TIPOGRAFIA DELTA, LDA.
51-B, R. ACTOR VALE, 51-C
TELEFONE 84 79 77 — LISBOA

PROBLÈMES DE PERSPECTIVITÉ DANS LES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS ET DANS LES TREILLIS.

PAR

MARGARITA RAMALHO ET A. ALMEIDA COSTA

SEPARATA DA REVISTA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA
2.ª Série — A — Vol. XIII — Fasc. 2.º — Págs. 229 a 240

LISBOA — 1971

UNIV. LISBOA – REVISTA FAC. CI.
A (2), Mat. Vol. XIII, 1970-71

PROBLÈMES DE PERSPECTIVITÉ DANS LES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS ET DANS LES TREILLIS. *

PAR

MARGARITA RAMALHO ET A. ALMEIDA COSTA

§ 1 — CAS DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS.

1) Introduction — Dans ce §, $\mathfrak{M} = \{t, v, \ldots, x, y, z, \ldots\}$ est un ensemble partiellement ordonné, ψ et φ sont deux endomorphismes idempotents de $\mathfrak{M}$ et on suppose $\psi \leqq \varphi$, ce qui signifie $\psi(x) \leqq \varphi(x), \forall x \in \mathfrak{M}$. Ces hypothèses entraînent $(\psi\varphi)^2(x) = \psi\varphi\psi\varphi(x) \leqq \psi\varphi\varphi\varphi(x) = \psi\varphi(x)$, ainsi que $\psi\varphi(x) = \psi\psi\psi\varphi(x) \leqq (\psi\varphi)^2(x)$. Par conséquent, $\psi\varphi$ est un endomorphisme idempotent de $\mathfrak{M}$ et il en est de même de $\varphi\psi$. Il en résulte, en écrivant $\psi\varphi(y) = \psi\varphi\psi(\varphi(y))$ et $\varphi\psi(z) = \varphi\psi\varphi(\psi(z))$, que $\psi\varphi(\mathfrak{M}) = \psi\varphi(\psi(\mathfrak{M}))$ et $\varphi\psi(\mathfrak{M}) = \varphi\psi(\varphi(\mathfrak{M}))$ représentent les ensembles des points fixes de $\psi\varphi$ et $\varphi\psi$, respectivement. La correspondance $\psi\varphi(\mathfrak{M}) \xrightarrow{\varphi} \varphi\psi(\mathfrak{M})$, obtenue en posant $\psi\varphi(x) \xrightarrow{\varphi} \varphi\psi\varphi(x)$ est un épimorphisme: on obtient $\varphi\psi(y)$ en tant qu'image de $\psi\varphi\psi(y)$. Elle est aussi un monomorphisme: $\varphi\psi\varphi(x) = \varphi\psi\varphi(y)$ donne, par application de ψ, $\psi\varphi(x) = \psi\varphi(y)$. Par conséquent, notre correspondance est un isomorphisme, dont l'isomorphisme inverse est donné par

---

* Ce travail est publié grâce à l'aide de l'Institut de Haute Culture.

$\varphi\psi\varphi(x)\xrightarrow{\psi}(\psi\varphi)^2(x)=\psi\varphi(x)$. Du fait que $\psi\varphi(x)=\psi\psi\varphi(x)\leqq\varphi\psi\varphi(x)$, on conclut l'existence d'intervalles $[\psi\varphi(x),\varphi\psi\varphi(x)]$, auxquels on donne le nom d'intervalles de perspectivité. De même, puisque $\varphi\psi(x)=\varphi\varphi\psi(x)\geqq\psi\varphi\psi(x)$, on construit aussi des intervalles $[\psi\varphi\psi(x),\varphi\psi(x)]$, qui sont encore des intervalles de perspectivité, comme on le voit en lui donnant la forme $[\psi\varphi(\psi(x)),\varphi\psi\varphi(\psi(x))]$. Il s'agit d'ailleurs des mêmes intervalles que précédemment, car $[\psi\varphi(x),\varphi\psi\varphi(x)]$, en posant $\varphi(x)=y$, donc $\varphi\psi\varphi(x)=\varphi\psi(y)$ ainsi que $\psi\varphi(x)=\psi(y)=\psi\varphi\psi(y)$, peut s'écrire sous la forme $[\psi\varphi\psi(y),\varphi\psi(y)]$. On constate que, si l'on connaît l'origine d'un intervalle de perspectivité, on obtient l'extrémité par l'application de φ; et que, si l'on connaît l'extrémité, l'origine est obtenue par l'application de ψ. D'une façon précise, compte tenu que l'origine d'un intervalle de perspectivité appartient à $\psi(\mathfrak{M})$, et que l'extrémité appartient à $\varphi(\mathfrak{M})$, on peut faire l'assertion que voici: si $\psi(t)\leqq\varphi(v)$, l'intervalle $[\psi(t),\varphi(v)]$ est un intervalle de perspectivité, si et seulement si $\varphi\psi(t)=\varphi(v)$ et $\psi\varphi(v)=\psi(t)$. Alors, en effet, $[\psi(t),\varphi(v)]=[\psi\varphi(v),\varphi\psi\varphi(v)]=$ $=[\psi\varphi\psi(t),\varphi\psi(t)]$.

