IMPRENSA
PORTUGUESA
PORTO

22

XIII CONGRESSO LUSO-ESPANHOL
PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

SOBRE A TEORIA DOS ANÉIS E IDEAIS NÃO COMUTATIVOS

POR

A. ALMEIDA COSTA

PROF. CAT. DA UNIVERSIDADE DO PORTO
E VICE-PRESIDENTE DA SECÇÃO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

SEPARATA

DO TOMO I DAS ACTAS

DISCURSOS INAUGURAIS
E CONFERÊNCIAS

LISBOA 1950

SOBRE A TEORIA DOS ANÉIS E IDEAIS NÃO COMUTATIVOS (1)

POR

A. ALMEIDA COSTA

PROF. CAT. DA UNIVERSIDADE DO PORTO
E VICE-PRESIDENTE DA SECÇÃO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

MEUS SENHORES:

O Ex.^mo Sr. Prof. VICENTE GONÇALVES, por todos justamente considerado um dos mais eminentes mestres da matemática em Portugal, ilustre Presidente da Secção de Ciências Matemáticas deste Congresso, quis ter a generosidade de dar um certo relevo ao mais apagado dos seus colaboradores, determinando que ele pudesse utilizar a maior parte da última sessão de trabalhos.

Estamos gratíssimos a S. Ex.^a. Não se julgue, porém, que, ao aproveitarmos essa determinação, não sentimos inteiramente a responsabilidade do encargo que nos é cometido. Sem dúvida que o nosso sábio Presidente, conhecedor de uma das nossas predilecções, nos facilitou a tarefa, dando-nos a liberdade de falarmos da *Álgebra moderna*. Nem mesmo assim, todavia, poderemos desempenhar-nos cabalmente da nossa missão. E isso porque nos são pouco familiares alguns dos numerosos ramos dessa difícil ciência, enquanto a outros temos dedicado apenas esforços bastante limitados. Se, em todo o caso, nos encontramos nesta tribuna, pedimos que essa circunstância seja entendida no duplo sentido seguinte: execução de uma ordem e propaganda de uma disciplina.

---

(1) Conferência realizada na última sessão de trabalhos.

O campo a desenvolver vai restringir-se à moderna *Teoria dos Anéis e Ideais não comutativos*. Numa obra intitulada *Grupos abelianos, Anéis e Ideais não comutativos, Sistemas hiper-complexos e Representações*, da qual publicámos em 1942 o tomo 1.º, sob o título de *Grupos abelianos e Anéis e Ideais não comutativos*, e, em 1948, o tomo 2.º, sob o título de *Sistemas hiper-complexos* (I), desenvolvemos já, com grande largueza, este mesmo assunto. No tomo 2.º, os 4 primeiros Capítulos, de que adiante daremos um resumo, dão conta de resultados originais recentes devidos a VON NEUMANN, C. HOPKINS, K. ASANO, J. DIEUDONNÉ, J. LEVITZKI e ALMEIDA COSTA, muitos dos quais receberam então, pela primeira vez, uma exposição ordenada. O fundo dessa exposição, deve dizer-se, assenta em trabalhos de M. WEDDERBURN, L. DICKSON, E. ARTIN, E. NOETHER e G. KÖTHE. Projectamos a publicação dum tomo 3.º, que será, sem dúvida, diferida para alguns anos mais tarde.

Tínhamos inicialmente a intenção de apresentar a este Congresso um trabalho modesto com a designação de *Sobre os nilideais e os ideais quase-regulares*, onde daríamos conta de certas observações feitas a propósito de recentes originais de S. PERLIS, R. BAER e N. JACOBSON. Modificada, todavia, a feição das coisas, fixaremos aqui um articulado consistente, no qual ficarão devidamente inseridas as nossas observações, que, de resto, faremos aparecer em lugar oportuno [1].

Os raciocínios serão conduzidos em termos de poderem vir a ser considerados como os dois primeiros Capítulos do tomo 3.º, a que fizemos referência [2]. Abriremos precisamente com a epígrafe *Anéis e Ideais não comutativos*, repetindo o que fizemos no tomo 2.º. De modo concreto, falaremos de *Sub-nilanéis*, seguindo J. LEVITZKI, assim como do *Radical de Jacobson*. Para não darmos a esta sessão uma duração incomportável, deixaremos

(1) A publicação foi feita, efectivamente, nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, tomo XXXIV, 1949, saído em 1950.

(2) O Capítulo a publicar em 3.º lugar (XV) será dado a lume, dentro de pouco tempo, nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*. O seu texto constituirá o desenvolvimento dum original, em língua alemã, a sair na *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, 2.ª série, A — Ciências Matemáticas. (Vide o final do § 1).

para bastante breve, e para outro lugar, a teoria dos *Anéis primitivos e semi-simples*, de N. JACOBSON. Aí salientaremos, além dos resultados devidos ao grande algebrista americano, outros que têm como protagonistas os japoneses T. NAKAYAMA e G. AZUMAYA.

Para simplicidade, designaremos, de futuro, simplesmente por (I), o tomo 2.º da nossa obra já referida, e numeraremos os Capítulos em seguimento dos desse livro.

Anéis e Ideais não comutativos

CAPÍTULO XIII

Sobre sub-nilanéis

1) **Introdução** — Eis aqui um sumário de resultados, que convirá ter presentes, para a boa compreensão do que se exporá depois.

Sobre o radical usual $\mathfrak{R}$, o radical de LEVITZKI $\mathfrak{R}^{**}$ e o radical de KÖTHE $\mathfrak{R}^{*}$, mostrámos o seguinte, no Capítulo I, de (I): 1) é necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^{*}$ exista e seja igual a $\mathfrak{R}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tenha nilideal (pág. 12); 2) é necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^{*}$ exista e seja igual a $\mathfrak{R}^{**}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$ não tenha nilideal (pág. 14); 3) é necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^{**}=\mathfrak{R}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tenha ideal semi-nilpotente (pág. 14).

No Capítulo II, de (I), foram tratados os anéis $\mathfrak{S}$ com condição de máximo e com condição de mínimo para ideais direitos (abreviadamente: condição dupla de cadeia). Seguindo J. LEVITZKI, *Über nilpotente Unterringe*, «Mathematische Annalen», Band 105, 1931, págs. 620 a 627, estabelecemos que: 1') é condição necessária e suficiente, para que um sub-anel $\mathfrak{S}'$, de $\mathfrak{S}$, seja sub-nilanel, que se tenha $\mathfrak{S}'^{n+1}=(o)$, supondo n o comprimento da série de composição de $\mathfrak{S}$. Concluiu-se daqui: *todo o sub-nilanel dum anel com condição dupla de cadeia é nilpotente.*

No Capítulo IV, de (I), estudaram-se, seguindo C. Hopkins, *Rings with minimal condition for left ideals*, «Annals of Mathematics», vol. 40, 1939, págs. 712 a 730, os anéis com condição de mínimo para ideais direitos ou anéis—*U*. Demonstrou-se: 1″) um anel—*U* tem um radical $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$, que é nilpotente [(I), pág. 89]; 2″) $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ é anel com condição dupla de cadeia. Resulta agora: *todo o sub-nilanel dum anel com condição de mínimo é nilpotente.* A demonstração é consequência imediata do seguinte

Teorema 1: — *Se* $\mathfrak{a}$ *for um ideal bilateral nilpotente de* $\mathfrak{S}$ *e se em* $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ *for nilpotente todo o sub-nilanel, a mesma propriedade tem lugar em* $\mathfrak{S}$, [Cfr. (I), pág. 90].

Na investigação de exigências mais fracas, capazes de garantir a nilpotência de cada sub-nilanel de $\mathfrak{S}$, citaremos as condições I) e II), de K. Asano, [(I), pág. 103]: I) condição de mínimo para ideais bilaterais de $\mathfrak{S}$; II) condição de mínimo para ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contenham um ideal primo arbitrário. E, por fim, anotemos ainda: a condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$ e a condição de mínimo para ideais direitos contendo $\mathfrak{R}$ também garantem a nilpotência dos sub-nilanéis de $\mathfrak{S}$.

Todos os casos enunciados se ligam a uma proposição mais geral, como vamos ver. Efectivamente, no Cap. III, de (I), intitulado *Anéis semi-primários*, distinguimos: 1‴) *os anéis* — A *generalizados*, definidos como aqueles que possuem radical $\mathfrak{R}^*$ e para os quais $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ é semi-simples; 2‴) os *anéis* — A, caracterizados pela semi-simplicidade de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$; 3‴) os *anéis* — A *especiais*, com duas propriedades características: nilpotência de $\mathfrak{R}$ e semi-simplicidade de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$. Em 2‴) e 3‴) estão casos particulares de 1‴). De facto, se $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$ não tem nilideal, $\mathfrak{R}^*$ existe é igual e $\mathfrak{R}^{**}$; e o mesmo se diz quanto a $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$. Pode observar-se ainda que, em 3‴), não havia necessidade de exigir a nilpotência de $\mathfrak{R}$, para incluir os anéis—*A* especiais nos anéis—*A* generalizados. Fazendo essa exigência, como é habitual, enuncia-se uma

proposição comum aos 3 casos: 1^{IV}) é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja um anel—*A* generalizado (anel—*A*, anel—*A* especial), que $\mathfrak{R}^*$ exista ($\mathfrak{R}^{**}$ e $\mathfrak{R}$ existem sempre) e tenha lugar a condição de mínimo para ideais direitos contendo $\mathfrak{R}^*$ (respectivamente: $\mathfrak{R}^{**}$, $\mathfrak{R}$), [Cfr. (I), pág. 79]. Vale, então, este resultado:

Teorema 2: — *Num anel*—A *especial, todo o sub-nilanel é nilpotente.* A demonstração é consequência do teorema 1, visto que $\mathfrak{R}$ é nilpotente e em $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ é válida a condição dupla de cadeia.

Ora, em [(I), pág. 103], demonstrámos que as condições de Asano bastavam para que $\mathfrak{S}$ fosse anel—*A* especial. E, em [(I), pág. 87], viu-se que a condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$ arrastava a nilpotência deste, de modo que o último caso anotado entra ainda nos anéis—*A* especiais. De resto, a este respeito, é válido o

Teorema 3: — *Há implicação recíproca na afirmação* α), *de que é válida em* $\mathfrak{S}$ *a condição de mínimo para ideais direitos contendo* $\mathfrak{R}^{**}$ *e a condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em* $\mathfrak{R}^{**}$, *a um lado, e a afirmação análoga* β), *acima referida, relativa a* $\mathfrak{R}$. Em (I), pág. 87, demonstrou-se que a condição de mínimo para ideais bilaterais semi-nilpotentes arrastava a nilpotência de $\mathfrak{R}^{**}$. Então, α) implica β). Reciprocamente, se β) é válida, $\mathfrak{S}$ é anel—*A* especial e $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$.

Os 4 primeiros Capítulos de (I), de que citámos os passos que aqui nos interessam, constituem um conjunto de conhecimentos indispensáveis aos estudos dos trabalhos modernos sobre Anéis e Ideais não comutativos. Neles são completamente expostos, entre outros (devidos a J. Dieudonné, E. Noether, etc.), os resultados originais contidos nas memórias seguintes:

— E. Artin, *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen*, «Abhandlungen des mathematischen Seminars», Hamburg, Band 5, 1927, págs. 251 a 260; — G. Köthe, *Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radical vollständig reduzibel ist*, «Mathematische Zeitschrift», Band 32, 1930, págs. 161 a 186; —J. Levitzki, *Über nilpotente Unterringe*, «Mathematische Annalen», Band 105, 1931, págs. 620 a 627;—J. von Neumann, *On regular rings*, «Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.», vol. 22, n.º 12, 1936;—C. Hopkins, *Nil-rings with minimal condition for admissible left ideals*, «Duke Mathematical Journal», vol. 4, 1938, págs. 664 a 667; C. Hopkins, *Rings with minimal condition for left ideals*, «Annals of Mathematics», II série, vol. 40, 1939, págs. 712 a 730;—K. Asano, *Über Ringe mit Vielfachenkettensatz*, «Proceedings of the Imperial Academy», Tokyo, vol. XV, n.º 9, 1939, págs. 288 a 291; —J. Levitzki, *Semi-nilpotent ideals*, «Duke Mathematical Journal», vol. 10, 1943, págs. 553 a 556;—J. Levitzki, *On the radical of a general ring*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 49, 1943, págs. 462 a 466;—J. Levitzki, *A characteristic condition for semi-primary rings*, «Duke Mathematical Journal», vol. 11, 1944, págs. 367 e 368;—A. Almeida Costa, *Sobre os anéis semi-primários*, «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», tomo XXIX, 1944, págs. 283 a 314. Dos dois trabalhos que vão indicar-se ainda, da autoria de J. Dieudonné e E. Noether, respectivamente, do primeiro só os começos se encontram reproduzidos em (I), mas do segundo, se apenas uma parte consta dos 4 primeiros Capítulos em referência, o restante é versado ainda em (I), todavia em Capítulos posteriores:— *Sur les systemes hypercomplexes*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 184, 1942;—*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, «Mathematische Zeitschrift», Band 30, 1929.

No que agora vai expor-se, trataremos de certas questões consignadas em alguns dos trabalhos seguintes (1): [1]—S. Perlis, *A characterisation of the radical of an algebra*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 48, 1942, págs. 128 a 132; [2]—R. Baer, *Radical ideals*, «American Journal of Mathematics», vol. 65, 1943, págs. 537 a 568; [3]—T. Nakayama, *Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge*, «Proceedings of the Imperial Academy», Tokyo, vol. XX, 1944. págs. 61 a 66; [4]—N. Jacobson, *Structure theory of simple rings without finiteness assumptions*, «Transactions of the American Mathematical Society», vol. 57, 1945, págs. 228 a 245; [5]—N. Jacobson, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, «American Journal of Mathematics», vol. 67, 1945, págs. 299 a 320; [6]—J. Levitzki, *Solution of a problem of* G. Köthe, «American Journal of Mathematics», vol. 67, 1945, págs. 437 a 442; [7]—J. Levitzki, *On three problems concerning nil-rings*, «Bulletin of the Americon Mathematical Society», vol. 51, 1945, págs. 913 a 919; [8]—N. Jacobson, *On the theory of primitive rings*, «Annals of Mathematics», vol. 48, 1947, págs. 8 a 21; [9]—T. Nakayama e G. Azumaya, *On irreducible rings*, «Annals of Mathematics, vol. 48, 1947, págs. 949 a 965; [10]—A. Almeida Costa, *Sobre os endomorfismos dos módulos*, «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Volume XXXIII, N.º 1, págs. 5 a 32, 1948; [11]—B. Brown e N. H. McCoy, *The radical of a ring*, «Duke Mathematical Journal», vol. 15, 1948, págs. 495 a 499; [12]—B. Brown e N. H. McCoy, *The maximal regular ideal of a ring*, «Proceedings of the American Mathematical Society», vol. 1, 1950, págs, 165 a 171; [13]—A. Almeida Costa, *Sobre nilideais e ideais quase-regulares*, «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Volume XXXIV, N.º 2, 1949, págs. 65 a 74, e N.º 3, págs. 129 a 144; [14]—A. Almeida Costa, *Sobre ideais de contracção e aniquiladores na teoria geral dos módulos*, em publicação na «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa», vol. I, 1951, 2.ª série, A—Ciências Matemáticas, págs. 297 a 344, (em língua alemã).

(1) Como já afirmámos atrás, será noutro lugar que as questões aqui abandonadas virão a ser desenvolvidas.

2) **Dois teoremas sobre semi-nilpotência** — É natural, em confronto com a questão da nilpotência, versada no § anterior, ver se é possível enfraquecimento de condições, de modo a garantir ùnicamente a semi-nilpotência dos sub-nilanéis. Teremos necessidade de dois lemas [13, § 2].

Lema 1:—*Se um anel* $\mathfrak{T}$ *tem um número finito* $a_1, \ldots, a_n$, *de geradores, o anel* $\mathfrak{T}^{\sigma}$ *tem igualmente um número finito de* *geradores*. Observemos que os elementos de $\mathfrak{T}^2$ são da forma $\Sigma t t'$, com $t, t' \in \mathfrak{T}$. Quer dizer que são da forma $\Sigma a_{i_1} \ldots a_{i_q}$, com $q \geqq 2$. Se uma parcela desta última soma é produto de dois elementos a_i, ela pertencerá ao sub-anel gerado pelos $a_i a_k$; se tiver 3, pertencerá ao sub-anel gerado por $a_i a_k a_m$, se tiver 4, já pertence ao sub-anel gerado pelos $a_i a_k$, etc. Assim, os elementos $a_i a_k$, $a_i a_j a_k$, $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$, gerarão $\mathfrak{T}^2$. Anàlogamente se verifica que os elementos $a_i a_j a_k$, $a_i a_j a_k a_l$, $a_i a_j a_k a_l a_m$ geram $\mathfrak{T}^3$. Dum modo geral, $\mathfrak{T}^n$ é gerado pelos elementos $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{n+k}}$, $(k = o, 1, \ldots, n-1; i_j = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n+k)$.

Lema 2:—*Se $\mathfrak{S}_1$ é um sub-nilanel de $\mathfrak{S}$ tal que $\mathfrak{S}_1^\sigma \subseteqq \mathfrak{R}^{**}$, $\mathfrak{S}_1$ é semi-nilpotente*. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{S}_1$ elementos em número finito. O anel $\mathfrak{T}$ que eles geram verifica a relação $\mathfrak{T}^\sigma \subseteqq \mathfrak{R}^{**}$. Em virtude do lema anterior, $\mathfrak{T}^\sigma$ tem um número finito de geradores, de modo que $\mathfrak{T}^{\sigma r} = (o)$, para um certo inteiro r. O lema está provado.

