INTEGRAL DE RIEMANN E DE LEBESGUE EM $\mathbb{R}^N$

(4ª Edição)

A. Bivar Weinholtz

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

2006

Classificação A.M.S. (1991): 26-01, 28-01, 26B15, 28A75
ISBN: 972-8394-03-9

NOTA DE APRESENTAÇÃO DA PRIMEIRA EDIÇÃO

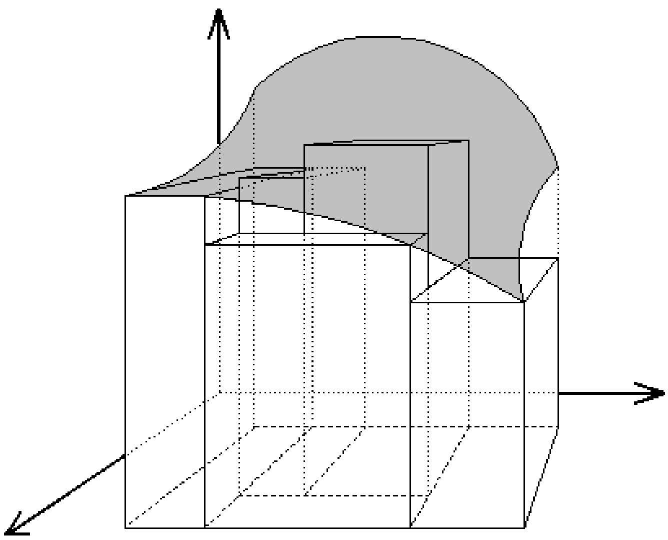
A colecção *Textos de Matemática* foi lançada em 1993 pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa com a publicação de três monografias que serviram de apoio às aulas de Mestrado. Essas monografias tinham, para além desta finalidade didáctica, características de material de iniciação à investigação nas áreas a que diziam respeito.

A colecção á agora relançada num segundo fôlego, correspondendo a um plano de edição de textos de apoio às disciplinas de licenciatura da responsabilidade do Departamento. Este tipo de textos constituirá uma nova série dentro da colecção, identificada em particular por uma nova cor de capa. O objectivo é fornecer aos estudantes textos universitários de alta qualidade em língua portuguesa.

A nova série inicia-se com a obra de A. de Bivar Weinholtz *Integral de Riemann e de Lebesgue em* $\mathbb{R}^N$. Cobre parte das matérias da disciplina que actualmente tem a designação de Análise Infinitesimal IV e distingue-se pela profundidade da abordagem e pela originalidade de alguns pontos de vista.

Março de 1996

OS EDITORES



à Maria João

à memória do Prof. Guerreiro

Prefácio da 2ª edição

Nesta segunda edição procurou-se corrigir as inúmeras "gralhas" detectadas na primeira, tendo-se também introduzido modificações de pormenor em alguns pontos da exposição e dos exercícios; para além dos lapsos facilmente detectáveis, assinalem-se as omissões mais "perigosas" da anterior edição:

• No início da secção 1.2 faltou enunciar a hipótese de que o intervalo I seria sempre considerado não degenerado, salvo menção em contrário;

• No exercício 50, capítulo 6, faltava a condição "f nula em $I \backslash K$";

• No ponto 5 da Proposição 14.3, na σ-continuidade da intersecção, faltava a hipótese "$m(A_1) < +\infty$".

• Na primeira parte da demonstração da Proposição 16.1 dever-se-ia ter observado que é possível a redução ao caso "A limitado", intersectando com a sucessão de cubos $[-n, n]^N$, por exemplo; deste modo, nos argumentos que se seguiam, poderiam intervir apenas conjuntos de medida finita, o que permitiria justificar a utilização feita da σ-continuidade da intersecção; observação idêntica deveria constar da parte final da demonstração da Proposição 16.2.

Aqui fica o meu particular agradecimento aos alunos Élia Ferreira e José Maria Gomes cuja atenta e crítica leitura do texto da primeira edição permitiu garantir alguma eficácia à revisão agora efectuada; também agradeço a todos os outros alunos e colegas cujos reparos e sugestões contribuiram para esta tarefa.

Uma vez que não houve modificações ou acrescentos de fundo, remete-se o leitor para o prefácio da 1ª edição que adiante se reproduz.

Lisboa, Junho de 1997

Prefácio da 1ª edição

O texto que agora se edita baseia-se na versão manuscrita elaborada ao longo de alguns anos, a partir de 1982/83, destinada a apoiar as aulas teóricas do segundo semestre da disciplina de Análise Matemática II da F.C.U.L.. Já antes tinha o autor colaborado com o saudoso Prof. J. S. Guerreiro no quadro da docência da referida disciplina (nomeadamente em turmas "práticas") e essa colaboração manteve-se durante longo período de tempo, devendo-se àquele Professor, não só a ideia de incluir a este nível da Licenciatura uma introdução ao Integral de Lebesgue (em $\mathbb{R}^N$), como a orientação geral seguida da construção "à Riesz" do referido integral. Grande parte do conteúdo deste curso foi alvo das fecundas "conversas de fim de tarde" no então "IFM"(*), animadas pelo entusiasmo sempre presente do Prof. Guerreiro.

A estruturação do material reunido neste volume contou, além disso, com a colaboração de diversos outros colegas; no que diz respeito à exposição teórica merece especial destaque o frutuoso diálogo mantido com o Nuno Costa Pereira, a quem se deve a versão apresentada da demonstração do Lema da Secção 8.1. Este resultado é crucial para a modificação proposta do "método de Riesz", substituindo-se aqui as funções em escada por funções integráveis-R, processo mais natural após o estudo do Integral de Riemann e que permite tornar mais simples a exposição em diversos pontos. O João Carlos Carmona e Silva leccionou uma das turmas teóricas da atrás referida disciplina no ano lectivo de 1986/87; devem-se-lhe inúmeras sugestões clarificadoras do texto. Para a versão final deste curso contou-se também com as pertinentes sugestões e comentários do João Paulo Carvalho Dias. Os exercícios incluídos no final dos capítulos foram em grande parte seleccionados do abundante manancial criado no Departamento de Matemática ao longo dos anos, no quadro das diversas disciplinas em que são tratados assuntos afins ao deste curso; menção especial deve ser feita à resenha facultada pelo Luis Sanchez, para além da colaboração de outros colegas responsáveis por regências práticas ou teóricas relativas à teoria da integração em $\mathbb{R}^N$. A todos agradeço a participação no que de positivo possa existir nestas páginas; os defeitos são, evidentemente, da inteira responsabilidade do autor…

---

*Actual ex-Complexo II do INIC…

A selecção dos tópicos de integração a incluir nos curricula das licenciaturas com forte componente matemática é questão tradicionalmente polémica; no que diz respeito aos temas abordados neste curso ressalta em primeiro lugar a opção relativa à inclusão do integral de Lebesgue no primeiro curso em que se aborda integração em $\mathbb{R}^N$. Entre as opiniões extremas dos que, ou excluem a possibilidade de ir além do integral de Riemann a este nível da formação matemática ou, pelo contrário, consideram o integral de Riemann "simples exercício de interesse mediano" no quadro da teoria do integral "à Lebesgue", optou-se pela via "intermédia" de começar pelo integral de Riemann e suscitar a necessidade de introdução de novo conceito de integral no próprio contexto da teoria de Riemann. Trata-se de ponto de vista não sem analogia com a introdução do conceito de número real pela via construtiva, a partir dos números racionais, por oposição à via axiomática. Tomada a opção de tratar a teoria de Lebesgue de forma não axiomática, nova discussão pode surgir a propósito da escolha do processo de construção — mantendo a analogia, também na teoria dos reais se pode optar, por exemplo, por "cortes de Dedekind" ou "sucessões de Cauchy" de números racionais; escolheu-se uma das vias que se pode considerar correspondente à das "sucessões de Cauchy", desempenhando as funções integráveis à Riemann e respectivos integrais o papel dos racionais na referida analogia. A preferência por este processo tem evidentemente motivos bastante subjectivos, podendo ser aduzidos argumentos a favor das diversas modalidades de construção, ou não fossem todas equivalentes entre si… Como "vantagem" da via escolhida pode apontar-se a possibilidade de demonstrar alguns dos teoremas fundamentais da teoria (Lebesgue e Beppo Levi, por exemplo) na fase inicial, relegando para segundo tempo as propriedades da medida, que passam a ser consequências simples daqueles resultados de integração. O preço a pagar é a necessidade de demonstrar "à mão" propriedades básicas relativas a "rectângulos" e respectivas "áreas" (na linguagem de $\mathbb{R}^2$); embora se trate de factos bastante intuitivos, a formalização é, por vezes, inesperadamente árdua. A concentração das dificuldades na análise de objectos próximos da geometria elementar facilita, no entanto, abordagens do curso a diversos níveis de profundidade; em pontos seleccionados pode apelar-se, em primeira leitura e sem "escândalo" de maior, à intuição geométrica. O texto contém, além disso, tópicos que não é normalmente possível incluir no programa de qualquer disciplina dos primeiros anos das licenciaturas; espera-se, apesar de tudo, que possam ser úteis a alguns dos potenciais leitores.

Queria ainda agradecer ao Armando Machado pela paciência infinita com que, para além das estimulantes discussões relativas aos temas deste curso, prestou inestimável assistência à iniciação do autor nas novidades informáticas que permitiram terminar a composição do texto com atraso aceitável (?) em relação aos compromissos tomados para com o Departamento de Matemática; finalmente o meu reconhecimento ao Luis Trabucho, responsável por esta colecção de textos, que apoiou a edição deste curso com o entusiamo e dedicação que lhe são habituais.

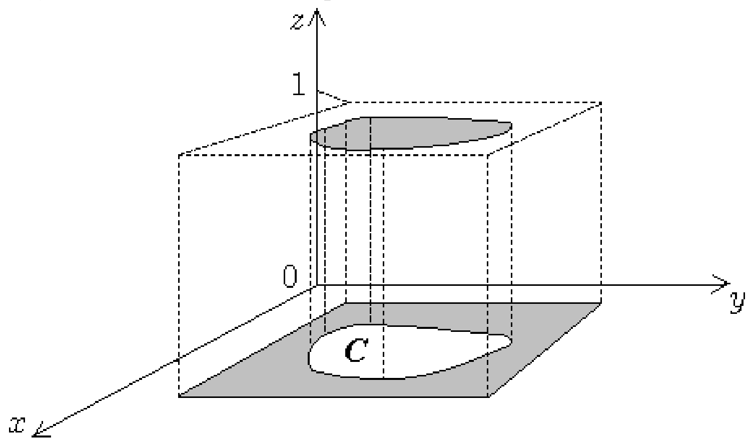
Lisboa, Março de 1996

Índice

Introdução

Pretendemos generalizar a funções de mais que uma variável a definição de *integral* introduzida na análise unidimensional, ou seja, para funções de uma só variável, embora não seja necessário, para tal, pressupor qualquer conhecimento de integração em $\mathbb{R}$.

A noção de *integral* está intimamente ligada à de *"medida"*; recordando a ideia intuitiva de integral de função positiva definida em certo intervalo limitado de $\mathbb{R}$, tratava-se de obter a "área abaixo do gráfico". Ou seja, em certo sentido, se soubéssemos "*medir* áreas" poderíamos, desde logo, calcular *integrais* de funções reais de variável real (pelo menos de funções positivas). É fácil imaginar a extensão deste conceito a funções definidas, por exemplo, em "rectângulos" de $\mathbb{R}^2$ com valores em $[0, +\infty[$; pretender-se-á que o *integral* "meça" o "volume" abaixo do gráfico. Esta extensão permite além disso, pelo menos intuitivamente, encarar o recíproco deste processo; admitindo que sabemos calcular estes integrais "em $\mathbb{R}^2$" para uma classe suficientemente extensa de funções, podemos obter áreas de figuras planas pela simples constatação de que a área de tal figura (seja ela C) deverá ter o mesmo valor numérico que o volume da figura "tridimensional" que se obtém de C translatando este conjunto verticalmente de uma unidade no sentido positivo do eixo dos zz ("cilindro de secção C e altura 1"). Ora tal volume pode agora ser interpretado como o integral em certo rectângulo contendo C da função igual a 1 em C e igual a 0 fora de C (*função característica de C*). Podemos visualizar este processo:



De modo análogo, a definição de integral "em $\mathbb{R}^3$" permitiria obter volumes de figuras tridimensionais. De maneira geral a situação parece ser a seguinte:

"O conhecimento das *medidas N-dimensionais*
permite calcular
integrais de funções positivas em $\mathbb{R}^{N-1}$";
"o conhecimento dos *integrais de funções positivas em* $\mathbb{R}^N$
permite calcular
medidas N-dimensionais".

Assim sendo, uma teoria geral de integração em $\mathbb{R}^N$ (para qualquer $N \in \mathbb{N}_1$) conterá, em princípio, "como caso particular", a "teoria da medida" em qualquer $\mathbb{R}^N$, abarcando, além disso, como veremos, integrais de funções não necessariamente positivas, o que é essencial em muitos domínios da matemática e de outras ciências[1].

