SOBRE OS ENDOMORFISMOS DOS MÓDULOS

POR

A. ALMEIDA COSTA

Prof. ext. da Universidade do Porto

1) **Introdução** — A *teoria dos endomorfismos dos módulos* dá exemplos concretos de anéis. Ela pode constituir o ponto de partida dos estudos da *teoria dos anéis abstractos* (1). De resto, uma sistemática dos anéis independente da dos endomorfismos deve considerar-se posta de parte. Os resultados adquiridos sobre anéis são susceptíveis de serem aplicados, por sua vez, no conhecimento da estrutura dos módulos.

Há também possibilidade de transportar para a teoria dos módulos proposições sobre anéis que se demonstram tendo apenas em conta o facto de os ideais (esquerdos, por ex.), serem subgrupos admissíveis, em face do domínio operatório constituído pelo próprio anel.

Neste trabalho, ao lado de alguns aspectos novos da primeira das teorias citadas [§§ 2, 3, 4 e parte do 10], tem-se em conta a referida possibilidade [§ 6]. Nos §§ restantes, são retomados aspectos clássicos da teoria dos endomorfismos.

Dificuldades de ordem técnica não permitiram utilizar as notações já usadas pelo autor em trabalhos de Álgebra moderna, publicados nesta mesma Revista. Apenas se empregam letras latinas, deixando-se, assim, de representar por letras góticas os módulos, anéis e ideais.

---

(1) Vejam-se, a este respeito, as obras seguintes:
— B. L. VAN DER WAERDEN — *Moderne Algebra*, II Teil, págs. 165 a 172 (1931, Berlin, Springer);
— N. JACOBSON — *The theory of rings* (1943, n.º 2 das publicações «Mathematical Surveys», da American Mathematical Society, New-York);
— A. ALMEIDA COSTA — *Sistemas hiper-complexos e representações*, págs. 225 a 245 (1948, n.º 19 das publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto, Porto).

2) **Generalidades** — Um módulo $\mathfrak{M}$ admite sempre como operadores os elementos do seu anel $\mathfrak{R}$ de endomorfismos: *é módulo relativo a* $\mathfrak{R}$.

Para designar os elementos de $\mathfrak{R}$ utilizaremos as letras $A, B, \ldots, S, T, \ldots$

Se $\mathfrak{M}$ tem um domínio operatório Ω, dado prèviamente, o anel dos endomorfismos é compreendido como formado por *endomorfismos* — Ω.

Tomando um sub-módulo $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$, se Ω existe, o sub-módulo supõe-se *admissível*. Imaginemos que se tem $\mathfrak{M}A \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}B \subseteq \mathfrak{N}$. Então, é $\mathfrak{M}(A-B) \subseteq \mathfrak{N}$, e, qualquer que seja T, é $\mathfrak{M}TA \subseteq \mathfrak{N}$. Daqui se tira o seguinte

Teorema 1: — *O conjunto dos endomorfismos de* $\mathfrak{M}$ *que aplicam* $\mathfrak{M}$ *em sub-módulos de* $\mathfrak{N}$ *constitui um ideal esquerdo de* $\mathfrak{R}$. Representaremos por $\mathfrak{n}$ (letra minúscula correspondente a $\mathfrak{N}$) um tal ideal, que pode ser afectado de um índice, se o sub-módulo tiver esse índice.

Seja $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ um sub-módulo gerado pelos dois sub-módulos $\mathfrak{N}_1$ e $\mathfrak{N}_2$. É evidente que $\mathfrak{n} \subseteq (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$. A este respeito, é válido o seguinte

Teorema 2: — *Se* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ *é uma soma directa, têm-se* $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$, *também como soma directa.* Na verdade, suponhamos $\mathfrak{M}B \subseteq \mathfrak{N}$ e tomemos $m \in \mathfrak{M}$, $mB \in \mathfrak{N}$. Pondo $mB = n_1 + n_2$, com $n_i \in \mathfrak{N}_i$, $(i = 1, 2)$, a correspondência $m \rightarrow n_i$ é um endomorfismo A_i, de $\mathfrak{M}$. Das relações $B = A_1 + A_2$, $\mathfrak{M}A_i \subseteq \mathfrak{N}_i$, conclui-se $B \in (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$. Recìprocamente, um elemento deste ideal soma é da forma $A_1 + A_2$, com

$$\mathfrak{M}A_1 \subseteq \mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{M}A_2 \subseteq \mathfrak{N}_2, \quad \mathfrak{M}(A_1 + A_2) \subseteq \mathfrak{N}.$$

Será $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$. Esta soma é directa, pois que, pondo $A_1 + A_2 = 0$, com $A_i \in \mathfrak{n}_i$, vê-se que $A_i = 0$.

A cada $\mathfrak{N}$, como se disse, corresponde um ideal $\mathfrak{n}$ bem determinado. Pode haver, porém, vários sub-módulos com o mesmo correspondente. Se, com efeito, $A \in \mathfrak{n}$, consideremos o sub-módulo $\mathfrak{N}'$ gerado pelos sub-módulos $\mathfrak{M}A$.

A $\mathfrak{N}'$ corresponde ainda o ideal $\mathfrak{n}$; é o menor sub-módulo nessas condições. Apenas podemos afirmar ser $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$. Conformes com uma notação muito usada, escreveremos $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$, significando com o 2.º membro o conjunto de elementos de $\mathfrak{M}$ da forma $\Sigma \mathfrak{M}A$, onde o somatório é finito e $A \in \mathfrak{n}$. Quando $\mathfrak{N}$ é imagem homomorfa de $\mathfrak{M}$, tem-se $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$. Fixemos o

Teorema 3: — *Dado o sub-módulo* $\mathfrak{N}$, *existe sempre um sub-módulo* $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$, *tal que a* $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{N}'$ *corresponde o ideal* $\mathfrak{n}\,(= \mathfrak{n}')$.

Inversamente, tomemos $\mathfrak{n}$ e formemos o sub-módulo $\mathfrak{M}\mathfrak{n} = \mathfrak{N}'$. O ideal $\mathfrak{n}'$ contém $\mathfrak{n}$. Por ser $\mathfrak{M}\mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{n}$, conclui-se $\mathfrak{M}\mathfrak{n}' = \mathfrak{M}\mathfrak{n}$. Assim:

Teorema 4: — *Dado o ideal esquerdo* $\mathfrak{n}$, *existe sempre um ideal esquerdo* $\mathfrak{n}' \supseteq \mathfrak{n}$, *tal que* $\mathfrak{n}'$ *é correspondente de* $\mathfrak{M}\mathfrak{n}\,(= \mathfrak{M}\mathfrak{n}')$.

Em geral, escolhido $\mathfrak{N}$, da aplicação dos elementos $A \in \mathfrak{R}$ não resulta $\mathfrak{N}A \subseteq \mathfrak{N}$. Quando tal sucede, o ideal $\mathfrak{n}$ é bilateral. A inversa não é, porém, verdadeira. A este respeito, pode dar-se o seguinte enunciado:

Teorema 5: — *Se* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ *é imagem homomorfa de* $\mathfrak{M}$, *é condição necessária e suficiente, para que* $\mathfrak{n}$ *seja ideal bilateral, que se tenha* $\mathfrak{N}T \subseteq \mathfrak{N}$, *qualquer que seja* $T \in \mathfrak{R}$.

Exemplos de sub-módulos aos quais correspondem ideais bilaterais são dados por expressões de qualquer das formas:

$$\mathfrak{N}\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{N}\mathfrak{a}, \quad m\mathfrak{a},$$

onde $\mathfrak{a}$ é um ideal bilateral. O último pressupõe que o domínio Ω é vazio.

Quando $\mathfrak{n}$ é nilideal, $\mathfrak{N}$ diz-se *nilmódulo*. Em particular, pode tratar-se de *módulos nilpotentes* ou *semi-nilpotentes*. Como consequência imediata do teorema 2, tem-se o

Teorema 6: — *A soma directa dum nilmódulo qualquer e dum nilmódulo ao qual corresponde um ideal bilateral é um* *nilmódulo; a soma directa de dois módulos nilpotentes é nilpotente; e a soma directa de dois módulos semi-nilpotentes é semi-nilpotente* (1).

TEOREMA 7: — *Se* N *é um sub-módulo simples e* $\mathfrak{r} \subseteq \mathrm{R}$ *é um nilideal tal que* $\mathrm{N}\mathfrak{r} \subseteq \mathrm{N}$, *tem-se, necessàriamente,* $\mathrm{N}\mathfrak{r} = (0)$. Supondo $\mathrm{N}\mathfrak{r} \neq (0)$, é $\mathrm{N}\mathfrak{r} = \mathrm{N}$. Existem $n \in \mathrm{N}$ e $A \in \mathfrak{r}$ de modo que $nA \neq 0$. Então, $\mathrm{N}A$ é um sub-módulo não nulo contido em N, o que dá $\mathrm{N}A = \mathrm{N}$. Daqui se tira $\mathrm{N} = \mathrm{N}A = \ldots = \mathrm{N}A^m = (0)$, se $A^m = 0$. Este resultado absurdo provém de se admitir $\mathrm{N}\mathfrak{r} = \mathrm{N}$.

TEOREMA 8: — *Se* $\mathrm{N} \neq (0)$ *é um nilmódulo simples, o ideal* $\mathfrak{n}$ *ou é nulo ou é* $\mathfrak{n}^2 = (0)$. Suponhamos, com efeito, $\mathfrak{n} \neq (0)$. Se $0 \neq A \in \mathfrak{n}$, é $\mathrm{M}A = \mathrm{N}$. Em seguida, é $\mathrm{M}A^2 = (0)$, porque, de contrário, ter-se-ia

$$\mathrm{N} = \mathrm{M}A = \mathrm{M}A^2 = \ldots,$$

e A seria potente. Depois, se $T \in \mathfrak{n}$, vem $\mathrm{M}AT = \mathrm{N}T \subseteq \mathrm{N}$. Admitindo a igualdade $\mathrm{N}T = \mathrm{N}$, T seria potente. Logo, é $\mathrm{M}AT = (0)$, e, portanto, $AT = 0$, como afirma o teorema.