L'object de ce § est celui de donner quelques caractérisations des intervalles de perspectivité. On étend ainsi des résultats de W. Schwan, énoncés et démontrés pour les treillis [1], [2], [3], [4]. Nos raisonnements sont dûs surtout à Margarita Ramalho [5]. La terminologie et les notations sont celles qu'on trouve chez Almeida Costa [6].

2) Deux types d'intervalles — En supposant $\psi(x)\leqq\varphi(y)$, prenons un intervalle $I=[\psi(x),\varphi(y)]$. On dit I minimal, si $\psi(x)\leqq\psi(t)\leqq\varphi(v)\leq\varphi(y)$ entraîne $\psi(t)=\psi(x)$ et $\varphi(v)=\varphi(y)$. Un intervalle de perspectivité $[\psi(\varphi(x)),\varphi(\psi\varphi(x))]$ est un intervalle I. Supposons ensuite $\psi\varphi(x)\leqq\psi(t)\leqq\varphi(v)\leqq\varphi\psi\varphi(x)$. L'application de ψ donne $\psi\varphi(x)\leqq\psi(t)\leqq\psi\varphi(v)\leqq\psi\varphi(x)$; et celle de φ donne $\varphi\psi\varphi(x)\leqq\varphi\psi(t)\leqq\varphi(v)\leqq\varphi\psi\varphi(x)$. Par conséquent, on a démontré la partie «nécessaire» du théorème que voici:

Théorème 1: — *Un intervalle I est un intervalle de perspectivité, si et seulement s'il est minimal.* En ce qui concerne la partie «suffisante» de l'assertion, prenons $I=[\psi(x),\varphi(y)]$, supposé minimal. De $\psi(x)=\psi(\psi(x))\leqq\varphi(\psi(x))\leqq\varphi(y)$, on tire $\varphi\psi(x)=\varphi(y)$; et, de $\psi(x)\leqq\psi(\varphi(y))\leqq\varphi(\varphi(y))=\varphi(y)$, on tire $\psi\varphi(y)=\psi(x)$. Donc, I est un intervalle de perspectivité.

D'une façon semblable, si $\psi\varphi(x)\leqq\varphi\psi(y)$, prenons un intervalle $J=[\psi\varphi(x),\varphi\psi(y)]$. On dit J minimal, si $\psi\varphi(x)\leqq$ $\leqq\psi\varphi(t)\leqq\varphi\psi(v)\leqq\varphi\psi(y)$ entraîne $\psi\varphi(t)=\psi\varphi(x),\varphi\psi(v)=\varphi\psi(y)$. Un intervalle de perspecticité $[\psi\varphi(x),\varphi\psi(\varphi(x))]$ est un intervalle J. Supposons ensuite $\psi\varphi(x)\leqq\psi\varphi(t)\leqq\varphi\psi(v)\leqq\varphi\psi\varphi(x)$. L'application de ψ donne $\psi\varphi(x)\leqq\psi\varphi(t)\leqq\psi\varphi\psi(v)\leqq\psi\varphi(x)$; et celle de φ donne $\varphi\psi\varphi(x)\leqq\varphi\psi\varphi(t)\leqq\varphi\psi(v)\leqq\varphi\psi\varphi(x)$. Par conséquent, on a démontré la partie «nécessaire» du théorème que voici:

Théorème 2: — *Un intervalle J est un intervalle de perspectivité, si et seulement s'il est minimal.* En ce qui concerne la partie «suffisante» de l'assertion, prenons $J=[\psi\varphi(x),\varphi\psi(y)]$, supposé minimal. De $\psi\varphi(x)=\psi\varphi(\psi\varphi(x))\leqq\varphi\psi(\psi\varphi(x))\leqq$ $\varphi\psi(y)$, on tire $\varphi\psi\varphi(x)=\varphi\psi(y)$. Par conséquent, J est un intervalle de perspectivité.

