SUR LES IDÉAUX NUCLÉAIRES D'UN DEMI-ANNEAU(*)

PAR

A. ALMEIDA COSTA

1) **Introduction** — L'importance du concept de demi-anneau, introduit par H. S. VANDIVER [I], tient au fait qu'il embrasse à la fois, par exemple, les nombres naturels, les nombres entiers, les nombres positifs, les *demi-groupes*, l'ensemble des idéaux d'un demi-groupe, l'ensemble des endomorphismes d'un demi-groupe multiplicatif commutatif, les anneaux possédant une identité, l'ensemble des idéaux d'un anneau, les treillis distributifs, etc..

On sait ([II, pgs. 24-04] et [III, pgs. 285]) que les intersections de tous les idéaux à droite, ou à gauche ou bilatères non vides d'un demi-anneau $\mathfrak{S}=\{a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots\}$ constituent des idéaux (bilatères) de $\mathfrak{S}$. Nous représenterons par $\mathfrak{J}_d, \mathfrak{J}_e$ et $\mathfrak{J}$, respectivement, ces intersections appelées *idéaux nucléaires*. On sait de plus que $\mathfrak{J}_d \neq \phi$ implique $\mathfrak{J}_d=\mathfrak{J}$, mais qu'on peut fort bien avoir $\mathfrak{J}_d=\phi$, $\mathfrak{J}\neq\phi$; et il en est de même en ce qui concerne $\mathfrak{J}_e$.

Le but de cette Note c'est d'attirer l'attention sur l'importance des idéaux nucléaires dans la théorie des demi-anneaux. Dans le § 2, nous démontrerons qu'en supposant $\mathfrak{a}$ un idéal non vide du demi-anneau $\mathfrak{S}$, l'idéal nucléaire à droite du demi-anneau $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{J}_d(\mathfrak{a})=\mathfrak{J}$. De là découlent certaines conséquences se rapportant à la simplicité de $\mathfrak{J}_d$ et de $\mathfrak{J}$. Ce dernier est souvent un demi-

(*) Ce travail, en tant que conséquence d'un projet d'études, a été réalisé grâce à l'aide de la Fundação Calouste Gulbenkian.

-anneau à division et nous aurons l'occasion de démontrer une proposition curieuse concernant la «non-trivialité» d'un zéro d'un demi-anneau à division.

Dans le § 3, nous introduisons les concepts de *semi-régularité* et de *régularité* ([IV] et [II, pgs. 24-05]) d'un demi-anneau et ensuite nous cherchons à donner des concepts du même nom pour les idéaux de $\mathfrak{S}$, de telle sorte que la semi-régularité (ou la régularité) de l'idéal $\mathfrak{I}$ entraîne celle de $\mathfrak{S}$.

Le § 4 est consacré à une version un peu plus complète que celle qu'on trouve chez S. BOURNE [V] du théorème d'homomorphisme pour les demi-anneaux.

Le concept de $\mathfrak{I}$-*nilpuissance* sera l'objet du § 5, où l'on mettra en évidence, d'une façon abrégée, les analogies avec le concept de nilpuissance dans les anneaux. On peut faire d'ailleurs à ce sujet la remarque suivante: il y a certaines propositions qu'on peut démontrer indépendamment de la *comutativité* de la somme.

Dans le § 6, nous identifierons les demi-groupes et une certaine classe de demi-anneaux (appelés *G-demi-anneaux*) caractérisés par la règle de somme que voici: $x+y=y$, quels que soient x et y.

Ce sera dans le § 7 qu'on fera quelques raisonnements concernant la théorie du *radical de* JACOBSON donnée par BOURNE [VI].

Enfin, le § 8 est consacré au cas des *demi-anneaux réticulés* introduits par M.elle GALVÃO, [VII, pgs. 190]. Nous y ferons quelques remarques intéressantes concernant le demi-anneau réticulé $\overline{\mathfrak{S}}$, composé des idéaux d'un demi-anneau $\mathfrak{S}$ (voir aussi [VIII, pgs. 25-01], ainsi que [IX, pgs. 18]). Par exemple: 1) en supposant non vide l'idéal $\mathfrak{I}$, de $\mathfrak{S}$, cet idéal $\mathfrak{I}$, en tant qu'un élément de $\overline{\mathfrak{S}}$, est un zéro trivial de $\overline{\mathfrak{S}}$, si et seulement si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau premier; 2) le *radical inférieur* de $\overline{\mathfrak{S}}$ est exactement composé de tous ses nilélements, donc coïncide avec son *radical supérieur;* 3) sous l'une des hypothèses $\mathfrak{I} \neq \phi$ ou $\mathfrak{I}_d \neq \phi \neq \mathfrak{I}_e$, tout demi-anneau réticulé est un demi-anneau radical.

2) Premiers théorèmes sur les idéaux nucléaires — En prenant un idéal $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, nous noterons $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{I}_e(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{I}(\mathfrak{a})$ les idéaux nucléaires de $\mathfrak{a}$, celui-ci considéré en tant qu'un demi-anneau. Admettons qu'on ait $\mathfrak{a} \neq \phi$; alors, par exemple, $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{a})=\mathfrak{I}_d$. En effet: si $\mathfrak{r}_\alpha$ est un idéal à droite non vide de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{r}_\alpha \cap \mathfrak{a}$ est un idéal à droite non vide de $\mathfrak{a}$, puisque $\phi \neq \mathfrak{r}_\alpha \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}_\alpha \cap \mathfrak{a}$. On en tire $\bigcap(\mathfrak{r}_\alpha \cap \mathfrak{a})=\mathfrak{a} \cap (\bigcap \mathfrak{r}_\alpha)=\mathfrak{a} \cap \mathfrak{I}_d=\mathfrak{I}_d$, donc $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{I}_d$. D'autre part, si $\mathfrak{r}_0$ est un idéal à droite non vide de $\mathfrak{a}$, on aura $\mathfrak{r}_0 \mathfrak{a} \neq \phi$, $\mathfrak{r}_0 \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}_0$. Ainsi, tout idéal à droite non vide de $\mathfrak{a}$ contient un idéal à droite non vide de $\mathfrak{S}$, ce qui entraîne $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{I}_d$. Par conséquent, $\mathfrak{I}_d=\mathfrak{I}_d(\mathfrak{a})$. Nous avons ce

THÉORÈME 1: — *En supposant* $\mathfrak{a} \neq \phi$ *un idéal de* $\mathfrak{S}$, *on a* $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{a})=\mathfrak{I}_d$. *D'une façon analogue, les relations* $\mathfrak{I}_e(\mathfrak{a})=\mathfrak{I}_e$, $\mathfrak{I}(\mathfrak{a})=\mathfrak{I}$ *sont valables.*

Dans un demi-anneau, on a l'habitude de considérer en tant que des idéaux triviaux les idéaux suivants: le demi-anneau lui-même; l'idéal (0), s'il existe l'élément-zéro; et l'idéal vide. Un demi-anneau dont les seuls idéaux à droite sont les idéaux triviaux est appelé *simple à droite*, et on définit de façon analogue demi-anneau *simple à gauche*. Un demi-anneau est dit *simple*, s'il n'a que des idéaux triviaux.