TEOREMA 9: — *Se* N *é um sub-módulo para o qual existe* $\mathrm{R} \in \mathfrak{n}$, *de sorte que. além de* $\mathrm{M}\mathrm{R} \subseteq \mathrm{N}$, *a diferença* $u - \mathrm{R} = \mathrm{R}_1$ *seja nilpotente, é* $\mathrm{N} = \mathrm{M}$. [O símbolo u significa a identidade de $\mathfrak{R}$]. Sabemos que se tem $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}$ (2). Nessas condições, $u \in \mathfrak{n}$, $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$, e, portanto, $\mathrm{N} = \mathrm{M}$.

COROLÁRIO 1: — *Supondo* $\mathrm{N} + \mathrm{N}_1 = \mathrm{M}$ *e* N_1 *nilmódulo, tem-se, necessàriamente,* $\mathrm{N} = \mathrm{M}$.

3) **Projecções** — Um endomorfismo idempotente E, de M, diz-se uma *projecção*. Pondo $u = E + (u - E)$, faz-se uma decomposição em idempotentes ortogonais. O módulo M admite a seguinte decomposição:

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}E + \mathrm{M}(u - E). \tag{1}$$

(1) J. LEVITZKI — *On the radical of a general ring, Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, 1943, págs. 462 a 466. Para as demonstrações, pode ver-se ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, págs. 4 e 5.
(2) ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, pág. 7.

Portanto:

TEOREMA 10: — *Se* E *é idempotente, tem-se a decomposição* (1), *valendo, para* $m \in \mathrm{M}\mathrm{E}$, $m\mathrm{E} = m$, *e, para* $m' \in \mathrm{M}(\mathrm{u} - \mathrm{E})$, $m'\mathrm{E} = \mathrm{o}$.

À noção de idempotente primitivo corresponde a de projecção *primitiva* (1). Um módulo *indecomponível* define-se como aquele que não pode escrever-se como soma directa de dois sub-módulos não nulos. No anel $\mathfrak{R}$ dum tal módulo, o endomorfismo u é primitivo. Em $\mathfrak{R}$ não há, então, outro idempotente, além de u.

Também pode afirmar-se que, se E é primitivo, o sub-módulo $\mathrm{M}E$ é indecomponível. Uma condição necessária e suficiente, para que E seja primitivo, é que $E\mathfrak{R}E$ apenas possua o idempotente E (seu elemento um ou idempotente principal) (2).

TEOREMA 11: — *Se* E_1 *é primitivo, o sub-módulo indecomponível* $\mathrm{M}\mathrm{E}_1$ *não tem sub-módulo próprio que possa ser imagem homomorfa de* M *definida por idempotente.* Se fosse $\mathrm{M}E_2 \subset \mathrm{M}E_1$, com E_2 idempotente, escrevendo $\mathrm{M} = \mathrm{M}E_2 + \mathrm{M}(u - E_2)$, $\mathrm{M}E_1 = \mathrm{M}E_2 + \mathrm{M}E_1 \cap \cap \mathrm{M}(u - E_2)$, a intersecção acabada de indicar não seria nula e chegar-se-ia, assim, a um absurdo.

TEOREMA 12: — *Dado o sub-módulo* $\mathrm{M}\mathrm{A}$, *admitindo a existência dum endomorfismo* S *tal que* $\mathrm{A}\mathrm{S}\mathrm{A} = \mathrm{A}$, *existe idempotente* E, *tal que* $\mathrm{M}\mathrm{A} = \mathrm{M}\mathrm{E}$ (3). Com efeito, $SA = E$ é idempotente, pois $SA.SA = S.ASA = SA$. Mas, sendo $\mathrm{M}E = \mathrm{M}SA \subseteq \mathrm{M}A$, $\mathrm{M}A = \mathrm{M}A.E \subseteq \mathrm{M}E$, conclui-se $\mathrm{M}A = \mathrm{M}E$.

TEOREMA 13: — *Se* M_1 *e* M_2 *forem nilmódulos de* M, *não ha imagem homomorfa de* M *na soma* $\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$, *suposta directa, que seja definida por idempotente.* Representando

(1) JACOBSON, *loc. cit.*, págs. 10 e 11.
(2) ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, pág. 18. É indiferente dizer que um idempotente e é primitivo se não pode decompor-se em idempotentes ortogonais ou se não existe idempotente e' tal que $e\,e' = e'\,e = e'$.
(3) J. VON NEUMANN, *On regular rings, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, vol. 22, n.º 12, 1936.

por N a soma directa, sabemos que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$. Como os $\mathfrak{m}_i$ são nilideais, o teorema resulta de não poder haver idempotente na soma de dois nilideais (1).

Quando, para um sub-módulo simples N, é $\mathfrak{n}^2 \neq (0)$, não pode o mesmo ser nilmódulo. Se se designar por *sub-módulo regular* aquele que contém aplicações homomorfas não nilpotentes de M, podemos dar este enunciado:

TEOREMA 14: — *O sub-módulo simples* N, *para o qual é* $\mathfrak{n} \neq (0)$, *ou é nilpotente, e de expoente 2, ou é um sub-módulo regular.*

Um sub-módulo regular M' é *mínimo,* se for nilpotente todo o endomorfismo de M que leve a um sub-módulo próprio de M'. Um exemplo trivial é dado pelos sub-módulos regulares simples.

Entre os sub-módulos regulares mínimos distinguiremos aqueles que verificam a condição seguinte, ou condição I): *há um endomorfismo* X *tal que* $\mathrm{M}\mathrm{X} = \mathrm{M}'$ *determina um automorfismo de* M': $\mathrm{M}' \simeq \mathrm{M}'X = \mathrm{M}'$.

Tratando-se de sub-módulos regulares simples, a condição I) tem sempre lugar.

TEOREMA 15: — *Se* N *é um sub-módulo regular simples, existe idempotente* $\mathrm{E} \in \mathfrak{n}$ *tal que* $\mathrm{M}\mathrm{E} = \mathrm{N}$. Ponhamos $\mathrm{N} = \mathrm{M}A$, onde o endomorfismo A se supõe não nilpotente. Será $\mathrm{N}A = \mathrm{N}$. Dado $m \in \mathrm{M}$, por meio de A passa-se a $n \in \mathrm{N}$; e, como $\mathrm{N}A = \mathrm{N}$ é um automorfismo, designemos por $n' \in \mathrm{N}$ o elemento tal que $n'A = n$. A correspondência $m \to n'$ é um endomorfismo B, de M, para o qual, além de $\mathrm{M}B = \mathrm{N}$, se verifica a relação $BA = A$. Tira-se daqui $B^2A = BA = A$, $(B^2 - B)A = 0$. Se $B^2 - B = 0$, B será o idempotente procurado. Não sendo assim, tem-se

$$\mathrm{M}(B^2 - B)A = (0), \qquad \mathrm{M}(B^2 - B) = \mathrm{N}.$$

Esta última igualdade é absurda, visto que ela dá $\mathrm{N}A = (0)$. Ao teorema responde-se, pois, com $B = E$.

(1) ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, pág. 22.

COROLÁRIO 2: — *É condição necessária e suficiente, para que um sub-módulo simples* N, *de* M, *seja uma parcela duma soma directa igual a* M, *que seja regular. O ideal* $\mathfrak{n}$ *é, então, da forma* $\mathfrak{n} = \mathrm{R}\mathrm{E}$.

O teorema 15 é susceptível da extensão seguinte:

TEOREMA 16: — *Um sub-módulo regular mínimo* M', *de* M, *verificando a condição I), é sempre imagem homomorfa de* M *definida por idempotente.*

Ponhamos $\mathrm{M}' = \mathrm{M}A$, onde A, não nilpotente, é o endomorfismo da condição I): $\mathrm{M}' \simeq \mathrm{M}'A = \mathrm{M}'$. Como no teorema 15, supondo

$$m \to mA = m', \qquad m''A = m' \qquad (m'' \in \mathrm{M}'),$$

a correspondência $m \to m''$ é um endomòrfismo B, de M, verificando as relações

$$\mathrm{M}B = \mathrm{M}', \qquad BA = A, \qquad (B^2 - B)A = 0.$$

Se $B^2 - B = 0$, B será o idempotente procurado. Tendo-se $B^2 - B = T \neq 0$, T será nilpotente, pois que $\mathrm{M}T \subset \mathrm{M}'$, visto a igualdade $\mathrm{M}T = \mathrm{M}'$ acarretar $\mathrm{M}TA = (0) = \mathrm{M}'A = \mathrm{M}'$. Um teorema conhecido afirma agora que, sendo $B \in \mathfrak{m}'$ não nilpotente e tendo-se $B^2 - B = T =$ nilpotente, existe um polinómio em B que é idempotente (1).

TEOREMA 17: — *É primitivo o idempotente* E *da igualdade* $\mathrm{M}' = \mathrm{M}\mathrm{E}$, *se* M' *é sub-módulo regular mínimo.* Basta ver que uma decomposição $E = E'' + E'''$, em idempotentes ortogonais, levaria a $\mathrm{M}' = \mathrm{M}E'' + \mathrm{M}E'''$, de sorte que $\mathrm{M}E''$, por ex., seria uma imagem homomorfa de M contida em M' e diferente deste sub-módulo, contra a hipótese dele ser regular mínimo.