3) Classes spéciales — Introduisons sur $\mathfrak{M}$ la relation d'équivalence ρ suivante: $x\rho y$, si et seulement si $\psi(x)=$ $=\psi(y)$ et $\varphi(x)=\varphi(y)$. Quel que soit l'élément d'un intervalle de perspectivité, la condition $\psi\varphi(x)\leqq t\leqq\varphi\psi\varphi(x)$ donne

$\psi(t)=\psi\varphi(x)$ et $\varphi(t)=\varphi\psi\varphi(x)$. Par conséquent, tous les éléments de l'intervalle sont équivalents, et on a:

THÉORÈME 3: — *Un intervalle* $[\psi(x), \varphi(y)]$ *est un intervalle de perspectivité, si et seulement s'il est composé d'éléments équivalents.* Il ne reste qu'à montrer la «suffisance». Or, $\psi(x) \leqq \psi(x) \leqq \varphi(y) \leqq \varphi(y)$ donne $\psi\varphi(y)=\psi(x)$, $\varphi\psi(x)=\varphi(y)$. D'après ce qu'on a vu dans l'Introduction, il s'agit d'un intervalle de perspectivité.

Quel que soit x, $Q(x)=[\psi(x), \varphi(x)]$ est un intervalle, dit intervalle-quotient. Représentons par K_z la classe des éléments équivalents à z. On dit K_z une classe spéciale, si $Q(z) \subseteq K_z$. Lorsque ψ est réductif $[\psi(z) \leqq z, \forall z \in \mathfrak{M}]$, on le dit un opérateur d'intérieur. D'une façon «duale» φ, supposé extensif $[z \leqq \varphi(z), \forall z \in \mathfrak{M}]$, est dit un opérateur d'adhérence. On a le résultat suivant:

THÉORÈME 4: — *En supposant* ψ *un opérateur d'intérieur et* φ *un opérateur d'adhérence,* K_z *est un classe spéciale, si et seulement si* $K_z=Q(z)$. L'hypothèse $Q(z) \subseteq K_z$ donne, si $y \in K_z$, $\psi(z)=\psi(y) \leqq y \leqq \varphi(y)=\varphi(z)$, donc $K_z \subseteq Q(z)$.

§ 2 — CAS DES TREILLIS

1) Introduction — Dans ce §, $R=\{t, v, \ldots, x, y, z, \ldots\}$ est un treillis. Toutefois, les endomorphismes qui seront l'objet de notre étude sont sous-entendus en tant que des morphismes de l'ensemble partiellement ordonné dont R est le support. Les symboles ψ et φ, affectés ou non d'indices, représenteront des opérateurs d'intérieur et d'adhérence, respectivement. Nous étendrons aussi des

résultats de W. SCHWAN, qu'on trouve dans les travaux [3], [4], pour certains cas particuliers. Mais, avant d'entreprendre notre objet principal, nous allons établir quelques propositions utiles.

Une sous-liaison de R est un treillis contenu dans R, qui n'est pas un sous-treillis, bien que, en tant qu'un ensemble partiellement ordonné, maintienne l'ordre de R.

THÉORÈME 5: — *Si* $R \xrightarrow{\rho} R$ *est un endomorphisme idempotent de* R, *alors* $\rho(R)$ *est une sous-liaison de* R *telle que, en supposant* $x_1=\rho(x_1) \in \rho(R)$, $x_2 \in \rho(R)$, *on a*

$$x_1 \underset{\rho(R)}{\wedge} x_2=\rho(x_1 \wedge x_2), \quad x_1 \underset{\rho(R)}{\vee} x_2=\rho(x_1 \vee x_2). \tag{1}$$

[Note: Évidemment que le symbole $x_1 \underset{\rho(R)}{\wedge} x_2$, par exemple, signifie l'infimum de x_1 et x_2 calculé dans $\rho(R)$. Bornons-nous à démontrer la deuxième égalité (1). D'une part, $x_1 \leqq x_1 \vee x_2$, donc $x_1=\rho(x_1) \leqq \rho(x_1 \vee x_2)$, et, de même $x_2 \leqq \rho(x_1 \vee x_2)$; d'autre part, si $z=\rho(z) \geqq x_1$, $z \geqq x_2$, alors $z \geqq x_1 \vee x_2$ et $z=\rho(z) \geqq \rho(x_1 \vee x_2)$.

