SÔBRE A NOÇÃO DE RECIPROCIDADE EM CÁLCULO VECTORIAL

POR

A. ALMEIDA COSTA

Nas *Notas de Cálculo Vectorial* que publicámos em 1931, indicámos como podia estender-se aos sistemas de cocleadores a noção de reciprocidade dada por AXEL EGNELL no seu livro *L'Ochématique*. A demonstração geral, então omitida, é fácil de fazer.

1) Sejam $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ n vectores fundamentais, de sorte que o produto $g = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_n$ é, assim, diferente de zero.

Os vectores recíprocos $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^n$ constituem também um sistema fundamental, pois que é

$$g_0 = \mathbf{A}^1 \mathbf{A}^2 \ldots \mathbf{A}^n = \frac{1}{g}.$$

A expressão dos $\mathbf{A}^i$ é a seguinte:

$$\mathbf{A}^i = (-1)^{n-i} \frac{1}{g} \overline{\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_n}. \tag{1}$$

2) Diz-se grandeza vectorial de ordem p a grandeza $\mathbf{w}_p$ da forma

$$\mathbf{w}_p = \sum_{(s_1 s_2 \ldots s_p)} a^{s_1 s_2 \ldots s_p} \mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2} \ldots \mathbf{A}_{s_p}, \tag{2}$$

onde o somatório se refere a combinações $(s_1 < s_2 < \ldots s_p)$ e onde devemos recordar que os cocleadores $\mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2} \ldots \mathbf{A}_{s_p}$ são linearmente independentes.

Para determinarmos as coordenadas contravariantes $a^{s_1 s_2 \dots s_p}$, multipliquemos ambos os membros da igualdade (2) pelo cocleador

$$\mathbf{I}_{s_1 s_2 \dots s_p} = \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_1-1} \mathbf{A}_{s_1+1} \dots \mathbf{A}_{s_p-1} \mathbf{A}_{s_p+1} \dots \mathbf{A}_n .$$

Vem

$$\mathbf{w}_p \mathbf{I}_{s_1 s_2 \dots s_p} = a^{s_1 s_2 \dots s_p} \mathbf{A}_{s_1} \dots \mathbf{A}_{s_p} . \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_1-1} \mathbf{A}_{s_1+1} \dots \mathbf{A}_{s_p-1} .$$

$$. \mathbf{A}_{s_p+1} \dots \mathbf{A}_n$$

$$= (-1)^{\rho} a^{s_1 s_2 \dots s_p} g ,$$

onde

$$\rho = \sum_{i=1}^{p} s_i - p + \frac{p(p-1)}{2} ;$$

pelo que temos

$$a^{s_1 s_2 \dots s_p} = (-1)^{\rho} \frac{1}{g} \mathbf{w}_p \mathbf{I}_{s_1 s_2 \dots s_p} .$$

3) Ponhamos

$$(-1)^{\rho} \frac{1}{g} \mathbf{I}_{s_1 s_2 \dots s_p} = \mathbf{a}^{\overline{s_1 s_2 \dots s_p}} ;$$

temos assim

$$\mathbf{a}^{s_1 s_2 \dots s_p} = (-1)^{\rho + p(n-p)} \frac{1}{g} \mathbf{I}^{\overline{s_1 s_2 \dots s_p}} ,$$

$$\mathbf{w}_p = \sum_{(s_1 s_2 \dots s_p)} \mathbf{w}_p \mathbf{a}^{\overline{s_1 s_2 \dots s_p}} \mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2} \dots \mathbf{A}_{s_p} .$$

Calculemos o produto vectorial $\mathbf{A}^{s_1} \mathbf{A}^{s_2} \dots \mathbf{A}^{s_p}$. Tendo em vista (1), vem

$$\mathbf{A}^{s_1} \mathbf{A}^{s_2} \dots \mathbf{A}^{s_p} = (-1)^{np + \Sigma s_i} \frac{1}{g^p} \overline{\mathbf{A}}_{s_1} \overline{\mathbf{A}}_{s_2} \dots \overline{\mathbf{A}}_{s_p} ,$$

onde $\overline{\mathbf{A}}_{s_i}$ significa o produto de vectores $\mathbf{A}_i$, nos quais apenas falta $\mathbf{A}_{s_i}$. Ora é

$$\overline{\mathbf{A}}_{s_1} \overline{\mathbf{A}}_{s_2} = \overline{\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_1-1} \mathbf{A}_{s_1+1} \dots \mathbf{A}_n \, (\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_2-1} \mathbf{A}_{s_2+1} \dots \mathbf{A}_n)}$$