Posto isto, faremos corresponder ao teorema 2 o seguinte

Teorema 4:—*Num anel—*A, *todo o sub-nilanel é semi-nilpotente*. De facto, estudemos o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{S}'$. Se $\mathfrak{S}_1$ é sub-nilanel de $\mathfrak{S}$, o seu correspondente $\mathfrak{S}_1'$ é sub-nilanel do anel semi-simples $\mathfrak{S}'$ (anel—*A* especial). Então, $\mathfrak{S}_1'$ é nilpotente, de modo que há uma potência $\mathfrak{S}_1^\sigma$ contida em $\mathfrak{R}^{**}$. O lema 2 mostra que $\mathfrak{S}_1$ é semi-nilpotente.

Passemos ao outro teorema aludido na epígrafe, dado por Almeida Costa em [13, § 2].

Teorema 5:—*Num anel arbitrário $\mathfrak{S}$, não existe nilideal direito $\mathfrak{r}$ com a propriedade de ser o mínimo nilideal para o qual $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}^{**}$*. E isso porque, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$, o correspondente de $\mathfrak{r}$ seria um nilideal direito mínimo $\mathfrak{r}' \neq (o)$, para o qual $\mathfrak{r}'^2 = (o)$, o que levaria ao absurdo $\mathfrak{r}' = (o)$. Devemos, por isso, preservar-nos de dar um enunciado como este: «a condição de mínimo para nilideais direitos de $\mathfrak{S}$ contendo $\mathfrak{R}^{**}$ arrasta a existência e semi-nilpotência de $\mathfrak{R}^*$». Tem todavia sentido o seguinte

Teorema 6:—*A condição de mínimo para nilideais direitos de $\mathfrak{S}$ arrasta a existência de $\mathfrak{R}^*$ e a sua nilpotência*. Não havendo então, com efeito, nilideais direitos contendo $\mathfrak{R}^{**}$, também não pode haver nilideal $\mathfrak{r}$ com elementos não pertencentes ao radical—*L* (¹), visto que, de contrário, o nilideal $(\mathfrak{r}, \mathfrak{R}^{**})$ conteria o referido radical. Em seguida, bastaria até a condição de mínimo para ideais bilaterais semi-nilpotentes, para ficar garantida a nilpotência de $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}^*$, [Cfr. (I), pág. 87].

Substituindo $\mathfrak{R}^{**}$ pelo radical $\mathfrak{R}$, poderemos falar de nilideal mínimo $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}$? A resposta só pode ser afirmativa, se $\mathfrak{R}$ não for nilpotente. Devemos, por isso, preservar-nos de dar um enunciado em que figure uma hipótese como esta: «condição de mínimo para nilideais direitos de $\mathfrak{S}$ contendo $\mathfrak{R}$ e condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$».

3) **Semi-regularidade e existência de $\mathfrak{R}^*$**—Assim como à noção de nilanel se opõe a de anel regular, assim, à noção de semi-nilpotente, opõe Levitzki a de *semi-regular*, para significar a existência dum número finito de elementos gerando um anel não nilpotente (potente).

Teorema 7:—*Se $\mathfrak{r}$ é um ideal direito semi-regular de $\mathfrak{S}$, o ideal $\mathfrak{r}^\sigma$, qualquer que seja o inteiro σ, é igualmente semi-regular*. Sejam, de facto, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{r}$ elementos gerando um anel potente $\mathfrak{T}$. Tem-se $\mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{r}$. Como $\mathfrak{T}^\sigma$ tem um número finito de geradores (lema 1), segue-se que há em $\mathfrak{T}^\sigma$ um número finito de elementos gerando um anel potente. Em virtude de ser $\mathfrak{T}^\sigma \subseteqq \mathfrak{r}^\sigma$, o teorema fica provado.

(¹) Utilizaremos as designações de *radical—L*, *radical—K*, *radical—J*, para significar, respectivamente, os radicais de Levitzki, de Köthe e de Jacobson.

A observação feita atrás, de não existir nilideal mínimo $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{N}^{**}$, permite estabelecer esta proposição:

Teorema 8:—*Se $\mathfrak{S}$ é um anel com um nilideal direito semi-regular $\mathfrak{r}$, há em $\mathfrak{S}$ uma infinidade de nilideais direitos semi-regulares formando uma cadeia descendente.* Visto que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ é semi-regular, também $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{N}^{**}) = \mathfrak{s}_1$ é semi-regular. Como $\mathfrak{s}_1$ não pode ser mínimo contendo $\mathfrak{N}^{**}$, existe $\mathfrak{s}_2$ tal que $\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{s}_2 \supset \mathfrak{N}^{**}$. Depois, encontra-se $\mathfrak{s}_2 \supset \mathfrak{s}_3 \supset \mathfrak{N}^{**}$, etc. Vê-se que todos os elementos da cadeia contêm o radical—*L*.

Corolário 1:—*Se $\mathfrak{S}$ é um anel para o qual não existe radical—K, há em $\mathfrak{S}$ uma infinidade de ideais direitos e de ideais esquerdos (em cadeia descendente) que são nilideais semi-regulares.* Por hipótese, com efeito, há em $\mathfrak{S}$ um nilideal direito (e um esquerdo) semi-regular.

Em [(I), pág. 10], introduzimos, conforme Köthe, o nilideal bilateral $\mathfrak{N}$, conjunto unido (ou soma) dos nilideais bilaterais. Saber se existe ou não radical $\mathfrak{N}^*$ equivale a saber se há ou não possibilidade de «mergulhar» um nilideal unilateral num nilideal bilateral. Em [(I), pág. 11], demonstrámos que é condição necessária e suficiente, para a existência de $\mathfrak{N}^*$, que a soma de dois nilideais direitos seja um nilideal direito. Introduzindo a noção de elemento pròpriamente nilpotente [(I), pág. 12], sabemos que, se não existe $\mathfrak{N}^*$, há elementos pròpriamente nilpotentes a_1 e a_2 tais que $a_1 - a_2$ não é pròpriamente nilpotente. Então $(a_1 - a_2)\mathfrak{S}$ não é nilideal, o mesmo se dizendo do ideal $(a_1\mathfrak{S}, a_2\mathfrak{S})$, que é soma de dois nilideais. Conclui-se também que $a_1\mathfrak{S}$ e $a_2\mathfrak{S}$ não podem pertencer simultâneamente a $\mathfrak{N}$. Assim, quando não existe radical—*K*, há, em $\mathfrak{S}$, um nilideal $a\mathfrak{S}$ não contido em $\mathfrak{N}$. Pondo $a\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$, este é nilanel semi-regular, $\mathfrak{T}$ tem radical—$K = \mathfrak{T}$, diferente do seu radical—$L = \mathfrak{R}_1$. Se é $b \in \mathfrak{T}$, $b \notin \mathfrak{R}_1$, o ideal direito $\mathfrak{P} = b\mathfrak{T}$, de $\mathfrak{T}$, é semi-regular, pois $b\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{R}_1$ implicaria $b \in \mathfrak{R}_1$ [(I), pág. 14]. Vê-se que $b\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, pois a igualdade $\mathfrak{T} = b\mathfrak{T}$ daria $\mathfrak{T} = b\mathfrak{T} = b^2\mathfrak{T} = \ldots = o$, visto que b é nilpotente. Como é também $b\mathfrak{T} = ba\mathfrak{S}$, estamos em presença dum nilideal de $\mathfrak{S}$, sendo $a\mathfrak{S} \supset ba\mathfrak{S}$. É claro que podemos raciocinar do mesmo modo sobre $\mathfrak{P}$ e formar $c\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$, etc. Assim, é

possível precisar, em certo sentido, o resultado expresso no corolário 1, por meio deste

Teorema 9:—*Se $\mathfrak{S}$ é um anel para o qual não existe radical—K, há em $\mathfrak{S}$ uma cadeia descendente de nilideais direitos semi-regulares da forma $c_1\mathfrak{S} \supset c_2\mathfrak{S} \supset c_3\mathfrak{S} \supset \ldots$.* Convém anotar que a demonstração anterior, começada a partir de $\mathfrak{T}$, estabelece o

Teorema 10:—*Se $\mathfrak{T}$ é um nilanel semi-regular, há em $\mathfrak{T}$ cadeias descendentes infinitas de nilideais semi-regulares das formas $\mathfrak{T} \supset a_1\mathfrak{T} \supset a_2\mathfrak{T} \supset \ldots$; $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{T}b_1 \supset \mathfrak{T}b_2 \supset \ldots$.*

A questão aberta «há ou não há anéis sem radical—*K*?» só poderá dar-se, conforme Levitzki, uma resposta positiva, em face dos resultados anteriores, se for positiva a resposta a esta segunda questão: «há ou não há nilanéis semi-regulares?». De facto, se a resposta a esta última fosse negativa, isto é, se todos os nilanéis fossem semi-nilpotentes, $\mathfrak{S}$ teria necessàriamente radical $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}^{**}$. É válido o

Teorema 11:—*Se $\mathfrak{S}$ tem radical $\mathfrak{N}^*$ e se $\mathfrak{P}$ é nilideal bilateral, o radical—K de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ existe e é $\mathfrak{N}^*/\mathfrak{P}$.* A demonstração resulta imediatamente estudando o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, no qual $\mathfrak{N}^*$ e $\mathfrak{N}^*/\mathfrak{P}$ se correspondem.

Em correlação com este resultado, provaremos o

Teorema 12:—*Se $\mathfrak{P}$ é um ideal bilateral semi-nilpotente de $\mathfrak{S}$ e se $\mathfrak{r}$ é semi-regular, o ideal direito $(\mathfrak{r}, \mathfrak{P})/\mathfrak{P} = \mathfrak{r}'$, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'$, é também semi-regular.* Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{r}$ elementos que geram um anel potente T [(I), pág. 5]. Os correspondentes $a'_1, \ldots, a'_n \in \mathfrak{r}'$, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$, geram um anel T' que não pode ser nilpotente, pois, de contrário, ter-se-ia $\mathrm{T}'^{\sigma} = (o)$, $\mathrm{T}^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$. Em virtude do lema 1, pois que T tem um número finito de geradores, T^{σ} tem igualmente um número finito de geradores. Então, como $\mathfrak{P}$ é semi-nilpotente, existiria um inteiro r tal que $\mathrm{T}^{\sigma r} = (o)$, o que é absurdo. [Esta demonstração simplifica a que foi dada em (I), pág. 13, na qual $\mathfrak{N}^{**}$ substitui $\mathfrak{P}$].

COROLÁRIO 2:—*Se* $\mathfrak{P}$ *é um ideal bilateral semi-nilpotente, o radical—L, de* $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, *é* $\mathfrak{R}^{**}/\mathfrak{P}$. Pelo teorema, na correspondência $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, correspondem-se de modo biunívoco completo os ideais semi-nilpotentes de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ e os ideais semi-nilpotentes de $\mathfrak{S}$ que contêm $\mathfrak{P}$.

O teorema relativo a $\mathfrak{R}$, demonstrado no final da pág. 8, de (I), joga com os resultados acabados de estabelecer. O mesmo se diz do corolário do alto da pág. 9 do referido volume. Poderá ser útil a observação seguinte: se $\mathfrak{P}$ for um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$, a circunstância de $\mathfrak{P}$ ser nilideal, ser semi-nilpotente, ou ser nilpotente, arrasta a correspondência biunívoca entre os nilideais, os ideais semi-nilpotentes, ou os ideais nilpotentes, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ e de $\mathfrak{S}$, pressuposto que neste último se consideram apenas ideais que contêm $\mathfrak{P}$.

4) **Algumas propriedades de** $\mathfrak{R}^{**}$—LEVITZKI demonstrou que é condição necessária e suficiente, para que $s \in \mathfrak{R}^{**}$, que seja $s\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}^{**}$, [(I), pág. 14]. Tem lugar uma afirmação análoga para o conjunto $\mathfrak{R}$, de KÖTHE. Mais geralmente, vale o seguinte teorema dado por ALMEIDA COSTA, [13, § 4].

TEOREMA 13:—*Se* $\mathfrak{P}$ *é um ideal bilateral tal que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ *não tem ideal nilpotente, é condição necessária e suficiente para que* $a \in \mathfrak{P}$, *que* $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$. É imediato que a condição é necessária. Inversamente, se $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$, seja $\mathfrak{r}$ o ideal direito gerado por a. Como $\mathfrak{r}^2$ se compõe de elementos da forma $\Sigma(as+ia)(as'+i'a)$, $(s, s' \in \mathfrak{S};\ i, i'$ inteiros), vê-se que $\mathfrak{r}^2 \subseteq a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$. Então, sendo $\mathfrak{r}'$ o correspondente de $\mathfrak{r}$ no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, vê-se que $\mathfrak{r}'^2 = (o)$, $\mathfrak{r}' = (o)$. Daqui tira-se $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{P}$, q. e. d.

A aplicação do teorema a $\mathfrak{R}^{**}$ e a $\mathfrak{R}$ provém dos factos de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$ não ter ideal semi-nilpotente e $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não ter nilideal.

Servindo-nos deste resultado, demonstra-se, como se viu em [(I), pág. 15], que, dado um anel $\mathfrak{A}$, de radical $\mathfrak{R}^{**}_a$, o anel $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{S}$, composto de matrizes de grau n com elementos de $\mathfrak{A}$ e com o radical $\mathfrak{R}^{**}_s$, contém neste radical todas as matrizes $S = (a_{ik})$, com $a_{ik} \in \mathfrak{R}^{**}_a$. Também é válida a proposição recíproca, como vamos ver, [11, § 4].

TEOREMA 14:—*Se* $S = (a_{ik})$ *pertence ao radical—L, de* $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_n$, *os elementos de* S *pertencem ao radical—L, de* $\mathfrak{A}$. Seja B_{ik} a matriz de $\mathfrak{S}$, obtida quando se coloca $b \in \mathfrak{A}$ na linha i e coluna k, deixando iguais a zero os restantes elementos. Supondo b e c elementos arbitrários de $\mathfrak{A}$, a matriz $B_{kr}\, S\, C_{sk}$ tem todos os elementos nulos, salvo o elemento (k, k), que se reduz a $ba_{rs}c$. Assim $D = \sum_k B_{kr}\, S\, C_{sk} = (b\, a_{rs}\, c, \ldots, b a_{rs} c)$ é uma matriz diagonal pertencente ao radical—L, de $\mathfrak{S}$. O ideal direito gerado por D é semi-nilpotente, de sorte que, supondo $i_1, \ldots, i_\rho$ números inteiros e $T_1, \ldots, T_\rho$ matrizes de $\mathfrak{S}$, o sub-anel de $\mathfrak{S}$ gerado pelos elementos

$$D\,T_1 + i_1 D, \ldots, D\,T_\rho + i_\rho D \qquad (1)$$

é nilpotente. Escolhamos, em especial, como matrizes T_j, matrizes diagonais de elementos iguais a $t_j \in \mathfrak{A}$. As matrizes (1) serão igualmente matrizes diagonais com elementos diagonais, dados, respectivamente, por

$$d\,t_1 + i_1\, d, \ldots, d\,t_\rho + i_\rho\, d, \qquad (d = b\,a_{rs}\,c).$$

O sub-anel de $\mathfrak{S}$ gerado por estes elementos será nilpotente. Então será nilpotente o sub-anel de $\mathfrak{A}$ gerado por um número finito de elementos do ideal de $\mathfrak{A}$ gerado por d, de sorte que esse ideal é semi-nilpotente. Da condição de $b a_{rs} c$ pertencer ao radical—L, de $\mathfrak{A}$, e de c ser arbitrário, tira-se que $b a_{rs}$ pertence ao mesmo radical, e, por último, que a_{rs} pertence ainda ao radical—L, de $\mathfrak{A}$, pois b é igualmente arbitrário.

OBSERVAÇÃO:—Se existe elemento um em $\mathfrak{A}$, existe elemento um $= \mathfrak{E} \in \mathfrak{S}$. Um resultado estabelecido em [(I), pág. 40] prova que, supondo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$, se tem neste caso $\mathfrak{R}^{**}_a = [\mathfrak{R}^{**}_s, \mathfrak{A}]$. Os raciocínios acabados de fazer demonstram, em seguida, a igualdade $\mathfrak{R}_s^{**} = \sum_{i,k} e_{ik} [\mathfrak{R}_s^{**}, \mathfrak{A}]$, na qual figuram as matrizes unidades $e_{ik} \in \mathfrak{S}$.

Terminaremos este §, enunciando duas proposições relativas ao radical—*L*, em correlação imediata com os resultados expressos nos teoremas 5 e 8, [13, § 4].