COROLLAIRE 1: — *Le demi-anneau* $\mathfrak{I}_d$ *est simple à droite,* $\mathfrak{I}_e$ *est simple à gauche et* $\mathfrak{I}$ *est simple.* Faisons seulement quelques remarques. Si l'on a $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}_d$, alors $\mathfrak{I}$ est aussi simple à droite. Autrement, si $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{I}_d$, c'est-à-dire si $\mathfrak{I}_d=\phi$, $\mathfrak{I} \neq \phi$, on a $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{I})=\phi$ et il existe des idéaux à droite de $\mathfrak{I}$ non vides et différents de (0) et de $\mathfrak{I}$. L'idéal $\mathfrak{I}$ n'est pas simple à droit. Donc:

Corollaire 2:—$\mathfrak{I}$ *est simple à droite, si et seulement si* $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}_d$.

$\mathfrak{S}$ est dit un *demi-anneau à division*, si les éléments différents de zéro forment un groupe par rapport au produit.

Théorème 2:—*Si l'on a* $\mathfrak{I}_d=\mathfrak{I}_e\neq\phi,(0)$, *l'idéal* $\mathfrak{I}$ *est un demi-anneau à division.* En effet, quel que soit $x\in\mathfrak{I}$, les relations $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}x=x\mathfrak{I}$ sont valables; donc les équations $ay=b$, $xa=b$, ou $a,b\in\mathfrak{I}$, ont des solutions dans $\mathfrak{I}$.

L'élément-zéro de $\mathfrak{S}$ (s'il en existe) est dit *trivial*, lorsque la somme de deux éléments est zéro, si et seulement si tous deux sont égaux à zéro, et, en outre, si le produit de deux éléments est zéro, si et seulement s'il en est ainsi de l'un des facteurs. Alors:

Théorème 3:—*En supposant* $\mathfrak{S}\neq(0)$ *un demi-anneau à division possédant l'élément-zéro, pour que cet idéal soit non-trivial, il faut et il suffit que* $\mathfrak{S}$ *soit un groupe (en général non commutatif) par rapport à la somme.* La condition est *nécessaire*:—Si 0 est non trivial, puisque $ab=0$ implique $a=0$ ou $b=0$, il existe $b_0\neq0$ et $b'_0\neq0$ tels que $b_0+b'_0=0$. L'équation $b_0y=b$, $(b\in\mathfrak{S})$, est soluble. Soit y la solution. Nous voyons que $b_0y+b'_0y=0=b+b'_0y$. Tout élément b admet un inverse à droite por rapport à la somme et le théorème en résulte.

La condition est *suffisante*:—En prenant $0\neq b\in\mathfrak{S}$, si $b+b'=0$, on a $b'\neq0$ et l'élément-zéro est non trivial.

3) **Demi-anneaux semi-réguliers et demi-anneaux réguliers**—On dit $\mathfrak{S}$ *semi-régulier à droite*, s'il existe $x\in\mathfrak{S}$ tel que, $a\in\mathfrak{S}$ étant donné, on ait $ax=a$. On en conclut que, si $\mathfrak{r}$ est un idéal à droite non vide arbitraire, la relation $\mathfrak{r}\mathfrak{S}=\mathfrak{r}$ donne une caractérisation des demi-anneaux semi-réguliers à droite.

Un idéal $\mathfrak{a}$ non vide est appelé *semi-régulier à droite*, si $(\mathfrak{a},\mathfrak{r}\mathfrak{S})=\mathfrak{r}$, por tout idéal à droite $\mathfrak{r}\supseteq\mathfrak{a}$. Lorsque $\mathfrak{a}$ est semi-régulier à droite, il en est de même de tout idéal $\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}$.

Théorème 4:—*Pour que l'idéal* $\mathfrak{a}$ *soit semi-régulier à droite, il faut et il suffit qu'on ait* $(\mathfrak{a},(x)_d\mathfrak{S})=(\mathfrak{a},(x)_d)$, $\forall x\in\mathfrak{S}$. La condition est *nécessaire*:—Prenons $x\in\mathfrak{S}$ ainsi que $(\mathfrak{a},(x)_d)\supseteq\mathfrak{a}$. Nous avons $(\mathfrak{a},(\mathfrak{a},(x)_d)\mathfrak{S})=(\mathfrak{a},(x)_d)$, puisque $\mathfrak{a}$ est supposé semi-régulier à droite; d'autre part le premier membre peut s'écrire $(\mathfrak{a},(x)_d\mathfrak{S})$.

La condition est *suffisante:* Réciproquement, en prenant $\mathfrak{r}\supseteq\mathfrak{a}$, on a $(\mathfrak{a},\mathfrak{r}\mathfrak{S})\subseteq\mathfrak{r}$. Il faut qu'on démontre l'inclusion inverse. Or, si $x\in\mathfrak{r}$, nous avons aussi $x\in(\mathfrak{a},(x)_d)=(\mathfrak{a},(x)_d\mathfrak{S})\subseteq\subseteq(\mathfrak{a},\mathfrak{r}\mathfrak{S})$.

Théorème 5:—*En supposant* $\mathfrak{I}_d=\mathfrak{I}$, *pour que* $\mathfrak{S}$ *soit semi-régulier à droite, il faut et il suffit que* $\mathfrak{I}$ *soit semi-régulier à droite.* La condition est *nécessaire*:—Si $\mathfrak{S}$ est semi-régulier à droite, prenons $\mathfrak{r}\supseteq\mathfrak{I}$. Alors $(\mathfrak{I},\mathfrak{r}\mathfrak{S})=(\mathfrak{I},\mathfrak{r})=\mathfrak{r}$.