TEOREMA 18: — *Num módulo* M, *para o qual todo o sub-módulo regular possui imagem homomorfa de* M *definida*

(1) G. KÖTHE — *Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, Mathematische Zeitschrift,* Band 32, 1930, págs. 161 a 186. (Veja-se ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, pág. 19).

por idempotente, a soma directa dum número finito de nil-módulos é um nilmódulo. Conforme o Teorema 13, a referida soma não pode, aqui, levar a um sub-módulo regular.

M diz-se um *módulo regular,* se, para cada endomorfismo A, existir S tal que $ASA = A$ [R é um anel regular, VON NEUMANN, *loc. cit.*]. Os teoremas 12 e 11 permitem dar os dois enunciados a seguir:

TEOREMA 19: — *Num módulo regular, toda a imagem endomorfa é definida por um idempotente.* Pode dizer-se, pois, que todo o sub-módulo que possua imagem endomorfa do módulo é sub-módulo regular.

TEOREMA 20: — *Se* E *é primitivo e* M *é regular,* $\mathrm{M}E$ *não possui sub-módulo próprio que seja homomorfo de* M.

Substituindo a noção de ideal principal pela de sub-módulo endomorfo, estabelece-se o seguinte teorema, correspondente a outro relativo a anéis regulares (1).

TEOREMA 21: — *Se* $\mathrm{M}\mathrm{E}$ *e* $\mathrm{M}\mathrm{E}'$ *são duas imagens endomorfas de* M, *existe idempotente* F *verificando as relações*

$$FE = EF = 0, \qquad (\mathrm{M}E, \mathrm{M}E') = \mathrm{M}E + \mathrm{M}F.$$

Quando $\mathrm{M}E' \subseteq \mathrm{M}E$, basta tomar $F = 0$. Não sendo assim, vamos ver que se tem $(\mathrm{M}E, \mathrm{M}E') = \mathrm{M}E + \mathrm{M}E'(U - E)$. Um elemento do 2.° membro é da forma $mE + nE'(U - E) = (m - nE')E + nE'$, o que mostra pertencer ao primeiro. Inversamente, um elemento do 1.° membro é da forma $mE + nE' = mE + nE' - nE'E + nE'E = (m + nE')E + nE'(U - E)$, pelo que pertence ao 2.°. O referido 2.° membro é uma soma directa. Finalmente, como a sua segunda parcela não é nula, designemos por E_1 um idempotente tal que $\mathrm{M}E'(U - E) = \mathrm{M}E_1$. Vê-se que $E_1 E = 0$. Pondo, então, $F = E_1 - EE_1$, vem imediatamente

(1) J. VON NEUMANN, *loc. cit.* Cfr. ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, pág. 33.

$$FE = EF = 0, \quad FF = F, \quad E_1 F = E_1, \quad FE_1 = F,$$
$$\mathrm{M}E_1 = \mathrm{M}E_1 F \subseteq \mathrm{M}F, \quad \mathrm{M}F = \mathrm{M}FE_1 \subseteq \mathrm{M}E_1,$$

e, portanto, $\mathrm{M}E_1 = \mathrm{M}F$.

COROLÁRIO 3: — *Num módulo regular, tem-se* $(\mathrm{M}E, \mathrm{M}E') \bar{+} \mathrm{M}E''$. Basta tomar $E'' = E + F$, pois que $E + F$ é idempotente.

4) **Os módulos com condição de cadeia descendente** — Se a condição de cadeia descendente é válida em M, certos resultados anteriores podem naturalmente precisar-se. Sabe-se, por ex., que é condição necessária e suficiente, para que um endomorfismo seja um automorfismo, que seja um meromorfismo (1). Também se sabe que, se A é um endomorfismo qualquer e Q_A representa o conjunto dos elementos de M que são anulados por A, é válida a igualdade

$$\mathrm{M} = (\mathrm{M}A^r, \mathrm{Q}_{A^r}), \tag{2}$$

onde r é um inteiro determinado (2). Além disso, têm lugar as duas proposições seguintes: 1.ª — um módulo M com condição descendente é soma directa dum número finito de sub-módulos indecomponíveis; 2.ª — um módulo M com condição descendente, gerado pelos seus subgrupos mínimos, é completamente redutível.

Vamos agora demonstrar alguns teoremas.

TEOREMA 22: — *Num módulo* M, *com condição de cadeia descendente, dado um sub-módulo* N, *é geralmente (como sucede, de resto, num módulo qualquer)* $\mathrm{M}\mathfrak{n} \subseteq \mathrm{N}$. *Existe, porém, um inteiro mínimo* k, *para o qual* $\mathrm{M}\mathfrak{n}^k = \mathrm{N}\mathfrak{n}^{k-1} (= \mathrm{N}\mathfrak{n}^k = \ldots)$. Suponhamos, com efeito,

$$\mathrm{N} \supset \mathrm{N}\mathfrak{n} \supset \ldots \supset \mathrm{N}\mathfrak{n}^{k-1} = \mathrm{N}\mathfrak{n}^k = \ldots.$$

(1) Cfr. N. JACOBSON, *loc. cit.*, pág. 9.
(2) *Idem, idem, idem.*

Como se tem também

$$\mathrm{N}\,\mathfrak{n}^k \subseteq \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k \subseteq \mathrm{N}\,\mathfrak{n}^{k-1},$$

vê-se que $\mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k = \mathrm{N}\,\mathfrak{n}^{k-1}$. Em seguida, podem tirar-se ainda outras conclusões. Em primeiro lugar, é $\mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k = \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^{k+1} = \ldots$. Se pusermos $\mathrm{M}' = \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k$, o teorema 4 garante-nos a relação $\mathrm{M}\,\mathfrak{m}' = \mathrm{M}'$. E, como $\mathfrak{m}'^2 \supseteq \mathfrak{n}^{2k}$, é $\mathrm{M}\,\mathfrak{m}'^2 \supseteq \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^{2k} = \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k = \mathrm{M}'$, de sorte que

$$\mathrm{M}' = \mathrm{M}\ \mathfrak{m}' = \mathrm{M}\ \mathfrak{m}'^2 = \ldots,$$
$$\mathrm{M}' = \mathrm{M}'\mathfrak{m}' = \mathrm{M}'\mathfrak{m}'^2 = \ldots .$$

TEOREMA 23: — *Nas condições do teorema anterior, continuando a pôr* $\mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k = \mathrm{M}'$ *e admitindo* $\mathrm{M}' \supset (0)$, *existe um endomorfismo* R, *tal que são válidas as relações* $(0) \subset \mathrm{M\,R} = \mathrm{M}'\,\mathrm{R} \subseteq \mathrm{M}'$. *O sub-módulo* $\mathrm{M\,R} = \mathrm{N}'$ *é mínimo entre os sub-módulos contidos em* M' *aos quais correspondem ideais* $\mathfrak{q}$ *por forma que* $\mathfrak{n}^k\mathfrak{q} \supset (0)$. Consideremos, na verdade, entre os sub-módulos contidos em M' o sub-módulo mínimo N', nas condições seguintes: $\mathrm{N}' \subseteq \mathrm{M}'$, $\mathfrak{n}^k\mathfrak{n}' \supset (0)$. N' existe, pois a M' corresponde $\mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{n}^k$ e é $\mathfrak{n}^k\mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{n}^{2k} \supset (0)$, em virtude de se ter $\mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k = \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^{2k}$. Então, seja $R \in \mathfrak{n}'$, de modo que $\mathfrak{n}^k R \supset (0)$. Vê-se que

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k R \subseteq \mathrm{N}' \subseteq \mathrm{M}', \quad \mathfrak{t} \supseteq \mathfrak{n}^k R \supset (0),$$
$$\mathfrak{n}^k\,\mathfrak{t} \supseteq \mathfrak{n}^{2k} R \supset (0).$$

Valerá necessàriamente a igualdade $\mathrm{T} = \mathrm{N}'$, e, portanto, será $\mathrm{N}' = \mathrm{M}\,\mathfrak{n}^k R = \mathrm{M}' R$. Como se tem, por outro lado, $\mathrm{M}\,R \subseteq \mathrm{N}'$, chega-se à igualdade $\mathrm{M}\,R = \mathrm{M}' R$, que acaba de estabelecer o teorema.

COROLÁRIO 4: — *Se o sub-módulo* N *do teorema 22 for nilmódulo, tem-se* $\mathrm{N} \supset \mathrm{N}'$, *onde* N' *é o sub-módulo mínimo do teorema 23.* Na verdade, a relação $\mathrm{N} = \mathrm{N}'$ levaria a $\mathrm{N}' = \mathrm{M}'$ ou $\mathrm{M}' R = \mathrm{M}'$. O endomorfismo R seria potente, o que não pode ter lugar.

O nilmódulo N', tratado como N, ou levaria a $\mathrm{M}\,\mathfrak{n}'^r = \mathrm{M}'' = (0)$, ou permitiria continuar a cadeia $\mathrm{N} \supset \mathrm{N}'$, de modo a formar $\mathrm{N} \supset \mathrm{N}' \supset \mathrm{N}''$. A condição

de mínimo leva-nos a estabelecer a existência de sub-nilmódulo nilpotente contido em N. Este facto resulta imediatamente da referida condição de mínimo e da circunstância de N ser nilmódulo. Aqui deixa-se, porém, a possibilidade de o sub-módulo nilpotente não ser mínimo.

