 2: *Ist $\Gamma$ eine invariante Untergruppe in $Q_\tau$, dann ist der Quotientraum* (1) *eine Fastgruppe mit der Multiplikationsregel $a\Gamma \cdot b\Gamma = (ab)\Gamma$, was ein Homomorphismus $Q \sim Q' = Q_\Gamma$ zwischen zwei Fastgruppen verwirklicht. Umgekehrt, ein Homomorphismus $Q \sim Q'$ zwischen zwei Fastgruppen, von denen die zweite Rechtseinheit hat, führt zu einem invarianten $\Gamma$ in $Q_\tau$, und deswegen zu einem Homomorphismus $Q \sim Q_\tau \simeq Q'$.*

Bei ([1], S. 513) findet man eine Definition von Normalteiler, die sich zu diesem Fall ausdehnt. Wir sagen also: $\mathfrak{P}$ ist ein *Rechtsnormalteiler,* wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1) $\mathfrak{P}$ ist eine Unterfastgruppe; 2) die Menge $\{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}_r, b\mathfrak{P}_r, \cdots\}$ ist eine Fastgruppe mit der Multiplikationsregel $a\mathfrak{P}_r \cdot b\mathfrak{P}_r = (ab)\mathfrak{P}_r$.

Der entsprechende Homomorphiesatz lautet:

Satz 3: *Ist $\mathfrak{P}$ eine Rechtsnormalteiler in $Q$, dann gilt der Homomorphismus $Q \sim Q/\mathfrak{P}$, wobei $Q/\mathfrak{P}$ Fastgruppe mit Rechtseinheit ist. Umgekehrt, von einem Homomorphismus $Q \sim Q'$ zwischen zwei Fastgruppen ausgehend, von denen die zweite Rechtseinheit hat, kommt man zu einem Rechtsnormalteiler $\mathfrak{P}$ in $Q$, für welches der Isomorphismus $Q/\mathfrak{P} \simeq Q'$ gilt.*

Man hat noch

Satz 4: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_r$ eine Rechtsnormalteiler, wenn $\mathfrak{P}_r^*$ eine invariante Untergruppe in $Q_\tau$ ist.*



Eine Rechtseinheit $u \in Q$ ist immer Rechtsnormalteiler. In diesem Fall, hat man $\mathfrak{P}_r = \mathfrak{P}_r^* = I$. Im allgemeinen bei gegebener Menge $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_r, (p \in \mathfrak{P})$, wenn man weiss, dass $\mathfrak{P}_r$ invariante Gruppe in $Q_\tau$ ist, kann man behaupten, dass $\mathfrak{P}_r^*$ geichfalls invariante Gruppe in $Q_\tau$ ist. In der Tat: nehmen wir $S \in \mathfrak{P}_r^*$, $x \in Q$; man hat $(x T_a^{(r)}) S = (x T_a^{(r)}) V$, mit $V \in \mathfrak{P}_r$, und sodann $x T_a^{(r)} S (T_a^{(r)})^{-1} = x T_a^{(r)} V (T_a^{(r)})^{-1} = xW$, mit $W \in \mathfrak{P}_r$. Es folgt $T_a^{(r)} S (T_a^{(r)})^{-1} \in \mathfrak{P}_r^*$. Der Rest des Beweises läuft in ähnlicher Weise. Es lohnt sich folgende Bemerkungen zu machen: 1) eine Menge $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_r$, $(p \in \mathfrak{P})$, ist im allgemeinen keine Fastgruppe; 2) sobald aber $\mathfrak{P}_r$ invariant Gruppe in $Q_\tau$ ist, ist die Menge sogar ein Rechtsnormalteiler; 3) wenn man $u = \mathfrak{P} = u\mathfrak{P}_r$ und $T_u^{(r)} = I$ hat, dann die Transformation $T_u^{(l)}$, selbst im Fall $\neq I$ zu sein, genügt der Gleichheit $u T_u^{(l)} = u \in \mathfrak{P}$.

Hierbei geben wir eine andere wichtige Charakterisierung der Rechtsnormalteiler, die nützlich sein kann, (Vgl. [3], S. 526).

Satz 5: *Dann und nur dann ist die Unterfastgruppe $\mathfrak{P}$ ein Rechtsnormalteiler in $Q$, wenn $\mathfrak{P}$ folgende beide Eigenschaften besitzt:* 1) *wenn die Gleichheit $xp_1 \cdot yp_2 = (xy)p_3$, wobei $x$ und $y$ beliebig in $Q$ sind, gegeben wird, man kann $p_i \in \mathfrak{P}$ bestimmen, sobald wir die beiden anderen $p_j, (j \neq i)$, mit $p_j \in \mathfrak{P}$, als bekannt annehemen;* 2) *bei gegebenem $p \in \mathfrak{P}$, ist immer $(xp)\mathfrak{P} \subseteq x\mathfrak{P} \subseteq (x\mathfrak{P})p$.*

Erstens: Falls $\mathfrak{P}$ Rechtsnormalteiler ist, hat man $xp_1 \cdot yp_2 \in (xy)\mathfrak{P}$; und bei gegebenen $p_1$ und $p_2$ ist $xp_1 \cdot yp_2 = (xy)p_3$ für gewisses $p_3 \in \mathfrak{P}$. Sodann, wenn in der fraglichen Gleichheit z. B. $xp_1$ und $(xy)p_3$ bekannt sind, wissen wir, dass es folgendes gilt: $(xp_1)(y\mathfrak{P}) = (x\mathfrak{P})(y\mathfrak{P})$; es existiert $yp_2$ für welches $(xp_1)(yp_2) = (xy)p_3$. Was die Inklusionen der Eigenschaft 2) betrifft, man leitet sie der Gleichheiten $x\mathfrak{P} = x\mathfrak{P}_r = x T_p^{(r)} \mathfrak{P}_r = (xp)\mathfrak{P} = x\mathfrak{P}_r T_p^{(d)} = (x\mathfrak{P})p$ ab.

Vor dem Beweis des zweiten Teiles brauchen wir folgenden

Hilfssatz 1: *Wenn $\mathfrak{P}$ eine Unterfastgruppe in $Q$ ist, und wenn, für gegebenes $x \in Q$ und beliebiges $p \in \mathfrak{P}$, $(xp)\mathfrak{P} \subseteq$ $\subseteq x\mathfrak{P} \subseteq (x\mathfrak{P})p$ gilt, dann ist $x\mathfrak{P}_d = x\mathfrak{P}$.* Wir haben nur die Inklusion $x\mathfrak{P}_d \subseteq x\mathfrak{P}$ zu beweisen. Es ist $x T_p^{(r)} = xp \in x\mathfrak{P}$; ferner gilt auch die Inklusion $(x T_p^{(r)})^{-1} \in x\mathfrak{P}$, wie man so erkennt: $x \in x\mathfrak{P}$, weil wir, für festgesetzes $p$, $xp = (xp_1)p$, mit $p_1 \in \mathfrak{P}$, haben; sodann folgt $x \in (x\mathfrak{P})p = x\mathfrak{P}\, T_p^{(r)}$, $x(T_p^{(r)})^{-1} \in x\mathfrak{P}$. Nun betrachten wir $z \in x\mathfrak{P}$ und zeigen, dass $z(T_p^{(r)})^{-1}$ und $z T_p^{(r)}$ zu $x\mathfrak{P}$ gehören. Es ist

$$z \in x\mathfrak{P}, \qquad z \in (xp)\, T_p^{(r)}, \qquad z(T_p^{(r)})^{-1} \in x\mathfrak{P};$$

und was $z T_p^{(r)}$ betrifft, rufen wir die Bedingung $(xp)\mathfrak{P} \subseteq x\mathfrak{P}$ hervor. Dann aus $(x\mathfrak{P})\mathfrak{P} \subseteq x\mathfrak{P}$ entnimmt man $z T_p^{(r)} \in x\mathfrak{P}$.

Wir kehren zum Satz zurück. Zweitens: Wegen des Hilfssatzes, die Bedingung 2) des Satzes ergibt $x\mathfrak{P}_d = x\mathfrak{P}$, für beliebiges $x \in \mathfrak{P}$. Ferner die Bedingung 1) zeigt die Gültigkeit der Gleichheit $(x\mathfrak{P}_d)(y\mathfrak{P}_d) = (xy)\mathfrak{P}_d$. Es bleibt zu sehen, dass die Gleichungen $a\mathfrak{P}_d \cdot x\mathfrak{P}_d = b\mathfrak{P}_d$, $y\mathfrak{P}_d \cdot$ $\cdot\, a\mathfrak{P}_d = b\mathfrak{P}_d$ eine einzige Lösung haben. Wir behandeln z. B. die erste. Wäre auch $a\mathfrak{P}_d \cdot x'\mathfrak{P}_d = (ax')\mathfrak{P}_d = (ax)\mathfrak{P}_d$, dann aus der Gleichheiten $ap_1 \cdot x'p_2 = (ax')p_3 = (ax)p_4 =$ $= ap_1 \cdot xp_5$ würde man $x'p_2 = xp_5$ schliessen, ebenso wie $x' = xp_5(T_{p_2}^{(r)})^{-1} \in x\mathfrak{P}$, was $x'\mathfrak{P} = x\mathfrak{P}$ ergeben würde. Der Beweis wird somit beendet.

Zum Schluss dieser Nummer bringen wir einen Wortlaut, der unter allgemeineren Bedingungen in der nächsten Nummer beweisen werden:

Satz 6: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass, eine Untermenge $\mathfrak{P}$ von $Q$ ein Rechtsnormalteiler in $Q$ ist, dass folgende Bedingungen bestehen:* 1) $\mathfrak{P} = p\Gamma$; 2) $p \in \mathfrak{P}$ *(trivial);* 3) $\Gamma$ *invariante Untergruppe in* $Q_{\div}$; 4) $T_p^{(r)} \in \Gamma$; 5) $p(T_p^{(l)})^{-1} \in p\Gamma$.



3) **Rechtsnormalteiler in Unterfastgruppen** — Die Überlegungen, die wir in beiden vorangehenden Nummern angestellt haben, können eine wichtige Ausdehnung erhalten, in einem genauen von Albert angegebenen Sinne, ([8], S. 401-402). Wir betrachten die Unterfastgruppe $\mathfrak{P}$ in $Q$, und behalten für $\mathfrak{P}_{\div}, \mathfrak{P}_d, \mathfrak{P}_l$ die Bedeutungen des Endes der Nummer 1. Dann, falls $\Lambda$ eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{P}_{\div}$ ist, obwohl, wann $\mathfrak{P}_{\div}$ auf $\mathfrak{P}$ wirkt, zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{P}$ dasselbe verursachen können (dies kann nicht mit $T_p^{(r)}, T_{p'}^{(r)}, \cdots$, wenn $p, p' \in \mathfrak{P}$ geschehen), hat einen genauen Sinn die Zerlegung

$$\mathfrak{P}_\Lambda = \{ p\Lambda, p'\Lambda, q\Lambda, \cdots \}, \quad (q \in \mathfrak{P}, \cdots), \tag{2}$$

in fremde Klassen zu machen. Ebenso wie in der Menge der Klassen (1), auch hier die Klassen (2) bilden eine Fastgruppe. So jedem invarianten Untergruppe $\Lambda$ in $\mathfrak{P}_{\div}$ entspricht einen Homomorphismus $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{P}_\Lambda$ zwischen zwei Fastgruppen. Die Multiplikationsregel ist $(p\Lambda)(q\Lambda) = (pq)\Lambda$.

Eine Unterfastgruppe $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}$ ist eine Unterfastgruppe in $Q$. So hat man $\mathfrak{p} = p\mathfrak{p}_{\div} = p\mathfrak{p}_r = p\mathfrak{p}_l$, für jedes $p \in \mathfrak{p}$. Es ist klar, dass man z. B. $\mathfrak{p}_r \subseteq \mathfrak{P}_r$ hat. Wenn wir in $\mathfrak{P}$ ein Quotientraum

$$\{ \mathfrak{p} = p\mathfrak{p}_r, q\mathfrak{p}_r, r\mathfrak{p}_r, \cdots \}, \quad (r, q, r, \cdots \in \mathfrak{P}), \tag{3}$$

einführen, dann heisst $\mathfrak{p}$ ein *Rechtsnormalteiler in* $\mathfrak{P}$, falls (3) eine Fastgruppe mit der Multiplikationsregel $(q\mathfrak{p}_r)(r\mathfrak{p}_r) = (qr)\mathfrak{p}_r$ ist.

Es gilt

Satz 7: *Dann und nur dann ist* $\mathfrak{p}=p\mathfrak{p}_r$ *ein Rechtsnormalteiler in der Fastgruppe* $\mathfrak{P}$, *wenn* $(\mathfrak{p}_r)^{*}_{\mathfrak{P}}$ *eine invariante Untergruppe in* $\mathfrak{P}_{\overline{r}}$ *ist.*

In Zusammenhang mit dem Satz 6 der vorangehenden Nummer wollen wir unten einen vollständigen Beweis einer interessanten Behauptung durchführen.

Satz 8: *Es ist notwendig und hinreichend dáfur, dass eine Untermenge* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{P}$ *ein Rechtsnormalteiler in* $\mathfrak{P}$ *ist, dass folgende Bedingungen bestehen:* 1) $\mathfrak{p}=p\Lambda$; 2) $p\in\mathfrak{p}$ *(trivial);* 3) $\Lambda$ *invariante Untergruppe in* $\mathfrak{P}_{\overline{r}}$; 4) $T_p^{(r)}\in\Lambda$; 5) $p(T_p^{(l)})^{-1}\in p\Lambda$.