La condition est *suffisante*:—Soit $\mathfrak{r}$ un idéal à droite quelconque non vide. Puisque $\mathfrak{I}$ est un idéal semi-régulier à droite et qu'on a $\mathfrak{r}\mathfrak{S}\supseteq\mathfrak{I}^2=\mathfrak{I}$, on en conclut $\mathfrak{r}=(\mathfrak{I},\mathfrak{r}\mathfrak{S})=\mathfrak{r}\mathfrak{S}$.

Les deux théorèmes précédents sont analogues à deux autres qu'on trouve chez [IV]. À titre de comparaison, nous redonnons ces deux derniers théorèmes.

On dit $\mathfrak{S}$ *régulier*, s'il existe $x\in\mathfrak{S}$ tel que, $a\in\mathfrak{S}$ étant donné, on ait $axa=a$. On en conclut que, si $\mathfrak{r}$ est un idéal à droite e $\mathfrak{n}$ un idéal à gauche, la relation $\mathfrak{r}\mathfrak{n}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$ caractérise les demi-anneaux réguliers.

Un idéal $\mathfrak{a}$ non vide est appelé *régulier*, si $\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$, pour tout idéal à droite $\mathfrak{r}\supseteq\mathfrak{a}$ et tout idéal à gauche $\mathfrak{n}\supseteq\mathfrak{a}$. D'ailleurs, dans un demi-anneau quelconque, si l'on prend deux sous-demi-groupes $\mathfrak{M}_i,(i=1,2)$, de son demi-groupe additif, on écrit $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2=\{\Sigma(m_i^{(1)}+m_i^{(2)})\,|\,m_i^{(1)}\in\mathfrak{M}_1, m_i^{(2)}\in\mathfrak{M}_2\}$, où Σ est étendu à un nombre fini de termes. Lorsque $\mathfrak{a}$ est régulier, il en est de même de tout idéal $\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}$.

Voici maintenant les deux théorèmes en question:

Théorème 4':—*Pour que l'idéal* $\mathfrak{a}$ *soit régulier, il faut et il suffit qu'on ait* $\mathfrak{a}+(x)_d(x)_e=\mathfrak{a}+(x)_d\cap(x)_e$. La condition *est nécessaire:*—En fait, on a successivement: $\mathfrak{a}+(x)_d\cap(x)_e\subseteq \subseteq(\mathfrak{a},(x)_d)\cap(\mathfrak{a},(x))_e=\mathfrak{a}+(\mathfrak{a},(x)_d)\cdot(\mathfrak{a},(x)_e)=\mathfrak{a}+(x)_d(x)_e\subseteq\mathfrak{a}+(x)_d\cap(x)_e$.

La condition est *suffisante:*—Soit l'idéal $\mathfrak{a}$ vérifiant la condition de l'énoncé et prenons $\mathfrak{r}\supseteq\mathfrak{a},\mathfrak{n}\supseteq\mathfrak{a}$. D'une part, il est bien clair que $\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$. D'autre part, quant à l'inclusion réciproque, soit $x\in\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$. Alors $x\in(x)_d\cap(x)_e\subseteq\mathfrak{a}+(x)_d\cap \cap(x)_e=\mathfrak{a}+(x)_d(x)_e\subseteq\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}$.

Théorème 5':—*En supposant* $\mathfrak{J}_d=\mathfrak{J}_e=\mathfrak{J}$, *pour que* $\mathfrak{S}$ *soit régulier, il faut et il suffit que* $\mathfrak{J}$ *soit un idéal régulier.* La condition est *nécessaire:*—Si $\mathfrak{S}$ est supposé régulier, nous avons $\mathfrak{J}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}=\mathfrak{J}+\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$, quels que soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$.

La condition est *suffisante:*—Si $\mathfrak{J}$ est un idéal régulier, puisque $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_d\subseteq\mathfrak{r}$, $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_e\subseteq\mathfrak{n}$, quels que soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$, il s'ensuit $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^2\subseteq\mathfrak{r}\mathfrak{n}$, donc $\mathfrak{r}\mathfrak{n}=\mathfrak{J}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$.

Remarque:—Les théorèmes 5 et 5', même qu'on y suppose $\mathfrak{J}=\emptyset$, restent valables, pourvu que la semi-régularité de $\mathfrak{J}=\emptyset$ signifie $\mathfrak{r}\mathfrak{S}=\mathfrak{r}$ et que la régularité de $\mathfrak{J}\neq\emptyset$ signifie $\mathfrak{r}\mathfrak{n}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$.

4) **Morphismes**—Bien que les demi-anneaux constituent des systèmes algébriques auxquels s'appliquent évidemment les considérations générales sur morphismes [X, pgs. 94-111], nous nous placerons sous un point de vue strictement particulier.

Soit $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$ un épimorphisme du demi-anneau $\mathfrak{S}$ sur le demi-anneau $\mathfrak{S}'$ et supposons $\mathfrak{J}'$ l'idéal nucléaire de $\mathfrak{S}'$. L'image complète inverse de $\mathfrak{J}'$ est le *noyau* de l'épimorphisme. Il s'agit d'un idéal $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{S}$, saturé pour la relation de congruence θ définie par l'épimorphisme. D'une façon générale, non seulement l'image d'un idéal de $\mathfrak{S}$ est

un idéal de $\mathfrak{S}'$, mais aussi bien l'image complète inverse d'un idéal de $\mathfrak{S}'$ est un idéal de $\mathfrak{S}$.

En supposant $\mathfrak{J}'=\emptyset$, on a de même $\mathfrak{J}=\emptyset$, par conséquent l'hypothèse $\mathfrak{J}\neq\emptyset$ entraîne $\mathfrak{J}'\neq\emptyset$ et alors $\mathfrak{J}'$ est l'image de $\mathfrak{J}$; mais il peut bien se faire qu'on ait $\mathfrak{J}'\neq\emptyset$ et $\mathfrak{J}=\emptyset$. Dans tous les cas, le noyau est l'intersection des idéaux non vides de $\mathfrak{S}$ saturés pour la relation θ.