Teorema 5′:—*Se, num anel $\mathfrak{S}$, forem diferentes os radicais—L e $\mathfrak{R}$, não pode haver ideal direito semi-nilpotente mínimo $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}$, sempre que $\mathfrak{R}$ seja nilpotente.*

Teorema 8′:—*Se, num anel $\mathfrak{S}$, for válida a condição de mínimo para os ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$, ou $\mathfrak{R}$ é o radical—L, ou há entre $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^{**}$ uma infinidade de ideais direitos semi-nilpotentes em cadeia descendente.*

5) **Os radicais superior e inferior**—Regressemos ao conjunto unido $\mathfrak{R}$. Baer, [2], diz que um ideal bilateral $\mathfrak{P}$, de $\mathfrak{S}$, é um *ideal radical*, se for nilideal e se $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ não tiver ideal direito nilpotente. Conforme o teorema 13, podemos dar este enunciado, [Almeida Costa, 11, § 5]:

Teorema 15:—*É condição necessária e suficiente, para que um nilideal bilateral $\mathfrak{P}$ seja ideal radical, que $\mathfrak{P}$ se componha de todos os elementos $a \in \mathfrak{S}$ para os quais existe um inteiro σ, dependente de a, tal que $(a\mathfrak{S})^\sigma \subseteq \mathfrak{P}$.* A condição é *necessária*. Se $\mathfrak{P}$ é ideal radical, seja $a \in \mathfrak{S}$ um elemento tal que $(a\mathfrak{S})^\sigma \subseteq \mathfrak{P}$. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'$, o correspondente de a é a', tendo-se $(a'\mathfrak{S}')^\sigma = (o)$, $a'\mathfrak{S}' = (o)$. Logo é $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$, e $a \in \mathfrak{P}$. Por outro lado, para cada $a \in \mathfrak{P}$, é $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$.

A condição é *suficiente*. Realizada a condição, suponhamos $a' \in \mathfrak{S}'$ um elemento gerando um ideal direito nilpotente. Será também $a'\mathfrak{S}'$ nilpotente, com $(a'\mathfrak{S}')^\sigma = (o)$. Nesse caso $(a\mathfrak{S})^\sigma \subseteq \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{P}$ e $a' = o$. Não há em $\mathfrak{S}'$ ideais nilpotentes e $\mathfrak{P}$ é ideal radical.

Corolário 3:—*Se $\mathfrak{P}$ é um ideal radical e se $(a\mathfrak{S})^\sigma \subseteq \mathfrak{P}$, tem-se $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$.* Sob esta forma, o corolário resulta, de facto, do teorema anterior. Ele não é mais, porém, do que um caso particular deste

Teorema 16:—*Se $\mathfrak{P}$ é um ideal radical e $\mathfrak{r}$ é um ideal direito tal que $\mathfrak{r}^\sigma \subseteq \mathfrak{P}$, tem-se $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{P}$.*

Teorema 17:—*$\mathfrak{R}$ é o conjunto unido de todos os ideais radicais e é um ideal radical.*

De facto, todo o ideal radical está contido em $\mathfrak{R}$ e este é um ideal radical. Também podemos dizer que $\mathfrak{R}$ é a soma de todos os ideais radicais.

À noção de $\mathfrak{R}$, como conjunto unido dos ideais radicais, opõe-se a da intersecção $\mathfrak{L}$ dos mesmos ideais. Vamos ver que $\mathfrak{L}$ é ainda um ideal radical. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{L} = \mathfrak{S}'$, suponhamos que se tem $\mathfrak{r} \rightarrow \mathfrak{r}' \supset (o)$, $\mathfrak{r}'^\sigma = (o)$, e, portanto, $\mathfrak{r}^\sigma \subseteq \mathfrak{L}$. Então $\mathfrak{r}^\sigma$ pertencerá a todos os nilideais bilaterais $\mathfrak{P}$ tais que $\mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}''$ não tenha ideal direito nilpotente. Da condição $\mathfrak{r}^\sigma \subseteq \mathfrak{P}$ concluía-se $\mathfrak{r}''^\sigma = (o)$, [$\mathfrak{r}''$ é correspondente de $\mathfrak{r}$ em $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}''$], $\mathfrak{r}'' = (o)$, $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{P}$. Visto que $\mathfrak{r}$ estaria em todos os $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$, estaria em $\mathfrak{L}$. Seria $\mathfrak{r}' = (o)$, contra a hipótese. Vale, pois, o

Teorema 18:—*A intersecção $\mathfrak{L}$ dos ideais radicais é um ideal radical.*

Baer chama a $\mathfrak{R} = U(\mathfrak{S})$ *radical superior* e a $\mathfrak{L} = L(\mathfrak{S})$ *radical inferior* do anel $\mathfrak{S}$. O radical—*L* é um ideal radical, o mesmo se dizendo do radical—*K*, se este existir. O anel cociente $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ tem os dois radicais, superior e inferior, iguais a (o). No geral, porém, os dois ideais radicais são distintos. Baer, [2], deu, com efeito, um exemplo de nilanel sem ideal direito nilpotente, contendo um nilideal bilateral que não é ideal radical. Por um lado, neste exemplo, sendo (o) um ideal radical, é $L(\mathfrak{S}) = (o) \neq U(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}$; por outro, mostra-se que um nilideal bilateral compreendido entre os radicais superior e inferior não é necessàriamente um ideal radical.

Nesta ordem de ideias, suponhamos $L(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq U(\mathfrak{S})$, sendo $\mathfrak{M}$ ideal bilateral. Vê-se imediatamente que o radical superior de $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}$ é $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$. Se $\mathfrak{M}$ fôr ideal radical, o radical inferior de $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}$ é (o), como se verifica pelo facto de (o) ser ideal radical. Eis aqui duas proposições relativas ao radical superior.

Teorema 19:—*É condição necessária e suficiente, para que o radical—*K *exista e seja igual ao ideal radical* T, *que* $\mathfrak{S}/\mathrm{T}$ *não tenha nilideal.* De facto, nesse caso, todo o nilideal unilateral de $\mathfrak{S}$ está contido no nilideal bilateral T [(I), págs. 10 a 12].

Corolário 4:—*Se* T *é um ideal radical de* $\mathfrak{S}$ *e se todo o ideal direito* $\neq (o)$ em $\mathfrak{S}/\mathrm{T}$ *contém um ideal direito mínimo,* T *é o radical superior de* $\mathfrak{S}$ *(radical—*K*), o qual contém todo o nilideal de* $\mathfrak{S}$. Este enunciado de Baer é consequência do teorema, pois que todo o ideal direito de $\mathfrak{S}/\mathrm{T}$ possui idempotente e não pode ser nilideal.

6) **A condição de máximo**—O estudo sistemático dos anéis sujeitos à única condição de máximo não foi feito em (I). Essa condição parece deixar, de facto, maior liberdade à teoria, quando comparada com a condição de mínimo, largamente desenvolvida em (I), Cap. IV. Nesse Capítulo, págs. 83 e 84, demos a importante proposição seguinte, sobre módulos relativos a anéis com condição de máximo ou *anéis—*O: *se* $\mathfrak{S}$ *é um anel com condição de base para ideais direitos, um módulo finito* $\mathfrak{M}$, *relativo a* $\mathfrak{S}$, *é um módulo com condição de base.*

No caso dos anéis, a equivalência entre a condição de base e a condição de máximo de Artin pode por-se sob o aspecto que vai ver-se. Suponhamos realizada a condição de máximo ou de cadeia ascendente para os ideais direitos dum anel $\mathfrak{S}$ contidos num ideal direito $\mathfrak{N}$. É fácil de ver que fica garantida a existência duma base finita para qualquer ideal direito $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{N}$. De facto, dado $\mathfrak{r}$, seja $a_1 \in \mathfrak{r}$. Se o ideal direito gerado por a_1 verifica a relação $(a_1) = \mathfrak{r}$, está provada a afirmação para $\mathfrak{r}$. Se $a_2 \in \mathfrak{r}$, mas $a_2 \notin (a_1)$, o ideal direito gerado por a_1 e a_2 é tal que $(a_1) \subset (a_1, a_2)$. O raciocínio prossegue, se para isso houver lugar.

A condição ascendente limita a cadeia $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \ldots$, pelo que chegamos a $\mathfrak{r} = (a_1, \ldots, a_t)$. Podemos enunciar o

Teorema 20:—*A condição de cadeia ascendente para os ideais direitos dum anel* $\mathfrak{S}$, *contidos num ideal direito* $\mathfrak{N}$ *do mesmo anel, é equivalente à condição de existência duma base finita para cada ideal direito contido em* $\mathfrak{N}$. Resta demonstrar que a condição de base implica a condição ascendente. Dada a cadeia $\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{r}_2 \subseteq \ldots$, de ideais direitos contidos em $\mathfrak{N}$, o conjunto unido $\mathfrak{L}$, dos $\mathfrak{r}_i$, é um ideal direito contido em $\mathfrak{N}$. Pondo $\mathfrak{L} = (a_1, \ldots, a_r)$, é, por ex., $a_1 \in \mathfrak{r}_{i_1}, \ldots, a_r \in \mathfrak{r}_{i_r}$. Supondo i_k o maior dos índices i_j, vê-se que $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{r}_{i_k}$, e, portanto; $\mathfrak{L} = \mathfrak{r}_{i_k} = \mathfrak{r}_{i_{k+1}} = \ldots$, como se afirmou.

Em Levitzki, [7], adoptam-se, em correlação com os raciocínios acabados de fazer, as seguintes notações e terminologia: $(a_1, \ldots, a_n)$ representa o ideal bilateral (ou, simplesmente, ideal) gerado pelos elementos $a_i \in \mathfrak{S}$; $(a_1, \ldots, a_n)_d$ representa o ideal direito e $(a_1, \ldots, a_n)_e$ o ideal esquerdo gerado pelos mesmos elementos; em seguida, se for $(a_1, \ldots, a_n)_d = (a_1 \mathfrak{S}, \ldots, a_n \mathfrak{S})$, diz-se que os a_i formam uma *base própria direita* do ideal direito em questão; se for $(a_1, \ldots, a_n)_e = (\mathfrak{S} a_1, \ldots, \mathfrak{S} a_n)$ o ideal esquerdo tem uma *base própria esquerda;* e, finalmente, se for $(a_1, \ldots, a_n) = (\mathfrak{S} a_1 \mathfrak{S}, \ldots, \mathfrak{S} a_n \mathfrak{S})$, diz-se que o ideal tem uma *base própria.*

O tomo 1.º desta obra, publicado em 1942, teve a designação, como dissemos, de *Grupos abelianos e Anéis e Ideais não comutativos.* Ali se encontra, a pág. 156, a demonstração de que, nos anéis—O, o radical $\mathfrak{R}$ é nilpotente. A este respeito é válida esta proposição mais geral.

Teorema 21:—*A condição de máximo para os ideais bilaterais nilpotentes dum anel* $\mathfrak{S}$ *arrasta a nilpotência de* $\mathfrak{R}$. Seja $\mathfrak{a}$ um ideal bilateral máximo nilpotente. Ele contém todos os ideais bilaterais nilpotentes, pois que, se, para um tal ideal $\mathfrak{a}_1$, fosse $\mathfrak{a}_1 \notin \mathfrak{a}$, seria $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}$ um ideal bilateral nilpotente maior que $\mathfrak{a}$. Dada uma raiz $r \in \mathfrak{R}$, ela gera um ideal bilateral nilpotente. Ter-se-á $r \in \mathfrak{a}$, e, portanto, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{a}$ é nilpotente. É $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}$.

Ao lado do teorema anterior, seria de colocar uma afirmação análoga respeitante a $\mathfrak{R}^{**}$. Na verdade, porém, apenas será demonstrada a proposição correspondente, exigindo a condição de máximo para os ideais direitos semi-nilpotentes (teorema 23). Os raciocínios que vão seguir-se são devidos a LEVITZKI, [6].

A proposição mais importante sobre o assunto em questão é a seguinte:

TEOREMA 22:—*A condição de máximo para ideais direitos e esquerdos de* $\mathfrak{S}$ *arrasta a nilpotência de cada sub-nilanel de* $\mathfrak{S}$. A demonstração assenta sobre dois lemas que vamos tratar.

LEMA 3: — *Se* $\mathfrak{S}$ *é um anel qualquer e* T *um sub-nilanel semi-regular de* T, *existe um elemento* $a \in \mathrm{T}$, *tal que:* 1) $\mathfrak{P} = a\mathrm{T}$, $\mathfrak{L} = \mathrm{T}a$, $\mathfrak{P}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{L}$ *são semi-regulares;* 2) $\mathrm{T}\mathfrak{S} \supset \mathfrak{P}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\mathrm{T} \supset \mathfrak{S}\mathfrak{L}$; 3) *os ideais esquerdos* $\mathfrak{n}_1$ *e* $\mathfrak{n}_2$, *definidos pelas relações* $\mathfrak{n}_1\mathrm{T} \subseteq \mathfrak{R}^{**}$, $\mathfrak{n}_2\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}^{**}$ *verificam a relação* $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2$; 4) *os ideais direitos* $\mathfrak{r}_1$ *e* $\mathfrak{r}_2$ *definidos pelas relações* $\mathrm{T}\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{R}^{**}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{R}^{**}$ *verificam a relação* $\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_2$; 5) *o ideal esquerdo* $\mathfrak{n}_2$ *e o ideal direito* $\mathfrak{r}_2$ *são semi-regulares*. Visto que T é semi-regular, será superior ao seu radical—$L = \mathfrak{R}_1$. Vamos provar que qualquer elemento de T não pertencente a $\mathfrak{R}_1$ é um elemento a satisfazendo ao lema. O ideal direito $\mathfrak{P} = a\mathrm{T}$, de T, não é semi-nilpotente, pois isso implicaria $a \in \mathfrak{R}_1$, como sabemos. O mesmo se diz de $\mathfrak{L} = \mathrm{T}a$. Por isso, os dois ideais de T são semi-regulares. No estudo do homomorfismo $\mathrm{T} \sim \mathrm{T}/\mathfrak{R}_1$, ao ideal $\mathfrak{P}$ corresponde $\mathfrak{P}' \neq (o)$. Será também $\mathfrak{P}'^2 \neq (o)$, visto que o anel cociente não tem ideal semi-nilpotente. Nessas condições, há elementos de $\mathfrak{P}^2$ não pertencentes a $\mathfrak{R}_1$, e o ideal $\mathfrak{P}^2$ não é semi-nilpotente. Como $\mathfrak{P}^2 \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{S}$, segue-se que este último é semi-regular. O mesmo se diz de $\mathfrak{S}\mathfrak{L}$. Passando a 2), vê-se que não pode ter-se $\mathrm{T}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$, pois esta igualdade arrastaria $\mathrm{T}\mathfrak{S} = a\mathrm{T}\mathfrak{S} = \ldots = a^r\mathrm{T}\mathfrak{S} = (o)$, contra o facto de $\mathfrak{P}\mathfrak{S}$ ser semi-regular. O mesmo se diz da outra relação 2). No tocante a 3), tem-se $\mathfrak{n}_1\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{n}_1\mathrm{T} \subseteq \mathfrak{R}^{**}$, de sorte que $\mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}_2$. Para se concluir $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2$, basta encontrar um elemento de $\mathfrak{n}_2$ que não pertença a $\mathfrak{n}_1$. Como se supôs $a^r = o$ e se admitiu $a\mathrm{T} \notin \mathfrak{R}_1$, segue-se que $a\mathrm{T} \notin \mathfrak{R}^{**}$ [de contrário qualquer número finito de

elementos de $a\mathrm{T}$ geraria um anel nilpotente] e que existe um inteiro k satisfazendo a $1 < k \leqq r$, nas condições seguintes: $a^{k-1}\mathrm{T} \notin \mathfrak{R}^{**}$, $a^{k-1}\mathfrak{P} = a^k\mathrm{T} \subseteq \mathfrak{R}^{**}$. Daqui se conclui $a^{k-1} \in \mathfrak{n}_2$, $a^{k-1} \notin \mathfrak{n}_1$, como se deseja. É claro que, relativamente a 4), o caso trata-se como 3). Finalmente, pelo que respeita a 5), o ideal $\mathfrak{n}_2 \supseteq \mathfrak{R}^{**}$ não pode ser igual a $\mathfrak{R}^{**}$, porque o elemento a^{k-1} não pertence a este último. O mesmo se diz de $\mathfrak{r}_2$.

LEMA 4) (TEOREMA 4') (1):—*A condição de máximo para os ideais direitos de* $\mathfrak{S}$ *que contêm* $\mathfrak{R}^{**}$ *arrasta a existência de* $\mathfrak{R}^{*}$ *e a sua semi-nilpotência, assim como a semi-nilpotência de cada sub-nilanel de* $\mathfrak{S}$. Limitamo-nos a provar a 2.ª parte, visto que a primeira é consequência dela. Se T é um sub-nilanel, imaginemos que é semi-regular. Sabemos formar, pelo lema 3, um sub-nilanel semi-regular $\mathfrak{L} \subset \mathrm{T}$, assim como os dois ideais direitos correspondentes $\mathfrak{r}_2$ e $\mathfrak{r}_1$, tais que $\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_2$. Em seguida, a partir de $\mathfrak{L}$, forma-se um novo sub-nilanel semi-regular $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$ e consideram-se os ideais direitos correspondentes $\mathfrak{r}_3$ e $\mathfrak{r}_2$, tais que $\mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{r}_3$. O processo continua; a cadeia $\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{r}_3 \subset \ldots$ é ilimitada. O absurdo provém de se supor T semi-regular. O lema está provado. [Utilizar-se-ia 2), em vez de 4), para a demonstração do teorema 4].