Erstens: Wir nehmen $\mathfrak{p}$ als Rechtsnormalteiler in $\mathfrak{P}$ an. Dann hat man $\mathfrak{p}=p(\mathfrak{p}_r)^{*}_{\mathfrak{P}}$, wobei $(\mathfrak{p}_r)^{*}_{\mathfrak{P}}=\Lambda$ invariante Untergruppe in $\mathfrak{P}_{\overline{r}}$ ist; danach setzen wir z. B. $pp'=p$, mit $p'\in\mathfrak{p}$; es folgt $p'=p(T_p^{(l)})^{-1}\in p\Lambda$.

Zweitens: Wenn $S, T, U, V$ zu $\Lambda$ gehören, hat man

$$pS\cdot pT=pT\,T_{pS}^{(l)}=pT_{pS}^{(l)}U=(pS\cdot p)\,U=pS\,T_p^{(d)}U\in p\Lambda,$$

wodurch in $p\Lambda$ ein abgeschlossenes Produkt existiert. Was die Gleichungen $pS\cdot y=pT$, $x\cdot pS=pT$ betrifft, wollen wir z. B. die erste untersuchen. Wenn $y\in\mathfrak{P}$ die Lösung ist, haben wir

$$pS\cdot y=pT=pS\,T_y^{(r)}=p\,T_y^{(r)}U=y\,T_p^{(l)}U=yV\,T_p^{(l)},$$
$$yV=pT(T_p^{(l)})^{-1}=p(T_p^{(l)})^{-1}S;\quad y=p(T_p^{(l)})^{-1}SV^{-1}\in p\Lambda.$$

Die zweite Gleichung bringt keine Schwierigkeit dar. So ist $p\Lambda$ eine Unterfastgruppe von $\mathfrak{P}$. Nun zeigen wir die Gleichheiten $q\Lambda=q\mathfrak{p}_r$, $(q\in\mathfrak{P})$. Da $q\in q\Lambda$, beweist man die Inklusion $q\mathfrak{p}_r\subseteq q\Lambda$, sobald wir für $t\in q\Lambda$ beweisen, dass $t\,T_{p'}^{(r)}$ und $t(T_{p'}^{(r)})^{-1}$ in $q\Lambda$ liegen, falls $p'=pS\in p\Lambda=\mathfrak{p}$. Ist $t=qT$, so ist



$$t\,T_{p'}^{(r)}=qT\,T_{p'}^{(r)}=q\,T_{p'}^{(r)}U=q\,T_{pS}^{(r)}U=pS\,T_q^{(l)}U=p\,T_q^{(l)}V=$$
$$=(q\cdot p)\,V=q\,T_p^{(r)}V\in q\Lambda;$$

und wenn

$$t(T_{p'}^{(r)})^{-1}=v,\qquad t=v\,T_{p'}^{(r)}=v\,T_{pS}^{(r)}=vV,$$

es ist auch

$$v=tV^{-1}\in q\Lambda V^{-1}=q\Lambda.$$

Was die umgekehrte Inklusion $q\Lambda\subseteq q\mathfrak{p}_r$ betrifft, kann man sie folgendermassen gewinnen. Wir schreiben $q=\xi p$; es folgt

$$qS=(\xi p)\,S=p\,T_\xi^{(l)}S=pU\,T_\xi^{(l)}=p'\,T_\xi^{(l)}=\xi p'=$$
$$=q\,(T_p^{(r)})^{-1}p'\in q\mathfrak{p}_r,$$

weil $\xi$ in $\mathfrak{P}$ liegt und $p'=pU\in\mathfrak{P}$. Endlich aus der Tatsachen, dass $\Lambda$ invariante Untergruppe in $\mathfrak{P}_{\overline{r}}$ ist und die Gleichheiten $q\Lambda=q\mathfrak{p}_r$ gelten $(q\in\mathfrak{P})$, entnimmt man, dass $(\mathfrak{p}_d)^{*}_{\mathfrak{P}}$ auch eine invariante Untergruppe in $\mathfrak{P}_{\overline{r}}$ ist. Damit is der Beweis des Satzes vollendet.

4) **Eigenschaften der Rechtsnormalteiler** — Nachdem wir in den vorangehenden Nummern die Rechtsnormalteiler charakterisiert haben, empfiehlt es sich einige interessanten Eigenschaften derselben zu untersuchen. Es gibt mehrere, die wir augenscheinlich bei den Normalteilern von Kiokemeister nicht beweisen können würden.

Satz 9: *Ist* $\mathfrak{H}$ *ein Rechtsnormalteiler in* $\mathfrak{Q}$ *und* $\mathfrak{P}$ *eine Unterfastgruppe derselben Fastgruppe* $\mathfrak{Q}$, *dann ist das Produkt* $\mathfrak{L}=\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ *eine Unterfastgruppe von* $\mathfrak{Q}$; *sowohl* $\mathfrak{P}$ *wie* $\mathfrak{H}$ *sind in* $\mathfrak{L}$ *enthalten.* Es seien $p, p', q, \cdots$ Elemente von $\mathfrak{P}$; eine Klasse $p\mathfrak{H}_r$ kann die Form $p\mathfrak{H}$ nehmen. Dann gilt die Multiplikationsregel $p\mathfrak{H}\cdot q\mathfrak{H}=(pq)\mathfrak{H}$. Hierzu entnimmt man, dass es in $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ ein abgeschlossenes Produkt gibt. Nun betrachten wir die Gleichung $(pH)x=p'H'$, $(H, H'\in\mathfrak{H})$; wir zeigen, dass $x\in\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ ist. In der Tat:

$$pT_H^{(r)}T_x^{(r)}=p'H'=pT_x^{(r)}U, \quad (U\in\mathfrak{H}_r^*),$$

ebenso wie

$$pT_x^{(r)}=xT_p^{(l)}=p'T_H^{(r)}U^{-1}=p'V, \quad x=p'V(T_p^{(l)})^{-1},$$

wobei $V\in\mathfrak{H}_d^*$. Wir schreiben noch

$$x=p'(T_p^{(l)})^{-1}S=p''S, \quad (p''\in\mathfrak{P}, S\in\mathfrak{H}_d^*);$$

dann, da $p''\mathfrak{H}_d^*=p''\mathfrak{H}$ ist, hat man $x=p''H''$, mit $H''\in\mathfrak{H}$.

In ähnlicher Weise wird die Gleichung $y(pH)=p'H'$ behandelt. $\mathfrak{L}$ ist Unterfastgruppe. Es bleiben die Inklusionen $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{L}$, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{L}$ zu beweisen. Im allgemeinen, für jedes $a\in Q$, hat man $a\mathfrak{H}_r=a\mathfrak{H}$, wodurch $a\in a\mathfrak{H}$; als besonderen Fall haben wir $p\in\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{P}\mathfrak{H}$. Sodann, aus $pH=pH$ leitet man

$$H=(pH)(T_p^{(l)})^{-1}=p(T_p^{(l)})^{-1}H'\in\mathfrak{P}\mathfrak{H}$$

ab. Somit gilt auch $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{P}\mathfrak{H}$.

Korollar 1: *Der Durchschnitt einer Unterfastgruppe $\mathfrak{P}$ und eines Rechtsnormalteiler ist nie eine leere Menge.* Aus $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ entnimmt man, für jedes $p\in\mathfrak{P}$, $p=p'H'$, mit $p'\in\mathfrak{P}$, $H'\in\mathfrak{H}$. Dann gehört $H'$ zu dem Durchschnitt $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H}$.

Satz 10: *Der Durchschnitt zweier Rechtsnormalteiler $\mathfrak{P}$ und $O$ ist der Rechtsnormalteiler $\mathfrak{D}=\mathfrak{P}\cap O$.* Wir wissen schon, dass $\mathfrak{D}$ eine nicht leere Menge ist. Im Kiokemeistersschen Sinne ist $\mathfrak{D}$ ein Normalteiler. Es muss hierzu aber, dass $\mathfrak{D}$ Rechtsnormalteiler ist, bewiesen werden. Wir dürfen teilweise die Überlegungen von Albert ([8], S. 403) benutzen. Wenn $d\in\mathfrak{D}$ hat man

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{P}\cap O=d\mathfrak{P}_r\cap dO_r=d\mathfrak{P}_r^*\cap dO_r^*\supseteq d(\mathfrak{P}_r^*\cap O_r^*),$$

$$d(\mathfrak{P}_r^*\cap O_r^*)\supseteq d(\mathfrak{P}_r\cap O_r)\supseteq d\mathfrak{D}_r=\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}=d(\mathfrak{P}_r^*\cap O_r^*).$$

Aber $\mathfrak{P}_r^*\cap O_r^*=\Gamma$ ist eine invariante Untergruppe in $Q_r$. Der Satz 6 behauptet, dass $\mathfrak{D}$ Rechtsnormalteiler ist wenn $T_d^{(r)}\in\Gamma$ und $d(T_d^{(l)})^{-1}\in d\Gamma$. Dies schliessen wir aus $T_d^{(r)}\in\mathfrak{P}_r$, $T_d^{(r)}\in O_r$ sowie aus $d(T_d^{(l)})^{-1}\in d\mathfrak{P}_r^*\cap dO_r^*=d\Gamma$.

Man kann auch leicht verifizieren, dass das Produkt von zwei Rechtsnormalteiler ein Normalteiler ist. Wir legen Interesse daran die Beweise beider folgenden Behauptungen vollständig durchzuführen.

Satz 11: *Sind $\mathfrak{H}$ ein Rechtsnormalteiler in $Q$ und $\mathfrak{h}$ ein Rechtsnormalteiler in der Unterfastgruppe $\mathfrak{P}$, dann können die Klassen $\{\mathfrak{h}\mathfrak{H}, (pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r, (p'H')(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r, \cdots\}$ die Form $(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r=(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})$ nehmen, wobei $p, p', \cdots$ in $\mathfrak{P}$ und $H, H', \cdots$ in $\mathfrak{H}$ liegen.* Zunächst ist es nachzuweisen, dass

$$(pH)(T_{h'H'}^{(r)})^{-1}=x\in(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), \quad (h'\in\mathfrak{h}).$$

Tatsächlich haben wir, mit $h', h'', \cdots\in\mathfrak{h}$:

$$pH=x(h'H')=(xh')H'';$$

$$x=(pH)(T_{H''}^{(r)})^{-1}(T_{h'}^{(r)})^{-1}=p(T_{h'}^{(r)})^{-1}H'''=ph''\cdot H'''=$$
$$=pH^{(IV)}\cdot h''=(p\cdot HH^{(V)})h''=[(pH)H^{(VI)}]h''=$$
$$=(pH\cdot h'')H^{(VII)}=(pH)(h''H^{(VIII)})\in(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H}).$$

Danach, müssen wir beweisen, dass $z(h''H'')$ ebenso wie $z(T_{h''H''}^{(r)})^{-1}$ zu $(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})$ gehören, sobald wir $z\in(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})$ nehmen. Aus $z=(pH)(h'H')$ ergibt sich

$$z(h''H'')=[(pH)(h'H')](h''H'')=[(pH\cdot h')H'''](h''H'')=$$
$$=([(pH\cdot h')H''']h'')H^{(IV)}=[(pH\cdot h')h'']H^{(V)}=$$
$$=[(ph'\cdot H_1)h'']H^{(V)}=[(ph'\cdot h'')H_2]H^{(V)}=$$
$$=(ph_1)H_3\in(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H}),$$

wobei $h_1\in\mathfrak{h}$ und $H_1, H_2, \cdots\in\mathfrak{H}$. Man hat auch

$$z(T^{(r)}_{h''H''})^{-1}=w, \qquad z=w\cdot h''H''=(wh'')H'',$$
$$[(pH)(h'H')]H^{(VI)}=wh''=(pH)(h'H'\cdot H^{(V)})=(pH)(h'H_1)$$
$$w=[(pH)(h'H_1)](T^{(r)}_{h''})^{-1}=[(ph')H_2](T^{(r)}_{h''})^{-1}=$$
$$=(ph_1)H_3\in(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H}),$$

wodurch der Beweis vollgebracht wird.

Bemerkungen: Den vorangehenden Beweis kann man auf mehrere Wege durchführen. Hierzu machen wir einige Bemerkungen. Aus der Gleichheit $(pH)(h'H')=(ph')H_1=p(h'H_2)$ entnimmt man die Inklusionen $(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})\subseteq(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}$, $(pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})\subseteq p(\mathfrak{h}\mathfrak{H})$. Die umgekehrten Inklusionen sind auch gültig. Deswegen können die Klassen der Zerlegung von $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ folgende Formen nehmen:

$$\begin{matrix} \{(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), (pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r, \cdots\}; & \{(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), (pH)(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), \cdots\}; \\ \{(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), (p\mathfrak{h})\mathfrak{H}, \cdots\}; & \{(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), p(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), \cdots\}, \end{matrix} \tag{4}$$

ebenso wie $\{(\mathfrak{h}\mathfrak{H}), p(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r, p'(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r, \cdots\}$,

da wir noch $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{h}\mathfrak{H}$ haben.

Satz 12: *Unter den genauen Bedingungen vorigen Satzes, die Unterfastgruppe* $(\mathfrak{h}\mathfrak{H})$ *von* $(\mathfrak{P}\mathfrak{H})$ *ist Rechtsnormalteiler in* $(\mathfrak{P}\mathfrak{H})$. Zum Nachweis brauchen wir folgendes zu zeigen: 1) das Produkt von zwei Klassen (4) ist eine Klasse; 2) die Abbildung $pH\to(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}$ ist ein Homomorphismus; 3) die Klassen (4) bilden eine Fastgruppe.