Un épimorphisme est dit, d'après Bourne [V], un *semi-isomorphisme*, si $\mathfrak{N}=\mathfrak{J}$. Nous donnerons l'énoncé suivant, qui est une conséquence simple de ce que nous avons dit:

Théorème 6:—*Un épimorphisme* $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$ *de deux demi-anneaux ne peut pas être un semi-isomorphisme que dans le cas où les idéaux* $\mathfrak{J}$ *et* $\mathfrak{J}'$ *sont à la fois vides ou non vides. La première hypothèse entraîne qu'il s'agit en effet d'un semi-isomorphisme; mais, dans la seconde, il s'agit d'un semi-isomorphisme, si et seulement si* $\mathfrak{J}$ *est un idéal saturé pour la relation de congruence* θ *définie par l'épimorphisme.*

Supposons maintenant $\mathfrak{S}$ à somme commutative. Conformément à Bourne [V], un idéal $\mathfrak{a}\neq\emptyset$ définit une congruence ρ, sur $\mathfrak{S}$, en posant $s_1\rho s_2$, s'il existe $a_1, a_2\in\mathfrak{a}$ tels que $s_1+a_1=s_2+a_2$. Alors le quotient $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}/\rho=\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$ est un demi-anneau qui contient l'élément-zéro, d'ailleurs représenté par la classe composée des éléments de $\mathfrak{a}$ et aussi d'autres éléments $v_1, v_2, \cdots\in\mathfrak{S}$: $0'=\{\mathfrak{a}, v_1, v_2,\cdots\}$. De cette façon, on a ici $\mathfrak{J}'=(0')$, $\mathfrak{N}=\{\mathfrak{a}, v_1, v_2,\cdots\}$; et, si l'on considère le demi-anneau $\mathfrak{S}''=\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$, on conclut l'égalité $\mathfrak{S}''=\mathfrak{S}'$. Inversement, soit $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'$ un épimorphisme. En laissant de côté le cas $\mathfrak{J}'=\emptyset$, prenons en effet $\mathfrak{J}'\neq\emptyset$ et considérons les épimorphismes $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}'\sim\mathfrak{S}'/\mathfrak{J}'=\overline{\mathfrak{S}}'$. En représentant par $\mathfrak{N}'$ le noyau du deuxième, l'image complète inverse de $\mathfrak{N}'$ est le noyau $\mathfrak{N}$ de l'épimorphisme $\mathfrak{S}\sim\overline{\mathfrak{S}}'$; et il est bien facile de montrer que $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}\sim\mathfrak{S}'/\mathfrak{N}'$ est un semi-isomorphisme. En effet, soit $\bar{s}\in\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$, avec $\bar{s}=\{s, s_1, s_2,\cdots\}$. Il existe $n, n_1\in\mathfrak{N}$ tels que $s+n=s_1+n_1$. L'épimorphisme

$\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$ entraîne la relation correspondante des images: $s'+n'=s'_1+n'_1$; puis, l'épimorphisme $\mathfrak{S}' \sim \overline{\mathfrak{S}}'$ donne $\overline{s}'=\overline{s}'_1$, car $\overline{n}'=\overline{n}'_1=0'$ (on représente par $\overline{x}'$ l'image de x' dans cet épimorphisme). D'autre part, si l'image de $\overline{x} \in \mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ est $\overline{0}' \in \mathfrak{S}'/\mathfrak{A}'$, en écrivant $\overline{x}=\{x, x_1, x_2, \cdots\}$, on aura $x \to x' \to \overline{0}'$, ce qui entraîne $x' \in \mathfrak{A}'$, $x \in \mathfrak{A}$, donc $\overline{x}=\overline{0}$. Nous pouvons dire:

Théorème 7:—*Si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau à somme commutative, un idéal $\mathfrak{a}$ définit un épimorphisme $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a}=\mathfrak{S}'$, avec $\mathfrak{J}'=(0')$. Réciproquement, si $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$ est un épimorphisme, ou bien $\mathfrak{J}'=\phi$ et il s'agit d'un semi-isomorphisme; ou bien $\mathfrak{J}' \neq \phi$ et alors c'est $\mathfrak{S}/\mathfrak{A} \sim \mathfrak{S}'/\mathfrak{A}'=\mathfrak{S}'/\mathfrak{J}'$ qui en est un. Les idéaux $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}$ sont ceux dont les images sont l'idéal nul dans les épimorphismes $\mathfrak{S}' \sim \mathfrak{S}'/\mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'/\mathfrak{J}'$, respectivement.*

5) **$\mathfrak{J}$-nilpuissance**—Un élément $a \in \mathfrak{S}$ est dit *nilpotent*, si $a^\rho \in \mathfrak{J}$, pour un certain ρ. Cette définition permet qu'on puisse faire la théorie du *radical classique* et bien aussi celle du *radical de Levitzki. Ces théories sont indépendantes de la commutativité de la somme.*

En ce qui concerne le radical de Levitzki, on peut refaire les raisonnements de cet auteur (voir [II], pgs. 24-08). Il suffit de remarquer qu'en prenant des éléments $r_1, \cdots, r_m$ appartenant à une somme $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ de deux idéaux à droite localement nilpotents, alors, s'il s'agit d'un demi-anneau à somme commutative, on écrira $r_k=r_k^{(1)}+r_k^{(2)}$, $(k=1, 2, \cdots, m;$ $r_k^{(1)} \in \mathfrak{r}_1$, $r_k^{(2)} \in \mathfrak{r}_k^{(2)})$, tandis que, si la somme n'est pas commutative, on a $r_k=\Sigma(r_{ki}^{(1)}+r_{ki}^{(2)})$, où le signe Σ est étendu à un nombre fini de termes. En conséquence, lorsque la somme est commutative, les $r_k^{(i)}$ engendrent un sous-demi-anneau contenant le sous-demi-anneau engendré par $r_1, \cdots, r_m$; tandis que ce sont les $r_{ki}^{(1)}$, $r_{ki}^{(2)}$ qui engendreront le sous-demi-anneau correspondant, lorsque la somme n'est pas commutative.