Passemos ao teorema. Seja T um sub-nilanel de $\mathfrak{S}$ e consideremos o produto $\mathfrak{S}\mathrm{T}$. Pode existir um elemento $a_1 \in \mathrm{T}$ tal que $\mathfrak{S}\mathrm{T} = \mathfrak{S}a_1$. Não sendo assim, consideremos um elemento $\sum_1^n s_i t_i$, com $s_i \in \mathfrak{S}$, $t_i \in \mathrm{T}$, que não pertença a $\mathfrak{S}a_1$. Também não pertencerá a $\mathfrak{S}a_1$ uma das parcelas $s_i t_i$, de sorte que existe $a_2 \in \mathrm{T}$, tal que $\mathfrak{S}a_1 \subset (\mathfrak{S}a_1, \mathfrak{S}a_2) \subseteq \mathfrak{S}\mathrm{T}$. Continuando, chega-se, necessàriamente, a $\mathfrak{S}\mathrm{T} = (\mathfrak{S}a_1, \ldots, \mathfrak{S}a_n)$, em virtude de *ser válida a condição de máximo para ideais esquerdos*. Se designarmos por $\mathfrak{A}$ o anel gerado pelos a_i, vê-se que $(\mathfrak{S}a_1, \ldots, \mathfrak{S}a_n) \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}\mathrm{T}$, o que dá $\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\mathrm{T}$. Se, em vez de $\mathfrak{S}\mathrm{T}$, considerarmos o produto $\mathfrak{S}\mathrm{T}^2$, estabelece-se anàlogamente $\mathfrak{S}\mathrm{T}^2 =$

(1) A designação de teorema 4' provém da sua analogia com o teorema 4. LEVITZKI, de resto, demonstra este último por método análogo ao que aqui se utiliza para o lema.

$=(\mathfrak{S}\mathrm{T}a'_1,\ldots,\mathfrak{S}\mathrm{T}a'_m)=\mathfrak{S}\mathrm{T}\mathfrak{A}'=\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, onde $\mathfrak{A}'$ é o anel gerado pelos a'_j. O processo continua, estabelecendo-se $\mathfrak{S}\mathrm{T}^k=$ $=\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\ldots\mathfrak{A}^{(k-1)}$, $(k=1,2,\ldots)$. Há uma potência σ tal que $\mathrm{T}^\sigma=(o)$. Efectivamente, se fosse $\mathrm{T}^k\neq(o)$, para qualquer k, ter-se-ia $\mathfrak{S}\mathrm{T}^k\supseteqq\mathrm{T}^{k+1}\supset(o)$, para qualquer k. Seria possível encontrar uma concessão numerável de sub-anéis $\mathfrak{A}^{(i)}$ tais que $\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\ldots\mathfrak{A}^{(k)}\supset(o)$. O lema 4 afirma que T é semi-nilpotente, visto *ser válida a condição de máximo para ideais direitos* [é claro que aqui bastaria ainda a condição de máximo para ideais esquerdos]. Como os $a_i, a'_i, a''_i,\ldots\in\mathrm{T}$, cada anel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{(i)}$ é nilpotente. Então, existe $r>1$ tal que

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\ldots\mathfrak{A}^{(h-1)}(\mathfrak{A}^{(h)})^r=\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\ldots\mathfrak{A}^{(h)}(\mathfrak{A}^{(h)})^{r-1}=(o),$$
$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\ldots\mathfrak{A}^{(h-1)}(\mathfrak{A}^{(h)})^{r-1}\supset(o).$$

Pondo $\mathfrak{A}\ldots\mathfrak{A}^{(h)}=\mathfrak{L}_h$, vê-se que

$$\mathfrak{S}\mathfrak{L}_{h-1}(\mathfrak{A}^{(h)})^{r-1}\supset(o),\quad \mathfrak{S}\mathfrak{L}_{h-1}(\mathfrak{A}^{(h)})^r=\mathfrak{S}\mathfrak{L}_h(\mathfrak{A}^{(h)})^{r-1}=(o),$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{T}^h=\mathfrak{S}\mathfrak{L}_{h-1}\supseteqq\mathfrak{S}\mathrm{T}^{h+1}=\mathfrak{S}\mathfrak{L}_h,$$

de sorte que, sendo $\mathfrak{r}_h$ e $\mathfrak{r}_{h-1}$ os ideais direitos verificando as relações $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_{h-1}\mathfrak{r}_{h-1}=(o)$, $\mathfrak{S}\mathfrak{L}_h\mathfrak{r}_h=(o)$, é $\mathfrak{r}_{h-1}\subseteqq\mathfrak{r}_h$, $(\mathfrak{A}^{(h)})^{r-1}\subseteqq\mathfrak{r}_h$, $(\mathfrak{A}^{(h)})^{r-1}\notin\mathfrak{r}_{h-1}$. Conclui-se, assim, a existência da cadeia infinita $\mathfrak{r}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{r}_{h-1}\subset\mathfrak{r}_h\subset\ldots$, contra a hipótese do teorema. Não pode, pois, supor-se $\mathrm{T}^h\neq(o)$, para qualquer inteiro h. T é nilpotente.

Teorema 23:—*A condição de máximo para ideais direitos semi-nilpotentes arrasta a nilpotência de* $\mathfrak{R}^{**}$. Se, conforme a condição de máximo indicada, $a_1,\ldots,a_n\in\mathfrak{R}^{**}$ forem tais que $\mathfrak{R}^{**2}=(a_1\mathfrak{R}^{**},\ldots,a_n\mathfrak{R}^{**})$, e se $\mathfrak{A}$ for o sub-anel gerado pelos a_i, é $\mathfrak{A}\mathfrak{R}^{**}=\mathfrak{R}^{**2}$. Tira-se daqui $\mathfrak{A}\mathfrak{R}^{**2}=\mathfrak{R}^{**3}=$ $=\mathfrak{A}^2\mathfrak{R}^{**}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{R}^{**3}=\mathfrak{R}^{**4}=\mathfrak{A}^3\mathfrak{R}^{**}$, etc.. Como $\mathfrak{A}$ é nilpotente, supondo $\mathfrak{A}^r=(o)$, a relação $\mathfrak{A}^r\mathfrak{R}^{**}=\mathfrak{R}^{**r+1}$ demonstra o teorema.

Corolário 5:—*A condição de máximo para os ideais direitos que contêm* $\mathfrak{R}^{**}$ *e a condição de máximo para os ideais direitos contidos em* $\mathfrak{R}^{**}$ *arrastam a existência de* $\mathfrak{R}^{*}$ *e a sua nilpotência*. É o que resulta da combinação do teorema com o lema 4.

Podemos agora enunciar a proposição geral seguinte:

Teorema 24:—*Se* $\mathfrak{a}$ *é um ideal bilateral nilpotente de* $\mathfrak{S}$ *e se em* $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ *é válida a condição de máximo, tanto para ideais direitos como para ideais esquerdos, todo o sub-nilanel de* $\mathfrak{S}$ *é nilpotente.*

Corolário 6:—*A condição de máximo para ideais direitos e esquerdos de* $\mathfrak{S}$, *contendo* $\mathfrak{R}$, *e a condição de máximo para ideais bilaterais contidos em* $\mathfrak{R}$ *garantem que todo o sub-nilanel de* $\mathfrak{S}$ *é nilpotente.*

CAPÍTULO XIV

O radical de Jacobson

1) **Introdução**—As diferentes noções de radical dadas em (I) não levam a um anel cociente cuja estrutura possa ser estudada em geral. N. Jacobson, [5], em seguimento de ideias devidas a S. Perlis, [1] e a R. Baer, [2], deu uma noção de radical que vai ser analisada em detalhe neste Capítulo e que leva a um teorema bastante satisfatório quanto à estrutura do anel cociente correspondente, como mais tarde se verá.

O radical de Jacobson, ou radical—*J*, contém sempre os radicais $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^{**}$ e $\mathfrak{R}^{*}$, se este último existe. Os teoremas que provaremos aqui têm bastantes analogias, quanto ao enunciado, com os que já foram expostos em (I), sobre o radical—*L*. É por isso que será adoptada a noção $\mathfrak{R}_{**}$, para significar radical—*J*.

2) **Definição do radical**—*J*—Dado um anel arbitrário $\mathfrak{S}$, se $b\in\mathfrak{S}$, diz-se que b é *quase-regular direito* quando existe $b'\in\mathfrak{S}$ verificando a igualdade

$$b+b'+bb'=o. \qquad (1)$$

Esta definição torna-se mais natural se observarmos que, no caso de existir em $\mathfrak{S}$ elemento um $= u$, é condição necessária e suficiente, para que b seja quase-regular direito, que exista b' de modo a ter-se

$$(u+b)(u+b')=u.$$

O elemento b', que figura em (1), diz-se *quase-inverso direito de* b.

Teorema 1:—*É condição necessária e suficiente, para que* b *seja quase-regular direito, que o ideal direito* $(x+bx)$, *onde* $x \in \mathfrak{S}$ *é arbitrário, seja igual ao anel* $\mathfrak{S}$. Com efeito, se $(x+bx)=\mathfrak{S}$, existe $b' \in \mathfrak{S}$ tal que $b'+bb'=-b$. Reciprocamente, se existe b' tal que (1) é verificado, tem-se

$$-b=b'+bb', \quad b \in (x+bx), \quad bx \in (x+bx),$$

$$x=x+bx-bx \in (x+bx).$$

Um ideal direito $\mathfrak{r}$ diz-se *quase-regular direito*, se todos os seus elementos forem quase-regulares direitos. No que vai seguir-se, são fáceis de reconhecer as analogias entre $\mathfrak{R}_{**}$ e $\mathfrak{R}^{**}$, referidas na Introdução, substituindo a designação de ideal quase-regular direito pela de ideal direito semi-nilpotente.

Dão-se definições análogas de elemento *quase-regular esquerdo*, de *quase-inverso esquerdo de* b e de *ideal quase-regular esquerdo*.

Teorema 2:—*Se* b *tem um quase-inverso direito* b′ *e um quase-inverso esquerdo* b″, *é* $b'=b''$ *e* $bb'=b'b$. Por hipótese, valem as igualdades

$$b+b'+bb'=o, \qquad b+b''+b''b=o.$$

Delas tira-se

$$b''=b''+(b+b'+bb')+b''(b+b'+bb')=$$

$$=b'+(b+b''+b''b)+(b+b''+b''b)\,b'=b'.$$

Portanto, tem-se

$$b+b'+bb'=o, \quad b+b'+b'b=o, \quad \text{e} \quad bb'=b'b.$$

Um elemento b, como o do teorema anterior, diz-se *quase-regular* e $b'=b''$ diz-se o seu *quase-inverso*.

Corolário 1:—*Todo o ideal quase-regular direito (esquerdo) é composto de elementos quase-regulares. Os respectivos quase-inversos pertencem ao ideal.* Se $\mathfrak{r}$ é o ideal em questão e se $b'' \in \mathfrak{r}$, tem-se $b''+b+b''b=o$, para um certo b. Como $-b=b''+b''b \in \mathfrak{r}$, segue-se que b tem quase-inverso $b' \in \mathfrak{r}$. Deste modo, b tem quase-inverso direito e quase-inverso esquerdo em $\mathfrak{r}$, pelo que é quase-regular. O seu quase-inverso é $b''=b'$. A situação de b'' e de b é recíproca, pelo que b'' é também quase-regular, como afirma o corolário.

Teorema 3:—*Se* a *é quase-regular direito e* $b \in \mathfrak{r}$, *sendo* $\mathfrak{r}$ *quase-regular direito, a soma* $a+b$ *é quase-regular direita.* Tem-se

$$a+a'+aa'=o, \qquad b+ba' \in \mathfrak{r}.$$

Por hipótese, $b+ba'$ tem quase-inverso direito v', de sorte que

$$(b+ba')+v'+(b+ba')\,v'=o.$$

Então é, como se deseja,

$$(a+b)+(a'+v'+a'v')+(a+b)(a'+v'+a'v')=o.$$

De facto, o 1.º membro pode escrever-se

$$(a+a'+aa')+[(b+ba')+v'+(b+ba')\,v']+$$
$$+(a+a'+aa')\,v'.$$

que é uma soma de parcelas nulas.

Corolário 2:—*A soma de dois ideais quase-regulares direitos é um ideal quase-regular direito.*

TEOREMA 4:—*Se* za *tem o quase-inverso direito* v', az *tem o quase-inverso direito* $-az-av'z$. Supondo $za+v'+zav'=$ $=o$, tem-se, com efeito,

$$az+(-az-av'z)+az(-az-av'z)=$$
$$=-a(za+v'+zav')z=o.$$

COROLÁRIO 3:—*Se* $\mathfrak{S}b$ *é composto de elementos quase-regulares direitos, os quase-inversos direitos pertencem a* $\mathfrak{S}b$. Os elementos da forma sb, $(s\in\mathfrak{S})$, têm quase-inverso direito. Pelo teorema, bs tem quase-inverso direito bt, de sorte que, ainda pelo teorema, o quase-inverso direito de sb é $-sb-$ $-sbtb\in\mathfrak{S}b$.

COROLÁRIO 4:—*O ideal esquerdo* $\mathfrak{S}b$, *composto de elementos quase-regulares direitos, é um ideal quase-regular esquerdo.* De facto, se $a\in\mathfrak{S}b$ tem quase-inverso direito $a'\in\mathfrak{S}b$, segue-se que a' tem quase-inverso direito a''. Então, como a é quase-inverso esquerdo de a', conclui-se que $a=a''$, assim como $aa'=a'a$. O elemento a' é quase-inverso esquerdo de a, o que prova o corolário.

TEOREMA 5:—*Se* $\mathfrak{r}$ *é um ideal quase-regular direito, o ideal bilateral* $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$ *é quase-regular esquerdo e direito.* Seja $\Sigma s_i a_i$, com $s_i\in\mathfrak{S}$, $a_i\in\mathfrak{r}$ e $(i=1,2,\ldots,k)$, um elemento de $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$. Tem-se $s_i a_i\in\mathfrak{S}a_i$. O elemento $a_i s_i\in\mathfrak{r}$ é quase-regular direito. O mesmo se diz de $s_i a_i$, de sorte que os ideais esquerdos $\mathfrak{S}a_i$, compostos de elementos quase-regulares direitos, são quase-regulares esquerdos. O ideal esquerdo soma,

$$\mathfrak{n}=(\mathfrak{S}a_1,\ldots,\mathfrak{S}a_k),$$

é quase-regular esquerdo. Como $\Sigma s_i a_i\in\mathfrak{n}$, fica provado que $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$ é quase-regular esquerdo. Os seus elementos são quase-regulares direitos (corolário 1), e como se trata dum ideal direito fica provado o teorema.

TEOREMA 6:—*O ideal bilateral* $(\mathfrak{r},\mathfrak{S}\mathfrak{r})$, *gerado pelo ideal quase-regular direito* $\mathfrak{r}$, *é quase-regular direito e esquerdo.*

Como $\mathfrak{r}$ é quase-regular direito, os seus elementos (corolário 1) são quase-regulares esquerdos. Visto que $\mathfrak{S}\mathfrak{r}$ é quase-regular esquerdo, um elemento do ideal bilateral, pelo teorema 3, é quase-regular esquerdo. Por outro lado, o ideal bilateral é soma de dois ideais quase-regulares direitos.

Dos raciocínios feitos, resulta poder dar-se a seguinte

DEFINIÇÃO:—*Diz-se radical de* JACOBSON, $\mathfrak{R}_{**}$, *dum anel arbitrário* $\mathfrak{S}$, *o conjunto unido dos seus ideais quase-regulares direitos ou dos seus ideais quase-regulares esquerdos ou dos seus bilaterais quase-regulares.*

De futuro, usaremos a designação de *ideal direito (esquerdo) quase-regular*, em vez de ideal quase-regular direito (esquerdo).

3) **Algumas propriedades do radical**—Um anel $\mathfrak{S}$ diz-se *anel radical*, se for igual a $\mathfrak{R}_{**}$. JACOBSON utiliza a designação de *semi-simples* para significar anel para o qual $\mathfrak{R}_{**}=(o)$. Para nós, porém, um anel semi-simples teve sempre, até aqui, o significado que lhe foi atribuído em (I) [1].

Utilizando a definição de anel radical, podemos verificar que são equivalentes as 3 propriedades seguintes, dum ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}$, supondo que uma delas tem efectivamente lugar: 1) um número finito de elementos de $\mathfrak{r}$ gera um anel radical; 2) cada elemento de $\mathfrak{r}$ gera um anel radical; 3) o quase-inverso direito de cada elemento $z\in\mathfrak{r}$ tem a forma duma soma finita $z'=\Sigma\pm z^{\sigma}$.

É imediato que 1) arrasta 2) e que 2) arrasta 3). Passa-se, também, de 3) a 2), muito fàcilmente. Por fim, admitamos 3) e demonstremos 1). Sejam $z_1,\ldots,z_m\in\mathfrak{r}$. O anel gerado pelos z_i compõe-se de elementos $Z=\Sigma\pm z_{i_1}\ldots z_{i_q}$. Visto que Z tem o

(1) É hoje comum, a uma dada definição de radical, fazer corresponder a designação de semi-simples, para um anel de radical nulo; e a designação de anel radical, para um anel igual ao seu radical.

quase-inverso direito da forma $\Sigma \pm Z^{\sigma} = \Sigma[\pm(\Sigma \pm z_{i_1} \ldots z_{i_q})^{\sigma}]$, conclui-se que o referido quase-inverso pertence ao anel gerado pelos z_i. Podemos fixar, pois, o seguinte resultado [Almeida Costa, 13, § 7]:

Teorema 7:—*É condição necessária e suficiente, para que todo o conjunto finito de elementos dum ideal direito quase-regular* $\mathfrak{r}$ *gere um anel radical, que o quase-inverso direito de cada elemento* $z \in \mathfrak{r}$ *seja da forma* $\Sigma \pm z^{\sigma}$.