Beweis: 1) da $\mathfrak{H}$ Rechtsnormalteiler in $Q$ ist, gilt die Gleichheit $(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}\cdot(p'\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p\mathfrak{h}\cdot p'\mathfrak{h})\mathfrak{H}$; und da $\mathfrak{h}$ Rechtsnormalteiler in $\mathfrak{P}$ ist, hat man $p\mathfrak{h}\cdot p'\mathfrak{h}=(pp')\mathfrak{h}$. Es folgt $(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}\cdot(p'\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p_1\mathfrak{h})\mathfrak{H}$, mit $p_1=pp'$.

2) Es sei $pH=p'H'$. Dann haben wir $p'=(pH)(T^{(r)}_{H'})^{-1}=pH''$, ebenso wie

$$(p'\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(pH''\cdot\mathfrak{h})\mathfrak{H}\subseteq(pH''\cdot\mathfrak{h}\mathfrak{H})\mathfrak{H}=(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}, \quad (p\mathfrak{h})\mathfrak{H}\subseteq(p'\mathfrak{h})\mathfrak{H},$$

was $(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p'\mathfrak{h})\mathfrak{H}$ ergibt.

3) Wir betrachten die Gleichung

$$(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}\cdot(x_0\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p'\mathfrak{h})\mathfrak{H},$$

die man löst mit $x_0=p_0$, $pp_0=p'$. Versuchen wir auch dieselbe Gleichung mit $(x_1\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p_1\mathfrak{h})\mathfrak{H}$ zu lösen. Dann würden wir

$$(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}\cdot(p_0\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p\mathfrak{h})\mathfrak{H}\cdot(p_1\mathfrak{h})\mathfrak{H}$$

haben. Das Folgende würde auch gelten:

$$[(pp_0)\mathfrak{h}]\mathfrak{H}=[(pp_1)\mathfrak{h}]\mathfrak{H}, \quad (pp_0)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r=(pp_1)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r,$$
$$pp_1\in(pp_0)(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r=(pp_0)(\mathfrak{h}\mathfrak{H}).$$

Deswegen hätte mann noch

$$pp_1=pp_0\cdot hH=(pp_0\cdot h)H_1=(p\cdot p_0h_1)H_1=p\cdot(p_0h_1\cdot H_2),$$
$$p_1=p_0h_1\cdot H_2=p_0\cdot h_1H_3, \quad p_1(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r=p_0(\mathfrak{h}\mathfrak{H})_r, \quad (p_1\mathfrak{h})\mathfrak{H}=(p_0\mathfrak{h})\mathfrak{H},$$

wodurch alles gezeigt ist.

Was die Isomorphiesätze betrifft, Korollar 1 erlaubt den, zu Satze 6 der Nummer 3 vorigen Paragraphen, ähnlichen Satz, ohne jede Vorsichtigkeit auszusprechen. Es ist klar, dass nur $\mathfrak{T}$ braucht Rechtsnormalteiler zu sein. $\mathfrak{P}$ ist nur Unterfastgruppe. Der erste Isomorphiesatz lautet wie üblich. Der dritte, oder Satz von ZASSENHAUS wollen wir ausführlich behandeln.

SATZ 13: *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{P}$ *zwei Unterfastgruppen von* Q *und* $\mathfrak{A}_0$ *und* $\mathfrak{P}_0$ *Rechtsnormalteiler in* $\mathfrak{A}$ *bzw. in* $\mathfrak{P}$; *der Durchschnitt* $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}$ *wird nicht leer angenommen, dann kann man folgendes behaupten:* 1) $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}_0)\mathfrak{A}_0$ *ist Rechtsnormalteiler in* $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\mathfrak{A}_0$ *und* $(\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P})\mathfrak{P}_0$ *Rechtsnormalteiler in* $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\mathfrak{P}_0$; 2) *gilt der Isomorphismus* $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\mathfrak{A}_0/(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}_0)\mathfrak{A}_0\simeq$ $\simeq(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\mathfrak{P}_0/(\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P})\mathfrak{P}_0$. Man beachte hierzu, dass $\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}_0$ nicht leer sind; dies entnimmt man z. B. aus der Tatsache, dass $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\cap\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P}$, in $\mathfrak{A}$, nicht leer ist. Danach, wie im Satze 7, Nummer 3, § 2, betrachten wir den Homomorphismus

$$\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0, \tag{5}$$

was zu

$$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}\sim(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\mathfrak{A}_0/\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}/\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P}$$

führt, wie man folgendermassen ersieht: 1) $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}$ ist nicht leer, wodurch $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}$, nach (5), ein Bild hat; 2) das Bild enthält $\mathfrak{A}_0$, da $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\cap\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P}$ nicht leer ist; 3) wenn wir das Produkt $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P})\mathfrak{A}_0$ betracthen, erhalten wir das Bild von $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}$, weil die Elemente von $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}$ die Rechtseinheit $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ als Bild haben. Der Rest der Überlegungen sind dieselben wie in den zitierten Nummer und Paragraphen.

Eine ähnliche Behauptung macht man für die Theorie von JORDAN-HÖLDER-SCHREIER.

BEMERKUNG: Beim Beweise vom Satze 13 muss man nicht vergessen, dass $(\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}_0)=(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}_0)(\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{P})$ ist.

5) **Linksnormalteiler** — Man kann auch *Linksnormalteiler* in ähnlicher Weise einführen. Es gibt Sätze die den vorangehenden Sätzen 2-13 entsprechen.



## § 4. ZWEISEITIGE NORMALTEILER

1) **Definition und Sätze** — Wir wollen hier einen anderen besonderen Fall von Homomorphismus $Q\sim Q'$ behandeln. Und zwar machen wir die Annahme, dass es eine Identität $u'\in Q'$ gibt. Die Klasse $\mathfrak{U}=\mathfrak{P}$, auf $u'$ abgebildet, ist ein im KIOKEMEISTERschen Sinne Normalteiler. Wir dürfen hier

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_{\div}=p\mathfrak{P}_{\div}^{*},\quad \mathfrak{A}=a\mathfrak{P}=a\mathfrak{P}_{\div}=a\mathfrak{P}_{\div}^{*},\cdots$$

schreiben, mit der Multiplikationsregel $a\mathfrak{P}_{\div}\cdot b\mathfrak{P}_{\div}=(ab)\mathfrak{P}_{\div}$, wie man leicht durch Überlegungen, die analog denjenigen von Nummer 2, § 2, sind erkennen kann. Es gilt der folgende

SATZ 1: *Ist* $\Gamma$ *eine invariante Untergruppe von* $Q_{\div}$, *dann ist der Quotientraum (1), Nummer 1, § 3, eine Fastgruppe mit der Multiplikationsregel* $a\Gamma\cdot b\Gamma=(ab)\Gamma$, *was ein Homomorphismus* $Q\sim Q'=Q_\Gamma$ *zwischen zwei Fastgruppen verwirklicht. Umgekehrt, ein Homomorphismus* $Q\sim Q'$ *zwischen zwei Fastgruppen, von denen die zweite Identität hat, führt zu einem invarianten* $\Gamma$ *in* $Q_{\div}$, *und deswegen zu einem Homomorphismus* $Q\sim Q_\Gamma\simeq Q'$.

Die invariante Untergruppe $\Gamma$ im umgekehrten Teil des Satzes erwähnt ist $\Gamma=\mathfrak{P}_{\div}^{*}$.

Ein *zweiseitiger Normalteiler* ist eine Unterfastgruppe $\mathfrak{P}$, für welches $\{\mathfrak{P},a\mathfrak{P}_{\div},b\mathfrak{P}_{\div},\cdots\}$ eine Fastgruppe mit der Multiplikationsregel $a\mathfrak{P}_{\div}\cdot b\mathfrak{P}_{\div}=(ab)\mathfrak{P}_{\div}$ bildet. Der entsprechende Homomorphiesatz lautet:

SATZ 2: *Ist* $\mathfrak{P}$ *ein zweiseitiger Normalteiler in* Q, *dann gilt der Homomorphismus* $Q\sim Q/\mathfrak{P}$, *wobei* $Q/\mathfrak{P}$ *Fastgruppe mit Identität ist. Umgekehrt, von einem Homomorphismus*

$Q \sim Q'$ *zwischen zwei Fastgruppen ausgehend, von denen die zweite Identität hat, kommt man zu einem zweiseitigen Normalteiler* $\mathfrak{P}$ *in* $Q$, *für welches der Isomorphismus* $Q/\mathfrak{P} \sim \mathfrak{P}'$ *gilt.*

Es empfehlt sich noch die beiden folgenden Behauptungen anzugeben, deren Beweis wie bei den entsprechenden Sätzen 4 und 6 des vorangehenden Paragraphen durchläuft:

SATZ 3: *Dann und nur dann ist die Unterfastgruppe* $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_\tau$ *ein zweiseitiger Normalteiler, wenn* $\mathfrak{P}^*_\tau$ *eine invariante Untergruppe in* $Q_\tau$ *ist.*

SATZ 4: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass eine Untermenge* $\mathfrak{P}$ *von* $Q$ *eine zweiseitiger Normalteiler in* $Q$ *ist, dass folgende Bedingungen bestehen:* 1) $\mathfrak{P} = p\Gamma$; 2) $p \in \mathfrak{P}$ *(trivial)*: 3) $\Gamma$ *invariante Untergruppe in* $Q_\tau$; 4) $T_p^{(r)}, T_p^{(l)} \in \Gamma$.

2) **Ein-und zweiseitige Normalteiler**—Es ist zweckmässig folgend bereits bewiesene Tatsachen gut an Erinnerung zu haben. Wenn $\mathfrak{P}$ zweiseitiger Normalteiler ist, hat man

$$Q\,\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}_\tau, b\mathfrak{P}_\tau, \cdots\} = \{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}, b\mathfrak{P}, \cdots\}; \qquad (1)$$

aber wenn $\mathfrak{P}$ Rechtsnormalteiler ist, dann gilt

$$Q/\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}_d, b\mathfrak{P}_d, \cdots\} = \{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}, b\mathfrak{P}, \cdots\}. \qquad (2)$$

Selbst wenn $\mathfrak{P}$ nur Normalteiler ist, gelten auch die Gleichheiten

$$Q\,\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots\} = \{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}, b\mathfrak{P}, \cdots\}, \qquad (3)$$



wobei $\mathfrak{A} = a\mathfrak{P}$, $\mathfrak{B} = b\mathfrak{P}$, usw.. Was (3) betrifft, dürfen wir beobachten, dass $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \bar{a}\mathfrak{B}$, mit $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ ist; auch aus der Lösbarkeit der Gleichung $\mathfrak{X}\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ entnimmt man, dass jede Klasse $\mathfrak{A}$ den Ausdruck $\mathfrak{A} = f\mathfrak{P}$ annehemen kann, für gewisses $f \in Q$. Die Gleichung $\mathfrak{P}\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}$ ist gleichfalls in (3) lösbar, wodurch (3) noch die Form

$$Q/\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}a, \mathfrak{P}b, \cdots\}$$

annimmt, obwohl im allgemeinen $a\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}a$ ist. Folglich, in (2), darf man auch $a\mathfrak{P}_d = a\mathfrak{P} = \mathfrak{P}f$ schreiben; es ist immer noch $a\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}a$. In (1) aber gilt $a\mathfrak{P}_\tau = a\mathfrak{P} = \mathfrak{P}a$, da $\mathfrak{P}a \subseteq a\mathfrak{P}_\tau, \mathfrak{P}a \subseteq a\mathfrak{P}$.

Falls $\mathfrak{P}$ zweiseitiger Normalteiler ist, es ist auch Rechtsnormalteiler. Dies erkennt man, indem man den Homomorphismus $Q \sim Q/\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ betrachtet und die Identität $u' \in Q'$ als Rechtseinheit auslegt. So hat man den folgenden

SATZ 4: *Wenn* $\mathfrak{P}$ *eine Unterfastgruppe in* $Q$ *und* $\mathfrak{P}^*_\tau$ *eine invariante Unterfastgruppe in* $Q_\tau$ *sind, dann:* 1) *jede Klasse* $a\mathfrak{P}_\tau$ *hat die Form* $a\mathfrak{P}_r$; 2) *es ist* $\mathfrak{P}^*_r = \mathfrak{P}^*_\tau$; 3) *für jedes* $p \in \mathfrak{P}$, *gilt* $T_p^{(l)} \in \mathfrak{P}^*_r$. Unter einem umgekehrten Gesichtspunkt, wollen wir beweisen:

SATZ 5: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Unterfastgruppe* $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_\tau = p\mathfrak{P}_r = p\mathfrak{P}$, *als Rechtsnormalteiler angenommen, ein zweiseitiger Normalteiler ist, dass, für ein gewisses* $p \in \mathfrak{P}$, $T_p^{(l)} \in \mathfrak{P}^*_r$ *ist.* Die Bedingung ist *notwendig*:—Dies zeigt den vorangehenden Satz.