TEOREMA 24: — *Se* L *é um sub-módulo não nilpotente dum módulo com condição de cadeia descendente, o sub-módulo mínimo não nilpotente* $\mathrm{L}_1 \subseteq \mathrm{L}$ *é tal que existe um endomorfismo* S *satisfazendo a* $\mathrm{L}_1\mathrm{S} = \mathrm{M\,S}$. *O sub-módulo* $\mathrm{M\,S} = \mathrm{N}_1$ *é mínimo entre os sub-módulos* N, *contidos em* L_1, *aos quais correspondem ideais* $\mathfrak{n}$ *por forma que* $\mathrm{L}_1\mathfrak{n} \supset (0)$. Partamos de L e tomemos L_1. É claro que se tem

$$\mathrm{L}_1\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathrm{M}\,\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathrm{L}_1, \qquad \mathrm{M}\,\mathfrak{l}_1^2 \subseteq \mathrm{L}_1\mathfrak{l}_1 = \mathrm{L}_1'.$$

O ideal $\mathfrak{l}_1'$ contém $\mathfrak{l}_1^2$, e, assim, L_1' não é nilpotente. Isso acarreta as igualdades $\mathrm{L}_1\mathfrak{l}_1 = \mathrm{L}_1 = \mathrm{M}\,\mathfrak{l}_1$. Posto isto, consideremos o conjunto dos sub-módulos N nas condições seguintes: $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_1\mathfrak{n} \supset (0)$. Nesse conjunto não vazio, representemos por N_1 o sub-módulo mínimo: $\mathrm{N}_1 \subseteq \mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_1\mathfrak{n}_1 \supset (0)$. Se for $S \in \mathfrak{n}_1$ um endomorfismo tal que $\mathrm{L}_1'' = \mathrm{L}_1 S \supset (0)$, tem-se

$$(0) \subset \mathrm{L}_1 S \subseteq \mathrm{N}_1, \qquad \mathrm{L}_1 S = \mathrm{M}\,\mathfrak{l}_1 S,$$
$$\mathfrak{l}_1'' \supseteq \mathfrak{l}_1 S, \qquad \mathrm{L}_1\mathfrak{l}_1'' \supseteq \mathrm{L}_1\mathfrak{l}_1 S = \mathrm{L}_1 S \supset (0).$$

Conclui-se, deste modo, a igualdade $\mathrm{L}_1 S = \mathrm{N}_1$. E como $\mathrm{L}_1 S \subseteq \mathrm{M}\,S \subseteq \mathrm{N}_1$, vem também $\mathrm{L}_1 S = \mathrm{M}\,S \supset (0)$.

TEOREMA 25: — *Dados* L *e* L_1 *como no teorema anterior, existe um endomorfismo* T *satisfazendo a* $\mathrm{L}_1\mathrm{T} = \mathrm{M\,T}$. *O sub-módulo* $\mathrm{M\,T} = \mathrm{N}_2$ *é mínimo entre os sub-módulos* N *contidos em* L_1, *aos quais correspondem ideais* $\mathfrak{n}$ *por forma que* $\mathfrak{l}_1\mathfrak{n} \supset (0)$. Na verdade, consideremos o conjunto dos sub-módulos N nas condições seguintes: $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{L}_1$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{n} \supset (0)$. Nesse conjunto não vazio, representemos por N_2 o sub-módulo mínimo: $\mathrm{N}_2 \subseteq \mathrm{L}_1$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{n}_2 \supset (0)$. Se for $T \in \mathfrak{n}_2$ um endomorfismo tal que $\mathfrak{l}_1 T \supset (0)$, tem-se

$$(0) \subset \mathrm{L}_1 T = \mathrm{M}\,\mathfrak{l}_1 T \subseteq \mathrm{N}_2, \qquad (\mathrm{L}_1 T = L_1'''),$$
$$\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_1''' \supseteq \mathfrak{l}_1^2 T \supset (0),$$

visto que $\mathrm{M\,l}_1 T = \mathrm{M\,l}_1^2 T \supset (o)$. Conclui-se a igualdade $\mathrm{L}_1 T = \mathrm{N}_2$. E, como $\mathrm{L}_1 T \subseteq \mathrm{M}\,T \subseteq \mathrm{N}_2$, vem também, como afirma o teorema, $\mathrm{L}_1 T = \mathrm{M}\,T \supset (0)$.

O sub-módulo N_1, do teorema 24, é tal que

$$\mathrm{N}_1 \subseteq \mathrm{L}_1, \quad \mathrm{L}_1 \mathrm{n}_1 \supset (o), \quad \mathrm{M\,l}_1 \mathrm{n}_1 \supset (o),$$

de sorte que $\mathrm{l}_1 \mathrm{n}_1 \supset (0)$. Ter-se-á, por isso, $\mathrm{N}_1 \supseteq \mathrm{N}_2$. O sub-módulo N_2, do teorema 25, é tal que

$$\mathrm{N}_2 \subseteq \mathrm{L}_1, \quad \mathrm{l}_1 \mathrm{n}_2 \supset (0), \quad \mathrm{L}_1 \mathrm{n}_2 = \mathrm{M\,l}_1 \mathrm{n}_2 \supset (0),$$

de sorte que $\mathrm{L}_1 \mathrm{n}_2 \supset (0)$. Ter-se-á, por isso, $\mathrm{N}_2 \supseteq \mathrm{N}_1$, e, consequentemente, $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$.

5) **Os módulos com condições de cadeia ascendente** — Se a condição de cadeia ascendente é válida em M, podemos afirmar o que vai seguir-se.

Em primeiro lugar, é condição necessária e suficiente, para que um endomorfismo seja um automorfismo, que seja um homomorfismo [1]. Depois, se A é um endomorfismo qualquer, existe um inteiro s satisfazendo à igualdade

$$\mathrm{M}A^s \cap \mathrm{Q}_{A^s} = (0) \text{ (}^2\text{)}. \qquad (3)$$

Finalmente, são válidas as duas proposições seguintes:

Teorema 26: — *Num módulo* M *com condição de cadeia ascendente, todo o endomorfismo* A, *que não é um automorfismo, ou é um meromorfismo ou determina um meromorfismo num subgrupo* $\mathrm{M}A^s$, *de* M.

Corolário 5: — *Se* N *é um nilmódulo dum módulo com condição ascendente, o expoente dum elemento* $\mathrm{A} \in \mathrm{n}$ *é, quando muito, igual ao inteiro* s *do teorema.*

Façamos as demonstrações, começando pelo teorema. Se A não é um automorfismo, também não é um homomor-

(1) Cfr. N. Jacobson, *loc. cit.*, pág. 8.
(2) *Idem, idem*, pág. 9.

fismo, pelo que se terá $\mathrm{M} \supset \mathrm{M}A$. Poderá ser $\mathrm{Q}_A = (0)$, ou $\mathrm{Q}_A \supset (0)$. No 1.º caso, estamos em presença dum meromorfismo; no 2.º, se s for o menor inteiro tal que $\mathrm{Q}_{A^s} = \mathrm{Q}_{A^{s+1}}$, pondo $\mathrm{P} = \mathrm{M}A^s$, a igualdade (3) tem lugar [1]. Então, A determina em P um meromorfismo, pelo facto de ser $\mathrm{P}A \subseteq \mathrm{P}$ e de apenas o elemento nulo de P ser anulado por A.

Passemos ao corolário. Se pudesse ser $\mathrm{M}A^s \supset (0)$, a sucessão de meromorfismos $\mathrm{M}A^s \simeq \mathrm{M}A^{s+1} \simeq \mathrm{M}A^{s+2} \simeq \ldots$ seria infinita e A não seria nilpotente.

6) **Os módulos com as duas condições de cadeia** — Restrinjamos ainda mais os módulos M, admitindo que são válidas as duas condições de cadeia (diremos, mais simplesmente, módulos com condição dupla de cadeia). Podem fazer-se as seguintes afirmações [1]:

1.ª — Para M, o inteiro r da igualdade (2) é igual ao inteiro s da igualdade (3);

2.ª — Tem lugar a relação $\mathrm{M} = \mathrm{M}A^r + \mathrm{Q}_{A^r}$, como soma directa; para cada $m \in \mathrm{Q}_{A^r}$ é $mA^r = 0$, de sorte que A determina um endomorfismo nilpotente em Q_{A^r} (pois que $\mathrm{Q}_{A^r} A \subseteq \mathrm{Q}_{A^r}$, pelo facto de ser $mA \cdot A^r = 0$, se $mA^r = o$); e, sendo $\mathrm{M}A^r = \mathrm{M}A^{r+1}$, A determina em $\mathrm{M}A^r$ um homomorfismo que é um automorfismo;

3.ª — para cada endomorfismo A dum grupo indecomponível (com condição dupla de cadeia, bem entendido), ou é $\mathrm{M} = \mathrm{M}A^r = \mathrm{M}A$, com $\mathrm{Q}_A = (0)$, pelo que A é um automorfismo; ou é $\mathrm{M} = \mathrm{Q}_{A^r}$, com $\mathrm{M}A^r = (0)$, pelo que A é um endomorfismo nilpotente.

Vamos agora demonstrar alguns teoremas [2].

(1) Cfr. N. Jacobson, *loc. cit.*, págs. 9 e 11.
(2) Os teoremas de n.os 27 e 28 são devidos a J. Levitzki, que os deu, pròpriamente, para a teoria dos anéis. Veja-se a memória desse autor «*Über nilpotente Unterringe*», *Mathematische Annalen*, Band 105, 1931, págs. 620 a 627. Pode ver-se igualmente Almeida Costa, *loc. cit.*, págs. 45 a 49, onde, como aqui, se reproduzem as demonstrações de Levitzki.

TEOREMA 27: — *Dado um sub-módulo* N, *de comprimento* $\leqq c$, *dum módulo* M *com condição dupla de cadeia, se* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_c$ *são endomorfismos de* M *tais que* $\mathrm{N}\,\mathrm{A}_1 \dots \mathrm{A}_c \supset (0)$ *e* $\mathrm{N}\,\mathrm{A}_i \subseteqq \mathrm{N}$, *existe um sub-módulo* N_1 *verificando as relações seguintes:* $(0) \subset \mathrm{N}_1 \subseteqq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}_1 = (\mathrm{N}_1 \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{N}_1 \mathrm{A}_c)$.