A ideia de "medida" está na génese de toda a Matemática; parte substancial da História desta ciência reduz-se à evolução dos conceitos que permitiram formalizar os processos "de medição". Começando pela simples operação de *contagem*, encontramos o estabelecimento de correspondências biunívocas entre colecções de objectos, que a teoria dos *inteiros naturais* permite traduzir. Com base nos números inteiros e em conceitos geométricos simples é possível encarar os processos que levam ao cálculo do *comprimento de segmentos*; fixado o *segmento unidade*[2] S e, dado outro segmento S', podemos procurar justapor a S' cópias de S (obtidas por "deslocamento rígido") e *contar* qual o número máximo de tais cópias que se podem "alinhar" sem "ultrapassar" S' (todos estes conceitos são formalizáveis no quadro da geometria euclidiana). Caso não se consiga, por este processo, "preencher totalmente" S'[3], podemos "dividir a unidade em certo número de partes iguais" e utilizar estas fracções da unidade para repetir o processo; acreditavam os pitagóricos que, para qualquer S', existiria uma fracção da unidade S que "justaposta certo número de vezes" a S' permitiria obter exactamente o segmento S'. Note-se, além disso, que a *verificação* de que determinado segmento é fracção da unidade se pode fazer exactamente pelo mesmo processo de deslocamento rígido, justaposição e contagem, utilizando os mesmos conceitos geométricos e a teoria dos inteiros naturais. A descoberta da "incomensurabilidade" da diagonal do quadrado com o lado (tomando para S o lado e para S' a diagonal, o processo anteriormente descrito não pode ser levado a cabo com sucesso) constituiu uma das grandes crises da História da Matemática; a atribuição de "medida" a segmentos "incomensuráveis" com a unidade não é mais que a teoria dos números irracionais, a qual só veio a ser formalizada com sucesso no século XIX, cerca de dois mil e quatrocentos anos depois da trágica

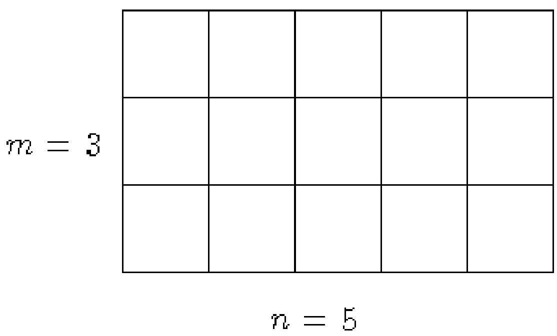
[1]Em particular é de notar que a teoria da integração em $\mathbb{R}$ é, no quadro unidimensional, em certo sentido, "incompleta", pois faz apelo (pelo menos intuitivo) ao conceito *bidimensional* de área; as considerações anteriores mostram que só uma teoria de integração em dimensão finita arbitrária permite a unificação esboçada dos conceitos de *medida* e *integral de função positiva*.

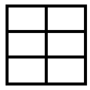
[2]Ao longo desta exposição informal acerca do conceito de medida identificar-se-á, em cada caso, a unidade de medida com um objecto geométrico concreto a que se atribui medida 1.

[3]Obtem-se, no entanto, uma "aproximação inferior" do comprimento procurado!

descoberta dos pitagóricos. Tal não impediu que se continuasse entretanto a atribuir valores numéricos à medida de figuras geométricas, utilizando-se "aproximações" de acordo com princípios de razoabilidade relativos à noção de "medida" a considerar em cada caso. Métodos geométricos como o de "exaustão de Eudoxo", permitiram, desde a Antiguidade, obter fórmulas correctas para o volume de inúmeras figuras geométricas a duas e três dimensões; o cálculo de Newton e Leibniz introduziu processos "algébricos" para obter essas e muitas outras fórmulas, embora a plena justificação teórica só viesse séculos mais tarde.

Mesmo estando formalizado o processo que permite medir todos os segmentos com base na mesma unidade, é necessária alguma reflexão para passar à *"medida de áreas"*, ainda que *planas*. Do mesmo modo que a unidade de medida de segmentos deve poder ser "materializada" em certo segmento, também a unidade de medida de áreas deverá ser representada por determinada figura plana a que se atribui a medida 1. Só será, à partida, "fácil" medir áreas de figuras que se obtenham por "união de cópias da unidade obtidas por deslocamento rígido", admitindo que as cópias ou não se intersectam ou só se "tocam" em pontos constituindo figuras a que se deva, justificadamente, atribuir área zero. A consideração de fracções da unidade será realizável se, fixado um inteiro positivo n, pudermos "preencher" a "figura-unidade" com n cópias disjuntas de certa "figura-fracção"; raciocínios geométricos elementares levam a privilegiar a fixação para "unidade de área" de um *quadrado de lado igual à unidade escolhida para comprimento*. Deste modo imediatamente se conclui que rectângulos de lados com *comprimento inteiro*, sejam tais comprimentos n e m, podem ser obtidos pela união de "n colunas" construídas pelo "empilhamento" de m quadrados cópias da unidade e terão portanto área $n \times m$, pois será este o resultado da *contagem* do número total de cópias utilizadas para construir o rectângulo, como nos revela a análise combinatória elementar ("cardinal do produto cartesiano" — é a própria definição de produto de inteiros em certas formalizações da aritmética elementar…).



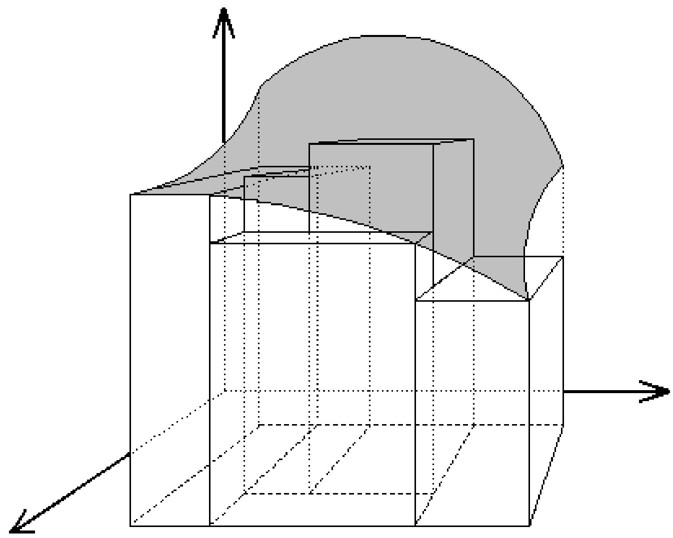
Note-se que estas cópias podem ser tomadas disjuntas se excluirmos do "quadrado unidade" dois dos lados (por exemplo o "superior" e o "direito"), obtendo-se o rectângulo privado dos correspondentes lados. Se agora pensarmos em certo rectângulo de lados $1/n$ e $1/m$, por raciocínios geométricos idênticos, concluímos que, com $n \times m$ cópias de tal rectângulo se pode obter o "quadrado unidade”, pelo que o referido rectângulo terá área $1/(n \times m) = (1/n) \times (1/m)$ (por exemplo: ). Passaríamos agora facilmente a qualquer rectângulo de lados *racionais* p/q e m/n, pois, pelo mesmo tipo de raciocínios, também formalizáveis na geometria euclidiana elementar, se concluiria que tal rectângulo pode ser “obtido” com $p \times m$ cópias de um rectângulo de lados $1/q$ e $1/n$ (de área, como atrás concluímos, $1/(q \times n)$). Acabámos de constatar que a área de qualquer rectângulo de lados com comprimento *racional* é dada pelo produto dos comprimentos dos lados. A teoria dos números reais permitiria depois obter o resultado esperado para qualquer rectângulo, “enquadrando-o” por sucessões de rectângulos com lados de comprimentos racionais. Que a *área* de qualquer segmento do plano deve ser zero também resulta agora da simples constatação de que qualquer segmento se pode incluir num rectângulo de área arbitrariamente pequena. Deste modo podemos fixar para unidade um quadrado “fechado” (incluindo todos os lados) e não será necessário preocupar-nos com os “lados” no cálculo de áreas de figuras constituídas por uniões de rectângulos.

As considerações anteriores estendem-se *mutatis mutandis* ao cálculo de volumes em $\mathbb{R}^3$, e por extensão, também ao cálculo de “medidas N-dimensionais” em $\mathbb{R}^N$; ou seja podemos admitir que sabemos calcular volumes de *paralelepípedos de* $\mathbb{R}^3$ e da extensão natural destas figuras a $\mathbb{R}^N$, bem como de uniões disjuntas desses objectos geométricos ou mesmo uniões em que as intersecções dos “paralelepípedos” dois a dois se reduza a partes da respectiva “fronteira” (“faces”). Na definição de integral que introduziremos neste curso[4] procuraremos, tanto quanto possível, utilizar apenas as considerações que acabámos de fazer, formalizando-as, evidentemente, no quadro de uma teoria matematicamente correcta. Veremos depois que as noções de “medida” apresentadas no curso são em certo sentido as únicas possíveis que permitem formalizar as reflexões elementares que acabámos de desenvolver.

Consideremos então, para o caso de uma função positiva f definida num rectângulo de $\mathbb{R}^2$, o problema de definir *“volume abaixo da superfície–gráfico da função”*.

Representa-se graficamente uma “aproximação inferior” de tal volume, obtida por divisão do rectângulo-domínio em subrectângulos e considerando os paralelipípedos com base em cada subrectângulo e altura igual ao $\inf f(x, y)$ no subrectângulo considerado:

[4]E, consequentemente, na definição de medida para figuras tão gerais quanto possível…



Somando os volumes dos paralelepípedos obtém-se uma aproximação inferior do "volume abaixo do gráfico" de f. Subdividindo cada subrectângulo e procedendo de igual forma, o "volume aproximado" vai "aumentar", ficando ainda "inferior" (intuitivamente) ao volume procurado. Se em lugar dos inf tomarmos os sup obtemos uma aproximação superior que "diminui" à medida que subdividimos os subintervalos. No caso de existir um *único valor* situado *"acima" de todas as aproximações inferiores* e *"abaixo" de todas as superiores*, ou de as aproximações inferiores e superiores *"tenderem para um mesmo valor"* (em sentido a definir) quando "subdividimos indefinidamente" o rectângulo inicial, é natural dizer que tal valor é o "volume abaixo do gráfico da função f" e chamamos-lhe também o *integral de* f.

Os próximos capítulos serão dedicados a formalizar estes conceitos.

Capítulo 1

Intervalos de $\mathbb{R}^N$ e volumes

As considerações da Introdução revelam a necessidade de estudar o comportamento das "figuras geométricas" constituídas por uniões de "paralelepípedos de $\mathbb{R}^N$", em particular dos que têm "faces paralelas aos planos coordenados" (na linguagem própria de $\mathbb{R}^3$). Procuraremos estabelecer com rigor determinados resultados essenciais relativos também ao "volume" de tais figuras; tais resultados são em geral bastante intuitivos, o que contrasta com as aparentes "dificuldades" que algumas demonstrações parecem suscitar em primeira abordagem. Importa pois procurar compreender bem e mesmo "visualizar" o significado geométrico das diversas propriedades; a análise pormenorizada das demonstrações pode ter o mérito de familiarizar o leitor com determinadas notações que podem ser úteis em muitos outros contextos, bem como com resultados algébricos e de Teoria dos Conjuntos que, embora elementares, são utilizados em versão "generalizada a n objectos" (*e.g.* a propriedade distributiva *generalizada* da multiplicação relativamente à adição).

1.1 Intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$

DEFINIÇÃO: Dados $a = (a_1, \dots, a_N), b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N, a_i \leq b_i \, (i = 1, \dots, N)$, chamamos *intervalo fechado de extremos* a, b, ao conjunto:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i = 1, \dots, N\} \\ &= \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]. \end{aligned}$$

Salvo menção em contrário, em tudo o que se segue, I designará um intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$ de extremos a, b $(a = (a_1, \dots, a_N), b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N, a_i \leq b_i \, (i = 1, \dots, N))$.

Observações: 1) Por abuso de linguagem, reservaremos a designação *"intervalo fechado de* $\mathbb{R}^N$*"* para os intervalos de extremos em $\mathbb{R}^N$ como os que acabámos de definir, embora se possa dar uma definição natural de *intervalo de* $\mathbb{R}^N$, produto cartesiano de N intervalos de $\mathbb{R}$, não necessariamente limitados ou fechados, existindo portanto, neste contexto, intervalos em $\mathbb{R}^N$, *fechados* para a topologia de $\mathbb{R}^N$, mas que *não têm extremos em* $\mathbb{R}^N$; com efeito, alguns dos intervalos factores do produto cartesiano podem *não ser limitados*.

2) É fácil concluir que os extremos de $I = [a, b]$, intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$ ficam bem determinados, ou seja:

$$[a, b] = [a', b'] \Rightarrow a = a', b = b';$$

dado J intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$ podemos então, sem ambiguidade, representar por a^J, b^J os seus extremos, ou seja, de modo geral representaremos por J o intervalo $\prod_{i=1}^{N} [a_i^J, b_i^J]$. Designaremos por *projecções* de J os intervalos $[a_i^J, b_i^J]$ $(i = 1, \ldots, N)$.

3) É fácil concluir que o *interior* $\overset{\circ}{I}$ do intervalo $I = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ é igual a:

$$\prod_{i=1}^{N}]a_i, b_i[.$$

Um intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$, de extremos $a, b \in \mathbb{R}^N$, é *compacto* (com efeito, é limitado e fechado).

4) Um intervalo $I = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ diz-se *degenerado* se existir $i \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $a_i = b_i$. Atendendo à observação anterior, é óbvio que I é degenerado sse tiver *interior vazio*.

5) Como se vê facilmente, a *fronteira* $\mathrm{fr}(I)$ de I é união finita de intervalos degenerados. Com efeito, trata-se da união dos intervalos fechados que se obtêm de I substituindo algumas das projecções (pelo menos uma) pelo intervalo degenerado de $\mathbb{R}$ reduzido a um dos respectivos extremos (por exemplo, $\{a_1\} \times \prod_{i=2}^{N} [a_i, b_i]$). A fronteira de I pode ser "decomposta" em classes de intervalos cada uma correspondente a determinada "dimensão" (em $\mathbb{R}^3$ "faces", "arestas" e "vértices"); cada classe ficará associada a certo número inteiro $k \in \{1, \ldots, N\}$ ($N - k$ será, por definição, a *dimensão* dessa parte da fronteira) e incluirá exactamente os intervalos obtidos de I por substituição de k das projecções por intervalos degenerados reduzidos a um dos respectivos extremos. Podemos mesmo obter uma decomposição de $\mathrm{fr}(I)$ em intervalos *disjuntos*, mas agora não necessariamente fechados (a definição geral de intervalo de $\mathbb{R}^N$, como atrás referimos, será idêntica à de *intervalo fechado de extremos* a, b, mas admitindo agora que as projecções sejam intervalos quaisquer de $\mathbb{R}$, não necessariamente *compactos*); bastará, em cada classe, substituir as projecções *não degeneradas* dos intervalos pelos respectivos interiores (por exemplo:

$$]a_1, b_1[\, \times\,]a_2, b_2[\, \times \{a_3\} \times \prod_{i=4}^{N-1}]a_i, b_i[\, \times \{b_N\},$$

na classe correspondente a $k = 2$) .