Soient ensuite ρ et σ deux endomorphismes de R tels que $\rho\sigma$ et $\sigma\rho$ soient idempotents. Il existe, d'après les raisonnements du n.º 1, § précédent, des isomorphismes $\rho\sigma(R) \xrightarrow{\sigma} \sigma\rho(R)=\sigma\rho\sigma(R)$ et $\sigma\rho\sigma(R) \xrightarrow{\rho} \rho\sigma(R)$, inverses l'un de l'autre. Mais, puisque $\rho\sigma(R)$ et $\sigma\rho(R)$ sont des treillis, ces isomorphismes sont aussi des isomorphismes de treillis, donc, si $x_1, x_2 \in \rho\sigma(R)$:

$$\sigma(x_1 \underset{\rho\sigma(R)}{\wedge} x_2)=\sigma(x_1) \underset{\sigma\rho(R)}{\wedge} \sigma(x_2), \text{ ou } \sigma\rho\sigma(x_1 \wedge x_2)=\sigma\rho(\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_2)), \tag{2}$$

$$\sigma(x_1 \underset{\rho\sigma(R)}{\vee} x_2)=\sigma(x_1) \underset{\sigma\rho(R)}{\vee} \sigma(x_2), \text{ ou } \sigma\rho\sigma(x_1 \vee x_2)=\sigma\rho(\sigma(x_1) \vee \sigma(x_2)). \tag{3}$$

D'une façon analogue, si $y_1, y_2 \in \sigma\rho(R)$:

$$\rho(y_1 \underset{\sigma\rho(R)}{\wedge} y_2) = \rho(y_1) \underset{\rho\sigma(R)}{\wedge} \rho(y_2), \text{ ou } \rho\sigma\rho(y_1 \wedge y_2) = \rho\sigma(\rho(y_1) \wedge \rho(y_2)), \quad (2')$$

$$\rho(y_1 \underset{\sigma\rho(R)}{\vee} y_2) = \rho(y_1) \underset{\rho\sigma(R)}{\vee} \rho(y_2), \text{ ou } \rho\sigma\rho(y_1 \vee y_2) = \rho\sigma(\rho(y_1) \vee \rho(y_2)). \quad (3')$$

Nous retenons ce résultat:

THÉORÈME 6: — *Soient ρ et σ deux endomorphismes de R tels que $\rho\sigma$ et $\sigma\rho$ soient idempotents. Alors, on a les ensembles de relations* (2)—(3) *et* (2')—(3').

2) Études de ψ(R) et de φ(R) — Puisque ψ est idempotent, $\psi(R)$ est une sous-liaison de R. De plus, il s'agit d'un $\vee$-sous-treillis, c'est-à-dire on a $x_1 \underset{\psi(R)}{\vee} x_2 = \psi(x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$, si $x_1, x_2 \in \psi(R)$. En effet: ψ est réductif, par conséquent $\psi(x_1 \vee x_2) \leqq x_1 \vee x_2$; mais, compte tenu que $\psi(R)$ est une sous-liaison, on a, d'autre part, $x_1 \underset{\psi(R)}{\vee} x_2 \geqq x_1 \vee x_2$. On vérifie ensuite que $R \xrightarrow{\psi} \psi(R)$ est un $\wedge$-épimorphisme, c'est-à-dire qu'on a $\psi(x \wedge y) = \psi(x) \underset{\psi(R)}{\wedge} \psi(y)$. Si l'on suppose en effet $z = \psi(z) \leqq \psi(x)$, $z \leqq \psi(y)$, compte tenu que ψ est réductif, on obtient $z \leqq x$, $z \leqq y$, donc $z \leqq x \wedge y$ et $z = \psi(z) \leqq \psi(x \wedge y)$. Enfin, nous montrons qu'en supposant R_0 un $\wedge$-sous-treillis de R, $\psi(R_0)$ est un $\wedge$-sous-treillis de $\psi(R)$. Il s'agit de vérifier qu'en prenant $x_0, y_0 \in R_0$, avec $x_0 \wedge y_0 \in R_0$, alors $\psi(x_0) \wedge \psi(y_0) \in \psi(R_0)$. Or, nous venons justement de voir que $\psi(x_0) \underset{\psi(R)}{\wedge} \psi(y_0) = \psi(x_0 \wedge y_0) \in \psi(R_0)$.

Nous énonçons les deux propositions ci-dessous, dont la deuxième fait intervenir $\varphi(R)$ au lieu de $\psi(R)$ et est démontrée d'une façon duale de celle qu'on vient d'employer en ce qui concerne $\psi(R)$.