Notações:—Para simplicidade da exposição, observemos o seguinte: 1) o anel cociente $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ será representado sempre por $\overline{\mathfrak{S}}$; 2) se $a \in \mathfrak{S}$, o seu correspondente em $\overline{\mathfrak{S}}$, por via do homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$, representar-se-á por $\overline{a}$; 3) dado $\overline{a} \in \overline{\mathfrak{S}}$, a significará também um elemento qualquer da classe $a + \mathfrak{R}_{**}$; 4) os símbolos a', $\overline{a}'$, etc. significarão quase-inversos direitos de a, $\overline{a}$, etc.; 5) o correspondente dum ideal $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{S}$, no citado homomorfismo, designar-se-á pelo símbolo $\overline{\mathfrak{r}}$.

Teorema 8:—*Sejam* $a, b \in \mathfrak{S}$ *e suponhamos* $v = a + b + a b \in \mathfrak{R}_{**}$; *então* a *é quase-regular direito.* De facto, de

$$o = v + v' + v v' = (a + b + a b) + v' + (a + b + a b) v' = \\ = a + (b + v' + b v') + a (b + v' + b v'),$$

conclui-se que $b + v' + b v'$ é quase-inverso direito de a.

Corolário 5:—*No homomorfismo* $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$, *se* a *é quase-regular direito,* $\overline{a}$ *é quase-regular direito, e reciprocamente.* Supondo $a + a' + a a' = o$, tem-se também $\overline{a} + \overline{a'} + \overline{a}\,\overline{a'} = o$. Conclui-se, assim, que $\overline{a'} = \overline{a}'$. Inversamente, se $\overline{a} + \overline{a}' + \overline{a}\,\overline{a}' = o$, é

$$v = a + b + a b \in \mathfrak{R}_{**},$$

supondo que b tem $\overline{a}'$ como correspondente. Então, a é quase-regular direito.

Corolário 6:—*Um ideal direito quase-regular* $\mathfrak{r}$ *tem um correspondente* $\overline{\mathfrak{r}}$ *que é quase-regular, e reciprocamente.*

Corolário 7:—*O anel* $\overline{\mathfrak{S}}$ *não tem radical de* Jacobson.

Tomemos um elemento nilpotente $b \in \mathfrak{S}$. Supondo $b^r = o$, vê-se que

$$b + [-b + b^2 - \ldots + (-1)^{r-1} b^{r-1}] + \\ + b[-b + b^2 + \ldots + (-1)^{r-1} b^{r-1}] = o.$$

Os elementos nilpotentes são, pois, quase-regulares. Todo o nilideal é ideal quase-regular, de sorte que se tem

Teorema 9:—*O radical de* Jacobson *contém todos os nilideais.*

O teorema 13, do § 4, do Cap. anterior, aplicado ao radical—J, permite o seguinte enunciado:

Teorema 10:—*É condição necessária e suficiente, para que* $a \in \mathfrak{R}_{**}$, *que seja* $a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$.

Basta, mesmo, que $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, para se ter $a \in \mathfrak{R}_{**}$. De facto, se o ideal direito gerado por a é $\mathfrak{r}$, tem-se $\mathfrak{r}^3 \subseteq \mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$. Na correspondência $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$, é $\overline{\mathfrak{r}}^3 = (o)$, $\overline{\mathfrak{r}} = (o)$, $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, $a \in \mathfrak{R}_{**}$. Assim:

Teorema 11:—*É condição necessária e suficiente, para que* $a \in \mathfrak{R}_{**}$, *que seja* $\mathfrak{S} a \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$.

Dado um ideal bilateral quase-regular $\mathfrak{a}$, podemos pensar em destacar, de entre os ideais direitos quase-regulares, aqueles ideais $\mathfrak{r}$ para os quais tenha lugar

1'): existe um inteiro σ tal que $\mathfrak{r}^{\sigma} \subseteq \mathfrak{a}$.

No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a} = \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{r}$ terá um correspondente $\mathfrak{r}'$, que será nilpotente. O conjunto unido dos $\mathfrak{r}'$ levará ao radical vulgar $\mathfrak{R}'$, de $\mathfrak{S}'$. O conjunto unido dos $\mathfrak{r}$ levará a um ideal bilateral $\mathfrak{R}[\mathfrak{a}]$. Tem-se $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}[\mathfrak{a}]/\mathfrak{a}$. Designando por *quase-nilpotente*, relativamente a $\mathfrak{a}$, um ideal $\mathfrak{r}$ com a propriedade 1'), a teoria dos ideais quase-nilpotentes reduz-se à teoria dos ideais nilpotentes de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$.

Há, anàlogamente, uma teoria de ideais *quase semi-nilpotentes*, relativamente a $\mathfrak{a}$, considerando os ideais $\mathfrak{r}$ com a propriedade

$2')$: cada conjunto finito de elementos de $\mathfrak{r}$ gera um sub-anel $\mathfrak{S}_1$, de $\mathfrak{S}$, para o qual existe um inteiro σ tal que $\mathfrak{S}_1^\sigma \subseteq \mathfrak{a}$.

Define-se, então, um radical de Levitzki $\mathfrak{R}^{**}[\mathfrak{a}]$, que é o conjunto dos ideais direitos (esquerdos ou bilaterais) quase semi-nilpotentes, relativamente a $\mathfrak{a}$. O radical $\mathfrak{R}^{**\prime}$, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$, verifica a igualdade $\mathfrak{R}^{**\prime}=\mathfrak{R}^{**}[\mathfrak{a}]/\mathfrak{a}$.

Uma teoria de *quase-nilideais*, relativamente a $\mathfrak{a}$, obtém-se considerando os ideais $\mathfrak{r}$ com a propriedade

$3')$: para cada $r \in \mathfrak{r}$, existe um inteiro σ tal que $r^\sigma \in \mathfrak{a}$.

O radical de Köthe $\mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]$ define-se como o conjunto unido dos ideais bilaterais quase-nilideais, relativamente a $\mathfrak{a}$, se esse conjunto contém os ideais unilaterais quase-regulares que sejam quase-nilideais, relativamente a $\mathfrak{a}$. Nesse caso, tem-se $\mathfrak{R}^{*\prime}=\mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]/\mathfrak{a}=$ = radical de Köthe de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$. É claro que, se $\mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]$ existe, é

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{R}^{**}[\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]. \qquad (2)$$

Nesta ordem de ideias, levanta-se também o problema de considerar os ideais direitos $\mathfrak{r}$ com a propriedade

$4')$: para cada $a \in \mathfrak{r}$, existe a' tal que $a+a'+aa' \in \mathfrak{a}$.

Sabemos que $\mathfrak{r}$ é ideal direito quase-regular de $\mathfrak{S}$. O estudo dos ideais $\mathfrak{r}$ é o estudo dos ideais direitos quase-regulares de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$. O radical de Jacobson deste último anel é $\mathfrak{R}_{**}/\mathfrak{a}$, de sorte que, em $\mathfrak{S}$, se define, pelo conjunto unido dos ideais $\mathfrak{r}$, precisamente o radical $\mathfrak{R}_{**}=\mathfrak{R}_{**}[\mathfrak{a}]$. Na hierarquia (2), $\mathfrak{R}_{**}$ é colocado à direita (1).

Se estiverem em jogo radicais—J de diferentes anéis $\mathfrak{S}, \mathfrak{A}, \ldots$, poderemos utilizar as notações $\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A}), \ldots$ para os

(1) $\mathfrak{a}$ foi suposto ideal bilateral quase-regular. Se fosse nilideal, concluiríamos então $\mathfrak{R}^*=\mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]$, desde que se admitisse a existência de radical—K para $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$.

distinguir. Supondo $\mathfrak{S}=\mathfrak{A}_n$ o anel de matrizes do grau n com elementos de $\mathfrak{A}$, tem lugar este

Teorema 12:—*É condição necessária e suficiente para que uma matriz* $S=(a_{ik})$ *pertença ao radical* $\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A}_n)$, *que os elementos* a_{ik} *pertençam ao radical* $\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A})$.

A condição é *suficiente*. A demonstração de Jacobson assenta sobre o seguinte

Lema 1:—*Supondo* $t_{11} \in \mathfrak{A}$ *quase-regular direito, a matriz* (t_{ij}), *em que apenas se supõem diferentes de zero os elementos da primeira linha, é quase-regular direita.*

Visto que o ideal direito $(x+t_{11}x)$ é igual a $\mathfrak{A}$, ponhamos, se $j>1$, $t'_{1j}+t_{11}t'_{1j}=-t_{1j}$. Fàcilmente se verifica que a matriz (t'_{ij}), em que apenas são diferentes de zero os elementos da 1.ª linha, é o quase-inverso direito de (t_{ij}).

Demonstrado o lema, consideremos as matrizes cuja primeira linha é constituída por elementos pertencentes a $\mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A})$ e cujos restantes elementos são iguais a zero. Obtém-se um conjunto que forma um ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}_1$. Tratando anàlogamente as outras linhas, chega a concluir-se que o anel das matrizes de grau n com elementos pertencentes ao radical de $\mathfrak{A}$ verifica as relações

$$(\mathfrak{R}_{**})_n=\mathfrak{r}_1+\ldots+\mathfrak{r}_n \subseteq \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A}_n),$$

que demonstram a suficiência da condição.

A condição é *necessária*. Seja $S=(a_{ik}) \in \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A}_n)$. Designemos por B_{ij} a matriz de $\mathfrak{A}_n$ obtida quando se coloca b na linha i e coluna j. Então, supondo b e c elementos arbitrários de $\mathfrak{A}$, a matriz $B_{kr}\,S\,C_{sk}$ tem todos os elementos nulos, salvo o elemento (k, k), que se reduz a $b\,a_{rs}\,c$. Assim,

$$D=\sum_k B_{kr}\,S\,C_{sk}=(b\,a_{rs}\,c, \ldots, b\,a_{rs}\,c) \in \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A}_n)$$

é uma matriz diagonal. Se for D' o seu quase-inverso direito, ponhamos $D'=(f_{ij}^{rs})$. A condição $D+D'+DD'=o$ mostra que se tem $b\,a_{rs}\,c+f_{11}^{rs}+b\,a_{rs}\,c\,f_{11}^{rs}=o$. Por isso, o elemento

$d = b\,a_{rs}\,c$ tem f_{11}^{rs} como quase-inverso direito. Visto que c é arbitrário, mudemos c em $ct + ci$, ($t \in \mathfrak{A}$, $i =$ inteiro). O elemento $dt + di$ é quase-regular direito e o ideal direito gerado por d é quase-regular. Será $d \in \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A})$. Do facto de se ter $b\,a_{rs}\,t \in \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A})$, tira-se $b\,a_{rs}\,\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A})$, pelo que $b\,a_{rs} \in \mathfrak{R}_{**}(\mathfrak{A})$. O mesmo se diz de $t\,a_{rs}$, e, portanto, de a_{rs}, como se queria provar.

As propriedades que vão seguir-se fazem intervir idempotentes. Seguimos Almeida Costa, [13, § 7].

Seja $\mathfrak{T}$ um sub-anel de $\mathfrak{S}$ composto de elementos quase-regulares direitos. Se $b \in \mathfrak{T}$, é $b\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}$, $b^k\mathfrak{T} \subseteq b^{k-1}\mathfrak{T}$. Se, para um certo inteiro k, a igualdade pudesse ter lugar, existiria $t \in \mathfrak{T}$ tal que $b^k = b^k t$. Designando por t' o quase-inverso de $-t$, concluía-se

$$b^k - b^k t + b^k t' - b^k t t' = o = b^k + b^k(-t + t' - t t') = b^k .$$

Vale, pois, este

Teorema 13:—*Se $\mathfrak{T}$ é um sub-anel de $\mathfrak{S}$ composto de elementos quase-regulares direitos e se $\mathrm{b} \in \mathfrak{T}$, ou é $\mathrm{b}^{k-1}\mathfrak{T} \supset \mathrm{b}^k\mathfrak{T}$ ou é $\mathrm{b}^k = \mathrm{o}$.*

Corolário 8:—*Um sub-anel composto de elementos quase-regulares direitos não possui idempotente.*

Um idempotente e pode ser quase-regular. Num corpo de característica $\neq 2$, consideremos a equação $2u \,.\, x = -u$. Se for $x = u'$, é

$$u + 2uu' = u + u' + uu' = o .$$

Teorema 14:—*Se x é um elemento dum ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}'$, de $\mathrm{e}\mathfrak{S}\mathrm{e}$, x pertence a $\mathfrak{R}_{**}$.* Com efeito $x\mathfrak{S}e = x \,.\, e\mathfrak{S}e$ é um ideal direito quase-regular de $e\mathfrak{S}e$. Os elementos xae, ($a \in \mathfrak{S}$), são quase-regulares direitos. Escrevendo $xae = xa \,.\, e$, sabe-se que $e \,.\, xa = xa$ é quase-regular direito. Será $x\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, e, consequentemente, $x \in \mathfrak{R}_{**}$.

Corolário 9:—*O radical $\mathfrak{R}'_{**}$, de $\mathrm{e}\mathfrak{S}\mathrm{e}$, é igual a $\mathrm{e}\mathfrak{R}_{**}\mathrm{e}$.* Seja $x \in \mathfrak{R}'_{**}$. Então $x \in \mathfrak{R}_{**}$, $exe = x \in e\mathfrak{R}_{**}e$, e, portanto, $\mathfrak{R}'_{**} \subseteq e\mathfrak{R}_{**}e$. Como este último é ideal bilateral de $e\mathfrak{S}e$, composto de elementos quase-regulares de $\mathfrak{S}$, o corolário fica provado se houver quase-inversos desses elementos pertencentes ao ideal. Supondo $a \in e\mathfrak{S}e$ e $a + a' + aa' = o$, como se tem $a = ea = ae = eae$, vê-se que $eae + ea'e + eaa'e = a + ea'e + aea'e = o$, de sorte que podemos supor $a' = ea'e$, como se quer.

Consideremos uma decomposição de Peirce [(I), pág. 16]: $\mathfrak{S} = e\mathfrak{A} + \mathfrak{B}e + \mathfrak{J} + e\mathfrak{S}e$. Se x pertence a um ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}''$, de $\mathfrak{J}$, sabemos que, pondo, conforme a igualdade anterior, $s = ea + be + i + ese$, ($i \in \mathfrak{J}, \ldots$), se tem $xs = xbe + xi = x(be + i)$, Como $(be + i)x = ix$ e como o elemento xi é quase-regular direito, segue-se que $(be + i)x$ é quase-regular direito. O mesmo se diz de $x(be + i) = xs$. Assim, $x\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$ e $x \in \mathfrak{R}_{**}$. Daqui o seguinte

Teorema 15:—*Se x é um elemento dum ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}''$ de $\mathfrak{J}$, x pertence a $\mathfrak{R}_{**}$.*

Corolário 10:—*O radical $\mathfrak{R}''_{**}$, de $\mathfrak{J}$, é igual a $[\mathfrak{J}, \mathfrak{R}_{**}]$.* Verifiquemos apenas que, dado a pertencente à intersecção, e tal que $a + a' + aa' = a + a' + a'a = o$, é $a' \in \mathfrak{J}$. De facto, tem-se $ea + ea' + eaa' = ae + a'e + a'ae = o$, e, como $ea = ae = o$, é também $ea' = a'e = o$, o que caracteriza a' como elemento de $\mathfrak{J}$.

Os restantes teoremas deste § seguem ainda as generalidades do Cap. I, de (I).

Teorema 16:—*O radical—J dum anel regular é nulo.* Se $a \in \mathfrak{S}$, existe $x \in \mathfrak{S}$ tal que $axa = a$ [(I), pág. 32]. Então, suponhamos $a \in \mathfrak{R}_{**}$. Se supomos $a \neq o$, da relação $ax \,.\, ax = ax$ concluímos que $ax \in \mathfrak{R}_{**}$ é um idempotente $\neq o$. Este resultado é absurdo [corolário 8].

Tomemos agora um anel $\mathfrak{S}$ com n^2 matrizes unidades [(I), pág. 37]. Se $\mathfrak{A}$ representa o anel de elementos comutáveis com as referidas matrizes, é válido o

Teorema 17:—*O radical—J, de* $\mathfrak{A}$, *é* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}]$, *se* $\mathfrak{R}_{**}$ *é o radical—J de* $\mathfrak{S}$.