6) Para o que se segue é útil ter presente certas propriedades dos intervalos cuja demonstração é simples, embora em alguns casos não tão imediata como poderia parecer à primeira vista. Temos assim:

a) *Se I for intervalo não degenerado, então* $\overline{\overset{\circ}{I}} = I$.

b) *Se I, J forem intervalos não degenerados, então* $\overset{\circ}{I} \cap J \neq \emptyset$ *sse* $\overset{\circ}{I} \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$ (e portanto também *sse* $I \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$).

c) *Se I, J forem intervalos tais que $I \cap J \neq \emptyset$ e $I \cap (\mathbb{R}^N \setminus J) \neq \emptyset$, então* $I \cap \mathrm{fr}(J) \neq \emptyset$; com efeito, mais precisamente, I *é convexo*, e portanto, em particular, *conexo,* embora se possa dar uma demonstração directa da propriedade descrita, sem recorrer a estes conceitos topológicos.

DEFINIÇÃO: Chamamos *volume* do intervalo $[a, b]$ ao número real não negativo:

$$V([a, b]) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

(também se chama *área* se $N = 2$, *comprimento* se $N = 1$).

Observações: 7) A possibilidade de definir volume através da fórmula anterior resulta simplesmente de que os extremos a_i, b_i das projecções de $[a, b]$ ficam bem determinados, de acordo com a Observação 2).

8) É fácil concluir que um intervalo tem volume nulo sse for degenerado.

1.2 Partições e uniões de intervalos

Em tudo o que se segue, salvo menção em contrário, para além das hipóteses atrás feitas, supor-se-á que I é *não degenerado*.

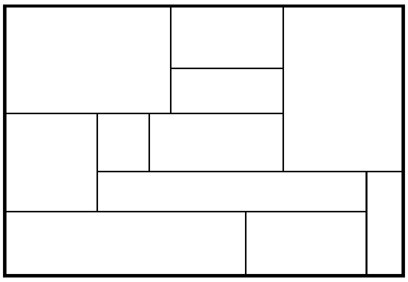
DEFINIÇÃO: Dado um intervalo fechado $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^N$ chamamos *partição* ou *decomposição de I* a um conjunto:

$$P = \{I_1, \ldots, I_k\}$$

em que os I_j $(j = 1, \ldots, k)$ são intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$ de interior não vazio, dois a dois sem pontos interiores comuns e de união igual a I; ou seja:

- $\overset{\circ}{I_j} \neq \emptyset \; \forall j = 1, \dots, k$;
- $\overset{\circ}{I_j} \cap \overset{\circ}{I_l} = \emptyset \; \forall j, l = 1, \dots, k, \; j \neq l$;
- $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$.

Designamos por $\mathcal{P}(I)$ o *conjunto das partições do intervalo* I.



(Representa-se uma partição de um intervalo I de $\mathbb{R}^2$)

Observações: 9) É fácil ver que o conjunto das partições P de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se pode pôr em correspondência biunívoca com o conjunto das famílias finitas $\{x_1, \dots, x_k\} \subset [a, b]$ tais que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b,$$

de tal modo que:

$$P = \{[x_j, x_{j+1}] : j = 0, \dots, k\}.$$

10) A noção de *"partição de intervalo"* introduzida *não é coerente* com a noção habitual de *"partição de conjunto"* em que se exige que os elementos sejam dois a dois disjuntos (e não apenas de *interiores* disjuntos, noção que aliás só faz sentido no quadro de um espaço topológico). Como infelizmente se trata de designação vulgarizada neste contexto, optou-se por adoptá-la neste curso, prevenindo desde já eventuais equívocos…

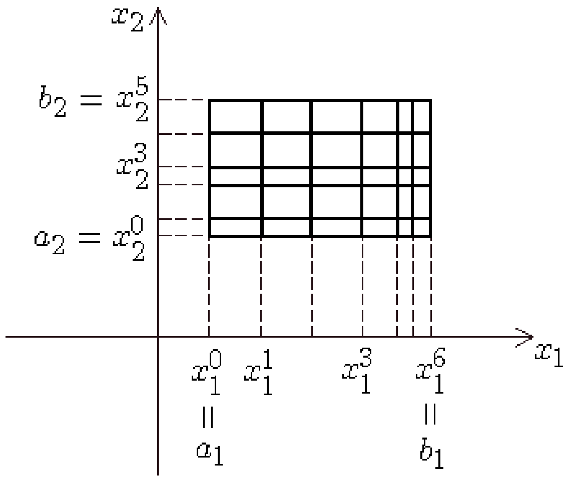
DEFINIÇÃO: Uma partição $P \in \mathcal{P}(I)$ $(I = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i])$ diz-se *normal* se for constituída por todos os intervalos que se obtêm fazendo todos os possíveis produtos cartesianos de N intervalos, cada um sucessivamente escolhido como sub-intervalo de um dos $[a_i, b_i]$ e pertencendo a uma partição pré-fixada deste intervalo $(i = 1, \dots, N)$. Ou seja, se para cada $i = 1, \dots, N$ existirem $x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{k_i+1}$, tais que:

• $a_i = x_i^0 < x_i^1 \ < \ldots \ < \ x_i^{k_i+1} = b_i$

• $P = \{\prod_{i=1}^{N}[x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}] : j_1 = 0, \ldots, k_1; \ldots ; j_N = 0, \ldots, k_N\}$

$\quad = \{\prod_{i=1}^{N}[x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}] : (j_i)_{i=1,\ldots,N} \in \prod_{i=1}^{N}\{0, \ldots, k_i\}\}$

Representemos graficamente uma partição normal em $\mathbb{R}^2$:



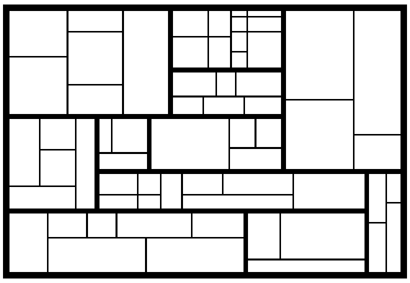
Observação: 11) É fácil concluir que a família P acima definida é realmente partição do intervalo I e portanto que existem, de facto, partições normais; é óbvio que I é união dos intervalos de P, pois dado $x = (x_1, \ldots, x_N) \in I$, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, x_i tem de estar entre a_i e b_i e portanto entre certo $x_i^{j_i}$ e $x_i^{j_i+1}$ ($j_i \in \{0, \ldots, k_i\}$), o que implica que x pertença a $\prod_{i=1}^{N}[x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}]$, intervalo de P. Por outro lado tais intervalos têm interiores dois a dois disjuntos; de facto se $\prod_{i=1}^{N}]x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}[$ e $\prod_{i=1}^{N}]x_i^{j_i'}, x_i^{j_i'+1}[$ se intersectarem, considerando $x = (x_1, \ldots, x_N)$ na intersecção, ter-se-á

$$\begin{cases} x_i^{j_i} < x_i < x_i^{j_i+1} \\ x_i^{j_i'} < x_i < x_i^{j_i'+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i} < x_i^{j_i'+1} \\ x_i^{j_i'} < x_i^{j_i+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i} \leq x_i^{j_i'} \\ x_i^{j_i'} \leq x_i^{j_i} \end{cases}$$

já que os x_i^l estão, para cada i, ordenados por ordem crescente dos l. Concluímos então que $x_i^{j_i'} = x_i^{j_i}$, para todo o $i = 1, \ldots, N$, o que mostra a identidade dos dois intervalos.

DEFINIÇÃO: Se $P', P \in \mathcal{P}(I)$, P' diz-se *mais fina que* P (escreve-se $P' \succ P$) se para cada $J' \in P'$ existir $J \in P$ tal que $J' \subset J$.

Podemos visualizar duas partições "comparáveis" (relativamente à relação *mais fina que*) de determinado intervalo de $\mathbb{R}^2$, representando os intervalos da partição *mais fina* com traço mais delgado:



PROPOSIÇÃO 1.1: S*eja* $P \in \mathcal{P}(I)$*; então* P' *é partição de* I *mais fina que* P *sse para cada* $J \in P$ *existir* P_J *partição de* J *tal que:*

$$P' = \bigcup_{J \in P} P_J.$$

Além disso, neste caso, os P_J *são disjuntos dois a dois e:*

$$P_J = \{J' \in P' \colon J' \subset J\} = \{J' \in P' \colon J' \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset\}, \forall J \in P.$$

Demonstração: Comecemos por verificar que a condição é necessária; sendo $P' \succ P$ é fácil concluir que se J' é intervalo de P', J intervalo de P e $J' \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$, então $J' \subset J$. Com efeito, por definição de partição mais fina, tem de existir $K \in P$ tal que $J' \subset K$, donde $J' \cap \overset{\circ}{J} \subset K \cap \overset{\circ}{J}$. Ora $J' \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$; logo $K \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$, donde $\overset{\circ}{J} \cap \overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ (Observação 6–b)), o que permite concluir que $J = K$, atendendo à definição de partição. Concluímos assim que, de facto, $J' \subset J$; reciprocamente, é evidente que se $J' \subset J$, então $\overset{\circ}{J'} \cap J = \overset{\circ}{J'} \neq \emptyset$, e portanto $J' \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset$, o que, em particular, acaba de demonstrar a parte final da Proposição (note-se que os P_J são dois a dois disjuntos pois se $J \neq K$, estando J e K em P, J e K não podem conter simultaneamente um mesmo J' de P', pois nesse caso os seus interiores intersectar-se-iam).

Temos então, para $J \in P$:

$$\overset{\circ}{J} \subset \bigcup_{\substack{J' \in P' \\ J' \cap \overset{\circ}{J} \neq \emptyset}} J' = \bigcup_{\substack{J' \in P' \\ J' \subset J}} J' \subset J,$$

e portanto:

$$J = \overline{\overset{\circ}{J}} = \bigcup_{\substack{J' \in P' \\ J' \subset J}} J' = \bigcup_{J' \in P_J} J',$$

já que as uniões envolvidas são conjuntos fechados, pelo que, passando às aderências a cadeia de inclusões, podemos concluir a validade das igualdades pretendidas. Daqui se conclui imediatamente que, de facto, P_J é partição de J, já que, das propriedades características da noção de partição, a única que não resulta imediatamente de $P_J \subset P'$ é precisamente a igualdade que acabámos de demonstrar. Que P' é união dos P_J resulta imediatamente da definição de partição "mais fina que".

Para demonstrar que a condição é suficiente, ou seja, que implica $P' \in \mathcal{P}(I)$ (é depois óbvio que $P' \succ P$) basta verificar que dela resulta $\overset{\circ}{J'} \cap \overset{\circ}{K'} = \emptyset$ sempre que $J' \in P_J$, $K' \in P_K$ com $J \neq K$, o que se deduz imediatamente de $J' \subset J$, $K' \subset K$ e $\overset{\circ}{J} \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$.□

PROPOSIÇÃO 1.2: S*e* $P \in \mathcal{P}(I)$ *existe uma partição normal de* I, P', *mais fina que* P*; além disso, se* $P' \in \mathcal{P}(I)$ *for partição normal mais fina que* P, *os correspondentes* P_J, *com as notações da Proposição anterior, são, neste caso, partições normais.*

Demonstração: Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ consideremos:

$$\bullet \{x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{k_i+1}\} = \bigcup_{J \in P} \{a_i^J, b_i^J\}$$

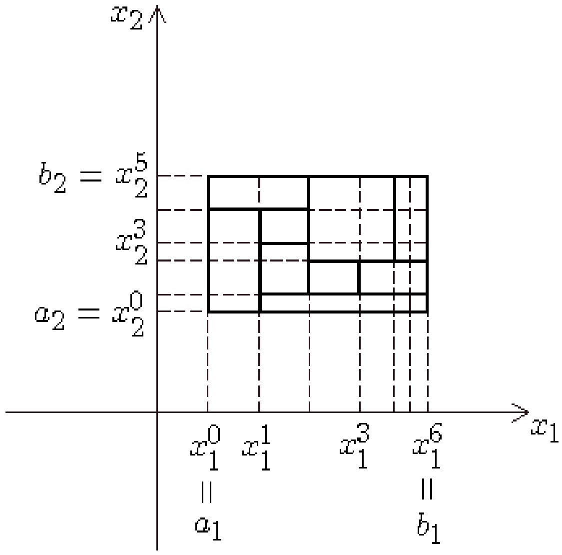
onde:

$$\bullet\, a_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i+1} = b_i$$

(como convencionámos na Observação 2), $J = \prod_{i=1}^{N} [a_i^J, b_i^J]$, para cada J em P); seja então:

$$\bullet\, P' = \{J' = \prod_{i=1}^{N} [x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}] : j_1 = 0, \ldots, k_1; \ldots; j_N = 0, \ldots, k_N\}.$$

Graficamente:



P' é, por construção, partição normal de I. Para verificar que P' é mais fina que P, consideremos um dos intervalos J' de P'; tomando x no interior de J' (que, por definição de partição é não vazio), x terá de estar em algum dos intervalos J de P, pelo que, para cada $i = 1, \ldots, N$, existirá $j_i \in \{0, \ldots, k_i\}$ tal que simultaneamente:

$$\begin{cases} x_i^{j_i} < x_i < x_i^{j_i+1} \\ a_i^J \leq x_i \leq b_i^J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i} < b_i^J \\ a_i^J < x_i^{j_i+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i+1} \leq b_i^J \\ a_i^J \leq x_i^{j_i} \end{cases},$$

atendendo a que os a_i^J, b_i^J são alguns dos x_i^l, que estão ordenados por ordem crescente dos l (ver Observação 11). Estas desigualdades mostram que $J' \subset J$, e portanto, de facto, P' é mais fina que P.