Die Bedingung ist *hinreichend*: — Umgekehrt, wir nehmen $\mathfrak{P}$ als Rechtsnormalteiler und $T_p^{(l)} \in \mathfrak{P}^*_d$ an; dann wollen wir zeigen, dass, für jedes $x \in Q$, $x\mathfrak{P}_\tau = x\mathfrak{P}_r$ gilt. Ist $p' \in \mathfrak{P}$, hat man die Beziehungen

$$xT_{p'}^{(r)}, x(T_{p'}^{(r)})^{-1} \in x\mathfrak{P}_r ; \; xT_{p'}^{(l)} = p'x = pP_r^{*} \cdot x = \\ = pT_x^{(r)} P_r = xT_p^{(l)} P_r \in x\mathfrak{P}_r ,$$

wobei $P_r^{*} \in \mathfrak{P}_r^{*}$, $P_r \in \mathfrak{P}_r$. Es ist auch

$$x(T_{p'}^{(l)})^{-1} = y , \quad x = yT_{p'}^{(l)} \in y\mathfrak{P}_r , \quad x\mathfrak{P}_r = y\mathfrak{P}_r , \quad y = x(T_{p'}^{(l)})^{-1} \in x\mathfrak{P}_r .$$

Endlich, wenn $z \in x\mathfrak{P}_r$, hat man z. B.

$$z(T_{p'}^{(l)})^{-1} = xP_r(T_{p'}^{(l)})^{-1} = x(T_{p'}^{(l)})^{-1} P_r' \in x\mathfrak{P}_r .$$

3) **Anwendungen**—Ist $\mathfrak{P}$ zweiseitiger Normalteiler angenommen, dann, aus der Tatsache $a\mathfrak{P}_{\div} = a\mathfrak{P}$, folgt gleich: die Ordnung eines zweiseitigen Normalteilers teilt die Ordnung von Q, wenn dies endlich ist. Allgemeiner, nach (3), gilt der folgende

Satz 6: *Ist* Q *eine endliche Fastgruppe und* $\mathfrak{P}$ *Rechtsnormalteiler in* Q, *dann die Ordnung von* $\mathfrak{P}$ *ist Teiler der Ordnung von* Q.

Sowohl die vorige Behauptung wie die die folgt hat Albert, im Fall der Fastgruppen mit Identität, bewiesen.

Satz 7: Q *sei eine endliche Fastgruppe. Dann, wenn* $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_{\div}$ *eine Fastgruppe ist, die Annahme, dass die Abildung* $a \to a\mathfrak{P}_{\div}$ *eine Homomorphismus ist, charakterisiert* $\mathfrak{P}$ *als zweiseitiger Normalteiler in* Q. Der Beweis stüzt sich auf eine allgemeine Bemerkung. Aus der Voraussetzung $a\mathfrak{P}_{\div} \cdot b\mathfrak{P}_{\div} = (ab)\mathfrak{P}_{\div}$ folgt

$$(T_a^{(r)})^{-1} \mathfrak{P}_{\div}^{*} T_a^{(r)} \subseteq \mathfrak{P}_{\div}^{*} , \quad (T_a^{(l)})^{-1} \mathfrak{P}_{\div}^{*} T_a^{(l)} \subseteq \mathfrak{P}_{\div}^{*} ,$$

wie wir gleich sehen wollen. Sei z. B.

$$x(T_a^{(l)})^{-1} = y , \quad x(T_a^{(l)})^{-1} S T_a^{(l)} = w , \quad S \in \mathfrak{P}_{\div}^{*} .$$



Dann, mit $V \in \mathfrak{P}_{\div}$, haben wir

$$w = a \cdot yS = aI \cdot yS = (ay)V = xV \in \mathfrak{P}_{\div} ,$$

wobei $I$ die Identitätstransformation von Q ist. Nun ist Q endlich angenommen; dasselbe gilt für $\mathfrak{P}_{\div}^{*}$, wodurch

$$(T_a^{(l)})^{-1} \mathfrak{P}_{\div}^{*} T_a^{(l)} = \mathfrak{P}_{\div}^{*} , \quad T_a^{(l)} \mathfrak{P}_{\div}^{*} (T_a^{(l)})^{-1} = \mathfrak{P}_{\div}^{*} ,$$

und infolgedessen ist $\mathfrak{P}_{\div}^{*}$ invariante Untergruppe in $Q_{\div}$. Der Satz wird somit bewiesen.

Die Bruckschen Fastgruppen erlauben eine ähnliche Behauptung wie die des vorigen Satzes. Man hat den

Satz 8: *Wenn* Q *einne* Bruck*sche Fastgruppe ist, dann ist die Unterfastgruppe* $\mathfrak{P} = p\mathfrak{P}_{\div}$ *eine* Bruck*sche Fastgruppe; und es ist notwendig und hinreichend dafür, dass* $\mathfrak{P}$ *zweiseitiger Normalteiler ist, dass man* $a\mathfrak{P}_{\div} \cdot b\mathfrak{P}_{\div} = (ab)\mathfrak{P}_{\div}$ *hat.* In der Tat die Gleichungen $px = p'$, $yp = p'$, $(p, p' \in \mathfrak{P})$, haben die Lösungen $x = p'(T_p^{(l)})^{-1} = p' T_{pL}^{(l)} = pL \cdot p'$, $y = p' \cdot pR$. Da aber $x, y \in \mathfrak{P}$, auch $pL$ und $pR$ gehören zu $\mathfrak{P}$. Das Element $p$ ist beliebig in $\mathfrak{P}$; hierzu folgt der erste Teil des Satzes. Für den zweiten Teil, wissen wir, dass die Annahme $a\mathfrak{P}_{\div} \cdot b\mathfrak{P}_{\div} = (ab)\mathfrak{P}_{\div}$ nach sich z. B. die Inklusion

$$(T_a^{(r)})^{-1} \mathfrak{P}_{\div}^{*} T_a^{(r)} \subseteq \mathfrak{P}_{\div}^{*}$$

zieht. Dann gelten die Beziehungen

$$(T_{aR}^{(r)})^{-1} \mathfrak{P}_{\div}^{*} T_{aR}^{(r)} = T_a^{(r)} \mathfrak{P}_{\div}^{*} (T_a^{(r)})^{-1} \subseteq \mathfrak{P}_{\div}^{*} ,$$

und $\mathfrak{P}_{\div}^{*}$ ist, wie erwünscht, invariante Untergruppe in $Q_{\div}$.

Die Betrachtungen der Nummer 4, § 3, konnten wir hier mit den zuträglichen Abänderungen wiederhollen. Im Fall des Satzes 9 des zitierten Paragraphen, hat man

$\mathfrak{P}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{H}$ zweiseitiger Normalteiler ist. Was die anderen Sätze betrifft, ist es nützlich eine Bemerkung zu tun. Wir sahen schon, dass jeder zweiseitige Nomalteiler auch einseitig ist (rechts-und links). Umgekehrt, ist $\mathfrak{P}$ Rechts-und Linksnormalteiler, dann ist $\mathfrak{P}$ zweiseitig, wie man folgendermassen erkennt: 1) Als Rechts-oder Linksnormalteiler betrachtet, ist $\mathfrak{P}$ Normalteiler in Kiokemeisterschen Sinne; 2) es gibt bei dem Homomorphismus $Q \sim Q/\mathfrak{P}=Q'$ z. B. eine Rechtseinheit $u' \in Q'$, die die Klasse $\mathfrak{P} \in Q/\mathfrak{P}$ ist; 3) wenn $\mathfrak{P}$ aber als Linksnormalteiler angenommen wird, Satz 1, § 2, zeigt, dass der Quotientraum $Q/\mathfrak{P}$ derselbe ist; 4) die Rechtseinheit $u'$ ist zweiseitig.

## § 5. EINFACHE FASTGRUPPEN. ZENTRUM EINER FASTGRUPPE

1) **Einfache Fastgruppen** — Eine Fastgruppe $Q$ heisst *einfach,* wenn keinen echten zweiseitigen Normalteiler hat. Natürlich, falls $Q$ Identität besitzt, $Q$ ist noch einfach, wenn die Identität den einzigen Normalteiler bildet.

$Q$ sei eine einfache Fastgruppe ohne Identität. Wir nehmen $Q_\tau$ und betrachten die invariante Untergruppe $\Gamma$ in $Q$. Wir setzen $\Gamma$ intransitiv über $Q$ voraus; es kann dann kein $p \in Q$ geben, für welches $T_p^{(r)}, T_p^{(l)} \in \Gamma$, da sonst $p\Gamma$ einen echten zweiseitigen Normalteiler in $Q$ wäre (Satz 4, Nummer 1, § 4). Umgekehrt falls keine $T_p^{(r)}$ und $T_p^{(l)}$ enthaltendene invariante Untergruppe $\Gamma$ in $Q$ existiert ($p \in Q$ beliebig), dann ist $Q$ einfach, sonst ein echter zweiseitiger Normalteiler $\mathfrak{P}$ die Form $\mathfrak{P}=p\mathfrak{P}_\tau^* = p\mathfrak{P}_\tau^*$ haben würde, und $\mathfrak{P}_\tau^* = \Gamma$ eine invariante Untergruppe in $Q_\tau$ wäre, die die Voraussetzung über $\Gamma$ widerlegen würde. Esgilt der folgende



Satz 1: *Bei gegebener Fastgruppe $Q$ ohne Identität, ist notwendig und hinreichend dafür, dass $Q$ einfach ist, dass es keine $T_p^{(r)}$ und $T_p^{(l)}$ enthaltendene invariante Untergruppe $\Gamma$ in $Q_\tau$ gibt, die intransitiv über $\mathfrak{P}$ sei ($p \in Q$ beliebig festgesetzt).*

Für den Fall der Fastgruppen mit Identität müssen wir sagen ([1], S. 516): Dafür, dass $Q$ einfach ist, ist notwendig und hinreichend, dass es keine invariante Untergruppe $\Gamma$ in $Q_\tau$ gibt, die intransitiv über $Q$ sei, ausser $\Gamma=(I)$.

2) **Zentrum einer Fastgruppe** — Wir definieren das *Zentrum* $\mathfrak{Z}$ einer Fastgruppe wie die Menge der Elemente $c \in Q$, für die folgende Bedingungen bestehen: 1) es ist $cx=xc$, für jedes $x \in Q$; 2) man hat $(xy)c=(xc)y=x(yc)$, für beliebige $x,y \in Q$. Diese beiden Bedingungen kann man auch so ausdrücken: 1') es ist $T_c^{(r)}=T_c^{(l)}$; 2') man hat $T_x^{(r)}T_c^{(r)}=T_c^{(r)}T_x^{(r)}$, $T_x^{(l)}T_c^{(r)}=T_c^{(r)}T_x^{(l)}$.

Hieraus schliesst man, dass $c \in \mathfrak{Z}$ nach sich $T_c^{(r)} \in \Lambda =$ $=$ Zentrum von $Q_\tau$ zieht. Es sei $H \in \Lambda$. Dann haben wir

$$cH \cdot x=cH\,T_x^{(r)}=cT_x^{(r)}H=(cx)H=(xc)H=$$
$$=cT_x^{(l)}H=cH\,T_x^{(l)}=x \cdot cH,$$

wodurch alle die Elemente von $c\Lambda$ mit jedem beliebigen $x \in Q$ vertauschbar sind. Sodann gilt sukzessive:

$$(xy) \cdot cH=cH\,T_{xy}^{(l)}=c\,T_{xy}^{(l)}H=(xy \cdot c)H=(x \cdot yc)H=$$
$$=c\,T_y^{(l)}T_x^{(l)}H=cH\,T_y^{(l)}T_x^{(l)}=x \cdot (y \cdot cH),$$

ebenso wie

$$(xy) \cdot cH=(xc \cdot y)H=cT_x^{(l)}T_y^{(r)}H=cH\,T_x^{(l)}T_y^{(r)}=(x \cdot cH)y.$$

Die Elemente von $c\Lambda$ genügen beiden Bedingungen 1) und 2), woraus die Inklusion $c\Lambda \subseteqq \mathfrak{Z}$, für beliebiges $c \in \mathfrak{Z}$, geschlossen werden kann.

Man kann auch beweisen, dass $\mathfrak{Z}$ eine Fastgruppe ist. Zunächst einmal ist sehr einfach zu zeigen, dass $cc' \in \mathfrak{Z}$, falls $c, c' \in \mathfrak{Z}$. Sodann betrachten wir die Gleichung $cz = c'$. Wir bezeichnen die Lösung mit $z$ selbst und setzen $x = sc$; es ist

$$(xy)z = (sc \cdot y)z = (sy \cdot c)z = (sy \cdot z)c = sy \cdot zc = sy \cdot c' =$$
$$= sc' \cdot y = (s \cdot cz)y = (s \cdot zc)y = (sc \cdot z)y = (xz)y.$$

In ähnlicher Weise, wenn man $y = ct$ setzt, hat man

$$(xy)z = (x \cdot ct)z = (xt \cdot c)z = (xt \cdot z)c = xt \cdot zc = xt \cdot c' =$$
$$= x \cdot tc' = x \cdot (t \cdot cz) = x(t \cdot zc) = x(ct \cdot z) = x(yz);$$

und endlich beweist man die Gleichheit $za = az$, für beliebiges $a \in Q$, indem man sukzessive schreibt:

$$tc = a, \quad za = z \cdot tc = zc \cdot t = c't = tc' = t \cdot cz = t \cdot zc = tc \cdot z = az.$$

Wir haben so den

Satz 2: *Sind $c$ ein Element des Zentrums von Q und $\Lambda$ das Zentrum von $Q_{-}$, dann hat man $c\Lambda \subseteqq \mathfrak{Z}$. Das Zentrum $\mathfrak{Z}$ ist eine Gruppe.*

Auf Grund der vorangehenden Ergebnisse, betrachten wir die Gleichungen

$$cz = c, \quad ax = a, \quad ya = a,$$

wobei $c \in \mathfrak{Z}$ und $a \in Q$. Die Lösung der ersten ist $z = u =$ = Identität von $\mathfrak{Z}$. Sodann gilt



$$c \cdot au = c \cdot ua = ua \cdot c = uc \cdot a = ca, \quad au = a;$$
$$ua \cdot c = ac; \quad ua = a.$$

Die Identität von $\mathfrak{Z}$ ist Identität von Q. Damit haben wir

Satz 3: *Dann und nur dann ist das Zentrum einer Fastgruppe Q nicht leer, wenn Q Einselement hat.*

## § 6. ERWEITERUNGSTHEORIE

1) **Definition**—Es seien $\mathfrak{P} = \{p, q, h, j, k, l, \cdots, x, y, \cdots\}$ eine Fastgruppe und $\Lambda = \{I, A, B, C, \cdots, X, \cdots\}$ eine zweite Fastgruppe mit Rechtseinheit $I$. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{C} = \{(I, p); \cdots; (A, h); \cdots; (B, k); \cdots\} \tag{1}$$

und wollen uns im folgenden mit Bedingungen beschäftigen, die die Menge als Fastgruppe $\mathfrak{C} = Q$ interpretieren lassen. In Q ist $\mathfrak{P}$ dann ein Rechtsnormalteiler und gilt $\Lambda \simeq Q/\mathfrak{P}$.