Representando por $e_{ik}, (i, k = 1, 2, \ldots, n)$, as matrizes unidades, ponhamos $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} \mathfrak{A} e_{ik}$. Pelo teorema 12, sabemos que $\mathfrak{R}_{**} = \sum_{i,k} \mathfrak{R}'_{**} e_{ik}$, onde $\mathfrak{R}'_{**}$ é o radical de $\mathfrak{A}$. Para se ver que $\mathfrak{R}'_{**} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, basta ter em conta as relações

$$e_{kk} \mathfrak{R}_{**} e_{kk} = \mathfrak{R}'_{**} e_{kk}.$$
$$\mathfrak{R}'_{**} \sum_k e_{kk} = \mathfrak{R}'_{**} = \sum_k e_{kk} \mathfrak{R}_{**} e_{kk} \subseteq \mathfrak{R}_{**}.$$

Então é $\mathfrak{R}'_{**} \subseteq [\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}]$. Como este último é ideal bilateral de $\mathfrak{A}$, o teorema fica estabelecido, provando que ele é quase-regular em $\mathfrak{A}$. Tomemos $a \in [\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}]$. Se $a' = \sum a_{ij} e_{ij}$, $(a_{ij} \in \mathfrak{A})$, for o seu quase-inverso direito tem-se

$$a \sum_k e_{kk} + \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij} + \sum_{i,j} a a_{ij} e_{ij} = 0.$$

Tira-se daqui $a + a_{kk} + a a_{kk} = 0$, de sorte que o quase-inverso de a pertence a $\mathfrak{A}$. Isto significa que deve ser $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, o que efectivamente se verifica, pois $0 + a_{ij} + a a_{ij} = 0$, $(u + a) a_{ij} = 0$, e, portanto,

$$(u + a)^{-1} (u + a) a_{ij} = a_{ij} = 0.$$

Continuando a supor $\mathfrak{S}$ o anel do teorema anterior, tem lugar o

Teorema 18:—*O anel* $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} / \mathfrak{R}_{**}$ *é o anel completo de matrizes com elementos de* $\overline{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}) / \mathfrak{R}_{**}$. De facto, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$. os e_{ik} têm os correspondentes $\overline{e}_{ik}$. Como não pode ser $e_{ik} \in \mathfrak{R}_{**}$, visto que isso implicaria $e_{ik} e_{ki} = e_{ii} \in \mathfrak{R}_{**}$, as n^2 matrizes unidades $\overline{e}_{ik}$ são diferentes de zero. Também não pode ter-se $\overline{e}_{ik} = \overline{e}_{jm}$, a não ser que $i = j$, $k = m$, pois a igualdade daria

$$(e_{ik} - e_{jm}) \in \mathfrak{R}_{**}, \qquad (e_{ik} - e_{jm}) e_{ki} = e_{ii} \in \mathfrak{R}_{**},$$

se $m \neq k$. Supondo $m = k$, a igualdade

$$e_{ki} (e_{ik} - e_{jk}) = e_{kk} \in \mathfrak{R}_{**}$$

levaria a um absurdo, salvo se $j = i$, caso em que $e_{ik} = e_{jm}$. $\overline{\mathfrak{S}}$ admite a representação

$$\overline{\mathfrak{S}} = \sum_{i,k} \overline{\mathfrak{A}} \, \overline{e}_{ik},$$

em que os elementos de $\overline{\mathfrak{A}}$ comutam com os $\overline{e}_{ik}$ e estes últimos são independentes. Para verificar esta última afirmação, escrevamos

$$\overline{a} = \sum_{i,k} \overline{a}_{ik} \overline{e}_{ik} = 0, \qquad (\overline{a}_{ik} \in \overline{\mathfrak{A}}).$$

Deduz-se, sucessivamente:

$$\overline{a} \, \overline{e}_{ps} = \sum_i \overline{a}_{ip} \overline{e}_{is} = 0,$$

$$\overline{e}_{rq} \, \overline{a} \, \overline{e}_{ps} = \overline{a}_{qp} \overline{e}_{rs} = 0,$$

$$\overline{a}_{qp} \overline{e}_{rr} = 0, \quad \overline{a}_{qp} \sum_r \overline{e}_{rr} = \overline{a}_{qp} = 0.$$

O teorema fica, assim, demonstrado. Pode precisar-se, de resto, que $\overline{\mathfrak{A}}$ contém todos os elementos comutáveis com os $\overline{e}_{ik}$. Se $\overline{a}$ é um tal elemento, pondo

$$\overline{a} = \sum_{i,k} \overline{a}_{ik} \overline{e}_{ik},$$

tem-se

$$\overline{a} \, \overline{e}_{jr} = \sum_i \overline{a}_{ij} \overline{e}_{ir} = \overline{e}_{jr} \overline{a} = \sum_k \overline{a}_{rk} \overline{e}_{jk},$$

e, portanto, para $i = j$, $k = r$, $\overline{a}_{jj} = \overline{a}_{rr}$. Fora disso, é $\overline{a}_{ij} = \overline{a}_{rk} = 0$. A expressão de $\overline{a}$ toma a forma

$$\overline{a} = \sum_j \overline{a}_{jj} \overline{e}_{jj} = \sum_j \overline{a} \, \overline{e}_{jj} = \overline{a} \sum_j \overline{e}_{jj} = \overline{a},$$

se se põe $\overline{a}_{11} = \ldots = \overline{a}_{nn} = \overline{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$.

4) **Sobre um problema de Baer-Levitzki**—Seja $\mathfrak{Q}$ um ideal bilateral quase-regular e suponhamos $\mathfrak{s} \subseteqq \mathfrak{Q}$ um ideal direito com uma base finita: $\mathfrak{s} = (b_1, \ldots, b_n)$. Em virtude de ser $\mathfrak{s}\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{s}$, imaginemos $\mathfrak{s}\mathfrak{Q} = \mathfrak{s}$. Para cada $b \in \mathfrak{s}$ têm-se, então, duas expressões distintas:

$$b = \sum_i b_i a_i + \sum b_j n_j, \qquad (a_i \in \mathfrak{S}, \quad n_j = \text{inteiro}),$$

$$b = \sum_{k=1}^{n} b_k z_k, \qquad (z_k \in \mathfrak{Q}).$$

Em particular, é $b_1 = \sum b_k z_k$. Se $-z_1$ tem o quase--inverso z'_1, conclui-se $b_1 = b_1 + b_1(-z_1 + z'_1 - z_1 z'_1) = (b_1 - - b_1 z_1) + (b_1 - b_1 z_1) z'_1$. Ora, sendo $b_1 - b_1 z_1 = \sum_2^n b_k z_k$, vem imediatamente

$$b_1 = \sum_2^n b_k z_k + \sum_2^n b_k z_k z'_1 = \sum_2^n b_k (z_k + z_k z'_1).$$

Isto prova que b_1 pode eliminar-se na base de $\mathfrak{s}$. O raciocínio prossegue. Depois de se chegar a concluir que $\mathfrak{s} = (b_n)_d$, pondo $b_n = b_n z_n$, e, em seguida, como anteriormente, $b_n = b_n + + b_n(-z_n + z'_n - z_n z'_n) = (b_n - b_n z_n) + (b_n - b_n z_n) z'_n = o$, vê-se que a igualdade $\mathfrak{s}\mathfrak{Q} = \mathfrak{s}$ implica $\mathfrak{s} = (o)$. Assim:

Teorema 19:—*Se um ideal direito $\mathfrak{s}$, contido num ideal bilateral quase-regular $\mathfrak{Q}$, tem uma base finita, ou é $\mathfrak{s}\mathfrak{Q} = \mathfrak{s}$, ou $\mathfrak{s} = (o)$.*

Resultam deste teorema de Jacobson certas consequências que vamos assinalar.

Corolário 11:—*Se $\mathfrak{a} \supset (o)$ é um nilideal bilateral de $\mathfrak{S}$, com uma base própria direita, tem-se $\mathfrak{a}^2 \subset \mathfrak{a}$,* (Levitzki, [7]). Como se vê, em face do teorema, poderíamos, mesmo, supor $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} \supset (o)$ um nilideal direito com uma base finita. De facto,

se observarmos que $\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{R}_{**}$, o teorema dá $\mathfrak{r}\mathfrak{R}_{**} \subset \mathfrak{r}$, e, portanto, $\mathfrak{r}^2 \subset \mathfrak{r}$.

Levitzki enuncia ainda esta outra proposição, à qual igualmente se aplica o raciocínio que acabamos de fazer para $\mathfrak{r}$:

Corolário 12:—*Se $\mathfrak{r} \supset (o)$ é um ideal direito semi-nilpotente de $\mathfrak{S}$, com uma base própria direita, tem-se $\mathfrak{r}^2 \subset \mathfrak{r}$.*

Uma terceira consequência é a seguinte:

Teorema 20:—*A condição de cadeia ascendente para os ideais direitos dum anel $\mathfrak{S}$, contidos num ideal bilateral quase--regular $\mathfrak{Q}$, arrasta uma das duas relações seguintes, nas quais $\mathfrak{s}$ é ideal direito $\subseteqq \mathfrak{Q}$: $\mathfrak{s}\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} = (o)$.*

Corolário 13:—*Se as duas condições de cadeia são válidas para os ideais direitos contidos em $\mathfrak{R}_{**}$, o radical—J é nilpotente.*

Na verdade, a cadeia descendente $\mathfrak{R}_{**} \supseteqq \mathfrak{R}_{**}^2 \supseteqq \ldots$ é limitada. Logo que se tenha $\mathfrak{R}_{**}^k \mathfrak{R}_{**} = \mathfrak{R}_{**}^k$, é $\mathfrak{R}_{**}^k = (o)$.

No Capítulo anterior, § 5, dissemos que, em geral, os nilideais bilaterais compreendidos entre os radicais superior e inferior, suposto $U(\mathfrak{S}) \supset L(\mathfrak{S})$, não são ideais radicais. Levitzki, [7], pôs a questão seguinte: *há ou não há anéis $\mathfrak{S}$ para os quais se tenha $\mathrm{U}(\mathfrak{S}) \supset \mathrm{L}(\mathfrak{S})$ e tais que todo o nilideal bilateral compreendido entre $\mathrm{U}(\mathfrak{S})$ e $\mathrm{L}(\mathfrak{S})$ seja ideal radical?*

Respondendo a esta pergunta, Levitzki demonstrou:

Teorema 21:—*Se $\mathfrak{S}$ é um anel com um radical superior $U(\mathfrak{S})$ semi-nilpotente, a hipótese $U(\mathfrak{S}) \supset L(\mathfrak{S})$ arrasta a existência de uma infinidade de ideais bilaterais entre $U(\mathfrak{S})$ e $L(\mathfrak{S})$ que não são ideais radicais.*

A demonstração assenta sobre três lemas.

Lema 2:—Se *$\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ são nilideais bilaterais de $\mathfrak{S}$, supondo $\mathfrak{P} \supseteqq \mathfrak{Q}$, é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{P}$ seja ideal* *radical de* $\mathfrak{S}$, *que* $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$ *seja ideal radical de* $\mathfrak{S}/\mathfrak{Q}$. Sabemos, com efeito, que, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{Q}$, o correspondente de $\mathfrak{P}$ é $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$. E sabemos, depois, que tem lugar o isomorfismo $\mathfrak{S}/\mathfrak{P} \sim (\mathfrak{S}/\mathfrak{Q})/(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q})$, do qual resulta o lema imediatamente.

LEMA 3:—*Se* $\mathfrak{a}$ *é um ideal bilateral semi-nilpotente diferente de zero, com uma base própria, tem-se* $\mathfrak{a}^2 \subset \mathfrak{a}$. Em face da hipótese, é

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{S} a_i \mathfrak{S}\ (^1), \qquad a_i \in \mathfrak{R}^{**}, \qquad \mathfrak{S} a_i \mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{R}^{**},$$

$$\mathfrak{S} a_i \mathfrak{S} . \mathfrak{S} a_j \mathfrak{S} . \mathfrak{S} a_k \mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{R}^{**} a_j \mathfrak{R}^{**}, \quad \mathfrak{a}^3 \subseteqq \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{R}^{**} a_j \mathfrak{R}^{**}.$$

Se fosse $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, seria $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^3$, e, portanto,

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{R}^{**} a_j \mathfrak{R}^{**}.$$

Cada elemento a_k, da base própria de $\mathfrak{a}$, seria da forma $a_k = \sum b_{kj} a_j c_{kj}$, $(b_{kj}, c_{kj} \in \mathfrak{R}^{**})$. O sub-anel $\mathfrak{B}$, gerado pelos b_{kj} e o sub-anel $\mathfrak{C}$, gerado pelos c_{kj}, são nilpotentes. Como se conclui

$$a_k \in \sum_j \mathfrak{B} a_j \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B} a_k \mathfrak{C} \subseteqq \sum_j \mathfrak{B}^2 a_j \mathfrak{C}^2,$$
$$a_i \in \sum_k \mathfrak{B} a_k \mathfrak{C} \subseteqq \sum_j \mathfrak{B}^2 a_j \mathfrak{C}^2 \subseteqq \ldots \subseteqq \sum_j \mathfrak{B}^r a_j \mathfrak{C}^r.$$

vê-se que, por ser $a_i \neq o$, não podem ser nilpotentes, tanto $\mathfrak{B}$ como $\mathfrak{C}$. O absurdo provém da igualdade $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$.

LEMA 4:—*Admitindo que é* $L(\mathfrak{S}) = (o)$, *se for* $\mathfrak{a} \supset (o)$ *um ideal bilateral semi-nilpotente de* $\mathfrak{S}$, *há em* $\mathfrak{S}$ *uma infinidade de nilideais bilaterais, contidos em* $\mathfrak{a}$, *os quais não são ideais radicais.*

---

(1) O sinal Σ significa aqui soma não directa.

Tomemos $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ e consideremos o ideal bilateral $\mathfrak{a}_1$, gerado pelos $a_i \neq o$. É claro que se tem $\mathfrak{a}_1^3 \supseteqq \sum \mathfrak{a}_1 a_i \mathfrak{a}_1$. Por outro lado, um elemento de $\mathfrak{a}_1^3$ é uma soma de elementos da forma

$$(s_i a_i + a_i t_i + n_i a_i + p_i a_i q_i)(s'_j a_j + a_j t'_j + n'_j a_j +$$
$$+ p'_j a_j q'_j)(s''_k a_k + a_k t''_k + n''_k a_k + p''_k a_k q''_k),$$

$$(s_i, \ldots, t_i, \ldots, p_i, \ldots, q_i, \ldots \in \mathfrak{S};\ n_i, \ldots \text{ inteiros}),$$

o que mostra ser $\mathfrak{a}_1^3 = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_1 a_i \mathfrak{a}_1$. Imaginemos agora que poderia ser $\mathfrak{a}_1^3 = \mathfrak{a}_1$. Então, ter-se-ia

$$\mathfrak{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_1 a_i \mathfrak{a}_1 \subseteqq \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{S} a_i \mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{a}_1,$$

o que acarretaria $\mathfrak{a}_1 = \sum \mathfrak{S} a_i \mathfrak{S}$ e mostraria ter $\mathfrak{a}_1$ uma base própria. O lema anterior seria contradito, visto que, de $\mathfrak{a}_1^3 \subseteqq \mathfrak{a}_1^2 \subseteqq \mathfrak{a}_1$, concluiríamos $\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_1$. Será, pois, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1^3 \subset \mathfrak{a}_1$. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a}_1^3$, o correspondente de $\mathfrak{a}_1$ é $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_1^3 \supset (o)$. Este último é ideal bilateral nilpotente de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_1^3$, de sorte que $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}$ não é ideal radical. A hipótese $L(\mathfrak{S}) = (o)$ garante ser $\mathfrak{b}_1 \supset (o)$, o que permite repetir o raciocínio e formar uma cadeia $\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2 \supset \ldots$ de ideais bilaterais que não são ideais radicais.

Passemos agora à demonstração do teorema 21. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/L(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$, o correspondente de $U(\mathfrak{S})$ é o ideal bilateral semi-nilpotente $U(\mathfrak{S})/L(\mathfrak{S}) = \mathfrak{a}' \supset (o)$. Como se tem $L(\mathfrak{S}') = (o)$, realizam-se em $\mathfrak{S}'$ as hipóteses do lema 4. Em $\mathfrak{S}'$, há uma infinidade $\mathfrak{b}'_1 \supset \mathfrak{b}'_2 \supset \ldots$ de ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{a}'$ que não são ideais radicais. Os ideais bilaterais correspondentes $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$, de $\mathfrak{S}$, estão contidos em $U(\mathfrak{S})$, contêm $L(\mathfrak{S})$, e, pelo lema 2, não são ideais radicais. O teorema está provado.

Imaginemos, em seguida, que $U(\mathfrak{S})$ é semi-regular. Antes de expormos os resultados a que chegou LEVITZKI neste caso, vamos pôr uma pequena questão, a qual, resolvida pela positiva, levaria à solução negativa da questão de LEVITZKI enunciada neste §, pois provaria: *sempre que* $\mathrm{U}(\mathfrak{S}) \supset \mathrm{L}(\mathfrak{S})$, *há entre os dois radicais, superior e inferior, uma infinidade de ideais bilaterais que não são ideais radicais.*

A questão a que nos referimos é a seguinte: *em correspondência com o teorema 19, dado um ideal bilateral* $\mathfrak{a}$, *contido num ideal bilateral quase-regular* $\mathfrak{Q}$, *e com uma base finita, a hipótese* $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{Q}$ *arrasta ou não arrasta uma das relações* $\mathfrak{a}\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = (o)$?, [13, § 6]. Respondamos pela positiva e comecemos por supor $U(\mathfrak{S}) \supset L(\mathfrak{S}) = (o)$. Se $U(\mathfrak{S})$ é semi-regular (único caso que interessa), tomemos $a_1, \ldots, a_n \in U(\mathfrak{S})$ tais que o sub-anel $\mathfrak{T}$, gerado pelos a_i, seja semi-regular. Então será semi-regular o ideal bilateral $\mathfrak{a}$ gerado pelos mesmos a_i, tendo-se $\mathfrak{a}^2 \subset \mathfrak{a}$. Precisamente $\mathfrak{a}^2 \neq (o)$ não será ideal radical, porque, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a}^2$, o correspondente de $\mathfrak{a}$ será $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$, que é nilpotente. Sabemos que $\mathfrak{T}^2 \subseteqq \mathfrak{a}^2$ é gerado por um número finito de elementos, $b_1, \ldots, b_m$, os quais geram igualmente um ideal bilateral semi-regular $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}^2$. Se for $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2$, ter-se-á $\mathfrak{a}^2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^3 \subset \mathfrak{a}^2$, com $\mathfrak{a}^3 \neq (o)$. O ideal $\mathfrak{a}^3$ também não é ideal radical. Se for $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}^2$, será $\mathfrak{b}^2 \subset \mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b}^2 \neq (o)$. $\mathfrak{b}^2$ não é ideal radical. O processo continua. E vê-se que se tem $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^2 \supseteqq \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^2 \supseteqq \mathfrak{c} \supset \mathfrak{c}^2 \supseteqq \ldots$, sendo $\mathfrak{a}^2 \supset \mathfrak{b}^2 \supset \mathfrak{c}^2 \supset \ldots$ uma sucessão que, neste caso particular para o qual $L(\mathfrak{S}) = (o)$, resolveria a questão de Levitzki. Na hipótese $L(\mathfrak{S}) \neq (o)$, sabemos [Teorema 12 do Cap. anterior] que, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/L(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$, se tem $U(\mathfrak{S}') = U(\mathfrak{S})/L(\mathfrak{S})$ e que $U(\mathfrak{S}')$ é semi-regular. Como $L(\mathfrak{S}') = (o)$, o raciocínio anterior é aplicável em $\mathfrak{S}'$ concluindo-se para $\mathfrak{S}$ do mesmo modo que no teorema 21.