$$= (-1)^{s_2-2} \mathbf{A}_{s_2} \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_2-1} \mathbf{A}_{s_2+1} \dots \mathbf{A}_n .$$

$$\dots\dots \overline{. \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_1-1} \mathbf{A}_{s_1+1} \dots \mathbf{A}_{s_2-1} \mathbf{A}_{s_2+1} \dots \mathbf{A}_n}$$

$$= (-1)^{1+2} g \, \overline{\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_1-1} \mathbf{A}_{s_1+1} \dots \mathbf{A}_{s_2-1} \mathbf{A}_{s_2+1} \dots \mathbf{A}_n} ;$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{s_1} \overline{\mathbf{A}}_{s_2} \overline{\mathbf{A}}_{s_3} = (-1)^1 g \, \overline{\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_1-1} \mathbf{A}_{s_1+1} \dots \mathbf{A}_{s_2-1} \mathbf{A}_{s_2+1} \dots \mathbf{A}_n} .$$

$$\dots\dots \overline{. \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{s_3-1} \mathbf{A}_{s_3+1} \dots \mathbf{A}_n}$$

$$= (-1)^{(1+2)+(1+3)} g^2 \, \overline{\mathbf{I}_{s_1 s_2 s_3}} ,$$

onde $\mathbf{I}_{s_1 s_2 s_3}$ significa o produto de vectores $\mathbf{A}_i$, no qual faltam $\mathbf{A}_{s_1}$, $\mathbf{A}_{s_2}$, $\mathbf{A}_{s_3}$. Continuando, chega a formar-se a expressão

$$\overline{\mathbf{A}}_{s_1} \overline{\mathbf{A}}_{s_2} \dots \overline{\mathbf{A}}_{s_p} = (-1)^{\frac{(p-1)(p+4)}{2}} g^{p-1} \, \overline{\mathbf{I}_{s_1 s_2 \dots s_p}} ,$$

o que leva a escrever

(3) $$\mathbf{A}^{s_1} \mathbf{A}^{s_2} \dots \mathbf{A}^{s_p} = (-1)^{\sigma} g^{-1} \, \overline{\mathbf{I}_{s_1 s_2 \dots s_p}} ,$$

onde σ é da mesma paridade de $\rho + p(n-p)$.

Desta maneira, a expressão de $\mathbf{w}_p$ pode escrever-se

$$\mathbf{w}_p = \sum_{(s_1 s_2 \dots s_p)} \mathbf{w}_p \, \overline{\mathbf{A}^{s_1} \mathbf{A}^{s_2} \dots \mathbf{A}^{s_p}} \, . \, \mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2} \dots \mathbf{A}_{s_p} .$$

Os dois sistemas de cocleadores $\mathbf{A}^{s_1} \dots \mathbf{A}^{s_p}$, $\mathbf{A}_{s_1} \dots \mathbf{A}_{s_p}$ dizem-se recíprocos. O seu papel de reciprocidade resulta imediatamente da reciprocidade dos dois sistemas de vectores $\mathbf{A}^t$, $\mathbf{A}_i$. E vê-se que é

$$\mathbf{A}_{s_1} \dots \mathbf{A}_{s_p} \overline{\mathbf{A}^{s_1} \dots \mathbf{A}^{s_p}} = 1, \quad \mathbf{A}_{s_1} \dots \mathbf{A}_{s_p} \overline{\mathbf{A}^{t_1} \dots \mathbf{A}^{t_p}} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{salvo quando} \\ t_1 = s_1 \\ \dots\dots\dots \\ t_p = s_p . \end{array} \right.$$

A primeira relação pode verificar-se atendendo à igualdade

$$\mathbf{A}_{s_1} \dots \mathbf{A}_{s_p} \overline{\mathbf{A}^{s_1} \dots \mathbf{A}^{s_p}} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{s_1} \overline{\mathbf{A}^{s_1}} \dots \mathbf{A}_{s_1} \overline{\mathbf{A}^{s_p}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}_{s_p} \overline{\mathbf{A}^{s_1}} \dots \mathbf{A}_{s_p} \overline{\mathbf{A}^{s_p}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \; 0 \dots 0 \\ 0 \; 1 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \; 0 \dots 1 \end{vmatrix} ,$$

e a segunda atendendo à relação (3).

Para outros detalhes e para as relações com o Cálculo Tensorial, pode vêr-se a segunda das nossas citadas *Notas de Cálculo Vectorial*. Neste momento observemos unicamente que as coordenadas covariantes de $\mathbf{w}_p$ são iguais a $\mathbf{w}_p \, \overline{\mathbf{A}_{s_1} \dots \mathbf{A}_{s_p}}$.