Ponhamos $\mathrm{N} \supseteqq \mathrm{N}' = (\mathrm{N} A_1, \dots, \mathrm{N} A_c)$. O sub-módulo N' é $\neq (0)$, visto que $\mathrm{N}' \supseteqq \mathrm{N} A_1 \supset (0)$. Ponhamos, depois, $\mathrm{N} \supseteqq \mathrm{N}' \supseteqq \mathrm{N}'' = (\mathrm{N}' A_1, \dots, \mathrm{N}' A_c)$, com $\mathrm{N}' A_i \subseteqq \mathrm{N} A_i$. O sub-módulo N'' é $\neq (0)$, visto que $\mathrm{N}'' \supseteqq \mathrm{N}' A_2 \supseteqq \mathrm{N} A_1 A_2 \supset (0)$. Podemos prosseguir e estabelecer a série normal

$$\{\mathrm{N} \supseteqq \mathrm{N}' \supseteqq \mathrm{N}'' \supseteqq \dots \supseteqq \mathrm{N}^{(c)} \supset (0)\},$$

com $\mathrm{N}^{(c)} \supseteqq \mathrm{N} A_1 \dots A_c \supset (0)$. Como o comprimento desta série normal é $c+1$ e o comprimento de N é $\leqq c$, haverá repetição. Pondo

$$\mathrm{N}^{(i+1)} = (\mathrm{N}^{(i)} A_1, \dots, \mathrm{N}^{(i)} A_c) = \mathrm{N}^{(i)},$$

fica demonstrado o teorema.

TEOREMA 28: — *Dado um sub-módulo* $\mathrm{N} \supset (0)$, *de comprimento* $\leqq c$, *dum módulo com condição dupla de cadeia, se* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_c$ *são endomorfismos de* M *tais que* $\mathrm{A}_1 \dots \mathrm{A}_c \neq 0$ *e* $\mathrm{N} = (\mathrm{N}\,\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{N}\,\mathrm{A}_c)$, *existe um endomorfismo não nilpotente de* M *que é um produto de potências dos* A_i. Destaquemos, de entre os $\mathrm{N} A_i$, todos os que podem ser desprezados, sem que a soma dos demais deixe de ser N. Será, por ex.,

$$\mathrm{N} = (\mathrm{N} B_1, \dots, \mathrm{N} B_d),$$

com $d \leqq c$, e onde os B_j são elementos A_i. Se fosse $d = 1$, a relação $\mathrm{N} = \mathrm{N} B_1$ daria $\mathrm{N} B_1^m = \mathrm{N} \supset (0)$, e B_1 seria um endomorfismo nas condições do teorema. Supondo $d > 1$, observemos que se tem

$$(0) \subset \mathrm{N} \supset \mathrm{N} B_d = (\mathrm{N} B_1 B_d, \dots, \mathrm{N} B_d B_d) \supset (0).$$

Escrevendo $B_d = B_{m_1}$, designemos com B_{m_2} um elemento B_j tal que

$$(0) \subset \mathrm{N} B_{m_2} B_{m_1} = (\mathrm{N} B_1 B_{m_2} B_{m_1}, \dots, \mathrm{N} B_d B_{m_2} B_{m_1}).$$

Vê-se existir uma sucessão $B_{m_1}, B_{m_2}, \dots$ tal que $\mathrm{N} B_{m_{c^2}} \dots B_{m_1} \supset (0)$, qualquer que seja o inteiro positivo c^2. Vamos verificar a existência dum sub-módulo N' e de endomorfismos $A'_1, \dots, A'_c$, formados por produtos dos A_j, satisfazendo às condições

$$\mathrm{N} \supset \mathrm{N}' \supset (0), \quad A'_1 \dots A'_c \neq 0, \quad \mathrm{N}' = (\mathrm{N}' A'_1, \dots, \mathrm{N}' A'_c).$$

Distinguiremos dois casos. No primeiro, admitiremos que há um produto de c dos B_{m_k}, consecutivos em $B_{m_{c^2}}, \dots, B_{m_1}$, e qual não contém $B_{m_1} = B_d$. No segundo, faremos a hipótese contrária. Se se dá o primeiro, suponhamos $A'_1 \dots A'_c$ o produto em causa. Tem-se

$$\mathrm{N} A'_1 \dots A'_c \supset (0), \qquad \mathrm{N} A'_i \subseteqq \mathrm{N},$$

e, conforme o teorema anterior,

$$(0) \subset \mathrm{N}' \subseteqq \mathrm{N}, \qquad \mathrm{N}' = (\mathrm{N}' A'_1, \dots, \mathrm{N}' A'_c).$$

Como em $A'_1, \dots, A'_c$ não figura B_d, será

$$(\mathrm{N} A'_1, \dots, \mathrm{N} A'_c) \subset \mathrm{N}, \qquad \text{e, portanto, } \mathrm{N}' \subset \mathrm{N}.$$

Se, a partir de N' e dos A'_i, se pode formar o endomorfismo não nilpotente pedido, o teorema fica demonstrado. Não sendo assim, o raciocínio continua. Supondo, nos termos do 2.° caso, que cada c factores consecutivos do produto $P = B_{m_{c^2}} \dots B_{m_1}$ contém $B_{m_1} = B_d$, podemos escrever, por ex., $P = P_l B_{m_1} \cdot P_{l-1} B_{m_1} \cdot \dots \cdot P_1 B_{m_1}$, onde $P_1, P_2, \dots$ são produtos dos A_i pela ordem porque figuram em P, contendo cada P_j menos de c factores. A decomposição de P contém c factores, pelo menos, de modo que existe sempre uma parte de P,

$$P' = A'_{i_1} \dots A'_{i_c}, \qquad A'_{i_j} = P_{i_j} B_{m_1},$$

onde os A'_i são consecutivos em P. Como no primeiro caso, tem-se agora

$$\mathrm{N}P' \supset (0), \qquad \mathrm{N}A'_{ij} \subseteq \mathrm{N},$$

de sorte que existe N', nos termos do teorema 27, satisfazendo a

$$(0) \subset \mathrm{N}' \subseteq \mathrm{N}, \qquad \mathrm{N}' = (\mathrm{N}'A'_1, \ldots, \mathrm{N}'A'_c).$$

Para se ver que $\mathrm{N}' \subset \mathrm{N}$, basta ter em conta que

$$\mathrm{N}A'_{ij} = \mathrm{N}P_{ij}B_{m1} \subseteq \mathrm{N}B_{m_1}.$$

Em resumo: quando $d > 1$, há sempre um sub-módulo N' nas condições seguintes:

$$(0) \subset \mathrm{N}' \subset \mathrm{N}, \quad \mathrm{N}' = (\mathrm{N}'A'_1, \ldots, \mathrm{N}'A'_c), \quad A'_1 \ldots A'_c \neq 0,$$

onde os A'_i são produtos dos A_j.

Partindo de N', o raciocínio repete-se. Obtém-se a sucessão de sub-módulos

$$\mathrm{N} \supset \mathrm{N}' \supset \mathrm{N}'' \supset \ldots, \tag{4}$$

que prossegue enquanto não for possível chegar a

$$(0) \subset \mathrm{N}^{(t)} \subset \mathrm{N}^{(t-1)}, \qquad \mathrm{N}^{(t)}B = \mathrm{N}^{(t)}, \tag{5}$$

onde B é um produto dos A_j. A condição descendente limita a cadeia (4), e da igualdade escrita em (5) tira-se o teorema. B é o endomorfismo procurado.

COROLÁRIO 6: — *Se* $\mathbf{C}$ *é um conjunto de endomorfismos nilpotentes, dum módulo com condição dupla de cadeia, e se o conjunto é fechado relativamente ao produto, então, supondo* M *de comprimento* n, *o produto de* n *elementos de* $\mathbf{C}$ *é nulo* (1). Sejam $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{C}$ e $A_1 \ldots A_n \neq 0$. O módulo M verificará as seguintes condições: $\mathrm{M}A_1 \ldots A_n \neq (o)$, $\mathrm{M}A_i \subseteq \mathrm{M}$. Existirá, nos termos do teorema 27, N_1 tal que

$$(o) \subset \mathrm{N}_1 \subseteq \mathrm{M}, \qquad \mathrm{N}_1 = (\mathrm{N}_1A_1, \ldots, \mathrm{N}_1A_n).$$

(1) N. JACOBSON, *loc. cit*, pág. 59.

Depois, pelo teorema 28, existirá um endomorfismo não nilpotente de M que é um produto dos A_i. Este resultado é absurdo, visto que um tal produto pertence a $\mathbf{C}$. Deverá ter-se $A_1 \ldots A_n = 0$.

COROLÁRIO 7: — *Num módulo de comprimento* n, *é condição necessária e suficiente, para que o sub-módulo* N *seja nilmódulo, que se tenha* $\mathrm{n}^{\mathrm{n}} = (0)$.

COROLÁRIO 8: — *Se* M *é um módulo com condição dupla de cadeia, o radical do seu anel de endomorfismos é nilpotente. O expoente é, quando muito, igual ao comprimento do módulo.*

TEOREMA 29: — *Se* M *é um módulo indecomponível com condição dupla de cadeia, o radical do seu anel de endomorfismos é o conjunto dos seus endomorfismos nilpotentes.* Em primeiro lugar, todo o elemento do radical é nilpotente. Em seguida, se A é nilpotente, suponhamos $A^{r-1} \neq 0$, $A^r = 0$, e consideremos o ideal direito gerado por A, que é da forma $A\mathbf{R}$. Vamos ver que este ideal é nilpotente. Todos os seus elementos são nilpotentes, pois que, se AS, com $S \in \mathbf{R}$, o não fosse, seria um automorfismo H. De $AS = H$, tirar-se-ia $A^r S = A^{r-1} H = 0$, que é um absurdo. Do facto de $A\mathbf{R}$ ser nilideal se tira agora, pelo corolário 6, a sua nilpotência. O teorema está provado.