Para terminarmos o §, vamos examinar os resultados efectivos de Levitzki, na hipótese de $U(\mathfrak{S})$ ser semi-regular.

Teorema 22:—*Se* $\mathrm{U}(\mathfrak{S})$ *é semi-regular, há em* $\mathfrak{S}$ *um sub-anel* $\mathfrak{S}_1$ *para o qual* $\mathrm{U}(\mathfrak{S}) \supseteqq \mathfrak{S}_1 = \mathrm{U}(\mathfrak{S}_1) \supset \mathrm{L}(\mathfrak{S}_1)$ *e tal que* $\mathfrak{S}_1$ *contém uma infinidade de nilideais bilaterais entre* $\mathrm{U}(\mathfrak{S}_1)$ *e* $\mathrm{L}(\mathfrak{S}_1)$ *que não são ideais radicais.*

Comecemos pelo

Lema 5:—*Admitindo que, num anel* $\mathfrak{S}$, *é* $\mathrm{L}(\mathfrak{S}) = (o)$, *e que* $\mathrm{U}(\mathfrak{S})$ *é semi-regular, existe um sub-anel* $\mathfrak{T}$, *de* $\mathfrak{S}$, *para o qual*

$\mathrm{U}(\mathfrak{S}) \supseteqq \mathfrak{T} = \mathrm{U}(\mathfrak{T}) \supset \mathrm{L}(\mathfrak{T})$ *e tal que* $\mathfrak{T}$ *contém uma infinidade de nilideais bilaterais entre* $\mathrm{U}(\mathfrak{T})$ *e* $\mathrm{L}(\mathfrak{T})$ *que não são ideais radicais.* Visto que $U(\mathfrak{S})$ é semi-regular, tomemos os seus elementos $a_1, \ldots, a_n$ tais que o sub-anel $\mathfrak{T}$ que eles geram seja semi-regular. Tem-se $\mathfrak{T} = U(\mathfrak{T}) \supset L(\mathfrak{T})$. No homomorfismo $\mathfrak{T} \sim \mathfrak{T}/L(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}'$, este último é nilanel semi-regular e gerado pelos elementos $a'_1, \ldots, a'_n$, correspondentes dos a_i [cfr. teorema 12, § 3, do Cap. anterior]. O teorema 19, combinado com o facto de cada $\mathfrak{T}'^{\sigma}$ ter um número finito de geradores, permite estabelecer a cadeia $\mathfrak{T}' \supset \mathfrak{T}'^2 \supset \mathfrak{T}'^4 \supset \mathfrak{T}'^8 \supset \ldots$, e, consequentemente, a cadeia $\mathfrak{T}' \supset \mathfrak{T}'^2 \supset \mathfrak{T}'^3 \ldots$ Os ideais $\mathfrak{T}'^2, \mathfrak{T}'^3, \ldots$, de $\mathfrak{T}'$, não são ideais radicais. Se representarmos por $\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \ldots$ os ideais bilaterais de $\mathfrak{T}$ tais que

$$\mathfrak{T}_i \supset L(\mathfrak{T}), \qquad \mathfrak{T}_i/L(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}'^i,$$

sabemos, pelo lema 2, que os $\mathfrak{T}_i$ não são ideais radicais de $\mathfrak{T}$.

Passemos ao teorema. O anel $\mathfrak{S}/L(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}'$ realiza as condições do lema: $L(\mathfrak{S}') = (o)$, e $U(\mathfrak{S}') = U(\mathfrak{S})/L(\mathfrak{S})$ é semi-regular. Existe um sub-anel $\mathfrak{T}$, de $\mathfrak{S}'$, tal que $U(\mathfrak{S}') \supseteqq \mathfrak{T} = U(\mathfrak{T}) \supset L(\mathfrak{T})$ e tal que $\mathfrak{T}$ tem uma infinidade $\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \ldots$ de nilideais bilaterais que não são ideais radicais. Se for $\mathfrak{S}_1$ o sub-anel de $\mathfrak{S}$ para o qual $\mathfrak{S}_1/L(\mathfrak{S}) = \mathfrak{T}$, sabemos que os ideais bilaterais de $\mathfrak{S}_1$, que contêm $L(\mathfrak{S})$ e que têm $\mathfrak{T}_2, \ldots$ como correspondentes no homomorfismo $\mathfrak{S}_1 \sim \mathfrak{S}_1/L(\mathfrak{S})$, não são ideais radicais.

5) **Outras propriedades do radical**—*J*—É possível ir além da afirmação contida no corolário 13 do § anterior. De facto, tem lugar o

Teorema 23:—*A condição descendente para ideais direitos quase-regulares arrasta a nilpotência do radical*—J. Suponhamos que o teorema não é válido. Seja $\mathfrak{r}$ o ideal direito mínimo não nilpotente contido no radical—*J*. Tem-se $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^2 = \ldots$. Consideremos agora o conjunto dos ideais direitos $\mathfrak{s}$ nas condições seguintes: $\mathfrak{s} \subseteqq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}\mathfrak{r} \supset (o)$. Esse conjunto não é vazio, visto que $\mathfrak{r}$ faz parte do mesmo. Se $\mathfrak{s}_1$ for um ideal direito mínimo entre os $\mathfrak{s}\mathfrak{s}$, tem-se $\mathfrak{s}_1 \subseteq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{r} \supset (o)$. Seja $s_1 \in \mathfrak{s}_1$ um elemento tal que $s_1 \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}$, $s_1 \mathfrak{r} . \mathfrak{r} = s_1 \mathfrak{r} \supset (o)$. Como $s_1 \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{s}_1$, tem-se $s_1 \mathfrak{r} = \mathfrak{s}_1$. Assim, é $s_1 r = s_1$, para um certo $r \in \mathfrak{r}$. Como r não é nilpotente, o ideal direito $(r)_d$ não é nilpotente, e tem-se $(r)_d = \mathfrak{r}$. Devendo ser agora $\mathfrak{r}\mathfrak{R}_{**} \subset \mathfrak{r}$, haverá uma potência σ tal que $(\mathfrak{r}\mathfrak{R}_{**})^{\sigma} = (o)$. Então, será também $\mathfrak{r}^{2\sigma} = (o)$, contra a hipótese. O absurdo provém de se supor $\mathfrak{R}_{**}$ não nilpotente.

Em particular, um anel $\mathfrak{S}$ que seja soma dum número finito de ideais direitos simples tem radical—$J = (o)$.

TEOREMA 24:—*Se existe radical—K, é condição necessária e suficiente, para que o radical—J coincida com aquele, que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ *não tenha radical—J.* De facto, na correspondência $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ a um ideal quase-regular direito corresponde um ideal quase-regular direito. Há teoremas análogos para os outros radicais.

Imaginemos, por ex., que, em $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$, todo o ideal direito possui um ideal direito mínimo. Então, como o radical—J não pode ter idempotente, segue-se a igualdade do teorema.

Para prosseguirmos, com JACOBSON, no estudo do radical—J, temos de dar agora um certo número de definições. Considerado um anel $\mathfrak{S}$, se $a \in \mathfrak{S}$ e se $\mathfrak{r}$ é um ideal direito do anel, define-se o *cociente* $(\mathfrak{r}:a)$ como o conjunto dos elementos $t \in \mathfrak{S}$ tais que $at \in \mathfrak{r}$. Esse conjunto é um ideal direito. O grupo $\mathfrak{S}/\mathfrak{r}$, relativo ao domínio operatório direito formado pelo anel, contém o elemento $\bar{a} = a + \mathfrak{r}$. Vê-se que $(\mathfrak{r}:a)$ aniquila $\bar{a}$. Inversamente, se $\bar{a}s = as + \mathfrak{r} = o$, é $as \in \mathfrak{r}$, $s \in (\mathfrak{r}:a)$. Anàlogamente, define-se o *cociente* $(\mathfrak{r}:\mathfrak{S})$ como o conjunto dos elementos $t \in \mathfrak{S}$ tais que $\mathfrak{S}t \subseteq \mathfrak{r}$. Esse conjunto é um ideal bilateral. Por definição, pois, todo o ideal bilateral $\mathfrak{a}$, para o qual $\mathfrak{S}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$, está contido naquele cociente. Este é, assim, o maior ideal bilateral em tais condições: $\mathfrak{S}.(\mathfrak{r}:\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{r}$. Se um ideal bilateral está contido em $\mathfrak{r}$, tem-se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$, e, portanto, $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{r}:\mathfrak{S})$. O ideal bilateral $(\mathfrak{r}:\mathfrak{S})$ está sempre contido em $(\mathfrak{r}:a)$. Quando existe $1 \in \mathfrak{S}$ (1), aquele ideal bilateral é o maior contido em $\mathfrak{r}$.

(1) Embora tenhamos utilizado sempre a letra u para designar elemento um dum anel [o que, de resto, aconteceu também em (I)], de futuro empregaremos o algarismo 1 com esse significado.

Voltemos ao grupo $\mathfrak{S}/\mathfrak{r}$. Mediante a correspondência

$$a + \mathfrak{r} \to as + \mathfrak{r}, \qquad (s \in \mathfrak{S}),$$

define-se um endomorfismo—$\mathfrak{S}$ do grupo. O anel $\overline{\mathfrak{S}}$, desses endomorfismos, é uma imagem homomorfa de $\mathfrak{S}$, valendo o isomorfismo $\overline{\mathfrak{S}} \simeq \mathfrak{S}/(\mathfrak{r}:\mathfrak{S})$. Na hipótese importante de ser $(\mathfrak{r}:\mathfrak{S}) = (o)$, vê-se que se concretiza $\mathfrak{S}$ como um anel de endomorfismos de $\mathfrak{S}/\mathfrak{r}$.

Posto isto, imaginemos o caso em que $\mathfrak{J}$ é um ideal direito máximo de $\mathfrak{S}$ e consideremos o módulo $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}/\mathfrak{J}$. Então, não há em $\mathfrak{M}$ sub-módulo—$\mathfrak{S}$ (ou $\overline{\mathfrak{S}}$), no sentido próprio, que seja $\neq (o)$, pelo que $\mathfrak{M}$ se diz *irredutível*—$\overline{\mathfrak{S}}$. Também se diz que $\overline{\mathfrak{S}}$ é um *anel irredutível*, precisamente por se concretizar como anel de endomorfismos dum módulo sem sub-módulo—$\overline{\mathfrak{S}}$.

Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é um anel irredutível e $\mathfrak{M}$ o módulo sobre que opera, é claro que $x\overline{\mathfrak{A}}$, $(x \in \mathfrak{M})$, por ser admissível—$\overline{\mathfrak{A}}$, é igual a (o) ou a $\mathfrak{M}$. Vamos ver que, supondo $x \neq o$, se tem necessàriamente $x\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}$. Consideremos, com efeito, o conjunto $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{M}$ de elementos $z \in \mathfrak{M}$ tais que $z\overline{\mathfrak{A}} = (o)$. Não pode ter-se $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$, desde que se suponha $\overline{\mathfrak{A}} \neq (o)$. Ora o conjunto $\mathfrak{C}$ constitui um sub-módulo—$\overline{\mathfrak{A}}$, de sorte que é $\mathfrak{C} = (o)$. Assim, se $x \neq o$, é $x\overline{\mathfrak{A}} \neq (o)$, e, portanto, $x\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}$. Podemos enunciar o seguinte

TEOREMA 25:—*É condição necessária e suficiente, para que* $\overline{\mathfrak{A}}$ *seja irredutível sobre* $\mathfrak{M}$, *que, para cada* $x \in \mathfrak{M}$, *não nulo, seja* $x\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}$. Vimos que a condição é necessária. É imediato que é suficiente.

TEOREMA 26:—*O radical—J dum anel* $\overline{\mathfrak{A}}$ *irredutível é nulo.* Seja $\bar{a} \in \mathfrak{R}_{**}(\overline{\mathfrak{A}})$. Se $\bar{a} \neq o$, existe $x \in \mathfrak{M}$ tal que $x\bar{a} \neq o$. Então $x\bar{a}\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{M}$, de sorte que existe $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $x\bar{a}\bar{b} = x$. Como

$\bar{a}\bar{b}$ pertence ao radical—J, segue-se que $-\bar{a}\bar{b}$ tem quase-inverso v'. Assim, $-\bar{a}\bar{b}+v'-\bar{a}.\bar{b}v'=o$,

$$x=x+x(-\bar{a}\bar{b}+v'-\bar{a}\bar{.}\, v')=(x-x\bar{a}\bar{b})+$$
$$+(x-x\bar{a}\bar{b})v'=o,$$

o que é absurdo. Só poderá ser $\bar{a}=o$.

Corolário 14:—*Supondo* $\mathfrak{J}$ *um ideal direito máximo dum anel* $\mathfrak{S}$, *o radical—*J, *de* $\mathfrak{S}$, *está contido em* $(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$. Na verdade, $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}/\mathfrak{J}$ é irredutível—$\mathfrak{S}$. O anel $\mathfrak{S}$ induz um anel irredutível $\overline{\mathfrak{S}}$ de endomorfismos, em $\mathfrak{M}$, tendo-se $\mathfrak{S}\sim\overline{\mathfrak{S}}\simeq\simeq\mathfrak{S}/(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$. Se for $(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})=\mathfrak{S}$, o teorema é válido. Não sendo assim, observando que, no homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}/(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$, cada ideal quase-regular direito $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{S}$, tem um correspondente $\mathfrak{r}'$ que é quase-regular direito, conclui-se $\mathfrak{r}'=(o)$, pois que $\overline{\mathfrak{S}}$ não tem radical—J. Será $\mathfrak{r}\subseteqq(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$, o que tem lugar, em particular, para o radical $\mathfrak{R}_{**}$.

Corolário 15:—*O radical—*J, *de* $\mathfrak{S}$, *verifica a relação* $\mathfrak{S}\mathfrak{R}_{**}\subseteqq\Pi\mathfrak{J}$, *onde a intersecção é estendida a todos os ideais direitos máximos de* $\mathfrak{S}$. Com efeito, sendo, pelo corolário anterior, $\mathfrak{S}\mathfrak{R}_{**}\subseteqq\mathfrak{J}$, tem-se $\mathfrak{S}\mathfrak{R}_{**}\subseteqq\Pi\mathfrak{J}$.

Consideremos um anel $\mathfrak{S}$, diferente do seu radical—J. Vamos demonstrar a importante proposição seguinte:

Teorema 27:—*Num anel* $\mathfrak{S}$, *que não é anel radical, o ideal* $(x+ax)$, *no qual se supõe que* a *não é quase-regular direito, pode sempre «mergulhar-se» num ideal direito máximo* $\mathfrak{J}$.

Antes de provarmos o teorema, carecemos duns esclarecimentos preliminares. Tomemos o conjunto E dos ideais direitos de $\mathfrak{S}$ com as duas propriedades seguintes: 1) contêm o ideal direito $(x+ax)$; 2) não contêm o elemento a. O ideal $(x+ax)$ é um exemplo. Relativamente à relação $\subseteqq$, de inclusão, o conjunto E constitui uma *ordem parcial* (1). Se extrairmos de E um

(1) As noções invocadas nestes esclarecimentos encontram-se, por ex., em Bourbaki, *Théorie des ensembles*, (fascicule de résultats), 1939.

sub-conjunto ordenado $X\subset E$, verifica-se imediatamente que o conjunto unido dos ideais direitos que compõem X formam um ideal direito pertencente a E. Esse ideal é um *majorante* de X; é, mesmo, um *majorante mínimo*. O conjunto E constitui, por isso, uma ordem parcial com a propriedade seguinte: *todo o sub-conjunto ordenado de* E *tem um majorante mínimo*. Diz-se que E é um *conjunto indutivo*.

Para os conjuntos indutivos, é válido o

Princípio de Zorn:—*Todo o conjunto indutivo tem um elemento máximo*. No nosso caso, significa esta afirmação que há, em E, um ideal direito $\mathfrak{J}$, com as três propriedades seguintes: 1′) contém o ideal direito $(x+ax)$; 2′) não contém o elemento a; 3′) não está contido noutro ideal de E.

Assim, se um ideal direito $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{S}$, contiver $\mathfrak{J}$, terá de satisfazer a estas duas condições: 1″) conter $(a+ax)$; 2″) conter a. Ter-se-á $\mathfrak{r}=\mathfrak{S}$, de sorte que $\mathfrak{J}$ é, de facto, máximo em $\mathfrak{S}$, e o teorema fica provado.