Zunächst einmal, zwei Elemente von (1) sind verschieden. Eine Gleichheit $(A, h) = (B, k)$ bedeutet $A = B, h = k$. Sodann, ein Produkt

$$(A, h)\, o\, (B, k) = (AB, h\Phi_{A,B}k)$$

ist folgendermassen zu verstehen: Haltet man $A$ und $B$ fest, dann stellt $h\Phi_{A,B}k$ das Produkt der Elemente $h$ und $k$ in einer neuen Fastgruppe $\mathfrak{P}_{A,B} = \mathfrak{P}$, die sich genau der Elemente von $\mathfrak{P}$ zusammensetzt, dar. Für den Fall $A = I$, $B = I$, die Fastgruppe $\mathfrak{P}_{I,I}$ ist der Fastgruppe $\mathfrak{P}$ identisch:

$$h\Phi_{I,I}k = hk.$$

Es folgt $(I,h)o(I,k)=(I,hk)$, wodurch $\mathfrak{P}$ sich denken lässt in (1) eingebettet zu sein. Nun wollen wir andere Eigenschaften von $\mathfrak{C}$ untersuchen.

I) $(B,k)$ *definiert eine Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}$*: Bei gegebenem $(A,h)$ schreibt man $(X,x)o(B,k)=(A,h)$; es folgt

$$(A,h)=(XB,x\Phi_{X,B}k), \quad A=XB, \quad h=x\Phi_{X,B}k.$$

Die beiden letzten Gleichungen bestimmen $X$ und $x$. Ähnlich wird die Gleichung $(B,k)o(X,x)=(A,h)$ behandelt.

II) *Die Gleichungen* $(X,x)o(B,k)=(A,h)$ *und* $(B,k)o(Y,y)=(A,h)$ *haben nur eine Lösung*: Aus der Darlegungen in I) entnimmt man, dass es Lösung gibt. Wenn man aber z. B. $(X,x)o(B,k)=(X',x')o(B,k)$ hätte, dann würde die Beziehung $XB=X'B$, ebenso wie $x\Phi_{X,B}k=$ $=x'\Phi_{X',B}k=x'\Phi_{X,B}k$ gelten. Es wäre noch $x=x'$.

III) *Die Gleichheiten* $(A,h)\mathfrak{P}_r=(A,h)o\mathfrak{P}$: Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathfrak{C}=\mathrm{Q}$ eine Fastgruppe ist. Auch wissen wir, dass $\mathfrak{P}$ eine Unterfastgruppe in $\mathrm{Q}$ bildet. Sodann, falls $\mathfrak{P}$ Rechtsnormalteiler ist, gelten die Gleichungen $(A,h)\mathfrak{P}_r=(A,h)o\mathfrak{P}$. Diese notwendige Bedingung kann man gleich beweisen. Es ist

$$(A,h)o(I,k)=(A,h)ok=(A,h\Phi_{A,I}k)=(A,j)ox,$$

mit $h\Phi_{A,I}k=j\Phi_{A,I}x$; somit haben wir $(A,h)o\mathfrak{P}\subseteq(A,j)o\mathfrak{P}$. Die Gültigkeit der umgekehrten Inklusion ersieht man unmittelbar, wodurch man $(A,h)o\mathfrak{P}=(A,j)o\mathfrak{P}$ schreiben darf. Andererseits gilt immer $(A,h)\in(A,h)o\mathfrak{P}$, wie man aus $(A,h)=(A,h)o(I,x)$ erkennt. Für den Beweis von III) müssen wir zeigen, dass



$$(A,h)T_k^{(r)};\quad (A,h)(T_k^{(r)})^{-1};\quad zT_k^{(r)};\quad z(T_k^{(r)})^{-1}; \qquad (2)$$

zu $(A,h)o\mathfrak{P}$ gehören, unter den Voraussetzungen: $T_k^{(r)}=$ $=T_{(I,k)}^{(r)}$ und $z\in(A,h)o\mathfrak{P}$. Das erste Element (2) braucht man nicht mehr zu betrachten. Für das zweite macht man

$$(A,h)(T_k^{(r)})^{-1}=(X,x), \text{ oder } (A,h)=(X,x)T_k^{(r)}=(X,x\Phi_{X,I}k),$$

was $X=A$, $(X,x)\in(A,h)o\mathfrak{P}$ ergibt. Wir untersuchen noch das letzte Element (2). Es ist

$$z(T_k^{(r)})^{-1}=(A,j)(T_k^{(r)})^{-1}\in(A,j)o\mathfrak{P}=(A,h)o\mathfrak{P}.$$

Somit hat man gezeigt, dass $\mathfrak{P}$ in fremde Klassen $(A,h)o\mathfrak{P}$ eingeteilt wird.

IV) *Das Produkt* $[(A,h)o\mathfrak{P}]o[(B,h)o\mathfrak{P}]$: Ein Element des Produkts hat die Form $(A,j)o(B,l)=$ $=(AB,j\Phi_{A,B}l)\in(AB,h)o\mathfrak{P}$. Umgekehrt, ein Element $(AB,k)\in$ $\in(AB,h)o\mathfrak{P}$ darf man schreiben $(AB,k)=(A,h)o(B,x)$, wenn man $x$ als die Lösung der Gleichung $h\Phi_{A,B}x=k$ nimmt. So folgt die Gleichheit

$$[(A,h)o\mathfrak{P}]o[(B,h)o\mathfrak{P}]=(AB,h)o\mathfrak{P}. \qquad (2')$$

V) *Die Gleichungen* $[(A,h)o\mathfrak{P}]o[(X,h)o\mathfrak{P}]=(C,h)o\mathfrak{P}$ *und* $[(Y,h)o\mathfrak{P}]o[(A,h)o\mathfrak{P}]=(C,h)o\mathfrak{P}$: Ist $X$ durch die Bedingung $AX=C$ bestimmt, dann sieht man, dass $(X,h)o\mathfrak{P}$ eine Lösung der ersten Gleichung ist. Es kann keine andere Lösung geben, wie es sich unmittelbar erkennt. Für die zweite Gleichung das Ergebnis ist dasselbe.

VI) *Der Isomorphismus* $\mathrm{Q}/\mathfrak{P}\simeq\Lambda$: Wir sahen, dass eine Klasse $(A,h)o\mathfrak{P}$ sich genau der Elemente $(A,j),(j\in\mathfrak{P})$, zusammensetzt. Die Klasse wird durch $A$ charakterisiert;

es gibt eine eineinseitige Abbildung zwischen den Klassen und den Elementen von $\Lambda$. Der Gleichheit (2') wegen, hat man den Isomorphismus $\mathfrak{Q}/\mathfrak{P} \simeq \Lambda$.

Als Zusammenfassung der vorangehenden Betrachtungen haben wir den

SATZ 1: *Sind* $\mathfrak{P} = \{p, q, h, k \cdots\}$ *und* $\Lambda = \{I, A, B, \cdots\}$ *zwei Fastgruppen, von denen die letzte Rechtseinheit* $I$ *hat, so folgt die Existenz einer Fastgruppe* $\mathfrak{Q}$, *in welcher* $\mathfrak{P}$ *Rechtsnormalteiler ist und für die den Isomorphismus* $\mathfrak{Q}/\mathfrak{P} \simeq \Lambda$ *gilt.* $\mathfrak{Q}$ heisst eine *Erweiterung* von $\mathfrak{P}$ nach $\Lambda$. ALBERT, ([8], S. 406), schreibt $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P}, \Lambda, \Phi)$.

Umgekehrt, wir beweisen

SATZ 2: *Wenn* $\mathfrak{Q}$ *eine Fastgruppe und* $\mathfrak{P}$ *Rechtsnormalteiler in* $\mathfrak{Q}$ *ist, dann es gibt* $\Lambda$ *in solcher Weise, dass* $\mathfrak{Q}$ *Erweiterung von* $\mathfrak{P}$ *nach* $\Lambda$ *ist.* Es sei

$$\mathfrak{Q} = \{p, q, h, \cdots, a, b, c, d, \cdots\},$$
$$\mathfrak{P} = \{p, q, s, h, k, j, l, \cdots, x, y, v, w, \cdots\},$$
$$\mathfrak{Q}/\mathfrak{P} = \Lambda_0 = \{\mathfrak{P}, a\mathfrak{P}, b\mathfrak{P}, \cdots, (ab)\mathfrak{P}, \cdots\} = \{I, A, B, \cdots, AB, \cdots\},$$

wobei man $\mathfrak{P} = I, a\mathfrak{P} = A, \cdots, (ab)\mathfrak{P} = AB$, usw. gesetzt hat. Wir wählen in $I, A, B, \cdots, AB, \cdots$ feste Elemente $p \in I, a \in A, b \in B, \cdots, t \in AB, \cdots$, unter der Bemerkung, dass man nicht behaupten darf, dass $t$, in $AB$ gewählt, das Produkt der entsprechend in $A$ und $B$ gewählten Elemente $a$ und $b$ ist. Man beobachte tatsächlich, dass, unter der Voraussetzung $(cd) = (ab)h$, die Klassen $CD$ und $AB$ identisch sind, ohne die Gleichheit $cd = ab$ zu gelten.

Sodann, wir nehmen beliebige Elemente $a_1 b_1 \in \mathfrak{Q}$, und setzen $a_1 \in a\mathfrak{P} = A$, $a_1 = ah$, mit $h \in \mathfrak{P}$, voraus. Diese Darstellung von $a_1$ ist eindeutig. Wir schreiben $a_1 = (A, h)_a$.



Ähnlich, die Gleichheit $b_1 = bk$ ergibt die Darstellung $b_1 = (B, k)_b$. Nun ist $a_1 b_1 \in (ab)\mathfrak{P}$, $a_1 b_1 = tw = (AB, w)_t$, woraus

$$a_1 b_1 = (A, h)_a \cdot (B, k)_b = (AB, w)_t, \quad \text{mit} \quad (ah)(bk) = tw, \tag{2''}$$

folgt. Eine mögliche Ausnahme in der angewandten Darstellung mögen die Elemente von $\mathfrak{P}$ bilden. Für diese setzen wir

$$h = ph_0 = (I, h), \quad \text{statt} \quad h = ph_0 = (I, h_0)_p, \quad (h_0 \in \mathfrak{P}).$$

So hat man

$$hk = (I, h)(I, k) = (I, hk). \tag{3}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Einführung des Produkts

$$(A, h)_a \cdot (B, k)_b = (AB, h\Phi_{A,B} k)_t \tag{4}$$

eine Familie von Fastgruppen $\{\mathfrak{P}_{A,B} = \mathfrak{P}\}$ verwirklicht, für die die Beziehung $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P}, \Lambda_0, \Phi)$ gilt. Die Produktregel (3) kann man auch so ausdrücken

$$hk = (I, h)(I, k) = (I, h\Phi_{I,I} k) = (I, hk),$$

wobei, in Übereinstimmung mit (3), $h\Phi_{I,I} k = hk$. Was (4) betrifft, durch Vergleichung mit (4), erhalten wir

$$h\Phi_{A,B} k = w, \quad \text{mit} \quad (ah)(bk) = tw. \tag{4'}$$

Man muss zeigen, dass die letzten Beziehungen (4'), falls zwei unter den Elementen $h, k, w$ gegeben sind, das dritte eindeutig bestimmt, und zwar in $\mathfrak{P}$. Bei gegebenen $h$ und $k$ ist es evident die Eindeutigkeit von $w \in \mathfrak{P}$. Nun setzen wir z. B. $h$ und $w$ als bekannte Elemente von $\mathfrak{P}$ voraus. Da $\mathfrak{P}$ Rechtsnormalteiler in $\mathfrak{Q}$ ist, Satz 5, Nummer 2, § 3, behauptet, dass die Gleichung $(ah)(bk) = (ab)s$, bei gegebenen $h$ und $s$, das Element $k \in \mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt. In unserem Fall, wegen $(ab)\mathfrak{P}=t\mathfrak{P}$, entnimmt man $tw=(ab)s$, mit $w \in \mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt, woraus der Schluss derselbe ist.