Nous ferons encore d'autres remarques se rapportant à la nilpuissance: 1) si $a \in \mathfrak{S}$ est nilpotent, alors $(a+b)^\rho$ appartient a l'idéal engendré par b; 2) si $\mathfrak{b}$ est un nilidéal et $a^\rho \in \mathfrak{J}$, en supposant $b \in \mathfrak{b}$, l'élément $a+b$ est nilpotent; 3) si la somme est commutative, la somme d'un idéal à droite et d'un nilidéal est un nilidéal à droite. Compte tenu de 2), on a ce

Théorème 8:—*Dans un demi-anneau quelconque, la somme de deux nilidéaux est un nilidéal.* En effet, soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ les nilidéaux. Un élément de la somme $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ admet la forme $\Sigma(a_i+b_i)$, $(a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$; somme finie). En écrivant

$$\Sigma(a_i+b_i)=(\cdots(((a_1+b_1)+a_2)+b_2)+\cdots+b_n),$$

l'application successive de 2) mène au résultat. On en conclut la possibilité de définir le *radical supérieur* pour un demi-anneau quelconque.

6) **G-demi-anneaux**—On dit $\mathfrak{S}$ un *G-demi-anneau*, si la somme est définie en posant $x+y=y$, $\forall x, y \in \mathfrak{S}$. Prenons alors $\{a, b, \ldots, f, g, \ldots\} \subseteq \mathfrak{S}$. L'élément général du sous-demi-anneau engendré par ces elements admet la forme $\Sigma ab\ldots f$, où le signe Σ s'étend à un nombre fini de termes. Maintenant, il se réduit au dernier terme et l'élément général en question s'écrit $ab\ldots f$. On arrive à ce même résultat en cherchant le sous-demi-groupe engendré par les éléments dont il est question dans le demi-groupe multiplicatif du demi-anneau.

Il en est de même en ce qui concerne les idéaux. Si l'on veut construire l'idéal à droite $(a)_d$, engendré par a, cherchons l'élément général. Cet élément $\Sigma(na+ar)$, où n est un nombre naturel et $r \in \mathfrak{S}$, se réduit à un seul terme $na+ar$, lequel, d'autre part, est égal à $na=a$ ou égal à ar. Par conséquent, on trouve $(a)_d=a \cup a\mathfrak{S}$, où $\cup$ signifie une réunion dans le sens ensembliste. Et si l'on veut construire l'idéal (a), engendré par a, des raisonnements analogues mènent à $(a)=a \cup a\mathfrak{S} \cup \mathfrak{S} a \cup \mathfrak{S} a \mathfrak{S}$.

D'une manière tout a fait générale, en écrivant $(a,b,c,\ldots)_d$ pour signifier l'idéal à droite engendré par $a,b,c,\ldots$; $(a,b,c,\ldots)_e$ pour signifier l'idéal à gauche engendré par $a,b,c,\ldots$; et $(a,b,c,\ldots)$ pour l'idéal engendré encore par les mêmes éléments, on reconnaît les relations

$$(a,b,c,\ldots)_d=a \cup b \cup c \cup \cdots \cup a\mathfrak{S} \cup b\mathfrak{S} \cup \cdots = S;$$

$$(a,b,c,\ldots)_e=a \cup b \cup c \cup \cdots \cup \mathfrak{S} a \cup \mathfrak{S} b \cup \cdots = T;$$

$$(a,b,c,\ldots)=S \cup T \cup \mathfrak{S} a \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S} b \mathfrak{S} \cup \cdots.$$

En somme: *La théorie des G-demi-anneaux est la théorie des demi-groupes.*

Remarques:—I) Si $\mathfrak{S}$ est un G-demi-anneau, l'existence de 0 pour le demi-groupe multiplicatif implique tout de suite $\mathfrak{J}_d=\mathfrak{J}_e=\mathfrak{J}=(0)$, bien qu'un G-demi-anneau contenant plus d'un élément n'ait jamais l'élément-zéro.

II) Lorsque l'opération de somme dans un demi-anneau est commutative, on arrive à faire une théorie du *K-radical (radical de Köthe)*, qui s'appuie, comme pour les anneaux, dans la proposition suivante: si la somme de deux nilidéaux à gauche est un nilidéal à gauche, le même arrive pour la somme de deux nilidéaux à droite et tout nilidéal à droite (ou à gauche) peut être plongé dans un idéal. Alors, le K-radical est égal au radical supérieur.

III) Dans le cas des G-demi-anneaux, bien que la somme ne soit pas commutative, le fait que la somme de deux idéaux à droite se réduit à son ensemble réunion entraîne que la somme de deux nilidéaux à droite soit un nilidéal droite, donc il existe dans ce cas un K-radical.

IV) Aussi dans le cas des G-demi-anneaux, on peut donner une démonstration directe très simple du résultat suivant: *si L est le radical de* Levitzki, *pour que $a \in L$, il faut et il suffit qu'on ait $a\mathfrak{S} \subseteq L$.* La «nécessité» est triviale. En ce qui concerne la «suffisance», notons que $a\mathfrak{S} \subseteq L$ entraîne $a^2 \in L$. L'idéal $a \cup a\mathfrak{S}$ est localement nilpotent, car, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait un nombre fini d'éléments $a, at_1, \ldots, at_q$ (parmi lesquels l'élément a) engendrant un demi-anneau potent. En supposant $a^{2\tau} \in \mathfrak{J}$, le demi-anneau engendré par un nombre fini d'éléments de la forme $a^2, a^3, \ldots, a^{2\tau-1}, at_1, \ldots, at_q, a^2 t_1, \ldots, a^2 t_q$ serait aussi potent, ce qui ne peut pas arriver.