THÉORÈME 7: — *Soit ψ un opérateur d'intérieur. Alors: 1) $\psi(R)$ est un $\vee$-sous-treillis de R; 2) $R \xrightarrow{\psi} \psi(R)$ est un $\wedge$-épimorphisme; 3) si R_0 est un $\wedge$-sous-treillis de R, $\psi(R_0)$ est un $\wedge$-sous-treillis de $\psi(R)$.*

THÉORÈME 8: — *Soit φ un opérateur d'adhérence. Alors: 1') $\varphi(R)$ est un $\wedge$-sous-treillis de R; 2') $R \xrightarrow{\varphi} \varphi(R)$ est un $\vee$-épimorphisme; 3') si R_0 est un $\vee$-sous-treillis de R, $\varphi(R_0)$ est un $\vee$-sous-treillis de $\varphi(R)$.*

Ceci fait, étudions aussi les sous-liaisons $\psi\varphi(R)$ et $\varphi\psi(R)$. Quant à $\psi\varphi(R)$, d'après 1') du théorème précédent, $\varphi(R)$ est un $\wedge$-sous-treillis de R, par conséquent $R \xrightarrow{\psi} \psi(R)$, compte tenu de 3) du théorème 7, mène de $\varphi(R)$ à $\psi\varphi(R)$ qui est un $\wedge$-sous-treillis de $\psi(R)$. Ainsi, si $x_1, x_2 \in \psi\varphi(R)$:

$$x_1 \underset{\psi\varphi(R)}{\wedge} x_2 = \psi\varphi(x_1 \wedge x_2) = x_1 \underset{\psi(R)}{\wedge} x_2) = \psi(x_1 \wedge x_2), \quad (1)$$

$$x_1 \underset{\psi\varphi(R)}{\vee} x_2 = \psi\varphi(x_1 \vee x_2). \quad (2)$$

D'une façon duale, $\varphi\psi(R)$ est un $\vee$-sous-treillis de $\varphi(R)$. Donc, si $y_1, y_2 \in \varphi\psi(R)$:

$$y_1 \underset{\varphi\psi(R)}{\vee} y_2 = \varphi\psi(y_1 \vee y_2) = y_1 \underset{\varphi(R)}{\vee} y_2 = \varphi(y_1 \vee y_2), \quad (1')$$

$$y_1 \underset{\varphi\psi(R)}{\wedge} y_2 = \varphi\psi(y_1 \wedge y_2). \quad (2').$$

Nous donnons l'énoncé que voici:

Corollaire 1 : — *Soient ψ un opérateur d'intérieur et φ un opérateur d'adhérence. Alors, $\psi\varphi(R)$ est un $\wedge$-sous-treillis de $\psi(R)$ et $\varphi\psi(R)$ est un $\vee$-sous-treillis de $\varphi(R)$, par conséquent les égalités (1), (2) et (1'), (2') sont valables.*

3) Une propriété importante de $\psi\varphi(R)$ et de $\varphi\psi(R)$ — Prenons deux intervalles de perspectivité distincts. Il n'existe aucun élément commun à ces intervalles, puisque, si t était un tel élément, $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ seraient les extrémités des deux intervalles, qui seraient ainsi coïncidents. Nous représenterons par Z l'ensemble des éléments appartenant aux différents intervalles de perspectivité et nous nous proposons de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que Z soit un sous-treillis de R.

Théorème 9 : — *Z est un sous-treillis de R, si et seulement si, en prenant $z_1, z_2 \in Z$, on a $\varphi(z_1 \wedge z_2) = \varphi\psi(z_1 \wedge z_2)$, $\psi(z_1 \vee z_2) =$ $= \psi\varphi(z_1 \vee z_2)$.* D'abord, il est évident que la condition de l'énoncé est nécessaire. Pour montrer la «suffisance», on doit vérifier les relations $\psi(z_1 \wedge z_2) = \psi\varphi(z_1 \wedge z_2)$ et $\varphi(z_1 \vee z_2) =$ $= \varphi\psi(z_1 \vee z_2)$, puisque ces relations, jointes aux égalités de l'hypothèse, mènent à conclure qu'on a $\psi\varphi(z_1 \wedge z_2) \leqq z_1 \wedge z_2 \leqq$ $\leqq \varphi\psi\varphi(z_1 \wedge z_2)$ et $\psi\varphi(z_1 \vee z_2) \leqq z_1 \vee z_2 \leqq \varphi\psi\varphi(z_1 \vee z_2)$. Nous nous bornons à la vérification de la relation $\psi(z_1 \wedge z_2) = \psi\varphi(z_1 \wedge z_2)$. De $\varphi\psi(z_1 \wedge z_2) = \varphi(z_1 \wedge z_2)$, on tire $\psi\varphi\psi(z_1 \wedge z_2) = \psi\varphi(z_1 \wedge z_2)$, donc, d'après l'assertion 2) du théorème 7 et la première égalité (1) du théorème 5,