7) **Sobre o anel** $\mathbf{R}$ — O objectivo do § 8 é detalhar o estudo do radical V, de $\mathbf{R}$, no caso dos módulos com condição dupla de cadeia. Não obstante isso, começaremos por lembrar neste § certos resultados e notações relativos aos módulos em geral.

Suponhamos M uma soma directa da forma

$$\mathrm{M} = \mathrm{N}_1 + \ldots + \mathrm{N}_t.$$

Dado $m \in \mathrm{M}$, escrevamos $m = n_1 + \ldots + n_t$, com $n_i \in \mathrm{N}_i$. A correspondência $m \to n_i$ é um endomorfismo $E_i \in \mathbf{R}$. Pondo $E_i^2 = E_i \cdot E_i$, vê-se imediatamente que E_i é idempotente. Também se verificam as relações $E_i \cdot E_j = 0$, se $i \neq j$. O endomorfismo idêntico $u \in \mathbf{R}$ tem a seguinte decomposição: $u = E_1 + \ldots + E_t$. Quanto a $\mathbf{R}$, valem as igualdades

$$\mathbf{R} = E_1 \mathbf{R} + \ldots + E_t \mathbf{R} = \mathbf{R} E_1 + \ldots + \mathbf{R} E_t .$$

Uma homormorfia $\mathbf{N}_i \sim \mathbf{N}_j$, representada, dum modo geral, por Σ_{ij}, prolonga-se e torna-se num endomorfismo de $\mathbf{M}$, considerando o símbolo

$$E_i \Sigma_{ij} = E_i \Sigma_{ij} E_j = S_{ij} . \tag{6}$$

Um endomorfismo $S \in \mathbf{R}$ determina sempre t^2 endomorfismo S_{ij}, pois que se tem

$$m S = \sum_i n_i S = \sum_i m E_i S = \sum_{i,j} m E_i S E_j = m \cdot \sum_{i,j} S_{ij} ,$$

com $S_{ij} = E_i S E_j$. Este símbolo S_{ij} pode escrever-se ainda, efectivamente,

$$S_{ij} = E_i \, . \, E_i S E_j = E_i \Sigma_{ij} E_j . \tag{6'}$$

Poremos

$$S = \sum_{i,j}' S_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) . \tag{7}$$

Inversamente, o 2.º membro da igualdade anterior representa um endomorfismo S, como soma de endomorfismos de $\mathbf{M}$. (7) dá, assim, uma representação biunívoca dos endomorfismos $S \in \mathbf{R}$. Os endomorfismos S_{ij} são elementos pertencentes aos anéis $E_i \mathbf{R} E_j = \mathbf{R}_{ij}$. Para estes anéis, são válidas as igualdades (¹)

$$\mathbf{R} = \sum_i E_i \mathbf{R} = \sum_{i,j} E_i \mathbf{R} E_j = \sum_{i,j} \mathbf{R}_{ij} ,$$

$$\mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jl} \subseteq \mathbf{R}_{il}, \quad \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{hl} = (0) , \quad (j \neq h) . \tag{8}$$

(¹) Para todo este §, cfr. VAN DER WAERDEN, *loc. cit.*; N. JACOBSON, *loc. cit.*, págs. 57 e seguintes; e ALMEIDA COSTA, *loc. cit.*, págs. 226 e seguintes.

De (7) tira-se

$$S + T = \sum_{i,j} (S_{ij} + T_{ij}) ,$$

$$R = S T = \sum_{i,j,h,l} S_{ij} T_{hl} = \sum_{i,j,h,l} E_i S E_j E_h T E_l =$$

$$= \sum_{i,j,l} E_i S E_j \, . \, E_j T E_l = \sum_{i,l} R_{il} ,$$

onde

$$R_{il} = \sum_j S_{ij} T_{lj} .$$

Há uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbf{R}_{ij}$ e as homomorfias Σ_{ij}, como se conclui de (6) e (6'). O anel $\mathbf{R}_{ij}$ não pode, contudo, designar-se como anel das homomorfias $\mathbf{N}_i \sim \mathbf{N}_j$, pela razão de não ter sentido falar do produto de duas tais homomorfias.

Consideremos, porém, o anel $\mathbf{R}_{ii}$. A sua interpretação como *anel dos endomorfismos de* $\mathbf{N}_i$ resulta da biunivocidade já referida e dos raciocínios a seguir. Em primeiro lugar, tem sentido falar do produto de dois endomorfismos; depois disso, vamos ver que a soma e o produto de dois elementos de $\mathbf{R}_{ii}$ definem, respectivamente, a soma e o produto dos endomorfismos correspondentes. De facto, se forem $S_{ii} = E_i S E_i$, $T_{ii} = E_i T E_i$, tem-se, sucessivamente, atendendo a (6'),

$$S_{ii} + T_{ii} = E_i \, . \, E_i S E_i + E_i \, . \, E_i T E_i =$$

$$= E_i \Sigma_{ii} + E_i \mathrm{T}_{ii} = E_i (\Sigma_{ii} + \mathrm{T}_{ii}) ,$$

$$S_{ii} T_{ii} = E_i \Sigma_{ii} \, . \, E_i \mathrm{T}_{ii} = E_i \Sigma_{ii} \mathrm{T}_{ii} \ (^1).$$

É válido o seguinte

TEOREMA 30: — *Dada a decomposição* $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1 + \ldots + \mathbf{N}_t$, *supondo* $u = \mathrm{E}_1 + \ldots + \mathrm{E}_t$, *o anel* $\mathbf{R}_{ii} = \mathrm{E}_i \mathbf{R} \mathrm{E}_i$ *é isomorfo do anel dos endomorfismos do sub-módulo* $\mathbf{N}_i$.

(¹) Pede-se ao leitor o cuidado de distinguir os dois símbolos T_{ii} e T_{ii}.

Imaginemos que, na decomposição de $\mathbf{M}$, os $\mathbf{N}_i$ são todos isomorfos. Representemos por Δ_{1i} o isomorfismo conhecido $\mathbf{N}_1 \simeq \mathbf{N}_i$. O símbolo Δ_{i1} representará o isomorfismo inverso. Ponhamos $E_1 \Delta_{1i} = E_{1i}$, $E_i \Delta_{i1} = E_{i1}$. Vê-se que se tem

$$m E_{1i} E_{i1} = m E_1 \Delta_{1i} E_i \Delta_{i1} = n_1 \Delta_{1i} E_i \Delta_{i1} =$$
$$= n_1 \Delta_{1i} \Delta_{i1} = n_i' \Delta_{i1} = n_1,$$

se n_i' representa o correspondente de n_1 por via de Δ_{1i}. Daqui se concluem as relações $E_{1i} E_{i1} = E_{11} = E_1$. Por definição, poremos

$$E_{ij} = E_{i1} E_{1j}.$$

Têm, então, lugar as igualdades

$$E_{ij} E_{jl} = E_{il}, \quad E_{ij} E_{kl} = 0, \quad (j \neq k).$$

Em $\mathbf{R}$, por consequência, há elemento um e um sistema de t^2 matrizes unidades E_{ij}. $\mathbf{R}$ é um *produto directo de* WEDDERBURN. Podemos enunciar esta proposição:

TEOREMA 31: — *O anel* $\mathbf{R}$ *dos endomorfismos dum módulo, soma directa de* t *sub-módulos isomorfos, é um anel completo de matrizes do grau* t *com elementos dum sub-anel* $\mathbf{Z}$, *de* $\mathbf{R}$. *O anel* $\mathbf{Z}$ *é isomorfo de* $\mathbf{R}_{11}$ *e os seus elementos são da forma* $\Theta = \Sigma \mathrm{E}_{i1} \mathrm{T} \mathrm{E}_{1i}$ [1].

Neste caso, as primeiras relações (8) escrevem-se

$$\mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{il} = E_i \mathbf{R} E_j \mathbf{R} E_l = E_i \mathbf{R} E_l = \mathbf{R}_{il}',$$

em virtude de ser $\mathbf{R} E_j \mathbf{R}$ um ideal bilateral de $\mathbf{R}$ que contém os elementos da forma $E_{ij} E_{jj} E_{jk} = E_{ik}$, e, portanto, u.

Em (7), tem-se

$$S_{ij} = E_{ij} T_{ij}, \quad T_{ij} = \sum_k E_{ki} S E_{jk}, \quad S = \sum_{i,j} E_{ij} T_{ij},$$

(1) Veja-se, nesta Revista, ALMEIDA COSTA, *Sobre os grupos abelianos*, tomo XXVII, 1942. A 3.ª condição indicada no começo do § 16 desse artigo é supérflua.

pois que, efectivamente,

$$E_{ij} T_{ij} = E_{ij} E_{ji} S E_{jj} = E_{ii} S E_{jj} = E_i S E_j.$$

OBSERVAÇÕES: — O anel $\mathbf{R}$ também se designa o *absoluto direito dos endomorfismos de* $\mathbf{M}$. Nos raciocínios feitos, um produto AB, de dois endomorfismos, significa que deve efectuar-se primeiramente A, depois B. Se se imaginasse a hipótese contrária, conviria colocar os endomorfismos à esquerda de $\mathbf{M}$, e escrever, por ex.: $(A' B' m = A' (B' m))$. O anel dos endomorfismos A' representar-se-ia por $\mathbf{R}'$ e designar-se-ia por *anel dos endomorfismos à esquerda de* $\mathbf{M}$ ou *absoluto esquerdo de* $\mathbf{M}$. $\mathbf{R}'$ seria anti-isomorfo de $\mathbf{R}$ e um ideal esquerdo $\mathbf{n}$, relativo ao sub-módulo $\mathbf{N}$, de $\mathbf{M}$, seria substituído por um ideal direito $\mathbf{n}'$. Havendo um domínio operatório Ω, para $\mathbf{M}$, os anéis dos endomorfismos — Ω receberiam, respectivamente, as notações $\mathbf{R}_\Omega$ e $\mathbf{R}'_\Omega$.