7) **J-radical** — La théorie de Bourne du *J-radical* [VI] admet que $\mathfrak{S}$ soit commutatif pour la somme et suppose l'existence de l'élément-zéro. Si cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée, il n'y a que faire de petits changements dans les raisonnements de Bourne. Ainssi: si l'idéal nucléaire $\mathfrak{J}_d$ n'est pas vide, un élément r est *quasi-régulier à droite*, s'il existe $r', r'' \in \mathfrak{S}$ et $i', i'' \in \mathfrak{J}_d$ tels que $r+r'+rr'+i'=r''+rr''+i''$; mais, si $\mathfrak{J}_d=\phi$, la définition ne subit pas de changement (on écrit simplement $r+r'+rr'=r''+rr''$). De même, si $\mathfrak{J}_d \neq \phi$, on dit, d'après Bourne, que $\mathfrak{r}$ est un *idéal quasi-régulier à droite*, si, pour tout couple (r_1, r_2) d'éléments de $\mathfrak{r}$, il existe un autre couple (r_1', r_2') d'éléments appartenant aussi à $\mathfrak{r}$, de telle sorte que $r_1+r_1'+r_1 r_1'+r_2 r_2'=r_2+r_2'+r_2 r_1'+r_1' r_2'$; mais, lorsqu'on a $\mathfrak{J}_d=\phi$, on doit supposer de plus que tous les éléments de $\mathfrak{r}$ sont quasi réguliers à droite. Cette dernière condition est remplie d'elle même dans le cas $\mathfrak{J}_d \neq \phi$, car, compte tenu que $\mathfrak{J}_d \subseteq \mathfrak{r}$, en prenant $r \in \mathfrak{r}$, $j \in \mathfrak{J}_d$, on a aussi $j \in \mathfrak{r}$, donc il existe $r_1', r_2' \in \mathfrak{r}$ tels que $r+r_1'+rr_1'+jr_2'=j+r_2'+rr_2'+jr_1'$, ce qui donne, en posant $jr_2'=i'$, $j+jr_1'=i''$, la relation $r+r_1'+rr_1'+i'=r_2'+rr_2'+i''$.

Cela posé, on peut montrer aussi que la somme de deux idéaux quasi-réguliers à droite est un idéal quasi-régulier à droite. Le seul point qu'on doit examiner est celui de reconnaître que, dans le cas $\mathfrak{I}_d=\phi$, la somme de deux éléments r_1, r_1^*, appartenant respectivement à des idéaux à droite $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_1^*$, qui soient quasi-réguliers à droite, est un élément $r+r_1^*$ quasi-régulier à droite. C'est ce que nous ferons. Il existe r_1', r_1'' tels que $r_1+r_1'+r_1 r_1'=r_1''+r_1 r_1''$; d'autre part $r_1^*+r_1^* r_1'$ et $r_1^* r_1''$ sont des éléments de $\mathfrak{r}_1^*$. Alors, il existe $r_1'^*$ et $r_2'^*$, appartenant à $\mathfrak{r}_1^*$, tels que

$$(r_1^*+r_1^* r_1')+r_1'^*+(r_1^*+r_1^* r_1')\, r_1'^*+r_1^* r_1'' r_2'^*=$$
$$=r_1^* r_1''+r_2'^*+(r_1^*+r_1^* r_1')\, r_2'^*+r_1^* r_1'' r_1'^*.$$

En suite, on voit successivement que:

$$(r_1+r_1^*)+(r_1'+r_1'^*+r_1' r_1'^*+r_1'' r_2'^*)+$$
$$+(r_1+r_1^*)\,(r_1'+r_1'^*+r_1' r_1'^*+r_1'' r_2'^*)=(r_1+r_1'+r_1 r_1')+$$
$$+[(r_1^*+r_1^* r_1')+r_1'^*+(r_1^*+r_1^* r_1')\, r_1'^*+r_1^* r_1'' r_2'^*]+$$
$$+(r_1+r_1'+r_1 r_1')\, r_1'^*+(r_1''+r_1 r_1'')\, r_2'^*=$$
$$=(r_1''+r_1 r_1'')+[r_1^* r_1''+r_2'^*+(r_1^*+r_1^* r_1')\, r_2'^*+r_1^* r_1'' r_1'^*]+$$
$$+(r_1''+r_1 r_1'')\, r_1'^*+(r_1+r_1'+r_1 r_1')\, r_2'^*=(r_1''+r_2'^*+r_1'' r_1'^*+r_1' r_2'^*)+$$
$$+(r_1+r_1^*)\,(r_1''+r_2'^*+r_1'' r_1'^*+r_1' r_2'^*),$$

d'où le résultat qu'on voulait établir.

Ensuite Bourne montre que la somme J_d de tous les idéaux quasi-réguliers à droite est un idéal composé d'éléments quasi-réguliers à droite. Nous devons seulement vérifier qu'en supposant $\mathfrak{I}_d=\phi$ l'idéal à droite $sJ_d, (s\in\mathfrak{S})$, est composé d'éléments quasi-réguliers à droite. Or, si $r\in J_d$, on a $rs\in J_d$, ainsi que $rs+r'+rsr'=r''+rsr''$, pour certains $r', r''\in\mathfrak{S}$. On en conclut $sr''r+sr\,sr''\,r=sr\,sr+sr'\,r+sr\,sr'r$, ainsi que $sr+sr''\,r+sr.\,sr''\,r=(sr+sr'r)+sr\,(sr+sr'\,r)$, et sr est en effet quasi-régulier à droite.

Cela fait, en introduisant les concepts *d'élément quasi-régulier à gauche* et *d'idéal quasi-régulier à gauche*, on arrive à la somme J_e de tous les idéaux quasi-réguliers à gauche, qui est un idéal quasi-régulier à gauche.

Pour faire la comparaison de J_d et J_e, si l'on suppose $\mathfrak{I}_d\neq\phi\neq\mathfrak{I}_e$ (donc que les trois idéaux nucléaires sont égaux et non vides), il n'y aucun changement dans les raisonnements de Bourne pour obtenir l'égalité $J_d=J_e$. Alors $J=J_d=J_e$ est le *J-radical* ou *radical de* Jacobson.

8) **Cas des demi-anneaux réticulés**—Les demi-anneaux $\mathfrak{S}$ qui soient des treillis T, à condition qu'on ait $x+y=x\vee y$ et $x\leq x\wedge y$, sont appelés *demi-anneaux réticulés* [VII], [VIII]. Si $\mathfrak{a}^*$ est idéal du treillis [X, pgs. 187], $\mathfrak{a}^*$ est aussi un idéal du demi-anneau. On dit alors qu'il s'agit d'un *idéal réticulé* du demi-anneau.

Pour obtenir l'idéal réticulé engendré par un ensemble d'éléments, on construit l'déal $\mathfrak{b}$ engendré par ces éléments et ensuite on considère l'idéal $\mathfrak{b}^*$ formé par tous les éléments b^* tels que $b^*\leq b$, où b est un élément de $\mathfrak{b}$. En particulier, l'ideal réticulé engendré par un élément est l'idéal principal défini dans le treillis $T=\mathfrak{S}$ par l'élément a.