Eine letzte Bemerkung haben wir noch in Aussicht: ein Produkt der Form $a_1 l=(A,h)_a \cdot (I,l)$ muss man als $(A,h)_a \cdot (I,l_0)_p=(A,h\Phi_{A,I}l_0)_a$ verstehen; dennoch schreiben wir

$$a_1 l=(A,h)_a \cdot (I,l)=(A,h\Phi_{A,I}l)_a,$$

unter der Bedingung $a \cdot h\Phi_{A,I}l=(ah)l=a_1 l$, die die Bedingung $a \cdot h\Phi_{A,I}l_0=(ah)(pl_0)=(ah)l$ ersetzt. Ähnlich wird man schreiben:

$$la_1=(I,l)\cdot(A,h)_a=(A,l\Phi_{I,A}h)_a.$$

Der Prozess ist von der gemachten Wahl von $p \in \mathfrak{P}=I$ unabhängig.

In Zusammenhang mit dem soeben bewiesenen Satze, hebt sich die Frage auf zu konstatieren was geschieht, wenn die in $I, A, B, \cdots, AB, \cdots$ gewählten Elemente $\bar{p}, \bar{a}, \bar{b}, \cdots, \bar{t}, \cdots$ statt $p, a, b, \cdots, t, \cdots$ sind. Es ist dann

$$a_1=\bar{a}\bar{h}=(A,\bar{h})_{\bar{a}}, \quad b_1=\bar{b}\bar{k}=(B,\bar{k})_{\bar{b}},$$
$$a_1 b_1=(A,\bar{h})_{\bar{a}}\cdot(B,\bar{k})_{\bar{b}}=(AB,\bar{w})_{\bar{t}},$$

mit Bezeichnungen, die den vorangehenden analog sind. Statt (4), hat man

$$(A,\bar{h})_{\bar{a}}\cdot(B,\bar{k})_{\bar{b}}=(AB,\bar{h}\Psi_{A,B}\bar{k})_{\bar{t}},$$

wobei die $\Psi$—Familie die $\Phi$—Familie ersetzt. Wenn es unter den Faktoren des Produkts eines gibt, das die Form $(I,\bar{l}_0)_{\bar{p}}=(I,l)$, mit $l=\bar{p}\bar{l}_0$, hat, wieder werden wird auch



$$(A,\bar{h})_{\bar{a}}\cdot(I,l)=(A,\bar{h}\Psi_{A,I}l)_{\bar{a}}; \qquad (I,l)\cdot(A,\bar{h})_{\bar{a}}=(A,l\Psi_{I,A}\bar{h});$$
$$(I,h)\cdot(I,k)=(I,h\Psi_{I,I}k)=(I,hk);$$

setzen. Unsere Überlegungen zeigen deutlich wie $Q= =(\mathfrak{P},\Lambda,\Phi)=(\mathfrak{P},\Lambda,\Psi)$ unabhängig der in den Klassen von $Q/\mathfrak{P}$ gewählten Elemente ist. Die beiden Familien $\Phi$ und $\Psi$, der Fastgruppen $\mathfrak{P}_{A,B}(\Phi)$ und $\mathfrak{P}_{A,B}(\Psi)$, in denen die Produktoperationen $\Phi_{A,B}$ bzw. $\Psi_{A,B}$ sind, nennen wir *assoziierte Familien der Erweiterung* $Q$, von $\mathfrak{P}$, nach $\Lambda$, ([8], S. 408).

Nun setzen wir $\bar{a}=a\alpha, \bar{b}=b\beta, \cdots, \bar{t}=t\theta, \cdots$ ebenso wie $a=\bar{a}\bar{\alpha}, b=\bar{b}\bar{\beta}, \cdots, t=\bar{t}\bar{\theta}, \cdots$ voraus. Es gilt sukzessive:

$$(A,h)_{\bar{a}}=\bar{a}h=(a\alpha)h=(A,\alpha)_a\cdot h=(A,\alpha\Phi_{A,I}h)_a,$$
$$(A,h)_a=ah=(\bar{a}\bar{\alpha})h=(A,\bar{\alpha})_{\bar{a}}\cdot h=(A,\bar{\alpha}\Psi_{A,I}h)_{\bar{a}};$$

woraus man

$$(A,h)_{\bar{a}}=(A,\alpha\Phi_{A,I}h)_a=(A,\bar{\alpha}\Psi_{A,I}(\alpha\Phi_{A,I}h))_{\bar{a}},$$

ebenso wie

$$(A,h)_a=(A,\bar{\alpha}\Psi_{A,I}h)_{\bar{a}}=(A,\alpha\Phi_{A,I}(\bar{\alpha}\Psi_{A,I}h))_a,$$

herleitet. Es folgt

$$\bar{\alpha}\Psi_{A,I}(\alpha\Phi_{A,I}h)=\alpha\Phi_{A,I}(\bar{\alpha}\Psi_{A,I}h)=h,$$

und somit haben wir den

Satz 3: *Die Transformationen* $T'^{(I)}_{\alpha}$ *und* $T''^{(I)}_{\bar{\alpha}}$, *die in* $\mathfrak{P}_{A,I}$ *die Linksmultiplikation mit* $\alpha$, *mit* $\Phi_{A,I}$ *dargestellt, bzw,* *die Linksmultiplikation mit* $\bar\alpha$, *mit* $\Psi_{A,I}$ *dargestellt, definieren, sind umgekehrte Transformationen.*

Die Formeln (5) erlauben den Zusammenhang zwischen den Operationen $\Phi$ und $\Psi$ genauer zu erklären. In der Tat, hat man

$$(A,h)_{\bar\alpha}\cdot(B,k)_{\bar\beta}=(A,\alpha\Phi_{A,I}h)_{\alpha}\cdot(B,\beta\Phi_{B,I}k)_{\beta}=(AB,h\Psi_{A,B}k)_{\bar\theta}=$$
$$=(AB,\theta\Phi_{AB,I}(h\Psi_{A,B}k))_{\theta}=(AB,(\alpha\Phi_{A,I}h)\Phi_{A,B}(\beta\Phi_{B,I}k))_{\theta};$$

folglich gelten die Gleichheiten

$$\theta\Phi_{AB,I}(h\Psi_{A,B}k)=(\alpha\Phi_{A,I}h)\Phi_{A,B}(\beta\Phi_{B,I}k),$$

die man auch

$$(h\Psi_{A,B}k)\,T'^{(I)}_{\theta}(AB)=(h\,T'^{(I)}_{\alpha}(A))\Phi_{A,B}(k\,T'^{(I)}_{\beta}(B)) \qquad (6)$$

schreiben darf, wobei $T'^{(I)}_{\alpha}(A)$ die Linksmultiplikation mit $\alpha$ in $\mathfrak{P}_{A,I}$, mit der Operation $\Phi$, definiert, $T'^{(I)}_{\beta}(B)$ eine ähnliche Bedeutung in $\mathfrak{P}_{B,I}$ hat, usw.. Die Gleichheit (6) kann noch die Form

$$h\Psi_{A,B}k=[(h\,T'^{(I)}_{\alpha}(A))\Phi_{A,B}(k\,T'^{(I)}_{\beta}(B))](T'^{(I)}_{\theta}(AB))^{-1} \qquad (7)$$

nehmen. Dann ersehen wir, dass $\mathfrak{P}_{A,B}$, mit der Operation $\Psi$, Isotop von $\mathfrak{P}_{A,B}$, mit der Operation $\Phi$, ist.

Es ist nützlich die Formel (7) noch schreiben, wenn z. B. $B=I$ angenommen wird. Aus (5') leitet man leicht

$$h\Psi_{A,I}k=[(k\,T'^{(I)}_{\alpha}(A))\Phi_{A,I}k](T'^{(I)}_{\alpha}(A))^{-1}$$

her. Wenn wir aber die allgemeine Formel anwenden wollen, dann müssen wir eine Transformation $T'^{(I)}(I)$



durch die identische Transformation ersetzen. Somit hat man auch

$$h\Psi_{I,I}k=hk=h\Phi_{I,I}k=hk.$$

Wir formulieren das Ergebnis unserer Darlegungen als

Satz 4: *In zwei assozierten Familien einer Erweiterung* $Q$, *von* $\mathfrak{P}$, *nach* $\Lambda$, *sind die Fastgruppen* $\mathfrak{P}_{A,B}(\Phi)$ *und* $\mathfrak{P}_{A,B}(\Psi)$ *Isotope.*

2) **Studium eines besonderen Falls**—Die Darlegungen der vorigen Nummer haben uns gezeigt, dass es immer eine Erweiterung $Q$, von $\mathfrak{P}$, nach $\Lambda$, gibt, falls $\mathfrak{P}$ und $\Lambda$ angegeben sind. Sodann, innerhalb $Q$, wobei $\mathfrak{P}$ Rechtsnormalteiler und $\Lambda\simeq Q/\mathfrak{P}$ ist, kann man $Q$ als Erweiterung von $\mathfrak{P}$, nach $\Lambda$, auf mehrere Weisen betrachten. Im allgemeinen aber keine unter den verschiedenen Weisen erzeugt den Prozess, der anfänglich zu $Q$ führte.

Trotzdem hebt man die entsprechende Frage auf. Somit: wir nehmen an, dass $Q$ durch eine Familie $\Phi$ errichtet wurde, in solcher Weise, dass in den Fastgruppen $\mathfrak{P}_{A,B}$ die Produktregel mit $\Phi_{A,B}$ dargestellt ist, dann fragt man nach einem Prozess $Q$ wiederzugeben, indem man, aus $\mathfrak{P}$ als Rechtsnormalteiler und aus der Quotientfastgruppe $Q/\mathfrak{P}\simeq\Lambda$ ausgehend, die entsprechende Produktregel in den Fastgruppen $\mathfrak{P}_{A,B}$ unter dem Symbol $\Phi_{A,B}$ wiederfindet.

So denken wir uns zunächst die Fastgruppen $\mathfrak{P}=\{p,q,h,\cdots\}$ und $\Lambda=\{I,A,B,\cdots\}$, sowie die Erweiterung $Q=\{(I,p);(A,h);\cdots\}$ von $\mathfrak{P}$, nach $\Lambda$, und zwar mit der Produktregel $(A,h)\,o\,(B,k)=(AB,h\Phi_{A,B}k)$.

Danach betrachten wir

$$Q/\mathfrak{P}=\{\mathfrak{P};(A,h)\mathfrak{P};(B,h)\mathfrak{P};\cdots;(AB,h)\mathfrak{P};\cdots\}=\Lambda_0\simeq\Lambda.$$

In den Klassen die $\Lambda_0$ zusammensetzen, wählt man $(A,h);(B,h);\cdots;(AB,h);\cdots$, ohne notwendig zu sein das in $\mathfrak{P}$ gewählte Element anzugeben. Dann, für $(A,h_1)\in Q$, schreibt man

$$(A,h_1)=(A,h)\,o\,(I,j)=((A,h),(I,j))_{(A,h)}=(A,j)_{(A,h)};$$
$$(B,k_1)=(B,q)_{(B,h)};$$
$$(A,h_1)\,o\,(B,k_1)=(AB,h_1\Phi_{A,B}k_1)=(AB,s)_{(AB,h)};$$

es folgt

$$(A,j)_{(A,h)}\,o\,(B,q)_{(B,h)}=(AB,s)_{(AB,h)}=(AB,j\Theta_{A,B}q)_{(AB,h)},$$

wobei $\Theta_{A,B}$ die neue Produktregel in $\mathfrak{P}_{A,B}$ darstellt. Die aufgestellte Frage wird bejahend beantwortet, sobald man weiss, dass es für die Familie $\Phi$ ein $h\in\mathfrak{P}$ gibt, für welches

$$(h\Phi_{A,I}j)\Phi_{A,B}(h\Phi_{B,I}q)=h\Phi_{AB.I}(j\Phi_{A,B}q) \tag{8}$$

gilt, wie man aus

$$h_1\Phi_{A,B}k_1=h\Phi_{AB,I}s,$$

mit $h_1=h\Phi_{A,I}j$, $k_1=h\Phi_{B,I}q$, $s=j\Theta_{A,B}q$, erkennt.