Outra proposição importante é esta:

Teorema 28:—*Se* $\mathfrak{S}$ *não é um anel radical, o seu radical—*J *é a intersecção* $\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$ *de todos os cocientes* $(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$, *onde* $\mathfrak{J}$ *percorre a totalidade dos ideais direitos máximos de* $\mathfrak{S}$. O teorema estabelece-se tendo ainda em conta este

Lema 6:—*A intersecção* $\Pi\mathfrak{J}$ *dos ideais direitos máximos de* $\mathfrak{S}$ *está contida no radical—*J. Na verdade, tomemos $a\in\Pi\mathfrak{J}$. Então a é quase-regular direito, pois que, de contrário, $(x+ax)$ poderia «mergulhar-se» num ideal direito máximo $\mathfrak{J}$. Este ideal conteria a e o ideal $(x+ax)$, pelo que seria igual a $\mathfrak{S}$, contra a hipótese de ser ideal direito máximo. Portanto: $\Pi\mathfrak{J}\subseteqq\mathfrak{R}_{**}$.

Passemos ao teorema. Já sabemos (corolário 14) que $\mathfrak{R}_{**}\subseteqq\subseteqq(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$; portanto, $\mathfrak{R}_{**}\subseteqq\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$. Tomando agora $a\in\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})$, vê-se que $\mathfrak{S}a\subseteqq\mathfrak{J}$, $\mathfrak{S}a\subseteqq\Pi\mathfrak{J}\subseteqq\mathfrak{R}_{**}$, Logo, é $a\in\mathfrak{R}_{**}$ e $\Pi(\mathfrak{J}:\mathfrak{S})\subseteqq\subseteqq\mathfrak{R}_{**}$, como se deseja.

Teorema 29:—*Se existe uma unidade esquerda de* $\mathfrak{S}$, *tem-se* $\mathfrak{R}_{**}=\Pi\mathfrak{J}$, *onde* $\mathfrak{J}$ *percorre os ideais direitos máximos.* É o que resulta combinando o corolário 15 com o lema 6.

Corolário 16 (Baer):—*Se um anel* $\mathfrak{S}$ *contém uma unidade esquerda e se todo o ideal direito* $\neq(0)$ *do anel cociente* $\mathfrak{S}/\mathrm{U}(\mathfrak{S})$ *contém um ideal direito mínimo, então o radical superior de* $\mathfrak{S}$ *é a intersecção dos ideais direitos máximos de* $\mathfrak{S}$. Visto que o radical—J não pode ter idempotente, o radical—J de $\mathfrak{S}/U(\mathfrak{S})$ é nulo. Como no teorema 24, tem-se $\mathfrak{R}_{**}=U(\mathfrak{S})$. A proposição resulta agora do teorema anterior.

Teorema 30:—*O ideal direito* $\Pi\mathfrak{J}$ *é um ideal bilateral.* Basta provar que é ideal esquerdo. Ora tem-se, pelo lema 6 e corolário 15, $\mathfrak{S}\Pi\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{S}\mathfrak{R}_{**}\subseteq\Pi\mathfrak{J}$, como se deseja.

6) **O conjunto H de Perlis**—Perlis, [1], considerou, num anel $\mathfrak{S}$ com elemento um, o conjunto H dos elementos caracterizados pela propriedade seguinte: será $h\in H$ sempre que $g+h$ seja regular [1], qualquer que seja o elemento regular g, e apenas nesse caso. Ao lado de H podem considerar-se ainda dois outros conjuntos: o conjunto H_d, composto de elementos h tais que $g+h$ é regular direito, qualquer que seja o elemento regular direito g, e apenas desses elementos, e o conjunto H_e, onde se invocam, de modo análogo, elementos regulares esquerdos.

Para cada um dos três conjuntos é válido um teorema que se decalca no que vai enunciar-se, relativo a H_d [13, § 8]:

Teorema 31:—*É necessário e basta, para que* $\mathrm{h}\in\mathrm{H_d}$, *que a soma* $\mathrm{v}+\mathrm{h}$ *seja quase-regular direita, sempre que* v *é quase-regular direito.* Na verdade, se $h\in H_d$, então $g+h$ é regular direito. Dado $v+h$, sabemos que $1+v$ é regular direito e que, portanto, $(1+v)+h=1+(v+h)$ é regular direito. Isto significa que $v+h$ é quase-regular direito. Inversamente, se $v+h$ é quase-regular direito, com v quase-regular direito, tomemos o

[1] regular significa: com inverso.

elemento regular direito g. Tem-se, com um certo v, $g+h=$ $=(1+v)+h=1+(v+h)$, de sorte que $g+h$ é regular direito e $h\in H_d$.

Depois deste resultado, vemos que a definição de H (ou de H_d, ou de H_e) pode dar-se independentemente da existência de elemento um. No geral, os três conjuntos são distintos. Imaginemos, porém, que $H_d=H_e$. Vamos ver que, então, H contém aqueles. De facto, dado $h\in H_d$, h é quase-regular direito e esquerdo, portanto quase-regular. Dado v quase-regular, a soma $v+h$ é quase-regular direita e esquerda, portanto quase-regular. Assim, $h\in H$, ou seja $H_d\subseteq H$. Daqui, o

Teorema 32:—*Num anel qualquer, a igualdade* $\mathrm{H_d}=\mathrm{H_e}$ *implica* $\mathrm{H_d}\subseteq\mathrm{H}$.

Sabemos que, suposto v quase-regular direito e a pertencente a um ideal direito quase-regular, $v+a$ é quase-regular direito; como o mesmo sucede com «quase-regulares esquerdos» e os elementos do radical—J são quase-regulares, concluímos o

Teorema 33:—*Num anel qualquer, o radical—J está contido nos diferentes* HH, [13, § 8].

Imaginemos que H_d, por ex., é um ideal direito (ou esquerdo). Como os elementos de H_d são quase-regulares direitos, podemos enunciar o

Corolário 17:—*Se, num anel qualquer,* $\mathrm{H_d}$ *for um ideal direito (ou esquerdo), tem-se* $\mathfrak{R}_{**}=\mathrm{H_d}$. *O mesmo se diz quanto a* $\mathrm{H_e}$ *ou* H, [13, § 8].

Na hipótese de haver elemento $1\in\mathfrak{S}$, se tivermos em conta que $-g$ é regular direito (ou esquerdo), sempre que g o seja, fàcilmente se conclui que os HH são módulos. Na verdade, suponhamos $h, h'\in H_d$. Trata-se de provar que $g+(h-h')$ é regular direito, quando g é regular direito. Como $g+h$ é regular direito, $-(g+h)$ é regular direito; então, $-(g+h)+h'$

é regular direito, o mesmo se dizendo de $(g+h)-h'=g+$ $+(h-h')$, q. e. d. Portanto:

TEOREMA 34: — *Num anel $\mathfrak{S}$ com elemento um, os conjuntos* H_d, H_e, H *são módulos.*

Dado um anel $\mathfrak{S}_0$, sem elemento um, suponhamos que o mesmo é estranho ao anel dos números inteiros. Pode dar-se o seguinte processo de «mergulhar» $\mathfrak{S}_0$ num anel $\mathfrak{S}$, com elemento um. Seja $a_0 \in \mathfrak{S}_0$. $\mathfrak{S}$ será constituído pelos elementos $[\alpha, a_0] =$ $= \alpha + a_0$, onde α é inteiro, e onde

$$[\alpha, a_0]+[\beta, b_0]=[\alpha+\beta, a_0+b_0],$$
$$[\alpha, a_0].[\beta, b_0]=[\alpha\beta, \alpha b_0+\beta a_0+a_0 b_0].$$

Vê-se imediatamente que $[1, 0]$ é o elemento um de $\mathfrak{S}$ e que $\mathfrak{S}_0$ é isomorfo do conjunto dos elementos da forma $[o, a_0]$. Pode, então, usar-se o simbolismo

$$\mathfrak{S}=(1)+\mathfrak{S}_0,$$

onde (1) é o referido anel dos inteiros. A soma acabada de escrever é directa, considerada, simplesmente, como soma de grupos abelianos.

Posto isto, seja $a=\alpha+a_0 \in \mathfrak{S}$ um elemento quase-regular direito. Se for $a+b+ab=o$, tem-se $(1+\alpha+a_0)$ $(1+\beta+$ $+b_0)=1$, com $b=\beta+b_0$. Concluem-se daqui as relações

$$(1+\alpha)(1+\beta)=1, \quad (1+\alpha)b_0+(1+\beta)a_0+a_0 b_0=o,$$

e, portanto, estas outras:

$$\alpha=\beta=o, \quad a_0+b_0+a_0 b_0=o, \quad a=a_0, \quad b=b_0,$$

ou

$$\alpha=\beta=-2, \quad -a_0-b_0+a_0 b_0=o, \quad a=-2+a_0,$$
$$b=-2+b_0.$$

Vê-se que, se o conjunto dos elementos quase-regulares direitos de $\mathfrak{S}_0$ é

$$C_0=\}a_0, b_0, c_0, \ldots\{,$$

o conjunto dos elementos quase-regulares direitos de $\mathfrak{S}$ é

$$C=\}a_0, b_0, c_0, \ldots; -2-a_0, -2-b_0, \ldots\{.$$

No caso particular dos elementos nilpotentes, podemos afirmar que os respectivos conjuntos de $\mathfrak{S}_0$ e de $\mathfrak{S}$ são iguais. Basta notar que, se $a^r=(\alpha+a_0)^r=\alpha^r+b_0=o$, é $\alpha^r=o$, $\alpha=o$, e, portanto, $a=a_0$.

Quanto a ideais, pode afirmar-se: o ideal direito gerado por $a_0 \in \mathfrak{S}_0$, em $\mathfrak{S}$, é o mesmo que o ideal direito gerado por a_0 em $\mathfrak{S}_0$; todo o ideal direito de $\mathfrak{S}_0$ é ideal direito de $\mathfrak{S}$; e os nilideais dos dois anéis coincidem.

Vamos ver que, mais geralmente, há coincidência dos ideais quase-regulares direitos. Seja $\mathfrak{r}$ um tal ideal de $\mathfrak{S}$. Se um elemento $-2-r_0 \in \mathfrak{r}$, tomemos um elemento $\alpha+a_0 \in \mathfrak{S}$, com $\alpha \neq o, 1$. Será $(-2-r_0)(\alpha+a_0)=-2\alpha+b_0 \in \mathfrak{r}$. Devendo ter-se $-2\alpha=o$, ou $2\alpha=-2$, chega-se a um absurdo. Assim, todos os elementos de $\mathfrak{r}$ pertencem a $\mathfrak{S}_0$. É válido o

TEOREMA 35: — *O anel $\mathfrak{S}$, em que se «mergulhou» $\mathfrak{S}_0$, tem os mesmos radicais que $\mathfrak{S}_0$: o radical $\mathfrak{R}$, o radical*—L, *o radical*—K *e o radical*—J.

Pode observar-se, incidentalmente, que, se um elemento a_0 é quase-regular direito em $\mathfrak{S}$, um seu quase-inverso direito pertence a $\mathfrak{S}_0$.

Um resultado devido a K. SHODA [Cfr. (I), pág. 461] afirma que um anel simples (1) é gerado pelos seus elementos regulares. PERLIS deduziu daí que o conjunto H relativo a uma álgebra simples é nulo. De facto, pode ir-se um pouco mais longe e afirmar: 1) num anel simples, um elemento regular direito (ou

(1) O anel simples é aqui suposto completamente redutível e com elemento um [Cfr. (I), pág. 54].

esquerdo) é regular; 2) os diferentes HH, relativos a um anel simples, reduzem-se todos ao elemento zero. A demonstração de 1) faz-se como para as álgebras com elemento um. Se $\mathfrak{S}$ é o anel simples em causa, é um módulo finito com respeito a um anel de divisão $\mathfrak{K}$ (corpo não comutativo). Dado $a \in \mathfrak{S}$, os elementos $1, a, \ldots, a^t$, para um t mínimo, não são independentes com respeito a $\mathfrak{K}$. Ponhamos

$$a^t + \alpha_{t-1} a^{t-1} + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0 = o, \qquad (\alpha_i \in \mathfrak{K}).$$

Então é

$$(a^{t-1} + \ldots + \alpha_1)\, a = -\alpha_0, \quad (-\alpha_0)^{-1}(a^{t-1} + \ldots + \alpha_1)\, a = 1,$$

se $\alpha_0 \neq o$. Admitindo que a é regular direito, não pode ser $\alpha_0 = o$, pois, de contrário, ter-se-ia

$$(a^{t-1} + \ldots + \alpha_1) a = o, \quad a^{t-1} + \ldots + \alpha_1 = o,$$

contra a hipótese de t ser mínimo. Nessas condições, a tem inverso esquerdo e é regular, como se afirmou. Fixemos, por isso, o

Teorema 36:—*Num anel simples, todo o elemento regular direito (ou esquerdo) é regular.*

Seguindo o raciocínio de Perlis, vamos provar agora:

Teorema 37:—*Num anel simples, tem-se* $\mathrm{H} = (o)$. Comecemos por ver que H é um ideal bilateral. Suponhamos $h \in H$. Se g_1 é um elemento regular, verifiquemos que $g_1 h \in H$. Se g é regular, tem-se

$$g + g_1 h = g_1\, (g_1^{-1} g + h),$$

o que mostra ser $g + g_1 h$ um elemento regular, como produto de dois elementos regulares. Do mesmo modo se prova ser $h g_1 \in H$. O resultado de Shoda diz-nos agora que, dado $a \in \mathfrak{S}$, é $a = \Sigma g_i$, onde os g_i são elementos regulares em número finito.

Da igualdade $a h = \Sigma g_i h$, conclui-se $a h \in H$, podendo afirmar-se igualmente que $h a \in H$. H é, pois, um ideal bilateral.

Não pode ter-se, porém, $H = \mathfrak{S}$, pelo facto de $0 = 1 - 1$ não ser regular e não se ter $-1 \in H$. Deste modo, como se afirmou, é $H = (o)$.

Corolário 18:—*Num anel simples, é* $\mathrm{H_d} = \mathrm{H_e} = (o)$. Em face do teorema 36, tem-se, com efeito, $H = H_d = H_e\, (o)$.

Perlis passou das álgebras simples às álgebras semi-simples. O seu raciocínio é aplicável aos anéis semi-simples. Para estes últimos também é regular todo o elemento regular direito, podendo fixar-se o

Teorema 38:—*Num anel semi-simples, todo o elemento regular direito (ou esquerdo) é regular. Os diferentes* HH, *todos iguais, reduzem-se a zero.* A demonstração faz-se observando que H_d, por ex., é a soma dos $H_d\, H_d$ definidos para cada parcela simples em que se decompõe o anel.

Imaginemos caracterizados *os anéis semi-primários pela condição de mínimo para os ideais direitos contendo o radical—J.* Tanto os anéis—A generalizados, como os anéis—A e os anéis—A especiais entram nesta definição. Tem lugar o teorema a seguir, dado por Almeida Costa em [13, § 8]:

Teorema 39:—*Num anel semi-primário é* $\mathrm{H} = \mathrm{H_d} = \mathrm{H_e} = \mathfrak{R}_{**}$. No estudo da correspondência anular homomorfa $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$, o teorema 8 garante que os elementos quase-regulares direitos (ou esquerdos) estão sempre em correspondência. Já sabemos que o radical—J está contido em H_d. Tomemos agora $h \in H_d$. É $v + h$ quase-regular direito, se v o for. O correspondente $\overline{v} + \overline{h}$, por via do homomorfismo citado, é quase-regular direito, o que implica $\overline{h} = o$. Portanto $h \in \mathfrak{R}_{**}$ e $H_d = \mathfrak{R}_{**}$. O raciocínio é o mesmo para os outros HH.

MEUS SENHORES:

Damos aqui por concluídas as considerações de ordem técnica que desejávamos fazer. Como dissemos no começo deste nosso escrito, deixaremos para outra oportunidade a exposição, que também deveria ser feita, sobre Anéis primitivos e Anéis semi-simples, no sentido de JACOBSON. E, mesmo, outras investigações mais recentes ainda não deixarão de ser consideradas nas publicações que diferimos para um pouco mais tarde. Em todo o caso, se anotarmos devidamente, além do que aqui se consignou, o conteúdo dos 4 primeiros Capítulos do nosso livro *Sistemas hiper-complexos*, tantas vezes citado, teremos feito uma digressão bastante completa sobre o tema que nos propusemos desenvolver. Talvez devessemos, já neste momento, manifestar outras preferências. Não podemos alhear-nos, todavia, da nossa condição de professor, e, por esse lado, não perdemos de vista a necessidade imperiosa de dar aos estudiosos do nosso País, que queiram trabalhar nestes assuntos, elementos ordenados que ràpidamente os dirijam a alguns pontos das fronteiras de certas questões dos nossos dias. Sabemos que há neste procedimento uma concessão em desfavor das impressões pessoais que deixamos; acima de tudo, pomos, porém, o desejo de sermos úteis entre nós.

Seja-nos permitido que as nossas últimas palavras tenham um sentido muito especial: o de render o preito da nossa mais sincera admiração à extraordinária personalidade do nosso Presidente, como investigador, professor e publicista, e o de solicitar de todos que testemunhem a S. Ex.ª, por aclamação, os mais vivos agradecimentos pela competência, dignidade e gentileza com que dirigiu os trabalhos da Secção.