$$\psi\varphi(z_1 \wedge z_2) = \psi\varphi(\psi(z_1) \underset{\psi(R)}{\wedge} \psi(z_2)) = \psi\varphi\psi(\psi(z_1) \wedge \psi(z_2)).$$

Ensuite, puisque $\psi(z_1)$ et $\psi(z_2)$ appartiennent à $\psi\varphi(R)$, la formule (1) donne

$$\psi\varphi(z_1 \wedge z_2) = \psi\varphi(\psi(z_1) \wedge \psi(z_2)),$$

et la même formule (1) et l'assertion 2) du théorème 7

donnent

$$\psi\varphi(z_1 \wedge z_2) = \psi(z_1) \underset{\psi(R)}{\wedge} \psi(z_2) = \psi(z_1 \wedge z_2).$$

La relation $\varphi(z_1 \vee z_2) = \varphi\psi(z_1 \vee z_2)$ est démontré par un raisonnement dual du précédent.

Théorème 10 : — *Z est un sous-treillis de R, si et seulement si $\psi\varphi(R)$ est un sous-treillis de $\psi(R)$ et $\varphi\psi(R)$ est un sous--treillis de $\varphi(R)$.* Admettons que Z soit un sous-treillis de R. En prenant $x, y \in \psi\varphi(R)$, ces éléments appartiennent aussi à Z, donc $\psi(x \vee y) = \psi\varphi(x \vee y)$ et

$$x \underset{\psi\varphi(R)}{\vee} y = \psi(x \vee y) = x \underset{\psi(R)}{\vee} y.$$

D'autre part,

$$x \underset{\psi\varphi(R)}{\wedge} y = \psi\varphi(x \wedge y) = \psi(x \wedge y) = x \underset{\psi(R)}{\wedge} y.$$

D'une façon analogue, on verrait que $\varphi\psi(R)$ est un sous--treillis de $\varphi(R)$. Réciproquement, supposons $\psi\varphi(R)$ un sous-treillis de $\psi(R)$ et $\varphi\psi(R)$ un sous-treillis de $\varphi(R)$. En prenant $x, y \in Z$, on a, compte tenu de 2), théorème 7,

$$\varphi\psi(x \wedge y) = \varphi(\psi(x) \underset{\psi(R)}{\wedge} \psi(y)) = \varphi(\psi(x) \underset{\psi\varphi(R)}{\wedge} \psi(y)).$$

L'isomorphisme de treillis $\psi\varphi(R) \xrightarrow{\varphi} \varphi\psi(R)$, en n'oubliant pas que $\varphi\psi(R)$ est un sous-treillis de $\varphi(R)$, donne ensuite

$$\varphi\psi(x \wedge y) = \varphi\psi(x) \underset{\varphi\psi(R)}{\wedge} \varphi\psi(y) = \varphi(x) \underset{\varphi\psi(R)}{\wedge} \varphi(y) = \varphi(x) \underset{\varphi(R)}{\wedge} \varphi(y),$$

et par conséquent, d'aprés 1'), théorème 8,

$$\varphi\psi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

Alors, de

$$\varphi\psi(x \wedge y) \leqq \varphi(x \wedge y) \leqq \varphi(x) \wedge \varphi(y),$$

on tire la première condition du théorème 9 :

$$\varphi\psi(x\wedge y)=\varphi(x\wedge y).$$

Un raisonnement dual donne la deuxième condition du même théorème 9.

4) Rappel de quelques propriétés des endomorphismes de R—L'ensemble $E=\{\rho,\sigma,\ldots,\theta,\tau,\ldots\}$ des endomorphismes de R constitue un treillis, pourvu qu'on y introduise les opérations d'infimum et de supremum par les égalités suivantes:

$$(\rho\wedge'\sigma)(x)=\rho(x)\wedge\sigma(x), \qquad (\rho\vee'\sigma)(x)=\rho(x)\vee\sigma(x).$$

Pour justifier cette assertion, nous nous bornons à montrer que la première égalité définit en effet un infimum $\rho\wedge'\sigma$. D'abord, il s'agit d'un endomorphisme de R. Puis, si $\theta\leqq\rho$, $\theta\leqq\sigma$, de $\theta(x)\leqq\rho(x)$, $\theta(x)\leqq\sigma(x)$, on tire $\theta(x)\leqq\rho(x)\wedge\sigma(x)$, $\forall x\in R$. Par conséquent, $\theta\leqq\rho\wedge'\sigma$.