Provemos agora que para cada $J \in P$, P_J é partição normal de J (com as notações da Proposição 1.1); basta notar que $J' \in P'$ está em P_J sse $a_i^J \leq x_i^{j_i} < b_i^J$ para todo o $i = 1, \ldots, N$, pelo que é óbvio que P_J tem de facto a forma requerida às partições normais do intervalo J.□

1.3 Volume de uniões de intervalos

TEOREMA 1.3: S*e P for partição de I, então:*

$$V(I) = \sum_{J \in P} V(J)$$

Demonstração: Comecemos por notar que basta demonstrar o Teorema no caso em que P é partição normal. Com efeito, supondo válida a propriedade para qualquer intervalo I e P' partição normal de I, para uma partição arbitrária P de I podemos considerar P' partição normal de I mais fina que P, atendendo à Proposição anterior; cada P_J será então, como vimos, partição normal de J, pelo que (utilizando as notações da Proposição 1.1, propriedades algébricas elementares da adição e a hipótese que acabámos de fazer):

$$\sum_{J\in P} V(J) = \sum_{J\in P}\left(\sum_{J'\in P_J} V(J')\right) = \sum_{J'\in \bigcup\limits_{J\in P} P_J} V(J') = \sum_{J'\in P'} V(J') = V(I).$$

Suponhamos então que P é partição normal do intervalo I:

$$\bullet\, P = \{\prod_{i=1}^{N} [x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}] : j_1 = 0,\ldots,k_1; j_2 = 0,\ldots,k_2; j_N = 0,\ldots,k_N\},$$

com:

$$\bullet\, a_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i+1} = b_i,$$

para cada $i = 1,\ldots,N$. Temos então:

$$\begin{aligned} V(I) &= \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i) = \\ &= \prod_{i=1}^{N}(b_i - x_i^{k_i} + x_i^{k_i} - x_i^{k_i-1} + \cdots - x_i^1 + x_i^1 - a_i) = \\ &= \prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{j_i=0}^{k_i}(x_i^{j_i+1} - x_i^{j_i})\right) = \sum_{\substack{(j_i)_{i=1,\ldots,N}\in \\ \in \prod_{i=1}^{N}\{0,\ldots,k_i\}}} \left(\prod_{i=1}^{N}(x_i^{j_i+1} - x_i^{j_i})\right) = \\ &= \sum_{J\in P} V(J) \end{aligned}$$

atendendo à distributividade do produto em relação à adição (para um número arbitrário de parcelas e factores).☐

Para prosseguirmos o estudo do volume de uniões de intervalos convém-nos dispor de resultados traduzindo propriedades intuitivas que relacionem uniões arbitrárias de intervalos com partições; nomeadamente, mostrar que se pode *"preencher o complementar em I de uma união de intervalos com intervalos de interiores dois a dois disjuntos"* e que *"se I for coberto pela união de uma família $\mathcal{G}$ de intervalos, existe uma partição de I constituída por intervalos inteiramente contidos em intervalos de $\mathcal{G}$"*.

PROPOSIÇÃO 1.4: *Dada uma família finita $\mathcal{G}$ de intervalos fechados contidos em I, existe uma família finita $\mathcal{F}$ de intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$ não degenerados* *tal que:*

$$\bullet\, \overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{K'} = \emptyset,\ \forall K, K' \in \mathcal{F}, K \neq K'$$

$$\bullet\, \overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{J} = \emptyset, \forall K \in \mathcal{F}, J \in \mathcal{G}$$

$$\bullet \left(\bigcup_{J\in\mathcal{G}} J\right) \cup \left(\bigcup_{K\in\mathcal{F}} K\right) = I.$$

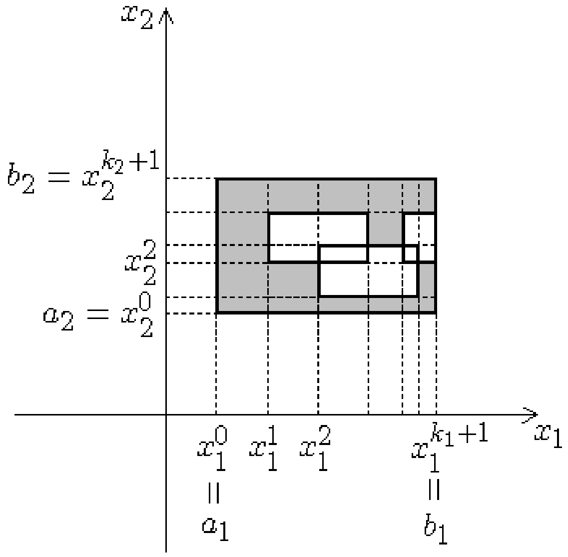
Demonstração: Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ consideremos:

$$\bullet\, \{x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{k_i+1}\} = \bigcup_{J\in\mathcal{G}} \{a_i^J, b_i^J\} \cup \{a_i, b_i\}$$

onde:

$$\bullet\, a_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i+1} = b_i,$$

e seja $\mathcal{F}'$ a partição normal de I definida pelos $x_i^{J_i}$. Graficamente:



Podemos então tomar:

$$\mathcal{F} = \{K \in \mathcal{F}' : \overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{J} = \emptyset, \forall\, J \in \mathcal{G}\}$$

é fácil concluir que um intervalo K de $\mathcal{F}'$ que não esteja em $\mathcal{F}$, ou seja, que intersecte o interior de um dos J de $\mathcal{G}$ terá de estar nele contido. Basta utilizar argumentos semelhantes aos das demonstrações das Proposições 1.1 e 1.2 (*cf.* também Observação 11)) ; se $\overset{\circ}{K}$ $(=\prod_{i=1}^{N}]x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}[)$, intersecta $\overset{\circ}{J}$, tomando $x = (x_1, \ldots, x_N)$ na intersecção, teremos:

$$\begin{cases} x_i^{j_i} < x_i < x_i^{j_i+1} \\ a_i^J < x_i < b_i^J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i} < b_i^J \\ a_i^J < x_i^{j_i+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i+1} \leq b_i^J \\ a_i^J \leq x_i^{j_i} \end{cases},$$

atendendo a que os a_i^J, b_i^J são alguns dos x_i^l, para cada i em $\{1, \ldots, N\}$. Temos portanto, de facto, $K \subset J$. Podemos então concluir que:

$$I = \left(\bigcup_{K \in \mathcal{F}'} K\right) = \left(\bigcup_{K \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}} K\right) \cup \left(\bigcup_{K \in \mathcal{F}} K\right) \subset \left(\bigcup_{J \in \mathcal{G}} J\right) \cup \left(\bigcup_{K \in \mathcal{F}} K\right) \subset I,$$

o que termina a demonstração, já que as restantes propriedades de $\mathcal{F}$ resultam imediatamente de $\mathcal{F}'$ ser partição e da definição de $\mathcal{F}$.□

Observação: 12) Em particular, se os intervalos de $\mathcal{G}$ forem *não degenerados* e *de interiores dois a dois disjuntos*, existirá uma partição $P \in \mathcal{P}(I)$ contendo $\mathcal{G}$; por outras palavras *é possível "completar $\mathcal{G}$" de modo a obter uma partição de* I.

PROPOSIÇÃO 1.5: *Dada uma família finita $\mathcal{G}$ de intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$ tal que:*

$$\bullet\, I \subset \bigcup_{J \in \mathcal{G}} J,$$

existe P partição de I tal que:

$$\bullet \forall\, K \in P\ \ \exists\, J \in \mathcal{G} : K \subset J.$$

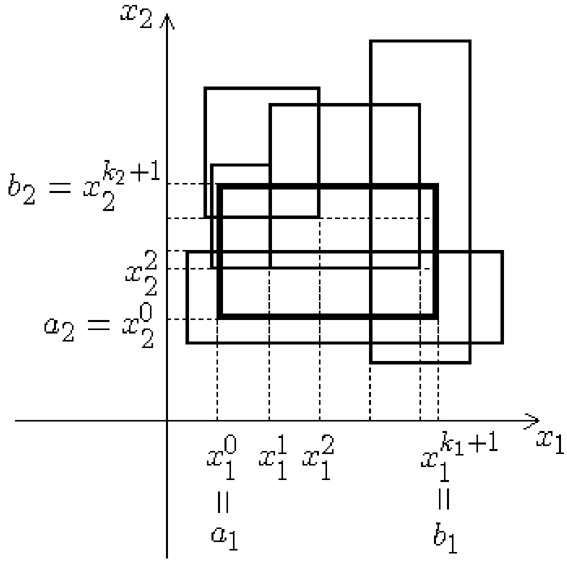
Demonstração: Para cada $i = 1, \ldots, N$ seja:

$$\bullet\, \{x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{k_i+1}\} = \left\{ t \in \bigcup_{J \in \mathcal{G}} \{a_i^J, b_i^J\} : a_i \leq t \leq b_i \right\} \cup \{a_i, b_i\},$$

de tal modo que:

$$\bullet\, a_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i+1} = b_i.$$

Seja então P a partição normal associada a estas decomposições das projecções do intervalo I; provemos que P satisfaz às condições expressas no Teorema. Graficamente:



Seja:

$$K = \prod_{i=1}^{N} [x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}] \in P,$$

com as notações habituais para partições normais. Provemos que existe J em $\mathcal{G}$ contendo K; seja x ponto interior a K e J em $\mathcal{G}$ tal que $x \in J$ (J existe, atendendo a que os J cobrem I). É fácil agora demonstrar que $K \subset J$, por processo semelhante ao utilizado em proposições anteriores; com efeito temos, para cada i em $\{1, \ldots, N\}$:

$$\begin{cases} x_i^{j_i} < x_i < x_i^{j_i+1} \\ a_i^J \le x_i \le b_i^J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i} < b_i^J \\ a_i^J < x_i^{j_i+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^{j_i+1} \le b_i^J \\ a_i^J \le x_i^{j_i} \end{cases},$$

atendendo a que os a_i^J, b_i^J são alguns dos x_i^l, a menos que fiquem fora do intervalo $[a_i, b_i]$ sendo óbvias, nesse caso, as últimas desigualdades, pelo que, de facto, as projecções de J contêm as projecções de K.$\square$

TEOREMA 1.6: S*ejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ famílias finitas de intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$ tais que:*

$$\bullet\, \overset{\circ}{J} \cap \overset{\circ}{J'} = \emptyset, \forall J, J' \in \mathcal{G}, J \neq J';$$
$$\bullet \bigcup_{J \in \mathcal{G}} J \subset \bigcup_{K \in \mathcal{F}} K.$$

Então:

$$\sum_{J\in\mathcal{G}} V(J) \le \sum_{K\in\mathcal{F}} V(K).$$

Demonstração: Podemos supor que os intervalos de $\mathcal{G}$ são todos não degenerados, já que os degenerados não contribuem para a soma. Comecemos por considerar o caso em que só existe um K, ou seja, em que $\mathcal{F} = \{K\}$; K não pode ser degenerado, atendendo à hipótese que acabámos de fazer. Estamos assim em condições de aplicar a Proposição 1.4 à família $\mathcal{G}$, relativamente ao intervalo K, pelo que existirá uma família $\mathcal{F}'$ disjunta de $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}\cup\mathcal{F}'$ é partição do intervalo K. Teremos portanto:

$$V(K) = \sum_{J\in\mathcal{G}\cup\mathcal{F}'} V(J) = \sum_{J\in\mathcal{G}} V(J) + \sum_{K\in\mathcal{F}'} V(K);$$

como as parcelas não são negativas, podemos concluir imediatamente que, de facto:

$$\sum_{J\in\mathcal{G}} V(J) \le V(K).$$

Passemos agora ao caso geral. Cada J de $\mathcal{G}$ estará então nas condições do intervalo I da Proposição 1.5 relativamente à família $\mathcal{F}$ (que aqui desempenha o papel da família $\mathcal{G}$ daquela Proposição). Concluímos portanto que para qualquer J em $\mathcal{G}$ podemos construir P_J, partição de J, tal que para cada $J'\in P_J$ existe $K\in\mathcal{F}$ contendo J'. Teremos assim:

$$\sum_{J\in\mathcal{G}} V(J) = \sum_{J\in\mathcal{G}}\left(\sum_{J'\in P_J} V(J')\right) \le \sum_{J\in\mathcal{G}}\left(\sum_{K\in\mathcal{F}}\left(\sum_{\substack{J'\in P_J\\ J'\subset K}} V(J')\right)\right) =$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{F}}\left(\sum_{J\in\mathcal{G}}\left(\sum_{\substack{J'\in P_J\\ J'\subset K}} V(J')\right)\right) \le \sum_{K\in\mathcal{F}} V(K),$$

onde, na primeira desigualdade, se utilizou o facto de cada J' estar contido em certo K (o que mostra que, quando muito, acrescentámos parcelas positivas à soma, no caso em que um mesmo J' esteja contido em mais que um K), na segunda igualdade as propriedades associativa e comutativa da adição e, na terceira desigualdade, a conclusão do Teorema para o caso simples de que tratámos inicialmente; com efeito, os J' de diferentes P_J têm interiores dois a dois disjuntos, atendendo às hipóteses feitas sobre os intervalos J de $\mathcal{G}$, pelo que a soma (somatório duplo) dentro de parêntesis é inferior ou igual ao volume do intervalo K (para cada K de $\mathcal{F}$).□

COROLÁRIO: S*ejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ famílias finitas de intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$ tais que:*

$$\bullet \overset{\circ}{J} \cap \overset{\circ}{J'} = \emptyset, \forall J, J' \in \mathcal{G}, J \neq J';$$
$$\bullet \overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{K'} = \emptyset, \ \forall K, K' \in \mathcal{F}, K \neq K';$$
$$\bullet \bigcup_{J\in\mathcal{G}} J = \bigcup_{K\in\mathcal{F}} K.$$

Então:

$$\sum_{J\in\mathcal{G}} V(J) = \sum_{K\in\mathcal{F}} V(K).$$

Demonstração: Basta aplicar o Teorema anterior duas vezes.☐

Observação: 13) O Corolário anterior permitiria estender a noção de volume a "figuras" constituídas por uniões finitas de intervalos de interiores dois a dois disjuntos, uma vez que a soma dos volumes de tais intervalos depende apenas da sua união e não dos intervalos escolhidos para a constituir.

Exercícios

1) Designa-se por *intervalo de* $\mathbb{R}^N$ qualquer produto cartesiano de N intervalos de $\mathbb{R}$. Mostre que se I, J forem intervalos de $\mathbb{R}^N$ então $I \cap J$ é intervalo de $\mathbb{R}^N$ e se I, J forem *intervalos fechados* de $\mathbb{R}^N$ então $I \cap J$ é intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$

2) Demonstre as asserções contidas nas Observações 1) a 6), 8) e 9).

3) Sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I)$ e $P_{12} = \{I_1 \cap I_2 : I_1 \in P_1, I_2 \in P_2 \text{ e } \overset{\circ}{I_1} \cap I_2 \neq \emptyset\}$; mostre que $P_{12} \in \mathcal{P}(I)$.

4) Enuncie e demonstre a generalização a um número arbitrário de parcelas e (ou) factores das propriedades associativa e comutativa da adição e multiplicação, e da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em $\mathbb{R}$. *(Sugestão: A distributiva generalizada refere-se ao produto de k somas, cada qual com l_i parcelas — $i = 1, \ldots, k$; representando por $a_i^{j_i} \in \mathbb{R}$ as parcelas da i-ésima soma — $j_i = 1, \ldots, l_i$ — a propriedade traduz-se pela identidade:*

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j_i=1}^{l_i} a_i^{j_i}\right) = \sum_{(j_i)_{i=1,\ldots,k}\in\prod_{i=1}^{k}\{1,\ldots,l_i\}} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i^{j_i}\right),$$

supondo já demonstradas as comutativas e associativas generalizadas da soma e produto. Feita esta hipótese, a demonstração da distributiva pode fazer-se, por exemplo, por indução em $n = \max\limits_{i=1,\ldots,k} l_i$, começando por $n = 2$, caso que também pode ser provado por indução, agora em k.)

5) Seja $\mathcal{G}$ uma família finita de intervalos fechados contidos em I, $\mathcal{F}$ uma família de intervalos nas condições do enunciado da Proposição 1.4 e $\mathcal{F}'$ uma família de intervalos também nas condições da família $\mathcal{F}$ do enunciado da Proposição 1.4 mas agora para $\mathcal{G}$ igual à família $\mathcal{F}$ previamente determinada;

a) Mostre que se $\mathcal{G}$ for constituída por intervalos *não degenerados*, então:

$$\bigcup_{J\in\mathcal{F}'} J = \bigcup_{K\in\mathcal{G}} K;$$

b) Mostre, com auxílio de um contra-exemplo, que a conclusão da alínea anterior pode não ser verdadeira se $\mathcal{G}$ contiver pelo menos um intervalo degenerado;

c) Mostre que, em qualquer caso:

$$\bigcup_{J\in\mathcal{F}'} J = \bigcup_{K\in\mathcal{G}'} K,$$

sendo $\mathcal{G}'$ a família dos intervalos *não degenerados* da família $\mathcal{G}$.

Capítulo 2

Construção do Integral de Riemann em $\mathbb{R}^N$

2.1 Sucessões generalizadas indiciadas em $\mathcal{P}(I)$

Para prosseguirmos a formalização das ideias intuitivas discutidas na Introdução, pretendemos agora dar uma definição de convergência para "sucessões generalizadas" indiciadas no conjunto $\mathcal{P}(I)$, uma vez que para cada partição pretendemos obter aproximações do "volume abaixo do gráfico", sendo cada aproximação soma de volumes de paralelepípedos correspondente à partição fixada. Uma vez que está definida em $\mathcal{P}(I)$ uma relação ($\succ$) que facilmente se vê ser de ordem parcial, podemos procurar utilizá-la para reproduzir a noção habitual de convergência de sucessões (baseada na ordem natural); no entanto, para se obter a unicidade do limite, não é suficiente ter-se uma relação de ordem parcial — normalmente faz-se uma hipótese suplementar que, como vamos ver, é satisfeita no caso da relação "mais fina que":

PROPOSIÇÃO 2.1: *A relação $\succ$ ("mais fina que") em $\mathcal{P}(I)$ é de ordem parcial e filtrante, ou seja, dadas partições P, $P' \in \mathcal{P}(I)$, existe $P'' \in \mathcal{P}(I)$ simultaneamente mais fina que P e que P'.*

Demonstração: Das propriedades que caracterizam $\succ$ como relação de ordem parcial a única que não é completamente trivial é a anti-simetria lata; suponhamos então que $P' \succ P$ e $P \succ P'$. Provemos que $P = P'$; se $J \in P$, então existirá $J' \in P'$, tal que $J \subset J'$, por definição de $\succ$. Pela mesma razão, existirá agora $J_1 \in P$ tal que $J' \subset J_1$, pelo que $J \subset J_1$, e portanto $J = J_1$, por definição de partição; mas então:

$$J \subset J' \subset J_1 = J \Rightarrow J = J',$$

e portanto $J \in P'$. Logo, de facto, $P \subset P'$, e uma vez que podemos aplicar este resultado trocando os papéis de P e P', concluímos que $P = P'$, o que termina a demonstração da anti-simetria lata.

Para verificar que $\succ$ é filtrante, considere-se $P, P' \in \mathcal{P}(I)$ e para cada J de P tome-se agora P_J em $\mathcal{P}(J)$ pela Proposição 1.5, relativamente aos intervalos de P' que, evidentemente, cobrem J, visto cobrirem todo o I. Obtém-se assim uma família de partições P_J de cada J de P cuja união P'' é, pela Proposição

1.1, partição de I mais fina que P, e é também mais fina que P', atendendo a ter sido construída pela Proposição 1.5.□

DEFINIÇÕES: Chamamos *sucessão generalizada* ou *rede* a uma aplicação:

$$S : \mathcal{P}(I) \to \mathbb{R},$$

que também se representa por $(S_P)_{P\in\mathcal{P}(I)}$, ou simplesmente por S_P.

S_P diz-se *convergente para* $S_0 \in \mathbb{R}$ ou diz-se que S_P *tende para* S_0 se:

$$\forall\delta > 0, \exists P_0 \in \mathcal{P}(I) : P \succ P_0 \Rightarrow |S_P - S_0| < \delta.$$

Observação: 1) Esta noção de convergência é por vezes designada por "convergência no sentido de Moore-Smith". A noção de rede ou sucessão generalizada intervém de modo essencial no quadro da Topologia Geral, sendo aí tomada na acepção mais lata de aplicação definida em conjunto parcialmente ordenado filtrante, com valores no espaço topológico em questão; neste curso apenas utilizaremos a noção mais restrita que acabámos de introduzir. Pressupondo conhecimentos básicos de Topologia, as propriedades conhecidas de continuidade da soma e produto por número real traduzem-se imediatamente em propriedades elementares da convergência de redes reais; vamos, no entanto, recordar estas propriedades juntamente com outras que nos vão interessar para a definição de integral.

Utilizaremos a notação "$S_P \xrightarrow[P]{} S_0$", ou simplesmente "$S_P \longrightarrow S_0$", com o significado *"$S_P$ tende para S_0"* e o limite será designado por "$\lim\limits_P S_P$" ou simplesmente por "$\lim S_P$".

PROPOSIÇÃO 2.2: *Sejam S_P, T_P sucessões generalizadas; então:*

1. Se $S_P \longrightarrow S_0, T_P \longrightarrow T_0,$ então $S_P + T_P \xrightarrow[P]{} S_0 + T_0$.

2. Se $S_P \longrightarrow S_0,$ então $\lambda S_P \xrightarrow[P]{} \lambda S_0, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Se $S_P \longrightarrow S_0, T_P \longrightarrow T_0$ e existir $P_0 \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S_P \geq T_P$ para todo o $P \succ P_0$ então $S_0 \geq T_0$; em particular, o limite, se existir, é único.

4. Se S_P for crescente, ou seja, $P \succ P' \Rightarrow S_P \geq S_{P'}$, então S_P é convergente sse for majorada (ou seja, majorado o conjunto $\{S_P\colon P \in \mathcal{P}(I)\}$) e, nesse caso:

$$\lim S_P = \sup\{S_P\colon P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

5. Se S_P for decrescente, ou seja, $P \succ P' \Rightarrow S_P \leq S_{P'}$, então S_P é convergente sse for minorada (ou seja, minorado o conjunto $\{S_P\colon P \in \mathcal{P}(I)\}$) e, nesse caso:

$$\lim S_P = \inf\{S_P\colon P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Demonstração: As demonstrações são simples adaptações das correspondentes para sucessões. Demonstremos, a título de exemplos, 3. e 4.:

Para demonstrar 3., suponhamos que a hipótese se verifica mas que $S_0 < T_0$; nesse caso, pondo $\delta = \frac{1}{2}(T_0 - S_0)$, por definição de convergência existirão partições P_1 e P_2 de I tais que:

$$\bullet\, P \succ P_1 \Rightarrow |S_P - S_0| < \delta;\;\; P \succ P_2 \Rightarrow |T_P - T_0| < \delta.$$

Podemos considerar P' simultaneamente mais fina que P_1 e que P_2, atendendo à Proposição 2.1, e, aplicando mais uma vez esta Proposição, considerar agora P mais fina que P' e que P_0; então, pela hipótese de 3., $S_P \geq T_P$, já que $P \succ P_0$ e, por outro lado, como também se terá $P \succ P_1, P_2$, virá:

$$\begin{aligned} S_P - T_P = \underbrace{S_P - S_0}_{<\,\delta} + \underbrace{T_0 - T_P}_{<\,\delta} + S_0 - T_0 < \\ < \delta + \delta + S_0 - T_0 = 0 \Rightarrow S_P < T_P, \end{aligned}$$

contradição que demonstra 3..

Para demonstrar 4., comecemos por supor S_P majorada e designemos por S o supremo (finito) dos S_P $(P \in \mathcal{P}(I))$; mostremos que S é, de facto, o limite de S_P. Dado $\delta > 0$, por definição de supremo sabemos que existe P em $\mathcal{P}(I)$ tal que $S - \delta < S_P$; mas como S_P é crescente teremos (atendendo também a que o supremo é majorante de todos os S_P):

$$P' \succ P \Rightarrow S - \delta < S_P \leq S_{P'} \leq S < S + \delta \Rightarrow |S_{P'} - S| < \delta,$$

ou seja, $S_P \xrightarrow[P]{} S$. Reciprocamente, se S_P não for majorada, então para qualquer $L > 0$ existirá $P_0 \in \mathcal{P}(I)$ tal que $S_{P_0} > L$, pelo que $S_{P'} \geq S_{P_0} > L$ para todo o $P' \succ P_0$ (atendendo a que S_P é crescente); S_P não poderá então convergir para nenhum $S \in \mathbb{R}$, ou ter-se-ia $S_{P''} < S + 1$ para todas as partições P'' mais finas que certa partição P_1 o que conduziria a uma contradição, tomando $L = S + 1$ e escolhendo P' simultaneamente mais fina que P_1 e que P_0.□

2.2 Somas e Integrais de Darboux

Vamos agora formalizar a ideia intuitiva de aproximação do integral por "somas de volumes de paralelepípedos", mas retiraremos a hipótese feita inicialmente, para efeito de interpretação geométrica, de f ser não negativa.

DEFINIÇÕES: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada e $P \in \mathcal{P}(I)$; chamamos *soma inferior de Darboux de f relativamente a P* ao número real:

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{J \in P} (\inf_J f) V(J).$$

Chamamos *soma superior de Darboux de f relativamente a P* ao número real:

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{J \in P} (\sup_J f) V(J).$$

As somas superiores e inferiores de Darboux constituem evidentemente sucessões generalizadas; vamos ver que são monótonas o que provará que convergem, atendendo ao que se viu no final da secção anterior.

PROPOSIÇÃO 2.3: *1. A sucessão generalizada $(\underline{S}(f,P))_{P\in\mathcal{P}(I)}$ das somas inferiores de uma função limitada $f:I\to\mathbb{R}$ é crescente e a sucessão generalizada $(\overline{S}(f,P))_{P\in\mathcal{P}(I)}$ das suas somas superiores é decrescente.*

2. $\underline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,P'),\forall P,P'\in\mathcal{P}(I)$.

Em particular tem-se:

$$(\inf_I f)V(I)\le\underline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,P')\le(\sup_I f)V(I),\forall P,P'\in\mathcal{P}(I).$$

Demonstração: Mostremos que a sucessão das somas inferiores é crescente; considerando $P'\succ P$, partições do intervalo I, sabemos, pela Proposição 1.1, que $P'=\bigcup\limits_{J\in P}P_J$, onde P_J $(=\{J'\in P':J'\subset J\})$ é partição de $J,\forall J\in P$, sendo a união disjunta. Temos assim:

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P')&=\sum_{J'\in P'}(\inf_{J'}f)V(J')=\sum_{J\in P}\sum_{J'\in P_J}(\inf_{J'}f)V(J')\ge\\&\ge\sum_{J\in P}\sum_{J'\in P_J}(\inf_J f)V(J')=\sum_{J\in P}\left((\inf_J f)\sum_{J'\in P_J}V(J')\right)\\&=\sum_{J\in P}(\inf_J f)V(J)=\underline{S}(f,P),\end{aligned}$$

atendendo a que $J'\subset J\Rightarrow\inf\limits_{J'}f\ge\inf\limits_J f$. De modo análogo se demonstraria que as somas superiores constituem uma sucessão decrescente.