Die im Satze 2 erwähnten Familien nennt man *innere Familien.* Es gilt dann der folgende

Satz 5: *Ist* $Q=(\mathfrak{P},\Lambda,\Phi)$ *eine Erweiterung von* $\mathfrak{P}$ *nach* $\Lambda$, *so ist dann und nur dann* $\Phi$ *eine innere Familie, wenn es ein* $h\in\mathfrak{P}$ *gibt, für welches die Beziehung* (8) *gilt.*

Das folgende Problem ist interessanter: Denken wir uns $\mathfrak{P}=\{u,p,h,k,\cdots\}$ mit $u$ alls Rechtseinheit; dann fragt man: ist es möglich eine Familie $\Phi$ so zu bestimmen,



dass es in $Q$ einen zu $\Lambda$ isomorph Rechtsnormalteiler $\Lambda_0$ gibt? Wir beantworten dieser Frage, indem wir folgendes beweisen:

Satz 6: *Sind* $\mathfrak{P}=\{u,p,h,\cdots\}$ *und* $\Lambda=\{I,A,B,\cdots\}$ *mit Rechtseinheiten* $u$ *bzw.* $I$ *gegeben, so hat dann und nur dann die Erweiterung* $Q$ *von* $\mathfrak{P}$, *nach* $\Lambda$, *einen Rechtsnormalteiler* $\Lambda_0=\{(I,u);(A,u);(B,u);\cdots\}$, *der durch die Abbildung* $A\to(A,u)$ *zu* $\Lambda$ *isomorph ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:* 1) $u\Phi_{A,B}u=u$; 2) $h\Phi_{A,I}u=h$; 3) $(h\Phi_{A,X}u)\Phi_{AX,BY}(k\Phi_{B,Y}u)=(h\Phi_{A,B}k)\Phi_{AB,Z}u$, *falls* $(AX)(BY)=(AB)Z$. Da wir $\Lambda_0$ als Rechtsnormalteiler verlangen, muss man $(A,h)\Lambda_{0r}=(A,h)\Lambda_0$ haben. Man findet notwendige Bedingungen, indem wir diese Gleichheit durch Produkte $\Phi_{A,B}$ ausdrcüken. Wir setzen

$$(A,h)(T^{(r)}_{(B,u)})^{-1}=(X,x),\quad \text{d.h.}\quad (A,h)=(X,x)\,T^{(r)}_{(B,u)}=$$
$$=(XB,x\Phi_{X,B}u.$$

Dann gilt $A=XB, h=x\Phi_{X,B}u$. Wir wollen aber auch $(X,x)=(A,h)\,o\,(Y,u)=(AY,h\Phi_{A,Y}u)$ haben. Dies erfordet $AY=X$, $h\Phi_{A,Y}u=x$, woraus sich diese erste notwendige Bedingung ableitet:

$$(h\Phi_{A,Y}u)\Phi_{AY,B}u=h,\quad \text{mit}\quad (AY)B=A. \tag{8'}$$

Sodann, wenn $z\in(A,h)\Lambda_0$ ist, müssen auch $z\,T^{(r)}_{(B,u)}$ und $z(T^{r}_{(B,u)})^{-1}$ in $(A,h)\Lambda_0$ liegen. Wir nehmen $z=(A,h)\,o\,(C,u)=(AC,h\Phi_{A,C}u)$ an; so folgt

$$z\,T^{(r)}_{(B,u)}=((AC)B,(h\Phi_{A,C}u)\Phi_{AC,B}u).$$

Das zweite Glied darf die Form $(A,h)\,o\,(Z,u)=(AZ,h\Phi_{A,Z}u)$ haben, wenn folgende Gleichheiten gelten:

$$AZ=(AC)B,\quad h\Phi_{A,Z}u=(h\Phi_{A,C}u)\Phi_{AC,B}u. \tag{9}$$

Diese Bedingung (9) betrachten wir zu diesem Augenblick als neue notwendige Bedingung. Was

$$z(T^{(\nu)}_{(B,u)})^{-1}=(T,k)\,,\ \text{oder}\ (AC\,,h\,\Phi_{A,C}\,u)=(TB\,,k\,\Phi_{T,B}\,u)\,, \quad (10)$$

betrifft, die Gleichheiten

$$(T\,,k)=(A\,,h)\,o\,(X\,,u)=(AX\,,h\,\Phi_{A,X}\,u)\,,$$

ebenso wie (10), ergeben $AC=TB$, $h\,\Phi_{A,C}\,u=k\,\Phi_{T,B}\,u$, $T=AX$, $k=h\,\Phi_{A,X}\,u$, und somit

$$(AX)\,B=AC\,,\quad (h\,\Phi_{A,X}\,u)\,\Phi_{AX,B}\,u=h\,\Phi_{A,C}\,u\,,$$

was (9) wiedergibt. Natürlich muss man auch

$$u\,\Phi_{A,B}\,u=u \quad (11)$$

haben, da $\Lambda_0$ zu $\Lambda$ isomorph sein soll.

Bis jetzt haben wir die notwendigen Bedingungen (11), (9) und (8') gefunden; übrigens sind sie hinreichend, damit $(A\,,h)\,\Lambda_{0\nu}=(A\,,h)\,\Lambda_0$ ist. Nun wenden wir uns dem Produkt $(A\,,h)\,\Lambda_0\,o\,(B\,,k)\,\Lambda_0$ von zwei Klassen zu. Man hat Produkte der Form

$$(AX\,,h\,\Phi_{A,X}\,u)\,o\,(BY\,,k\,\Phi_{B,Y}\,u)=$$
$$=((AX)(BY)\,,(h\,\Phi_{A,X}\,u)\,\Phi_{AX,BY}\,(k\,\Phi_{B,Y}\,u))$$

zu betrachten. Wenn das Produkt von zwei Klassen tatsächliche eine Klasse ist, dann hat das Produkt der Klassen einen Repräsentant $(AB\,,h\,\Phi_{A,B}\,k)$, womit es ein $Z\in\Lambda$ bestecht für welches

$$((AB)\,Z\,,(h\,\Phi_{A,B}\,k)\,\Phi_{AB,Z}\,u))=$$
$$=((AX)(BY)\,,(h\,\Phi_{A,X}\,u)\,\Phi_{AX,BY}\,(k\,\Phi_{B,Y}\,u))$$



ist. Hiermit haben wir folgende notwendige Bedingung

$$(h\,\Phi_{A,X}\,u)\,\Phi_{AX,BY}\,(k\,\Phi_{B,Y}\,u)=(h\,\Phi_{A,B}\,k)\,\Phi_{AB,Z}\,u\,,$$

falls $$(AB)\,Z=(AX)(BY)\,. \quad (12)$$

Wir machen in (9) $Z=I$. Dann ergibt sich (8') wieder, falls

$$h\,\Phi_{A,I}\,u=h\,. \quad (13)$$

Diese notwendige Bedingung wird uns sehr nützlich sein, damit wir zeigen können, dass (12) die Bedingungen (9) und (8') als Folgerung hat. Wir machen in (12) $B=I$; daraus folgt

$$(h\,\Phi_{A,X}\,u)\,\Phi_{AX,Y}\,(k\,\Phi_{I,Y}\,u)=(h\,\Phi_{A,I}\,k)\,\Phi_{A,Z}\,u\,.$$

Hier setzen wir $k=u$; dann wegen (11) und (13) hat man

$$(h\,\Phi_{A,X}\,u)\,\Phi_{AX,Y}=h\,\Phi_{A,Z} \quad \text{mit} \quad AZ=(AX)\,Y\,,$$

d. h. gerade die Bedingung (9). Was (8') betrifft, es genügt in (9) $Z=I$ zu machen. Unsere Ergebnisse können wir so zusammenfassen: die Bedingungen 1), 2) und 3) im Satze angegeben sind tatsächlich notwendig. Wir wissen bereits, dass sie erlauben die Gleichheiten $(A\,,h)\,\Lambda_{0d}=$ $=(A\,,h)\,\Lambda_0$ schliessen zu können. Es gilt auch die homomorphe Abbildung

$$(A\,,h)\to(A\,,h)\,\Lambda_0\,;$$

so brauchen wir nur zu zeigen, dasse die beiden Gleichungen

$$(A\,,h)\,\Lambda_0\,o\,(Z\,,z)\,\Lambda_0=(B\,,k)\,\Lambda_0\,;\quad (Z,z)\,\Lambda_0\,o\,(A,h)\,\Lambda_0=(B,k)\,\Lambda_0$$

eindeutig lösbar sind. Nach den Bedingungen 2) und 3) ist es leicht die Beziehungen

$$(A\,,h)\,\Lambda_0\,o\,(B\,,k)\,\Lambda_0=(A\,,h)\,o\,(B\,,k)\,\Lambda_0$$

zu beweisen. Dann wird z. B. die zweite fragliche Gleichung eine einzige Lösung haben, sobald man aus

$$(Z, z) o (A, h) \Lambda_0 = (B, k) \Lambda_0 = (Y, y) o (A, h) \Lambda_0$$

die gleichzeitige Beziehungen

$$Y = ZT, \quad y = z \Phi_{Z,T} u$$

herleiten kann. Nehmen wir

$$(Z, z) o (AX, h \Phi_{A,X} u) = (B, k) = (Y, y) o (AV, h \Phi_{A,V} u)$$

an; dann hat man

$$Z(AX) = Y(AV), \quad z \Phi_{Z,AX}(h \Phi_{A,X} u) = y \Phi_{Y,AV}(h \Phi_{A,V} u). \tag{14}$$

Wenn aber $Y = ZT$ ist, die zweite Gleichung (14) zeigt, dass man die Gleichheit

$$(z \Phi_{Z,T} u) \Phi_{ZT,AV}(h \Phi_{A,V} u) = z \Phi_{Z,AX}(h \Phi_{A,X} u),$$

mit $(ZT)(AV) = Z(AX)$, zu zeigen braucht.

Setzen wir $(ZT)(AV) = (ZA) U$; wir haben

$$(z \Phi_{Z,A} h) \Phi_{ZA,U} u = z \Phi_{Z,AX}(\Phi_{A,X} u), \quad \text{mit} \quad (ZA) U = Z(AX),$$

zu beweisen. Nach (2) und (3) ergibt sich

$$z \Phi_{Z,AX}(h \Phi_{A,X} u) = (z \Phi_{Z,I} u) \Phi_{Z,AX}(h \Phi_{A,X} u) = (z \Phi_{Z,A} h) \Phi_{ZA,U} u,$$

und somit gewinnt man den gewünchten Schluss. Der Beweis des Satzes ist vollendet.

In Zusammenhang mit dem letzten Teil der vorangehenden Überlegungen, liegt es nahe zu untersuchen



wie die Quotientfastgruppe $Q/\Lambda_0$ der Fastgruppe $\mathfrak{P}$ isomorph sein kann. Es sei die Klasse

$$(A, h) \Lambda_0 = \{(A, h); (AX, h \Phi_{A,X} u); \cdots\}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass $(A, h) \Lambda_0 \neq (A, k) \Lambda_0$, falls $h \neq k$. In der Tat, wenn man $(A, k) = (AX, h \Phi_{A,X} u)$ annimmt, wird man $AX = A$, $X = I$, sowie $h \Phi_{A,I} u = h = k$ haben. Infolgedessen, muss man die Klassen

$$(A, u) \Lambda_0; (A, h) \Lambda_0; (A, k) \Lambda_0; \quad \text{usw.} \tag{15}$$

betrachten. Denken wir uns andere Klasse $(B, j) \Lambda_0$. Indem man $B = AX$ setzt, folgt $(B, j) \Lambda_0 = (AX, j) \Lambda_0 = (A, x) \Lambda_0$, falls $x \Phi_{A,X} u = j$. Dies bedeutet, dass in (15) gesamte Klassen sind. Statt (15) darf man auch

$$(I, u) \Lambda_0; \quad (I, h) \Lambda_0; \quad (I, k) \Lambda_0; \quad \text{usw.} \tag{15'}$$

schreiben. Im allgemeinen aber ist $(I, k) \Lambda_0 \neq A, h) \Lambda_0$. In (15') gilt die Multiplikationsregel

$$(I, h) \Lambda_0 \, o \, (I, k) \Lambda_0 = (I, hk) \Lambda_0;$$

daraus ergibt sich die Isomorphe Abbildung $h \to (I, h) \Lambda_0$. Man kann behaupten:

Zusatz dem Satz 6: *Aus den Bedingungen* 1), 2) *und* 3) *ergibt sich, dass man* $Q/\Lambda_0 \simeq \mathfrak{P}$ *hat.* Es empfehlt sich eine

Bemerkung: Die Abbildung $h \to (I, h) \Lambda_0$ gewinnt man auch durch die Repräsentanten (15). Dann muss man

$$h \to (A, h \Phi_{I,A} u) \Lambda_0,$$

$$hk \to (A, (hk) \Phi_{I,A} u) \Lambda_0 = (AA, ((hk) \Phi_{I,A} u) \Phi_{A,A} u)$$

setzen, woraus sich die Gleichheit

$$(h\,\Phi_{I,A}\,u)\,\Phi_{A,A}(k\,\Phi_{I,A}\,u)=((hk)\,\Phi_{I,A}\,u)\,\Phi_{A,A}\,u \qquad (15'')$$

herleitet. Diese wollen wir tatsächlich verifizieren.
Die Bedingung 3) des Satzes 6 ergibt

$$(h\,\Phi_{I,A}\,u)\,\Phi_{A,A}(k\,\Phi_{I,A}\,u)=(h\,\Phi_{I,I}\,k)\,\Phi_{I,AA}\,u=(hk)\,\Phi_{I,AA}\,u\,;$$

und die zweite Gleichheit (9) führt zu

$$((hk)\,\Phi_{I,A}\,u)\,\Phi_{A,A}\,u=(hk)\,\Phi_{I,AA}\,u\,;$$

daraus folgt, dass beide Glieder in (15″) einen gemeinsamen Ausdruck haben.

Wir konnten daran denken, den Isomorphismus $\mathfrak{P}\simeq \mathfrak{Q}/\Lambda_0$ durch die Abbildung $h\to(A\,,h)\,\Lambda_0$ zu gewinnen. Dann, aus

$$hk\to(A\,,hk)\,\Lambda_0$$

$$(A\,,h)\,\Lambda_0\,o\,(A\,,k)\,\Lambda_0=(AA\,,h\,\Phi_{A,A}\,k)\,\Lambda_0\,,$$

würde man die neue Bedingung $(hk)\,\Phi_{A,A}\,u=h\,\Phi_{A,A}\,k$ schliessen. Zusammenfassend:

Satz 7: *Wenn die Familie* $\Phi$ *die Bedingungen* 1), 2) *und* 3), *ebenso wie* $h\,\Phi_{A,A}\,k=(hk)\,\Phi_{A,A}\,u$, *für gesamte* $A\in\Lambda$, *erfüllt, dann gibt es Isomorphismen* $\mathfrak{P}\simeq\mathfrak{Q}/\Lambda_0$, *die den Elementen von* $\Lambda$ *entsprechen.*

Wenn wir, für gesamte $A$ und $B$, $h\,\Phi_{A,B}\,k=hk$ setzen, dann sind die verschiedenen Fastgruppen $\mathfrak{P}_{A,B}(\Phi)$ der Fastgruppe $\mathfrak{P}$ identisch. Die Produktregel $(A\,,h)\,o\,(B\,,k)=$ $=(AB\,,hk)$ behauptet dann, dass es sich um ein *direktes Produkt* handelt. Man schreibt in diesem Fall $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}\times\Lambda$.