Aplicações da teoria dos endomorfismos dos módulos à teoria das representações dos sistemas hiper-complexos podem ver-se expostas em ALMEIDA COSTA, «*Sistemas hiper-complexos e representações*». São devidas a E. NOETHER, que as deu na memória seguinte: «*Nichtkommutative*», *Mathematische Zeitschrift*, Band 37, 1933.

8) **O radical de** $\mathbf{R}$ [1] — Este §, como dissemos, destina-se a um estudo mais pormenorizado do radical $\mathbf{V}$, de $\mathbf{R}$, na hipótese de ser válida em $\mathbf{M}$ a condição dupla de cadeia. Imaginemos $\mathbf{M}$ decomposto em sub-módulos indecomponíveis: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_r$.

Dado $B \in \mathbf{R}$, tem-se $B = \Sigma B_{ij}$, com $B_{ij} \in \mathbf{R}_{ij}$. Ao formar-se B, podem dar-se duas hipóteses: 1.ª — nenhum B_{ij} determina um isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j$; 2.ª — há um B_{ij}, pelo menos, que define um tal isomorfismo.

Tratemos a 2.ª hipótese. Seja B_{kl} o B_{ij} em questão. Existe, então, um C_{lk} tal que $B_{kl} C_{lk} = B_k$ satisfaz a

$$\mathbf{M}_k B_k = \mathbf{M}_k, \quad \text{com} \quad m_k B_k = m_k, \quad (m_k \in \mathbf{M}_k).$$

(1) Cfr. N. JACOBSON, *loc. cit.*, págs. 59 a 62.

É fácil de ver que $B \notin \mathbf{V}$. De facto,

$$B C_{lk} = \sum_i B_{il} C_{lk} = B_k + \sum_{i \neq k} B_{il} C_{lk},$$

$$B_k B C_{lk} = B_k^2 + \sum_{i \neq k} B_k B_{il} C_{lk}.$$

O último somatório é nulo. Se fosse $B \in \mathbf{V}$, seria também $B_k^2 \in \mathbf{V}$, o que é absurdo, visto que B_k^2 não é nilpotente.

Só podem pertencer a $\mathbf{V}$, portanto, os elementos $B = \sum B_{ij}$, nas condições da 1.ª hipótese. Demonstraremos o seguinte

TEOREMA 32: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo com condição dupla de cadeia, o seu radical nilpotente* $\mathbf{V}$ *compõe-se de todos os elementos* $\mathrm{B} = \sum \mathrm{B}_{ij}$, *onde nenhum* B_{ij} *define um isomorfismo* $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j$. Comecemos por considerar o conjunto dos endomorfismos da forma $B_{ij} A_{kl}$, onde B_{ij} é fixo e $A_{kl} \in \mathbf{R}_{kl}$. O referido conjunto é fechado relativamente ao produto, pois:

$$B_{ij} A_{kl} = 0, \text{ se } j \neq k;$$

$$B_{ij} A_{jl} \cdot B_{ij} C_{jk} = \begin{cases} 0, \text{ se } l \neq i; \\ B_{ij} \cdot A_{ji} B_{ij} C_{jk} = B_{ij} D_{jk}, \text{ se } l = i. \end{cases}$$

Mostremos, em seguida, que $B_{ij} D_{jk}$ é nilpotente. Para isso, observemos que

$$B_{ij} D_{jk} \cdot B_{ij} D_{jk} = \begin{cases} 0, \; k \neq i; \\ B_{ij} D_{ji} \cdot B_{ij} D_{ji}, \text{ se } k = i. \end{cases}$$

Relativamente ao produto $B_{ij} D_{ji} = C_{ii}$, a nilpotência resulta como vai seguir-se. O endomorfismo do grupo indecomponível $\mathbf{M}_i$, definido por C_{ii}, não é automorfismo, porque, se o fosse, ter-se-ia

$$\mathbf{M}_i B_{ij} D_{ji} = \mathbf{M}_j' D_{ji} = \mathbf{M}_i,$$

onde $\mathbf{M}_j' \subseteq \mathbf{M}_j$ seria a imagem de $\mathbf{M}_i$ definida por B_{ij}. É claro que haveria um primeiro isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j'$, depois um segundo $\mathbf{M}_j' \simeq \mathbf{M}_i$, este definido por D_{ji}. O primeiro isomorfismo, por hipótese, levaria a $\mathbf{M}_j' \subset \mathbf{M}_j$. Da aplicação de D_{ji} a $\mathbf{M}_j$ resultaria haver vários elementos $m_j \in \mathbf{M}_j$ levando ao mesmo $m_i \in \mathbf{M}_i$. Se $\mathbf{M}_j''$ representasse o conjunto dos m_j para os quais $m_j D_{ji} = 0$, teria lugar a soma directa $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j' + \mathbf{M}_j''$, pois, dado m_i, suponhamos realizarem-se as correspondências

$$m_j \rightarrow m_i, \quad m_j' \rightarrow m_i, \quad m_j - m_j' \rightarrow 0, \quad (m_j' \in \mathbf{M}_j'),$$

e, portanto, ser

$$m_j - m_j' = m_j'', \quad m_j = m_j' + m_j'', \quad (m_j'' \in \mathbf{M}_j'').$$

Então, se $m_j' + m_j'' = 0$, como

$$m_j' \rightarrow m_i, \quad m_j'' \rightarrow 0,$$

será $m_i = 0$ e $m_j' = -m_j'' = 0$, o que justifica a afirmação. A circunstância de $\mathbf{M}_j$ ser indecomponível levaria a $\mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j'$ e B_{ij} definiria um isomorfismo $\mathbf{M}_i \simeq \mathbf{M}_j$, contra a hipótese.

Conclui-se, assim, que um produto de factores $B_{ij} A_{kl}$ é nulo, se o seu número for igual ao comprimento de $\mathbf{M}$. Nessas condições, formemos o ideal direito gerado por B_{ij}. Os seus elementos são da forma

$$B_{ij} \cdot \sum_{k,l} A_{kl} = \sum_l B_{ij} A_{jl}.$$

Ora acabamos de ver que um produto dum certo número destes elementos é nulo. O ideal direito em questão é nilpotente e $B_{ij} \in \mathbf{V}$. Também $B \in \mathbf{V}$, se estiver nas condições do teorema, o qual fica demonstrado.

TEOREMA 33: — *Se* $\mathbf{M}$ *é um módulo com condição dupla de cadeia, dada a decomposição* $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \ldots + \mathbf{M}^{(r)}$, *onde cada* $\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{M} E^{(i)}$ *se decompõe numa soma de sub-módulos indecomponíveis isomorfos, não isomorfos dos sub-módulos da* *decomposição de* $\mathrm{M}^{(j)}\ (i \neq j)$, *o radical* V, *do anel* R *dos endomorfismos de* M, *pode escrever-se sob a forma*

$$\mathrm{V} = \sum_{i \neq j} E^{(i)} \mathrm{R} E^{(j)} + \sum_{i} E^{(i)} \mathrm{V} E^{(i)}.$$

Nos termos do teorema anterior, podemos afirmar que $E^{(i)} \mathrm{R} E^{(j)} \subseteq \mathrm{V}$, se $i \neq j$. Assim todo o elemento do 2.º membro pertence a V. A inversa é verdadeira, porque, para cada $R \in \mathrm{V}$, se tem $R = \sum_{i,j} E^{(i)} R E^{(j)}$.

Precisemos ainda que $E^{(i)} \mathrm{V} E^{(i)} = E^{(i)} \mathrm{R} E^{(i)} \cap \mathrm{V}$ é o radical de $E^{(i)} \mathrm{R} E^{(i)}$.

É claro que um elemento do 1.º membro pertence ao 2.º; por outro lado, dado $R' \in \mathrm{V}$ da forma $E^{(i)} S E^{(i)}$, tem-se também $R' = E^{(i)} R' E^{(i)}$, de sorte que um elemento do 2.º membro pertence ao 1.º. Provada a igualdade, observemos que todo o nilideal de R é nilpotente e que, por isso, o radical de Köthe [1] coincide com V. Então, o radical de Köthe de $E^{(i)} \mathrm{R} E^{(i)}$ é $E^{(i)} \mathrm{V} E^{(i)}$; e, como $E^{(i)} \mathrm{R} E^{(i)}$ é isomorfo do anel dos endomorfismos de $\mathrm{M}^{(i)}$, também o seu radical coincide com o radical de Köthe [2].

9) **Os módulos homogéneos** — Neste § estuda-se a estrutura de R, no caso especial de o módulo M, com condição dupla de cadeia, ser uma soma directa de sub-módulos indecomponíveis isomorfos. M diz-se, então, *homogéneo* [3].

Teorema 34: — *O anel* R *dos endomorfismos dum módulo homogéneo é primário, por ter radical e ser anel completo de matrizes com elementos dum anel completamente primário* [4]. Por hipótese, em $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 + \ldots + \mathrm{M}_r$ os M_i são isomorfos. R é um anel completo, Z_r, de matrizes do grau r com elementos dum anel Z, nas condições seguintes:

$$Z \simeq E_1 \mathrm{R} E_1 = \mathrm{R}_{11} = \mathrm{R}_{11} E_1, \qquad \mathrm{R} = Z_r.$$

(1) G. Köthe, *loc. cit.*.
(2) Cfr. Almeida Costa — *Sistemas hiper-complexos...*, pág. 24.
(3) Cfr. N. Jacobson, *loc. cit.*, pág. 61.
(4) Cfr. Almeida Costa — *Sistemas hiper-complexos...*, pág. 73.