Para demonstrar 2. basta agora, dadas $P,P'\in\mathcal{P}(I)$, considerar $P''\in\mathcal{P}(I)$ mais fina que P e que P'. Teremos assim, utilizando 1.:

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P)\le\underline{S}(f,P'')&=\sum_{J\in P''}(\inf_J f)V(J)\le\\&\le\sum_{J\in P''}(\sup_J f)V(J)=\overline{S}(f,P'')\le\overline{S}(f,P').\end{aligned}$$

A última asserção da Proposição resulta imediatamente do facto de $\{I\}$ ser partição de I "menos fina" que qualquer outra.☐

Atendendo à Proposição 2.2–4,5, sabemos agora que as sucessões generalizadas das somas superiores e inferiores têm ambas limite. Faz então sentido introduzir as seguintes noções:

DEFINIÇÕES: Seja $f:I\to\mathbb{R}$ limitada; chamamos *integral inferior de Darboux de* f ao número real:

$$\underline{\int_I} f = \lim_P \underline{S}(f,P) \; (= \sup_P \underline{S}(f,P)).$$

Chamamos *integral superior de Darboux de* f ao número real:

$$\overline{\int_I} f = \lim_P \overline{S}(f,P) \; (= \inf_P \overline{S}(f,P)).$$

Observações: 2) É óbvio, atendendo às definições, que:

$$(\inf_I f)\, V(I) \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq (\sup_I f)\, V(I);$$

daqui se conclui imediatamente que se f for constante (igual a $C \in \mathbb{R}$) então:

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f = C\, V(I).$$

3) Pode pôr-se a questão de saber se a igualdade dos integrais superior e inferior de Darboux é propriedade geral das funções limitadas em intervalos; é fácil concluir que não. Basta considerar, por exemplo, a função:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$$

verifica-se sem dificuldade que as somas inferiores são todas nulas e as superiores todas iguais a 1 (já que em qualquer intervalo não degenerado existem sempre valores racionais e irracionais), pelo que, neste caso:

$$\underline{\int_{[0,1]}} f = 0 < 1 = \overline{\int_{[0,1]}} f.$$

2.3 Integral de Riemann

DEFINIÇÕES: $f : I \to \mathbb{R}$, limitada, diz-se *integrável à Riemann*, *integrável-R*, ou, simplesmente, *integrável (em I)*, quando não houver perigo de confusão, se:

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

Neste caso, o valor comum dos dois integrais de Darboux designa-se por *integral de Riemann*, ou, simplesmente, *integral de f (em I)*, e representa-se por:

$$\int_I f.$$

Representa-se por $\mathcal{R}(I)$ o *conjunto das funções integráveis à Riemann em I.*

PROPOSIÇÃO 2.4 (Propriedades dos integrais de Darboux): *Sejam:*

$$f, g : I \to \mathbb{R}$$

funções limitadas e $\lambda \geq 0$. Então:

1. $\underline{\int}_I f + \underline{\int}_I g \leq \underline{\int}_I (f+g) \leq \overline{\int}_I (f+g) \leq \overline{\int}_I f + \overline{\int}_I g;$

2. $\underline{\int}_I (\lambda f) = \lambda \underline{\int}_I f, \qquad \overline{\int}_I (\lambda f) = \lambda \overline{\int}_I f;$

3. $\underline{\int}_I (-f) = -\overline{\int}_I f;$

4. *Se $f \leq g$, então* $\underline{\int}_I f \leq \underline{\int}_I g, \quad \overline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I g.$

5. *Se existir $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C, \forall x \in I$, então f é integrável à Riemann e:*

$$\int_I f = C\,V(I).$$

Demonstração: Demonstremos 1. e 3., a título de exemplos. Dado $P \in \mathcal{P}(I)$ e $J \in P$ tem-se:

$$\bullet \inf_J f + \inf_J g \leq \inf_J (f+g),$$

$$\bullet \sup_J f + \sup_J g \geq \sup_J (f+g),$$

donde:

$$\underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P) \leq \underline{S}(f+g,P) \leq \overline{S}(f+g,P) \leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P);$$

para demonstrar 1. basta então passar ao limite as desigualdades, atendendo às definições de integral superior e inferior de Darboux e à Proposição 2.2 (1. e 3.).

Para demonstrar 3., basta notar que:

$$\inf_J (-f) = -\sup_J f,$$

pelo que, obviamente:

$$\underline{S}(-f, P) = -\overline{S}(f, P),$$

donde se deduz 3., por passagem ao limite.

De modo análogo se demonstram as restantes asserções da Proposição.□

TEOREMA 2.5: *O conjunto $\mathcal{R}(I)$ das funções integráveis à Riemann em I é subespaço vectorial do espaço de todas as funções reais definidas em I e a aplicação de $\mathcal{R}(I)$ em $\mathbb{R}$ que a $f \in \mathcal{R}(I)$ faz corresponder:*

$$\int_I f \in \mathbb{R},$$

é linear e crescente, ou seja:

$$\bullet \int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g, \forall f, g \in \mathcal{R}(I), \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

e:

$$\bullet\, f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$$

Demonstração: O Teorema é consequência imediata dos pontos 1. a 4. da Proposição anterior e da definição de integral de Riemann.□

2.4 Critério das oscilações

Interessa-nos agora demonstrar um critério de integrabilidade à Riemann, baseado na comparação de funções; convém, para tal, introduzir a seguinte noção:

DEFINIÇÃO: Seja $f : A \to \mathbb{R}$ limitada e $B \subset A$, $B \neq \emptyset$; chamamos *oscilação de f em B*, a:

$$\omega(f, B) = \text{osc}\,(f, B) = \sup_B f - \inf_B f.$$

Observação: 4) É fácil ver que:

$$\omega(f, B) = \sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y \in B} (f(x) - f(y));$$

de facto:

$$\forall x, y \in B : f(x) - f(y) \leq \sup_B f - \inf_B f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x,y \in B} (f(x) - f(y)) \leq \sup_B f - \inf_B f = \omega(f, B).$$

Por outro lado, dado $\delta > 0$, por definição de supremo e de ínfimo, existem $x_0, y_0 \in B$ tais que:

$$\sup_B f \leq f(x_0) + \delta, \ \inf_B f \geq f(y_0) - \delta,$$

donde,

$$\sup_B f - \inf_B f \leq f(x_0) - f(y_0) + 2\delta \leq \sup_{x,y \in B} (f(x) - f(y)) + 2\delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, vem:

$$\omega(f, B) = \sup_B f - \inf_B f \leq \sup_{x,y \in B} (f(x) - f(y)),$$

donde, de facto,

$$\omega(f, B) = \sup_{x,y \in B} (f(x) - f(y));$$

por outro lado:

$$\forall x, y \in B : |f(x) - f(y)| = \max \{f(x) - f(y), f(y) - f(x)\},$$

e portanto,

$$\sup_{x,y \in B} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y \in B} (f(x) - f(y)) = \omega(f, B).$$

TEOREMA 2.6 (Critério das oscilações): *Uma aplicação $f : I \to \mathbb{R}$, limitada, é integrável à Riemann sse:*

$$\forall \delta > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I) : \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \delta,$$

ou seja, sse:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \ P \in \mathcal{P}(I) : \sum_{J \in P} \omega(f, J) V(J) < \delta.$$

Demonstração: Se $f \in \mathcal{R}(I)$, tem-se:

$$\overline{S}(f, P) \xrightarrow[P]{} \int_I f, \ \text{e} \ \underline{S}(f, P) \xrightarrow[P]{} \int_I f,$$

pelo que:

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \xrightarrow[P]{} 0.$$

A condição expressa no enunciado do Teorema é então consequência imediata da definição de convergência de redes. É óbvio que a versão envolvendo oscilações é equivalente à outra, uma vez que da definição de oscilação resulta imediatamente:

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{J\in P}\omega(f,J)V(J).$$

Reciprocamente, supondo verificada a condição, dado $\delta>0$, virá:

$$(1)\qquad P'\succ P\Rightarrow \overline{S}(f,P')-\underline{S}(f,P')\le \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\delta,$$

atendendo à Proposição 2.3 (1.), pelo que:

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\xrightarrow[P]{}0;$$

concluímos então que as sucessões das somas superiores e inferiores convergem para o mesmo limite, donde:

$$\overline{\int_I} f=\underline{\int_I} f,\ \text{ e portanto } f\in\mathcal{R}(I).\square$$

Observação: 5) Deste Teorema resulta imediatamente um *critério de comparação* para funções integráveis-R; com efeito se forem dadas funções $g_1,\dots,$ $g_k\in\mathcal{R}(I)$ e $f:I\to\mathbb{R}$ verificar, para certo $M>0$:

$$\bullet\,\omega(f,J)\le M\sum_{j=1}^{k}\omega(g_j,J),$$

para cada intervalo J contido em I, é fácil concluir que f é integrável-R. Com efeito, cada g_j verificará o critério das oscilações, pelo que, para cada $\delta'>0$ existirá P_j nas condições da partição P do Teorema, relativamente a $\delta=\delta'/Mk>0$; considerando P' mais fina que todas as partições P_j, ter-se-á:

$$\sum_{J\in P'}\omega(f,J)V(J)\le\sum_{J\in P'}\left(M\sum_{j=1}^{k}\omega(g_j,J)\right)V(J)=M\sum_{j=1}^{k}\sum_{J\in P'}\omega(g_j,J)V(J)\le$$
$$\le M\sum_{j=1}^{k}\sum_{J\in P_j}\omega(g_j,J)V(J)<M\sum_{j=1}^{k}(\delta'/Mk)=\frac{Mk\delta'}{Mk}=\delta',$$

já que, atendendo a (1), $P'\succ P_J\Rightarrow\sum_{J\in P'}\omega(g_J,J)V(J)\le\sum_{J\in P_J}\omega(g_J,J)V(J)$. Concluímos assim que f satisfaz ao critério das oscilações, pelo que, de facto, $f\in\mathcal{R}(I)$.

PROPOSIÇÃO 2.7: *Se $f, g \in \mathcal{R}(I)$ então $|f|$ e $f.g \in \mathcal{R}(I)$, tendo-se:*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Demonstração: De:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in I,$$

concluímos que:

$$\omega(|f|, J) \leq \omega(f, J), \forall J \in P, P \in \mathcal{P}(I),$$

pelo que, do critério das oscilações, podemos imediatamente concluir que $|f| \in \mathcal{R}(I)$ (*vide* observação anterior). Por outro lado, tem-se:

$$f, -f \leq |f| \Rightarrow \int_I f \leq \int_I |f|, -\int_I f = \int_I (-f) \leq \int_I |f| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

Suponhamos agora que $f, g \geq 0$ e seja $M > 0$ tal que

$$|f(x)|, |g(x)| \leq M, \forall x, y \in I;$$

vem, para cada intervalo $J \subset I$:

$$(\sup_J f).(\sup_J g) \geq \sup_J (f.g), \ (\inf_J f).(\inf_J g) \leq \inf_J (f.g) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega(f.g, J) \leq (\sup_J f).(\sup_J g) - (\inf_J f).(\inf_J g) =$$
$$= (\sup_J f)(\sup_J g - \inf_J g) + (\inf_J g)(\sup_J f - \inf_J f) \leq$$
$$\leq M(\omega(g, J) + \omega(f, J)),$$

pelo que podemos, mais uma vez, aplicar o critério das oscilações (*cf.* Observação 5)) e concluir que $f.g$ é integrável-R.

Suponhamos agora que f e g são quaisquer em $\mathcal{R}(I)$; tomando M como acima, temos:

$$f + M, g + M \geq 0,$$

e:

$$f.g = (f + M)(g + M) - M(f + g) - M^2 \in \mathcal{R}(I),$$

já que, no segundo membro da igualdade, a primeira parcela está em $\mathcal{R}(I)$, pelo que acabámos de ver para funções não negativas, e as restantes estão em $\mathcal{R}(I)$, atendendo ao Teorema 2.5.☐

2.5 Aproximação por sucessões de Somas de Riemann e de Darboux

Voltando à interpretação do integral de função positiva como *"volume abaixo do gráfico"* podemos conceber outro processo de aproximação desse "volume". Com efeito, para cada partição do intervalo I podemos pensar em tomar paralelepípedos com "base" em cada intervalo J da partição e altura igual a $f(\xi_J)$, sendo ξ_J tomado no respectivo intervalo J. Obtemos assim, para cada escolha das famílias de pontos ξ_J, uma *sucessão generalizada de somas*; o problema que agora surge é que não existe *a priori* qualquer relação entre duas destas somas correspondentes a partições comparáveis para a relação *"mais fina que"*, ao contrário do que acontecia com as somas inferiores e superiores. Convirá assim recorrer a um processo de aproximação que não utilize aquela relação de ordem parcial; uma ideia é considerar sucessões de partições em que os intervalos se tornem *"cada vez mais pequenos"* em sentido a definir.

DEFINIÇÃO: Seja $P \in \mathcal{P}(I)$; uma família $(\xi_J)_{J\in P}$ diz-se *compatível com* P se $\xi_J \in J, \forall\, J \in P$.

DEFINIÇÃO: Dada uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$, uma partição P de I e uma família $\xi = (\xi_J)_{J\in P}$ compatível com P, chamamos *soma de Riemann de f relativamente a P e a ξ*, ao número real:

$$S(f, P, \xi) = \sum_{J\in P} f(\xi_J)V(J).$$

DEFINIÇÃO: Sendo $P \in \mathcal{P}(I)$ chamamos *diâmetro de P* ao número real não negativo:

$$\delta(P) = \max_{J\in P} (\text{diam}\,(J)),$$

onde:

$$\text{diam}\,(J) = \sup_{x,y\in J} \|x - y\|.$$

Observações: 6) Como é óbvio, $\delta(P)$ depende da norma escolhida para definir diam(J), mas, dada uma sucessão P_n de partições de I, não depende da norma o facto de:

$$\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

uma vez que em $\mathbb{R}^N$ todas as normas são equivalentes. Com efeito, se designarmos por $\delta'(P)$ o diâmetro relativo a outra norma em $\mathbb{R}^N$, ter-se-á:

$$c\,\delta'(P_n) \le \delta(P_n) \le C\delta'(P_n),$$

para certas constantes $c, C > 0$, donde se deduz facilmente que $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ sse $\delta'(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

7) É fácil ver que para a "norma do sup" em $\mathbb{R}^N$ ($\|x\| = \max_{i=1,\ldots,N} |x_i|$) se tem:

$$\text{diam}\,(J) = \max_{i=1,\ldots,N} \left|b_i{}^J - a_i{}^J\right|, \delta(P) = \max_{\substack{i=1,\ldots,N \\ J\in P}} \left|b_i{}^J - a_i{}^J\right|.$$

De agora em diante utilizaremos sistematicamente o diâmetro associado a esta norma.

Examinemos então o que se passa com as somas inferiores, superiores e de Riemann quando se consideram sucessões de partições com diâmetros a tender para zero; comecemos por notar que existem, de facto, sucessões de partições com diâmetros a tender para zero. Basta tomar, para cada $n \in \mathbb{N}_1, i = 1, \ldots, N$:

$$x_i^j = a_i + \frac{j}{n}\,(b_i - a_i), j = 0, \ldots, n,$$

e considerar, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, a partição normal P_n de I associada a estes x_i^j. Como $x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{n}\,(b_i - a_i)$, conclui-se facilmente que:

$$\delta(P_n) = \frac{\text{diam}\,(I)}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Convém-nos agora demonstrar um resultado relativo ao comportamento de tais sucessões de partições quando se considera um intervalo degenerado contido em I.