Puisque l'application $\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}^*$ est extensive, monotone et idempotente, on voit que les idéaux réticulés constituent une famille de Moore qui est un treillis complet T^*, bien qu'il ne soit pas un sous-treillis complet du treillis complet des idéaux de $\mathfrak{S}$. Les opérations de «infimum» et de «supremum» dans T^* (qu'on représente en faisant usage d'un astérisque) sont définies d'après les égalités [X, pgs. 129].

$$\wedge^*\,\mathfrak{a}_\beta^*=\wedge\,\mathfrak{a}_\beta^*,\qquad \vee^*\,\mathfrak{a}_\beta^*=(\vee\,\mathfrak{a}_\beta^*)^*,\qquad (\beta\in B).$$

En ce qui concerne $\mathfrak{I}^*$, l'hypothèse $\mathfrak{I}=\cap\,\mathfrak{a}_\alpha\neq\phi$, puisque $\mathfrak{I}$ est un idéal $\mathfrak{a}_\alpha$, entraîne $\mathfrak{I}^*=\cap\,\mathfrak{a}_\alpha^*$. Si $\mathfrak{I}=\phi$, alors $\mathfrak{I}^*=\phi$.

Parmi les demi-anneaux réticulés, nous distinguons les demi-anneaux $\overline{\mathfrak{S}}=\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\}$ composés de tous les idéaux d'un demi-anneau $\mathfrak{S}$, à l'exclusion de l'idéal vide. Soit $\overline{\mathfrak{a}}$ un idéal de $\overline{\mathfrak{S}}$. Les idéaux $\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots$, de $\mathfrak{S}$, qui sont les éléments de $\overline{\mathfrak{a}}$, sont à leur tour composés d'éléments de $\mathfrak{S}$ qui constituent un idéal $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}$, qu'on dit *l'idéal support* de $\overline{\mathfrak{a}}$. En général, $\overline{\mathfrak{a}}$ n'est pas un idéal réticulé. Dans les cas où $\overline{\mathfrak{a}}$ en est un, on peut trouver d'autres idéaux réticulés ayant le même support Par exemple, on représente par $\overline{\mathfrak{a}}_0$ *l'idéal principal* ou *complet*, dont les éléments sont *tous* les sous-idéaux de son support $\mathfrak{a}$. D'ailleurs, tout idéal réticulé est formé de sous-idéaux de son support.

Il existe une correspondance bijective entre les idéaux $\mathfrak{a}$ et les idéaux $\overline{\mathfrak{a}}_0$. Et les égalités $\bigcap \mathfrak{a}_\beta=\mathfrak{c}$, $(\beta \in B)$, et $\bigcap(\overline{\mathfrak{a}}_\beta)=\overline{\mathfrak{c}}_0$ s'impliquent mutuellement, même qu'on ait $\bigcap \mathfrak{a}_\beta=\emptyset$. Dans cette dernière hypothèse, la relation $\bigcap(\overline{\mathfrak{a}}_\beta)_0=\emptyset$ est en effet aussi valable, car, bien que l'idéal vide de $\mathfrak{S}$ n'appartienne pas à $\overline{\mathfrak{S}}$, il y a lieu à considérer dans $\overline{\mathfrak{S}}$, comme toujours, l'idéal vide.

En conséquence des raisonnements précédents, la relation $\mathfrak{I}=\bigcap \mathfrak{a}_\alpha=\emptyset$, $(\alpha \in A)$, entraîne $\bigcap(\overline{\mathfrak{a}}_\alpha)_0=\emptyset$, donc l'idéal nucléaire $\mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{S}})$, de $\overline{\mathfrak{S}}$, est vide. Pour étudier le cas $\mathfrak{I}\neq\emptyset$, on doit remarquer que $\mathfrak{I}$ est alors *l'élément zéro de* $\overline{\mathfrak{S}}$, et par conséquent $\mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{S}})=\{\mathfrak{I}\}$. D'ailleurs, on a déjà $\bigcap \overline{\mathfrak{a}}_\beta=\{\mathfrak{I}\}$, où $\overline{\mathfrak{a}}_\beta$ parcourt l'ensemble des idéaux réticulés, puisque $\{\mathfrak{I}\}$ à lui seul constitue un tel idéal. Il s'agit même d'un idéal complet, donc $\bigcap(\overline{\mathfrak{a}}_\alpha)_0=\{\mathfrak{I}\}$, où $(\overline{\mathfrak{a}}_\alpha)_0$ parcourt cette fois l'ensemble des idéaux complets. De plus, l'idéal réticulé $\mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{S}})^*$, engendré par $\mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{S}})$, est aussi égal à $\{\mathfrak{I}\}$. En conséquence: dans le demi-anneau réticulé $\overline{\mathfrak{S}}$ sont égales les

intersections de tous les idéaux, de tous les idéaux réticulés et de tous les idéaux complets. La valeur commune de ces intersections est $\mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{S}})=\mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{S}})^*$, même qu'on ait $\mathfrak{I}=\emptyset$.

Dans l'hypothèse $\mathfrak{I}\neq\emptyset$, bien qu'une égalité $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\mathfrak{I}$ implique $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{I}$, on peut avoir $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{I}$ sans qu'on ait $\mathfrak{a}=\mathfrak{I}$ ou $\mathfrak{b}=\mathfrak{I}$. À cet effet, on énonce ce

Théorème 9:—*En supposant $\mathfrak{I}\neq\emptyset$, $\mathfrak{I}$ est un zéro trivial de $\overline{\mathfrak{S}}$, si et seulement si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau premier. Et $\overline{\mathfrak{S}}$, ne contient pas d'éléments nilpotents non nuls, si et seulement si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau semi-premier.*

Remarque:—La deuxième partie de l'énoncé précédent est valable même qu'on ait $\mathfrak{I}=\emptyset$.