Diese Definition des Produktes ist zwar von der Existenz von Rechtseinheiten in $\mathfrak{P}$ und $\Lambda$ unabhängig. Wenn jedoch $u\in\mathfrak{P}$, $I\in\Lambda$ existieren, nicht nur gelten die Bedingungen 1), 2) und 3), aber noch die Gleichheiten $(hk)\,\Phi_{A,A}\,u=hk$, woraus sich $\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}\simeq\Lambda\,,\mathfrak{Q}/\Lambda\simeq\mathfrak{P}$ ergibt. Die verschiedenen im Satze 7 angegebenen Isomorphismen $\mathfrak{P}\simeq\mathfrak{Q}/\Lambda_0,(\Lambda_0=\Lambda)$, reduzieren sich alle demselben Isomorphismus, und zwar aus dem Grunde, dass $(I\,,h)\,\Lambda_0=$ $=(A\,,h)\,\Lambda_0$ ist.

3) **Anwendungen der Erweiterungstheorie** — Die Erweiterungstheorie und noch spezieller der Begriff des direkten Produktes können nutzlich sein, wenn sich um die Erzeugung von Fastgruppen mit bestimmten Eigenschaften handelt, und zwar von anderen kleineren Ordnung Fastgruppen ausgehend. In dieser Hinsicht wollen wir uns hier auf die Erweiterung einer Bruckschen Fastgruppe $\mathfrak{P}$ nach einer Gruppe $\Lambda$ mit drei Elemente beschränken. Wir gewinnen so eine neue Brucksche Fastgruppe. Der Prozess ist dem von ([2], S. 33) vergleichbar, obwohl hier sich eine kleine Schwierigkeit vorstellt. Wir setzen

$$\mathfrak{P}=\{p\,,q\,,h\,,k\,,\cdots\}\,,\quad \Lambda=\{I\,,A\,,B\,,\cdots\}\,,$$

und bezeichnen mit $L$ und $R$ die zum Anfang der Nummer 4, § 1, angegebenen Transformationen von $\mathfrak{P}$. Ferner definieren wir die Erweiterung $\mathfrak{Q}=(\mathfrak{P}\,,\Lambda\,,\Phi)$ durch folgende Multiplikationsregel, die die Fastgruppen $\mathfrak{P}_{I,I},\mathfrak{P}_{I,A},\cdots,\mathfrak{P}_{A,B}$, usw. betreffen:

$$\begin{gathered}(I\,,h)\,o\,(I\,,k)=(I\,,hk)\,;\;(I\,,h)\,o\,(A\,,k)=(A\,,hL\cdot k)\,;\\ (I\,,h)\,o\,(B\,,k)=(B\,,hL\cdot k)\,;\;(A\,,k)\,o\,(I\,,h)=(A\,,k\cdot hR)\,;\\ (A\,,h)\,o\,(A\,,k)=(B\,,kh)\,;\;(A\,,h)\,o\,(B\,,k)=(I\,,kL\cdot hR)\,;\\ (B\,,k)\,o\,(I\,,h)=(B\,,k\cdot hR)\,;\;(B\,,k)\,o\,(A\,,h)=(I\,,hL\cdot kR)\,;\\ (B\,,h)\,o\,(B\,,k)=(A\,,kh)\,.\end{gathered} \qquad (16)$$

Sodann definieren wir noch in $\mathfrak{Q}$ zwei Transformationen, die ohne Missverständisgefahr auch mit $L$ und $R$ bezeichnen. Wir setzen

$$\begin{aligned}&(I,h)R=(I,hR);\ (I,h)L=(I,hL);\ (A,h)R=(B,hL);\\&(A,h)L=(B,hR);\ (B,h)R=(A,hL);\ (B,h)L=(A,hR);\end{aligned}\qquad(17)$$

dann ist es leicht zu sehen, dass $\mathfrak{Q}$ eine neue Brucksche Fastgruppe ist. Wir werden die ganze Rechtfertigung nicht durchführen; jedoch wollen wir einige Gleichheiten bestätigen. So hat man:

$$(I,h)L\,o\,[(I,h)\,o\,(I,k)]=(I,hL)\,o\,(I,hk)=(I,hL\cdot hk)=(I,k);$$

$$\begin{aligned}[(I,h)\,o\,(A,k)]\,o\,(A,k)R&=(A,hL\cdot k)\,o\,(B,kL)=\\&=(I,k\cdot(kL\cdot h))=(I,h);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(A,h)\,o\,(A,k)]\,o\,(A,k)R&=(B,kh)\,o\,(B,kL)=\\&=(A,kL\cdot kh)=(A,h);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A,h)L\,o\,[(A,h)\,o\,(B,k)]&=(B,hR)\,o\,(I,kL\cdot hR)=\\&=(B,hR\cdot(hRL\cdot k))=(B,k).\end{aligned}$$

Die leichte Verwickelung entsteht, weil die Multiplikationsregel (16) mehr Typen enthalten, als wenn die Gruppe $\Lambda$ nur die Ordnung 2 hat. Andererseits wird die Existenz von Einselement in $\mathfrak{P}$ nicht vorausgesetzt. Wir haben somit folgenden

Satz 8: *Ist $\mathfrak{P}$ eine* Brucksche *Fastgruppe, die Einselement nicht haben braucht. Bei gegebener Gruppe $\Lambda$ mit drei Elementen, ist die durch* (16) *definierte Erweiterung eine* Brucksche *Fastgruppe, deren Transformationen $R$ und $L$ in* (17) *definiert sind.*

Der Satz 3, Nummer 4, § 1, behauptet, dass, wenn es Einselement $=u\in\mathfrak{P}$ gibt, $R=L=J$, in $\mathfrak{P}$, ist. Kraft (17) auch in $\mathfrak{Q}$ hat man $R=L=J$. Die Bedingungen 1) und 2) vom Satze 6 sind erfüllt. Die Bedingung 3) erfordet die Kommutativität von $\mathfrak{P}$. Was die Erforderung vom Satze 7 betrifft, auch wird sie mit $I,A,B$ erfüllt. Infolgedessen, gilt



Satz 9: *Es seien $\mathfrak{P}$ eine kommutative* Brucksche *Fastgruppe mit Einselement $=u$ und $\Lambda$ eine Gruppe der Ordnung 3; dann besitzt die durch die Beziehungen* (16) *definierte* Brucksche *Fastgruppe Einselement und enthält einen Rechtsnormalteiler $\Lambda_0$, zu $\Lambda$ isomorph, und für welchen $\mathfrak{Q}/\Lambda_0\simeq\mathfrak{P}$ ist. Es ist auch $\mathfrak{Q}/\mathfrak{P}\simeq\Lambda$. Der Isomorphismus $\mathfrak{Q}/\Lambda_0\simeq\mathfrak{P}$ kann man in drei verschiedenen Weisen gewinnen.*

Vergleichen wir z. B. beide folgende Prozesse um die gennanten Isomorphismen zu erhalten:

$$h\to(I,h)\Lambda_0=(A,h\Phi_{I,A}u)\Lambda_0=(A,hJ)\Lambda_0,$$

$$h\to(A,h)\Lambda_0.$$

Beide Prozesse zusammenfallen, wenn $hJ=h$ ist. Man kann übrigens leicht folgender Satz verifizieren:

Satz 10: *Dann und nur dann ist die Fastgruppe des vorangehenden Satzes ein direktes Produkt $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}\times\Lambda$, wenn, für jedes $h\in\mathfrak{P}$, $h^2=u$ gilt.*

Eine zweite Anwendung der Erweiterungstheorie wollen wir jetzt herbringen. Wir nehmen eine Fastgruppe $\mathfrak{Q}$. Wenn zwei Rechtsnormalteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ ein einziges gemeinsames Element $f$ haben, dann ist $f$ notwendigerweise eine Rechtseinheit von $\mathfrak{Q}$, da $f$ allein ein Rechtsnormalteiler bildet, der Idempotent ist und den Beziehungen $af=a\mathfrak{P}=a\mathfrak{P}_d,(f=\mathfrak{P})$, für jedes $a\in\mathfrak{Q}$, genügt. Es folgt $a=af$. Sowohl $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ wie $\mathfrak{H}\mathfrak{P}$ sind Rechtsnormalteiler, die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ enthalten. Man hat auch

$$\mathfrak{P}\mathfrak{H}/\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{P}\cap\mathfrak{H} = \mathfrak{P}/\{u\} = \mathfrak{P}.$$

Wenn wir

$$\mathfrak{P}=\{u, p, q, p', q', \cdots\}, \quad \mathfrak{H}=\{u, h, k, h', k', \cdots\}$$

$$\Lambda_0=\mathfrak{P}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}=\{\mathfrak{H}, (ph)\mathfrak{H}, (qk)\mathfrak{H}, \cdots\}=\{\mathfrak{H}, p\mathfrak{H}, q\mathfrak{H}, \cdots\}= =\{I, P, Q, \cdots\}$$

setzen, dann folgt, auf Grund des Isomorphismus $\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{P}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$, die Abbildung $p \to p\mathfrak{H}=P$. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ alls Rechtsnormalteiler in Q erlauben die Wiedergabe von Q wie in Nummer 1 genau angegeben wurde. Dann betrachten wir Q als Erweiterung von $\mathfrak{P}$ nach $\Lambda_0$. Wir gehen aus von gewissen in $I, P, Q, \cdots$ gewählten Elementen, wie $u \in I$, $p \in P$, $q \in Q$, usw.. Merkwürdig ist aber, dass jede Klasse $I, P, Q, \cdots$ nur das gewählte Element besitz: eine Gleichung der Form $ph=p'$ ergibt $h=u$, $p=p'$. Deswegen finden wir uns bei einem Fall in welchem das in einer Klasse, Produkt von zwei Klassen, gewählte Element, genau das Produtk ist der in den Faktoren gewählten Elemente. Bei genommenen $ph \in Q$ und $qk \in Q$, müssen wir

$$ph=(p, h)_p, \quad qk=(q, k)_q$$

schreiben, und ferner

$$(ph)(qk)=(p, h)_p \cdot (q, k)_q=(pq, w)_{pq}, \text{ mit } (ph)(qk)=(pq)w. \quad (18)$$

Die letzte geschriebene Gleichheit ersetzt die letzte Gleichheit (2'') der Nummer 1. Jedes Mal, dass wir die Beziehung $w=hk$ beweisen können, zeigt die Produktregel (18), dass die Gleichheit $Q=\mathfrak{P}\times\mathfrak{H}$ gültig ist. Das geschieht z. B., wenn $\mathfrak{P}$ zweiseitiger Normalteiler ist.



Man sieht dann leicht, dass $(ph)(qk)=p' \cdot hk=(pq)w$ ist, und hieraus entnimmt man

$$(p' \cdot hk)(T_w^{(p)})^{-1}=pq=p'k',$$

folglich $k'=u$, $pq=p'$, und $w=hk$ wie es erwünscht wird. Es gilt folgender Wortlaut:

Satz 11: *Wenn der Durchschnitt von zwei Rechtsnormalteiler* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{H}$, *in* Q, *ein einziges Element enthält, dann ist solches Element Rechtseinheit in* Q. *In der Fastgruppe* $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, *als Erweiterung von* $\mathfrak{P}$ *nach* $\Lambda_0=\mathfrak{P}\mathfrak{H}/\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{P}$ *betrachtet, hat jedes Element ph die Darstellung* $(p, h)_p$, *und gilt die Multiplikationsregel* $(p, h)_p \cdot (q, k)_q=(pq, w)_{pq}$, *mit* $(ph)(qk)=(pq)w$. *Falls* $\mathfrak{P}$ *zweiseitiger Normalteiler ist, dann ist* $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ *ein direktes Produkt, genau* $\mathfrak{P}\mathfrak{H}=\mathfrak{P}\times\mathfrak{H}$.

## LITERATURVERZEICHNIS


[1] A. A. Albert – *Quasigroups*, I, «Transactions of the American Mathematical Society», Band 54, 1943, S. 507-519.

[2] R. H. Bruck – *Some results in the theory of quasigroups*, «Transactions of the American Mathematical Society», Band 55, 1944, S. 19-52.

[3] R. H. Bruck – *Contributions ot the theory of loops*, «Transactions of the American Mathematical Society», Band 60, 1946, S. 245-354.

[4] G. Birkhoff — *Lattice Theory*, 1948, New York.

[5] F. Kiokemeister — *A theory of normality for quasi-groups*, «American Journal of Mathematics», Band LXX, 1948, S. 99-106.

[6] H. Hermes — *Einführung in die Verbandstheorie*, 1955, Berlin.

[7] O. Ore — *Chains in partially ordered sets*, «Bulletin of the American Mathematical Society», Band 49, 1943, S. 558-566.

[8] A. A. Albert — *Quasigroups*, II, «Transactions of the American Mathematical Society», Band 55, 1944, S. 401-419.

[9] A. Almeida Costa — *Über die nichtassoziativen Ringe, die halbeinfache Moduln sind*, in dieser Zeitschrift, Band V, 1955, S. 75-102.