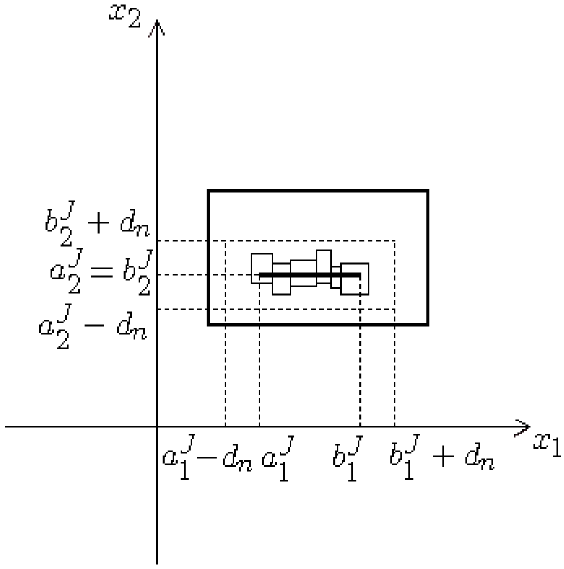
LEMA: *Dado um intervalo degenerado $J \subset I$ e uma sucessão P_n de partições de I tal que $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, tem-se:*

$$\sum_{\substack{K\in P_n \\ K\cap J\neq\emptyset}} V(K) \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Seja $d_n = \delta(P_n)$ ($\underset{n}{\longrightarrow} 0$). Se $K \in P_n$ e $K \cap J \neq \emptyset$ é fácil concluir que se δ for o diâmetro associado à norma do sup:

(2) $$K \subset \prod_{i=1}^{N} [a_i^J - d_n, b_i^J + d_n].$$

Graficamente:



Com efeito, como $K \cap J \neq \emptyset$, podemos considerar $x \in K \cap J$, tendo-se então, para cada $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{cases} a_i^K \leq x_i \leq b_i^K \\ a_i^J \leq x_i \leq b_i^J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i{}^K \leq b_i^J \\ a_i^J \leq b_i^K \end{cases}.$$

Como, por outro lado, diam $(K) \leq d_n$, tem-se:

$$b_i^K - a_i^K \leq d_n,$$

donde:

$$\begin{cases} a_i^J - d_n \leq b_i^K - d_n \leq a_i^K \\ b_i^K \leq a_i{}^K + d_n \leq b_i^J + d_n \end{cases},$$

o que demonstra (2). Podemos então aplicar o Teorema 1.6 para concluir que:

$$\sum_{\substack{K \in P_n \\ K \cap J \neq \emptyset}} V(K) \leq V\left(\prod_{i=1}^{N} [a_i^J - d_n, b_i^J + d_n]\right) = \prod_{i=1}^{N} (b_i^J - a_i^J + 2d_n) \underset{n}{\longrightarrow}$$

$$\underset{n}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{N} (b_i^J - a_i^J) = V(J) = 0,$$

atendendo a que J é degenerado.$\square$

Observação: 8) É evidente que podemos tirar uma conclusão análoga se em lugar de um só intervalo J se tratar de união finita de intervalos degenerados contidos em I.

PROPOSIÇÃO 2.8: *Dada uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ e uma sucessão P_n de partições do intervalo I tal que $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, tem-se:*

$$\bullet \underline{\int}_I f = \lim_n \underline{S}(f, P_n);$$

$$\bullet \overline{\int}_I f = \lim_n \overline{S}(f, P_n).$$

Demonstração: Comecemos por notar que basta demonstrar a segunda igualdade; com efeito, supondo que esta é válida ter-se-á:

$$\underline{\int}_I f = -\overline{\int}_I (-f) = -\lim_n \overline{S}(-f, P_n) =$$
$$= -\lim_n (-\underline{S}(f, P_n)) = \lim_n \underline{S}(f, P_n),$$

atendendo a que:

$$\overline{S}(-f, P_n) = \sum_{J \in P_n} (\sup_J (-f)) V(J) = \sum_{J \in P_n} (-\inf_J f) V(J) = -\underline{S}(f, P_n).$$

Mostremos agora que basta demonstrar a segunda igualdade para funções não negativas. Suponhamos que a igualdade é válida nesse caso e demonstremo-la no caso geral; sendo f limitada existe $M > 0$ tal que:

$$-M \leq f(x) \leq M \; \forall x \in I;$$

em particular:

$$f(x) + M \geq 0 \; \forall x \in I,$$

donde:

$$\bullet \overline{\int}_I (f + M) = \lim_n \overline{S}(f + M, P_n).$$

Ora:

$$\begin{aligned}\overline{\int_I}(f+M) &= \lim_P \overline{S}(f+M,P) = \lim_P \sum_{J\in P}(\sup_J\,(f+M))V(J) = \\ &= \lim_P \left(\sum_{J\in P}(\sup_J\, f)V(J) + M\sum_{J\in P} V(J)\right) = \\ &= \lim_P \overline{S}(f,P) + MV(I) = \overline{\int_I} f + MV(I),\end{aligned}$$

e de modo análogo:

$$\overline{S}(f+M,P_n) = \overline{S}(f,P_n) + MV(I),$$

pelo que a existência do limite do primeiro membro desta igualdade implica a existência do limite:

$$\begin{aligned}\lim_n \overline{S}(f,P_n) &= \lim_n \overline{S}(f+M,P_n) - M\,V(I) = \\ &= \overline{\int_I}(f+M) - M\,V(I) = \overline{\int_I} f,\end{aligned}$$

(pelo que acabámos de ver), como pretendíamos.

Demonstremos então, finalmente, a segunda igualdade da Proposição, supondo que $f \geq 0$. Por definição de integral superior, sabemos que:

(3) $$\forall \delta > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I) : \overline{S}(f,P) - \overline{\int_I} f < \frac{\delta}{2};$$

examinemos então o que se passa com as somas superiores relativas aos P_n. As fronteiras dos intervalos de P constituem uma união finita de intervalos degenerados (*cf.* Observação 5) do Capítulo 1), pelo que, designando por F_n a família dos intervalos de P_n que intersectam a fronteira de algum dos intervalos de P, concluímos do Lema supra que:

$$\sum_{K\in F_n} V(K) \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

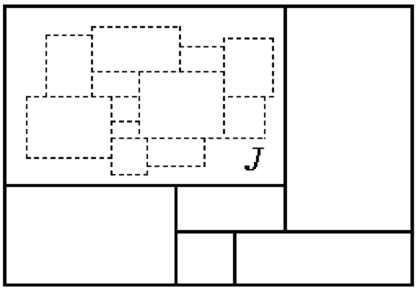
Por outro lado, cada intervalo $K \in P_n \setminus F_n$ está contido no interior de algum $J \in P$; de facto, se intersectasse mais que um intervalo de P no interior, intersectaria um intervalo e o seu complementar, visto os intervalos de P terem interiores disjuntos. Mas K é conexo pelo que teria então que intersectar a fronteira de algum intervalo de P (*cf.* Observação 6) c) do Capítulo 1), contra a hipótese de não estar em F_n. Podemos portanto reunir os intervalos de $P_n \setminus F_n$ em classes disjuntas, cada qual correspondente a um intervalo J de P; ou seja, pondo:

$$P_n^J = \{K \in P_n \setminus F_n : K \subset J\},$$

teremos:

$$P_n \setminus F_n = \bigcup_{J \in P} P_n^J .$$

Graficamente:



(representa-se a tracejado a classe P_n^J)

Temos então:

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(f, P_n) &= \sum_{K \in P_n} (\sup_K f) V(K) = \\
&= \sum_{K \in F_n} (\sup_K f) V(K) + \sum_{K \in P_n \setminus F_n} (\sup_K f) V(K) = \\
&= \varepsilon_n + \sum_{J \in P} \sum_{K \in P_n^J} (\sup_K f)\ V(K),
\end{aligned} \tag{4}
$$

onde:

$$\bullet\, 0 \le \varepsilon_n = \sum_{K \in F_n} (\sup_K f) V(K) \le M \sum_{K \in F_n} V(K) \underset{n}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \varepsilon_n \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

$$\bullet \sum_{J \in P} \sum_{K \in P_n^J} (\sup_K f) V(K) \le \sum_{J \in P} \left((\sup_J f) \sum_{K \in P_n^J} V(K) \right)$$

(já que $K \in P_n^J \Rightarrow K \subset J \Rightarrow \sup_K f \le \sup_J f$). Mas podemos agora aplicar o Teorema 1.6 aos $K \in P_n^J$ e a J e concluir que:

$$\sum_{K \in P_n^J} V(K) \le V(J),$$

donde:

$$(\sup_J f) \sum_{K \in P_n^J} V(K) \le (\sup_J f) V(J),$$

atendendo a que $f \ge 0$ e portanto $\sup_J f \ge 0$.

Temos assim:

(5) $$\bullet \sum_{J\in P}\sum_{K\in P_n^J}(\sup_K f)V(K) \leq \sum_{J\in P}(\sup_J f)V(J) = \overline{S}(f,P).$$

Concluímos portanto de (3) – (5) que:

$$\left|\overline{S}(f,P_n) - \overline{\int_I} f\right| = \overline{S}(f,P_n) - \overline{\int_I} f \leq \varepsilon_n + \overline{S}(f,P) - \overline{\int_I} f \leq \varepsilon_n + \frac{\delta}{2};$$

como $\varepsilon_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $n \geq p \Rightarrow \varepsilon_n < \delta/2$, pelo que:

$$n \geq p \Rightarrow \left|\overline{S}(f,P_n) - \overline{\int_I} f\right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ou seja, de facto:

$$\bullet \overline{\int_I} f = \lim_n \overline{S}(f,P_n). \square$$

TEOREMA 2.9: *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada; então são equivalentes as condições:*

1. f é integrável à Riemann;

2. Existe uma sucessão P_n de partições do intervalo I tal que convergem para o mesmo limite as sucessões $\underline{S}(f,P_n)$ e $\overline{S}(f,P_n)$;

3. Para qualquer sucessão P_n de partições do intervalo I tal que $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, tem-se:

$$\lim_n \underline{S}(f,P_n) = \lim_n \overline{S}(f,P_n);$$

4. Para quaisquer sucessões P_n , ξ^n, P_n partições do intervalo I tais que $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ e ξ^n família compatível com P_n (para cada n) é convergente a sucessão $S(f,P_n,\xi^n)$ das somas de Riemann.

Em qualquer dos casos, estando as sucessões P_n e ξ^n nas condições de 4., tem-se:

$$\int_I f = \lim_n \underline{S}(f,P_n) = \lim_n \overline{S}(f,P_n) = \lim_n S(f,P_n,\xi^n).$$

Demonstração: 1. $\Rightarrow$ 2.) Supondo que $f \in \mathcal{R}(I)$ e considerando uma sucessão de partições P_n com diâmetros a tender para zero (que sabemos existir, como foi atrás referido — Observação 7)) resulta imediatamente da Proposição anterior que as sucessões das somas superiores e inferiores correspondentes aos P_n convergem para o valor comum dos integrais superior e inferior.

2. $\Rightarrow$ 1.) De 2. resulta imediatamente que dado $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}_1$ tal que:

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \delta,$$

já que a diferença das duas sucessões tende para zero. Esta condição é suficiente para garantir que $f \in \mathcal{R}(I)$, atendendo ao critério das oscilações (Teorema 2.6).

1. $\Leftrightarrow$ 3.) É imediato, atendendo à Proposição anterior.

3. $\Rightarrow$ 4.) Tem-se:

$$\underline{S}(f, P_n) \leq S(f, P_n, \xi^n) \leq \overline{S}(f, P_n), \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

pelo que a igualdade dos limites das sucessões das somas inferiores e superiores garante a existência do limite da sucessão das somas de Riemann, sendo este limite igual portanto ao integral de Riemann de f, o que demonstra também a última asserção do Teorema.

4. $\Rightarrow$ 1.) Comecemos por verificar que nas condições de 4. as somas de Riemann em questão convergem todas para o mesmo limite. Considerando (P_n, ξ^n), (P'_n, ξ'^n) nas condições de 4. podemos pôr:

$$(P''_{2n+1}, \xi''^{2n+1}) = (P_n, \xi^n),\ (P''_{2n}, \xi''^{2n}) = (P'_n, \xi'^n);$$

obtemos assim novas sucessões de partições e famílias compatíveis, ainda nas condições de 4., pelo que existe o limite de $S(f, P''_n, \xi''^n)$. Uma vez que $S(f, P_n, \xi^n)$ e $S(f, P'_n, \xi'^n)$ são subsucessões de $S(f, P''_n, \xi''^n)$ (por construção) convergem evidentemente para o mesmo limite.

Consideremos agora uma sucessão P_n de partições de I com diâmetros a convergir para zero (que já vimos como construir explicitamente). Por definição de ínfimo e de supremo, fixado $\delta' > 0$, e para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $J \in P_n$ existem ξ^n_J, $\xi'^n_J \in J$ tais que:

- $\inf_J f > f(\xi^n_J) - \delta'$;
- $\sup_J f < f(\xi'^n_J) + \delta'$.

Então:

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) &= \sum_{J \in P_n} (\sup_J f - \inf_J f) V(J) < \\ &< \sum_{J \in P_n} (f(\xi'^n_J) + \delta' - f(\xi^n_J) + \delta') V(J) = \\ &= S(f, P_n, \xi'^n) - S(f, P_n, \xi^n) + 2\delta' \sum_{J \in P_n} V(J) \xrightarrow[n]{} 2\delta' V(I),\end{aligned}$$

pelo que passando ao limite as desigualdades obtemos:

$$\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leq 2\delta' \, V(I).$$

Como δ' é arbitrário em $\mathbb{R}^+$ concluímos que os integrais superior e inferior coincidem, pelo que, de facto, $f \in \mathcal{R}(I)$.□

Exercícios

6) Demonstre os pontos 1., 2. e 5. da Proposição 2.2.

7) Determine as somas inferiores e superiores de Darboux das seguintes funções nos intervalos I indicados, relativas às decomposições de I em n subintervalos de igual comprimento:

a) $f(x) = x^2$, $I = [0, 1]$.

b) $f(x) = x - [x]$, $I = [0, n]$.

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $I = [0, 1]$.

8) Demonstre as asserções contidas nas Observações 2) e 3).

9) Demonstre os pontos 2., 4. e 5. da Proposição 2.4 e o Teorema 2.5.