Soit $\mathfrak{I}\neq\emptyset$ et représentons par $\{\mathfrak{a}_s\}$, $(s\in S)$ l'ensemble des idéaux nilpotents de $\mathfrak{S}$. Le radical classique de $\mathfrak{S}$ será donc $\bigcup \mathfrak{a}_s=R$. Alors le radical classique de $\overline{\mathfrak{S}}$ se réduit à $\bigcup(\overline{\mathfrak{a}}_s)_0$. En effet: de $\mathfrak{a}_s^\sigma=\mathfrak{I}$, en posant $(\overline{\mathfrak{a}}_s)_0=\{\mathfrak{a}_s,\mathfrak{a}_s',\mathfrak{a}_s''\ldots\}$, on tire $(\overline{\mathfrak{a}}_s)_0^\sigma=\{\mathfrak{I}\}$, donc $\bigcup(\mathfrak{a}_s)_0$ est contenu dans le radical classique de $\overline{\mathfrak{S}}$. D'autre part, soit $\overline{\mathfrak{a}}$ un idéal de $\overline{\mathfrak{S}}$ tel que $\overline{\mathfrak{a}}^\rho=\{\mathfrak{I}\}$. Si $\overline{\mathfrak{a}}=\{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}'',\ldots\}$, on voit que $\mathfrak{a}'^\rho\subseteq\mathfrak{I}$, donc $\mathfrak{a}'$ est un idéal $\mathfrak{a}_s$ et $\mathfrak{a}'\in(\overline{\mathfrak{a}}_s)_0$. L'idéal $\overline{\mathfrak{a}}$ lui-même sera contenu dans $\bigcup(\overline{\mathfrak{a}}_s)$ et on a:

Théorème 10:—*En supposant $\mathfrak{I}\neq\emptyset$, si $\{\mathfrak{a}_s\}$, $(s\in\mathfrak{S}$, est l'ensemble des idéaux nilpotents de $\mathfrak{S}$, le radical classique de $\overline{\mathfrak{S}}$ est donné par $\bigcup(\overline{\mathfrak{a}}_s)_0$.*

Il appartient à la théorie générale des demi-anneaux réticulés (voir [VII] ou [VIII]) l'assertion que voici: Soit $\mathfrak{b}$ un idéal réticulé d'un demi-anneau réticulé $\mathfrak{T}$; alors $v\in\mathfrak{T}$

appartient au radical $B(\mathfrak{b})$, de $\mathfrak{b}$, si et seulement si $v^\sigma \in \mathfrak{b}$, pour un certain σ. En conséquence: le radical $B(\mathfrak{b})$ [il s'agit comme on le sait de l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{b}$] d'un idéal réticulé est un idéal réticulé.

Cela posé, revenons à $\mathfrak{S}$ et à $\overline{\mathfrak{S}}$ et supposons $\mathfrak{I} \neq \phi$. Le radical inférieur de $\overline{\mathfrak{S}}$ est, par définition, le radical $B(\{\mathfrak{I}\}) = \Delta$. Or $\mathfrak{r} \in \Delta$, si el seulement $\mathfrak{r}^\sigma = \mathfrak{I}$, donc:

Théorème 11:—*Le radical inférieur de $\overline{\mathfrak{S}}$ est exactement composé de tous ses nilélements.*

Corollaire 1:—*Le radical inférieur de $\overline{\mathfrak{S}}$ est égal à son radical supérieur. Il est aussi égal au radical classique au L-radical et au K-radical.*

En ce qui concerne le J-radical de $\overline{\mathfrak{S}}$, on voit d'une façon simple que $\mathfrak{S}$ est un *demi-anneau radical,* c'est-à-dire est égal à son J-radical. En effet: tout élément $\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{S}}$ est quasi-régulier à droite (et à gauche), car, en prenant $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}$, on voit que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}\mathfrak{a}', \mathfrak{I}) = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{a}\mathfrak{a}'', \mathfrak{I}) = \mathfrak{a}$. Par conséquent:

Théorème 12:—*$\overline{\mathfrak{S}}$ est égal à son J-radical.*

Remarque:—Prenons un demi-anneau réticulé quelconque. Si $\mathfrak{I} = \phi$, tout élément a est quasi-régulier à droite et à gauche, puisque, en faisant $a' = a$, $a'' = a$, on a, par exemple, comme ci-dessus, $a \vee a' \vee a\,a' = a'' \vee a\,a''$. Alors, le demi-anneau est un demi-anneau radical. Il en est de même si $\mathfrak{I}_d \neq \phi \neq \mathfrak{I}_e$, car, en raisonnant sur les idéaux à droite, tout idéal à droite $\mathfrak{r}$ est quasi-régulier à droite, puisque, en prenant $r_1, r_2 \in \mathfrak{r}$, il suffit de faire $r_1' = r_2$, $r_2' = r_1$ pour qu'on tienne $r_1 \vee r_1' \vee r_1 r_1' \vee r_2 r_2' = r_2 \vee r_2' \vee r_2 r_1' \vee r_1 r_2' = r_1 \vee r_2$. Nous donnerons cet énoncé:

Théorème 13:—*Sous l'une das hypothèse $\mathfrak{I} = \phi$ ou $\mathfrak{I}_d \neq \phi \neq \mathfrak{I}_e$, tout demi-anneau réticulé est un demi-anneau radical.*

BIBLIOGRAPHIE

[I] H. S. Vandiver, «*Note on a simple type of algebra in which the cancellations law of addition does note hold*», Bull. Am. Math. Soc., vol. 40, pgs. 920, 1934.

[II] A. Almeida Costa, «*Sur la théorie générale des demi-anneaux, I*», Paris, Séminaire Dubreil-Pisot, 1960-1961, exposé 24.

[III] M.ª Luisa Galvão, «*On the theory of residuals*», Rev. Fac. Ci. Lisboa, 2.ª série – A, vol. VII, pgs. 283-300, 1959.

[IV] M.ª Luisa Galvão, «*Sur les idéaux réguliers d'un semi-anneau*», Rev. Fac. Ci. Lisboa, 2.ª série – A, vol. VIII, pgs. 169-173, 1960.

[V] S. Bourne, «*On the homomorphism theorem for semirings*», Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 38, pgs. 118-119, 1952.

[VI] S. Bourne, «*The Jacobson radical of a semiring*», Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 37, pgs. 163-170, 1951.

[VII] M.ª Luisa Galvão, «*Sobre a teoria de* Noether-Krull *em semi-anéis*», Rev. Fac. Ci. Lisboa, 2.ª série-A, vol. VIII, pgs. 175-256, 1961.

[VIII] A. Almeida Costa, «*Sur la théorie général des demi-anneax, II*», Paris, Séminaire Dubreil-Pisot, 1960-1961, exposé 25.

[IX] A. Almeida Costa, «*Sur la théorie générale des demi-anneaux*», Publ. Math., Debrecen, tome 10, pgs. 14-29, 1963.

[X] A. Almeida Costa, «*Cours d'Algèbre générale*», Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1964.