Como M_1 é indecomponível, o anel R_1 dos seus endomorfismos, isomorfo de R_{11}, é completamente primário. Efectivamente, tomemos um ideal direito $\mathfrak{r}$, de R_1. Se um automorfismo $H_1 \in \mathfrak{r}$, também o endomorfismo um pertence a $\mathfrak{r}$ e tem-se $\mathfrak{r} = \mathrm{R}_1$. Por consequência, R_1 goza das propriedades seguintes, características de anel completamente primário: tem elemento um e todo o ideal $\neq \mathrm{R}_1$ é nilideal (aqui, ideal nilpotente). Finalmente, o teorema está provado, porque a existência de radical de Köthe está assegurada para R.

Precisemos outros resultados. Tem lugar aqui as relações $\mathrm{R}_{ij} \mathrm{R}_{jl} = \mathrm{R}_{il}$. De resto, pode ver-se que $\mathrm{R} E_k \mathrm{R} = \mathrm{R}$, notando ser $\mathrm{R} E_k \mathrm{R}$ um ideal bilateral, não nilideal [1]. Como $\mathrm{M}_i \simeq \mathrm{M}_k$, existe S_{ik} tal que $\mathrm{M}_i S_{ik} = \mathrm{M}_k$. Se for T_{ki} o endomorfismo que determina o isomorfismo, $\mathrm{M}_k \simeq \mathrm{M}_i$, é claro que $S_{ik} T_{ki} = E_i$, visto ser, para $m \in \mathrm{M}$,

$$m S_{ik} T_{ki} = m E_i S_{ik} T_{ki} = m_i S_{ik} T_{ki} = m_i = m E_i.$$

Como $S_{ik} \mathrm{R}_{ki} \cdot \mathrm{R}_{ii} = S_{ik} \mathrm{R}_{ki}$, conclui-se ser $S_{ki} \mathrm{R}_{ki}$ ideal direito de R_{ii}.

O ideal contém E_i, e, portanto, contém $E_i \mathrm{R}_{ii} = \mathrm{R}_{ii}$. Assim

$$S_{ik} \mathrm{R}_{ki} = \mathrm{R}_{ii}, \qquad T_{ki} \mathrm{R}_{ik} = \mathrm{R}_{kk}.$$

A existência de elemento regular S_{ik}, isto é, de elemento verificando a condição $S_{ik} \mathrm{R}_{ki} = \mathrm{R}_{ii}$, constitui um facto conhecido da teoria dos anéis primários, que aqui se demonstra duma maneira mais simples [2].

Corolário 9: — *O anel* R *dos endomorfismos dum módulo completamente redutível, soma directa de* $\mathfrak{r}$ *sub-módulos isomorfos, é um anel completo de matrizes de grau* $\mathfrak{r}$ *com elementos dum corpo isomorfo do corpo dos endomorfismos de cada sub-módulo.*

(1) Cfr. Almeida Costa, *Sistemas hiper-complexos...*, pág. 70.
(2) *Idem, idem*, pág. 71.

10) **Os módulos completamente redutíveis** — Suponhamos ainda que a decomposição de M em sub-módulos indecomponíveis tem o aspecto

$$\mathrm{M}=\mathrm{N}_1+\cdots+\mathrm{N}_h+\mathrm{N}_{h+1}+\cdots+\mathrm{N}_{h+m}+\cdots,$$

onde os N_i são simples, nas condições seguintes: os h primeiros são isomorfos, os m imediatos são também isomorfos, mas não isomorfos dos anteriores, etc. Pondo $\mathrm{M}_1=\mathrm{N}_1+\cdots+\mathrm{N}_h$, $\mathrm{M}_2=\mathrm{N}_{h+1}+\cdots+\mathrm{N}_{h+m},\ldots,$

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2+\cdots+\mathrm{M}_r,$$

aparece o anel R com o aspecto

$$\mathrm{R}=\sum_{i,j}\mathrm{R}_{ij},\qquad(\mathrm{R}_{ij}=E_i\mathrm{R}E_j,\ \mathrm{M}_i=\mathrm{M}E_i).$$

Vamos ver que é $\mathrm{R}_{ij}=(0)$, se $i\neq j$. Uma homomorfia $\mathrm{M}_i\sim\mathrm{M}_j$ leva de M_i a $\mathrm{M}'_j\subseteq\mathrm{M}_j$. Como M é completamente redutível, tem-se

$$\mathrm{M}'_j=\mathrm{M}''_1+\cdots+\mathrm{M}''_\rho\simeq\mathrm{M}_i/\mathrm{N},$$

$$\mathrm{M}_i=\mathrm{N}+\mathrm{M}'_1+\cdots+\mathrm{M}'_\sigma,\quad\mathrm{M}_i/\mathrm{N}\simeq\mathrm{M}'_1+\cdots+\mathrm{M}'_\sigma,$$

onde os M'' e M' são simples. Conclui-se

$$\mathrm{M}''_1+\cdots+\mathrm{M}''_\rho\simeq\mathrm{M}'_1+\cdots+\mathrm{M}'\ .$$

Este resultado só pode subsistir se os dois membros forem nulos. Portanto, é $\mathrm{M}_i\sim\mathrm{M}'_j=(0)$, como se afirmou. O anel R reduz-se a

$$\mathrm{R}=\sum\mathrm{R}_{ii},\qquad(\mathrm{R}_{ii}=E_i\mathrm{R}E_i).$$

Assim, tendo em conta que R_{ii} é isomorfo do anel dos endomorfismos de M_i, pode enunciar-se o

TEOREMA 35: — *O anel R dos endomorfismos dum módulo M completamente redutível é uma soma de anéis completos de matrizes que se anulam mùtuamente. O número de parcelas é o número de sistemas de sub-módulos isomorfos em que se decompõe M, pressuposto que em cada sistema figuram todos os sub-módulos isomorfos, e os graus das diferentes matrizes são dados pelos números de sub-módulos de cada sistema. Finalmente, os elementos das matrizes dum anel parcela pertencem a corpos isomorfos dos corpos endomórficos de cada sub-módulo simples a que corresponde a referida parcela.* Mais simplesmente: *R é um anel semi-simples.*

Seja M um módulo que verifica a condição de cadeia descendente e tal que o radical V do seu anel de endomorfismos é nulo. Um tal módulo será designado abreviadamente por *módulo semi-simples*, se a cada sub-módulo simples P corresponder um ideal $\mathfrak{p}\neq(0)$. Vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA 36: — *Um módulo semi-simples M é completamente redutível.*

Tomemos, em M, um sub-módulo mínimo $\mathrm{M}_1\neq(0)$. O ideal $\mathfrak{m}_1$ não pode ser nilideal, pois que, se o fosse, seria nilpotente e de expoente 2, isto é, seria $\mathfrak{m}_1^2=(0)$ e haveria radical $\mathrm{V}\neq(0)$. Pelo facto de M_1 ser sub-módulo regular mínimo, há, em M_1, imagem homorfa de M definida por um idempotente E_1. Supondo, assim, $\mathrm{M}E_1\subseteq\mathrm{M}_1$, ter-se-á $\mathrm{M}E_1=\mathrm{M}_1$ e

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}E_1+\mathrm{M}(u-E_1)=\mathrm{M}_1+\mathrm{M}'.$$

Para cada $m'\in\mathrm{M}'$ vale $m'E_1=0$. Vamos supor $\mathrm{M}'\neq(0)$. Se M' não é simples, procuremos um sub-módulo de M' que seja mínimo. Esse sub-módulo M_2 é simples. Pondo $\mathrm{M}_2=\mathrm{M}E_2$,

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}E_2+\mathrm{M}(u-E_2)=\mathrm{M}_2+\mathrm{M}'',$$

vê-se que $\mathrm{M}E_2E_1=(0)$, pelo facto de ser $\mathrm{M}E_2\subseteq\mathrm{M}'$. Para os elementos de M'' vale $m''E_2=0$. Em particular é

$$\mathrm{M}'=\mathrm{M}E_2+\mathrm{M}''\cap\mathrm{M}'=\mathrm{M}E_2+\mathrm{N}_1,$$

de modo que

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}E_1+\mathrm{M}E_2+\mathrm{N}_1.$$

Se $N_1 \neq (0)$ não é simples, o processo continua. Obtém-se

$$M = M E_3 + M''',$$

com $M E_3 E_1 = M E_3 E_2 = (0)$, pelo facto de ser $M E_3 \subseteq N_1$ um sub-módulo contido em M' e M''. Em particular é

$$N_1 = M E_3 + N_1 \cap M'''$$

e, portanto,

$$M = M E_1 + M E_2 + M E_3 + N_2, \quad (N_2 = N_1 \cap M''')$$

A cadeia $M \supset M' \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$ é finita, de sorte que se chega a uma relação $N_{n-2} = M E_n + N_{n-1}$, com $N_{n-1} = (0)$, e, consequentemente, a uma decomposição

$$M = M E_1 + M E_2 + \ldots + M E_n,$$

em sub-módulos simples. O teorema está provado. Fàcilmente se vê que, para cada $m \in M$, tem lugar a igualdade $m = m E_1 + \ldots + m E_n$, de sorte que é $u = E_1 + \ldots + E$ uma decomposição de u em idempotentes ortogonais.

Estabelecido o teorema anterior, o inverso é imediato. Portanto:

TEOREMA 37: — *É condição necessária e suficiente, para que um módulo seja completamente redutível, que seja semi-simples.*