Dans le treillis qu'on vient d'introduire, le sous-ensemble des opérateurs d'adhérence constitue un inf sous-treillis. En effet, si φ_1 et φ_2 sont de tels opérateurs, $\varphi_1\wedge'\varphi_2$ est aussi un opérateur d'adhérence, puisque, d'une part, il est évidemment extensif, tandis que, d'autre part, nous allons montrer qu'il est idempotent:

$$(\varphi_1\wedge'\varphi_2)^2(x)=(\varphi_1\wedge'\varphi_2)[(\varphi_1\wedge'\varphi_2)(x)]\geqq(\varphi_1\wedge'\varphi_2)(x);$$

$$(\varphi_1\wedge'\varphi_2)(x)=\varphi_1^2(x)\wedge\varphi_2^2(x)\geqq\varphi_1[\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(x)]\wedge\varphi_2[\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(x)]=$$
$$=(\varphi_1\wedge'\varphi_2)^2(x).$$

D'une façon duale, les opérateurs d'intérieur constituent un sup sous-treillis du treillis des endomorphismes de R.

5) Composition de perspectivités—Prenons deux couples (ψ_1,φ_1) et (ψ_2,φ_2) qui définissent deux «perspectivités» P_1 et P_2 et qui vérifient les conditions que voici:

$$\psi_1[\varphi_1(x_1)\wedge\varphi_2(x_2)]=\psi_1\varphi_1(x_1), \quad \psi_2[\varphi_1(x_1)\wedge\varphi_2(x_2)]=\psi_2\varphi_2(x_2),$$

$$\varphi_1[\psi_1(x_1)\vee\psi_2(x_2)]=\varphi_1\psi_1(x_1), \quad \varphi_2[\psi_1(x_1)\vee\psi_2(x_2)]=\varphi_2\psi_2(x_2).$$

En posant $\psi=\psi_1\vee'\psi_2$, $\varphi=\varphi_1\wedge'\varphi_2$, le couple (ψ,φ) définit aussi une perspectivité P, et il est bien simple de prouver les égalités suivantes: $\psi_1\varphi=\psi_1\varphi_1$, $\psi_2\varphi=\psi_2\varphi_2$, $\varphi_1\psi=\varphi_1\psi_1$, $\varphi_2\psi=\varphi_2\psi_2$, $\psi\varphi=\psi_1\varphi_1\vee'\psi_2\varphi_2$, $\varphi\psi=\varphi_1\psi_1\wedge'\varphi_2\psi_2$. Alors, c'est notre objet d'établir cette proposition:

THÉORÈME 11 *(de composition de perspectivités):—L'intersection de deux intervalles des perspectivités P_1 et P_2 est un intervalle de la perspectivité P; réciproquement, tout intervalle de la perspectivité P peut s'écrire, d'une manière unique, comme intersection d'un intervalle de perspectivité de P_1 et d'un autre de P_2.* Remarquons d'abord que deux intervalles $[x_1,y_1]$ et $[x_2,y_2]$, de R, ont des éléments communs, si et seulement si $x_1\vee x_2\leqq y_1\vee y_2$; et, alors, on a $[x_1,y_1]\cap[x_2,y_2]=$ $=[x_1\vee x_2,y_1\wedge y_2]$. Soient donc $K_1=[x_1,y_1]$, $K_2=[x_2,y_2]$ deux intervalles appartenant à P_1 et à P_2, respectivement. Puisque $\psi_1(y_1\wedge y_2)=\psi_1[\varphi_1(x_1)\wedge\varphi_2(x_2)]=\psi_1\varphi_1(x_1)=x_1$, $\psi_2(y_1\wedge y_2)=x_2$, on a $x_1\vee x_2=\psi(y_1\wedge y_2)\leqq y_1\wedge y_2$. Par conséquent, $K_1\cap K_2=[x_1\vee x_2,y_1\wedge y_2]$. Or $x_1\vee x_2=\psi_1\varphi_1(x_1)\vee\psi_2\varphi_2(x_2)$ et si l'on tient compte de $\psi_1\varphi_1(x_1\vee x_2)=\psi_1[\varphi_1(\psi_1\varphi_1(x_1)\vee$ $\vee\psi_2\varphi_2(x_2))]=\psi_1\varphi_1(x_1)=x_1$, ainsi que de $\psi_2\varphi_2(x_1\vee x_2)=x_2$, on obtient $x_1\vee x_2=\psi\varphi(x_1\vee x_2)$. D'autre part, $\varphi(x_1\vee x_2)=\varphi_1(x_1\vee x_2)\wedge$ $\wedge\varphi_2(x_1\vee x_2)=\varphi_1[\psi_1\varphi_1(x_1)\vee\psi_2\varphi_2(x_2)]\wedge\varphi_2[\psi_1\varphi_1(x_1)\vee\psi_2\varphi_2(x_2)]=$ $=\varphi_1\psi_1\varphi_1(x_1)\wedge\varphi_2\psi_2\varphi_2(x_2)=y_1\wedge y_2=\varphi\psi\varphi(x_1\vee x_2)$. En écrivant $K_1\cap K_2=[\psi\varphi(x_1\vee x_2),\varphi\psi\varphi(x_1\vee x_2)]$, on reconnaît que $K_1\cap K_2$ est un intervalle de perspectivité appartenant à P. Réciproquement, partons d'un intervalle $[x,y]=K$ appartenant à P. On a $x=\psi\varphi(x)=\psi_1\varphi_1(x)\vee\psi_2\varphi_2(x)=x_1\vee x_2$ avec $x_1=\psi_1\varphi_1(x)=\psi_1\varphi_1(x_1)$, $x_2=\psi_2\varphi_2(x)=\psi_2\varphi_2(x_2)$, ainsi que $y=$

$=\varphi\psi\varphi(x)=\varphi_1\psi_1(y)\wedge\varphi_2\psi_2(y)=y_1\wedge y_2$, avec $y_1=\varphi_1\psi_1(y)=$ $=\varphi_1\psi_1\varphi(x)=\varphi_1\psi_1\varphi_1(x_1)$ et $y_2=\varphi_2\psi_2\varphi_2(x_2)$. Or, si l'on fait $K_1=[\psi_1\varphi_1(x_1),\varphi_1\psi_1\varphi_1(x_1)]$ et $K_2=[\psi_2\varphi_2(x_2),\varphi_2\psi_2\varphi_2(x_2)]$, les intervalles K_1 et K_2 appartiennent à P_1 et P_2, respectivement, et on a $K=K_1\cap K_2$. L'unicité de cette représentation revient au fait suivant: un élément $x=\psi\varphi(x)\in\psi\varphi(R)$ ne peut s'écrire que d'une seule manière sous la forme $x=x_1\vee x_2$, avec $x_1=\psi_1\varphi_1(x_1)\in\psi_1\varphi_1(R)$, $x_2=\psi_2\varphi_2(x_2)\in\psi_2\varphi_2(R)$; et, d'une façon analogue, $y=\varphi\psi(y)\in\varphi\psi(R)$ ne peut s'écrire que d'une seule manière sous la forme $y=y_1\wedge y_2$, avec $y_1\in\varphi_1\psi_1(R)$ et $y_2\in\varphi_2\psi_2(R)$. On vérifie, par exemple, l'assertion concernant x, en raisonant ainsi: si $x=\psi_1\varphi_1(x_1)\vee$ $\vee\psi_2\varphi_2(x_2)$, on voit que $\varphi_1\psi_1(x)=\psi_1[\varphi_1(\psi_1\varphi_1(x_1)\vee\psi_2\varphi_2(x_2))]=$ $=\psi_1\varphi_1(x_1)$, et, de même, $\psi_2\varphi_2(x)=\psi_2\varphi_2(x_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] – W. Schwan, *Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden,* Math. Z., **51**, 126-134, 1949.

[2] ——— *Ein allgemeiner Mengenisomorphiesatz der Theorie der Verbände,* Math. Z., **51**, 346-354, 1949.

[3] ——— *Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden,* Math. Z., **52**, 150-167, 1950.

[4] ——— *Ein Homomorphiesatz der Theorie der Verbände,* Math. Z., **52**, 193-201, 1950.

[5] – Margarita Ramalho, *Sobre perspectividades em conjuntos parcialmente ordenados e em reticulados,* Lisboa, 1971.

[6] – A. Almeida Costa, *Cours d'Algèbre Générale,* vol. I, Lisboa, 1969.