10) Sejam $f, g \in \mathcal{R}(I)$ e considere as funções $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{R}(I)$ e conclua que $\mathcal{R}(I)$ além de espaço vectorial é também *reticulado*. *(Sugestão: procure exprimir as operações $\vee$ e $\wedge$ através das operações de espaço vectorial e do valor absoluto.)*

11) Seja $I = [a, b]$, intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$, *não degenerado*, $M_1 = I \cap \mathbb{Q}^N$, $M_2 = I \setminus M_1$; recordando que a função característica χ_Ω de um subconjunto Ω de I é a função definida em I por $\chi_\Omega(x) = 1$ se $x \in \Omega$, $\chi_\Omega(x) = 0$ se $x \notin \Omega$:

a) Verifique que $\chi_{M_1 \cup M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}$.

b) Calcule os integrais superiores e inferiores de Darboux de χ_{M_1}, χ_{M_2} e $\chi_{M_1 \cup M_2}$. Que pode concluir quanto à linearidade das aplicações $f \mapsto \overline{\int_I} f$ e $f \mapsto \underline{\int_I} f$ no espaço vectorial das funções limitadas reais definidas em I?

c) Sendo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in M_1 \\ -1 & \text{se } x \in M_2 \end{cases},$$

calcule os integrais de Darboux de f e $|f|$ em I e conclua que a integrabilidade-R de $|f|$ *não implica a de f*.

12) Demonstre as asserções contidas nas Observações 6) e 7).

13) a) Utilizando o exercício 7) a), mostre que x^2 é integrável à Riemann em $I = [0,1]$ e calcule $\int_I f$ *(Sugestão: comece por recordar que:*

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).)$$

b) Calcule as somas inferiores e superiores de Darboux das funções x e x^3 relativamente ao mesmo intervalo e partições da alínea a) do exercício 7) e conclua que para quaisquer $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ é integrável à Riemann em $[0,1]$ a função $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, determinando o respectivo integral *(Sugestão: utilize a alínea anterior e recorde que:*

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.)$$

14) Utilizando a alínea c) do exercício 7) e o teorema fundamental do cálculo integral (a uma dimensão) mostre que:

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

15) Em $I = [0,1] \times [0,1]$ considere a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{se } 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1 - \frac{1}{2^n}\ (n \in \mathbb{N}_1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases};$$

mostre que f é integrável à Riemann em I e calcule o valor do respectivo integral.

16) Seja $I = [a,b]$ intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$ e $f : I \to \mathbb{R}$ *limitada*, tal que:

$$\forall \delta > 0\, \exists P \in \mathcal{P}(I) : \sum_{\substack{J \in P \\ \omega(f,J) > \delta}} V(J) \leq \delta;$$

prove que f é integrável-R em I.

17) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]0,1], \text{ fracção irredutível} \end{cases}$.

a) Mostre que f é integrável à Riemann em $[0,1]$ e que $\int_{[0,1]} f = 0$ *(Sugestão: para o cálculo do limite das somas superiores procure escolher partições que "isolem sucessivamente" os racionais em "pequenos" intervalos.)*

b) Estude a continuidade de f em cada ponto de $[0,1]$ *(Sugestão: para qualquer sucessão de fracções convergindo para um número irracional, os denominadores tendem para infinito...; cf. Secção 3.4.)*

Capítulo 3

Integral de Riemann e Medida de Jordan

3.1 Integrabilidade das funções contínuas

Embora tivéssemos demonstrado alguns critérios de integrabilidade-R, não possuímos ainda uma caracterização que nos permita reconhecer de modo expedito as funções integráveis-R. Sabemos, por exemplo, que as constantes são integráveis; verifiquemos que todas as funções contínuas o são:

PROPOSIÇÃO 3.1: *Toda a aplicação contínua $f : I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann (ou seja, $C(I) \subset \mathcal{R}(I)$).*

Demonstração: Sendo I compacto e f contínua, podemos concluir que f é uniformemente contínua (Teorema de Cantor). Então dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\|x - y\| < \varepsilon,\ x,\ y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2\,V(I)}.$$

Considerando então $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que $\delta(P) < \varepsilon$ (o que é sempre possível, uma vez que existem sucessões de partições com diâmetros a tender para zero), obtemos:

$$\begin{aligned}\forall\ J \in P : \operatorname{diam}(J) < \varepsilon &\Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon\ \forall\ x, y \in J \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2\,V(I)}, \forall\ x, y \in J,\end{aligned}$$

ou seja:

$$\omega(f, J) = \sup_{x,y \in J} |f(x) - f(y)| \leq \frac{\delta}{2\,V(I)}, \forall J \in P,$$

donde,

$$\sum_{J \in P} \omega(f, J)\, V(J) \leq \frac{\delta}{2\,V(I)} \sum_{J \in P} V(J) = \frac{\delta}{2\,V(I)}\, V(I) = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

pelo que, do critério das oscilações (Teorema 2.6), podemos concluir que $f \in \mathcal{R}(I)$.□

No entanto, nem todas as funções integráveis à Riemann são contínuas; consideremos, por exemplo:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

É fácil ver que $f \in \mathcal{R}(I)$; podemos, por exemplo, considerar a sucessão de partições que se obtém subdividindo sucessivamente o intervalo $[0,1]$ em 2^n partes iguais, ou seja:

$$P_n = \{[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]: j = 0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Como é evidente:

$$\delta(P_n) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n]{} 0;$$

além disso,

$$\underline{S}(f, P_n) = \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2},$$

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{j=2^{n-1}-1}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2},$$

pelo que f é integrável à Riemann e $\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$, embora f não seja contínua no ponto $\frac{1}{2}$.

3.2 Integral em conjuntos "arbitrários"

Vimos que todas as funções contínuas em intervalos compactos não degenerados são integráveis-R, e acabámos de verificar que a continuidade não é condição necessária de integrabilidade-R. No entanto já conhecemos um exemplo de função não integrável à Riemann e, precisamente, tal função era descontínua em todos os pontos (tratava-se da função definida em $[0,1]$, igual a 0 nos irracionais e igual a 1 nos racionais), ao passo que no exemplo que acabámos de examinar, a função era apenas descontínua em $1/2$. Parece portanto existir alguma relação entre a "medida" (em sentido a definir) do conjunto dos pontos onde uma função é descontínua (conjunto dos pontos de descontinuidade) e a integrabilidade à Riemann dessa mesma função. Para examinarmos de perto esta questão convém-nos agora generalizar a noção de volume a uma classe de conjuntos mais vasta que a dos intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$. No caso de I temos evidentemente:

$$V(I) = \int_I 1,$$

pelo que a generalização da noção de volume poder-se-á ligar à generalização da noção de integral a domínios que não sejam necessariamente intervalos. Procuremos uma extensão natural destas noções; começamos por introduzir uma convenção de linguagem e notação que é bastante natural.

DEFINIÇÕES: Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ limitada em I; então chamamos *integral inferior de Darboux* (respectivamente *integral superior de Darboux*) *de* f *em* I a:

$$\underline{\int}_I f = \underline{\int}_I f_{/I}$$

(respectivamente a

$$\overline{\int}_I f = \overline{\int}_I f_{/I}).$$

f diz-se *integrável à Riemann em* I se $f_{/I} \in \mathcal{R}(I)$ e, nesse caso, chamamos *integral de Riemann de* f *em* I a:

$$\int_I f = \int_I f_{/I}.$$

PROPOSIÇÃO 3.2: *Seja* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *limitada e nula fora de certo conjunto* $A \subset \mathbb{R}^N$ *limitado. Então se* I, J *são intervalos fechados de* $\mathbb{R}^N$ *não degenerados tais que* $A \subset I \cap J$*, tem-se:*

$$\underline{\int}_I f = \underline{\int}_J f, \ \overline{\int}_I f = \overline{\int}_J f.$$

Demonstração: No caso em que $I \cap J$ é vazio, A também o será e portanto f é identicamente nula, pelo que os integrais em questão são todos nulos; se $I \cap J$ for degenerado, a função $f_{/I}$ será nula em I excepto em pontos de $I \cap J$, pelo que, tomando uma sucessão P_n de partições de I com diâmetros a tender para zero, ter-se-á:

$$\left| \underline{\int}_I f \right| = \lim_n |\underline{S}(f, P_n)| = \lim_n \left| \sum_{\substack{K \in P_n \\ K \cap (I \cap J) \neq \emptyset}} (\inf_K f)\, V(K) \right| \leq$$
$$\leq M \sum_{\substack{K \in P_n \\ K \cap (I \cap J) \neq \emptyset}} V(K) \xrightarrow[n]{} 0,$$

(onde M é majorante de $|f|$), atendendo ao Lema da Secção 2.5 atrás, donde:

$$\underline{\int_I} f = 0,$$

e, de modo análogo, é nulo o integral inferior em J. Para os integrais superiores basta pensar na função $-f$.

No caso em que $I \cap J$ não é degenerado, basta verificar as igualdades substituindo J por $I \cap J$ e em seguida aplicar o resultado assim obtido ao caso em que se toma J no lugar de I. Basta evidentemente demonstrar a igualdade referente aos integrais inferiores, aplicando em seguida o resultado a $-f$. Uma vez que $I \cap J \subset I$, podemos aplicar a Proposição 1.4, que garante a existência de uma família $\mathcal{F}$ de intervalos não intersectando o interior de $I \cap J$ que unida a $\{I \cap J\}$ constitui partição de I; tomando em cada intervalo de $\mathcal{F} \cup \{I \cap J\}$ uma sucessão de partições com diâmetros a tender para zero, obtemos uma sucessão P_n de partições de I com diâmetros a tender para zero tal que:

$$P_n = \mathcal{F}_n \cup P'_n,$$

sendo a união disjunta e $P'_n \in \mathcal{P}(I \cap J)$. Temos assim:

$$\underline{\int_I} f = \lim_n \underline{S}(f, P_n) = \lim_n \Bigg(\sum_{\substack{K \in P_n \\ K \cap \, \mathrm{fr}(I \cap J) \neq \emptyset}} (\inf_K f) V(K) + \\ + \sum_{\substack{K \in P'_n \\ K \cap \, \mathrm{fr}(I \cap J) = \emptyset}} (\inf_K f)\, V(K) + \sum_{\substack{K \in \mathcal{F}_n \\ K \cap \, \mathrm{fr}(I \cap J) = \emptyset}} (\inf_K f)\, V(K) \Bigg);$$

ora o primeiro somatório tende para zero, como se conclui pelo supra-citado Lema da Secção 2.5, uma vez que $\mathrm{fr}(I \cap J)$ é união finita de intervalos degenerados e que podemos majorar por certa constante $M > 0$ o módulo do ínfimo de f em cada K. Quanto ao terceiro, é identicamente nulo; com efeito, os intervalos de $\mathcal{F}_n$ não intersectam o interior de $I \cap J$ (por construção) e os que intervêm no somatório também não intersectam a fronteira, pelo que não intersectam $I \cap J$, e, por maioria de razão, também não intersectam $A \subset I \cap J$, tendo-se, portanto, f identicamente nula nesses intervalos. No limite, resta então apenas a segunda parcela; ora o limite desta coincide exactamente com o integral inferior em $I \cap J$, uma vez que $P'_n \in \mathcal{P}(I \cap J)$, $\delta(P'_n) \xrightarrow[n]{} 0$ e que as parcelas de $\underline{S}\left(f_{/I\cap J}, P'_n\right)$ correspondentes aos K de P'_n que intersectam $\mathrm{fr}(I \cap J)$ tendem para 0, aplicando mais uma vez o Lema da Secção 2.5. Temos assim, de facto:

$$\underline{\int_I} f = \underline{\int_{I\cap J}} f. \square$$

Observação: 1) Este resultado mostra que, estando f nas condições da Proposição, o integral de f num intervalo I não degenerado contendo A não depende do intervalo escolhido. É agora fácil concluir que também não depende de A, ou seja, se f também for nula fora de $B \subset \mathbb{R}^N$, B limitado, podemos escolher I contendo B; com efeito basta tomar J contendo $A \cup B$ e notar que então o integral em I coincide com o integral em J (aplicando a Proposição ao conjunto B), e portanto com o integral em qualquer intervalo não degenerado contendo A. Podemos então, sem ambiguidade, dar as seguintes definições:

DEFINIÇÕES: Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ limitada e nula fora de uma parte limitada de $\mathbb{R}^N$; então chamamos *integral inferior de Darboux de* f (respectivamente *integral superior de Darboux de* f) a:

$$\underline{\int} f = \underline{\int}_I f$$

(respectivamente a:

$$\overline{\int} f = \overline{\int}_I f),$$

onde I é intervalo de $\mathbb{R}^N$ não degenerado fora do qual f é nula.

f diz-se *integrável à Riemann* se o for em I, intervalo nas condições acima, designando-se nesse caso por *integral de Riemann* de f o número real:

$$\int f = \int_I f.$$

Se for dada uma função $f : B \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, e $A \subset \mathbb{R}^N$ for tal que $f_{/A\cap B}$ é limitada e nula fora de certa parte limitada de $A \cap B$, o prolongamento desta função por zero fora de $A \cap B$ está nas condições das definições anteriores. Faz então sentido definir os integrais de Darboux de f em A, sem ambiguidade, através dos respectivos integrais desse prolongamento. Com o objectivo de sistematizar a escrita deste tipo de funções auxiliares, convém introduzir as seguintes notações:

DEFINIÇÃO: Sendo $f : B \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ designamos por $\widetilde{f}$ a função de $\mathbb{R}^N$ para $\mathbb{R}$ tal que:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B \end{cases}.$$

DEFINIÇÃO: Se $A \subset \mathbb{R}^N$ chamamos *função característica de* A à função:

$$\chi_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus A \end{cases}.$$

DEFINIÇÕES: Seja $f : B \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, tais que $f_{/A\cap B}$ é limitada e nula fora de uma parte limitada de $A \cap B$; então chamamos *integral inferior de Darboux de f em A* (respectivamente *integral superior de Darboux de f em A*) a:

$$\underline{\int}_A f = \underline{\int} \tilde{f}\chi_A$$

(respectivamente a

$$\overline{\int}_A f = \overline{\int} \tilde{f}\chi_A).$$

f diz-se *integrável à Riemann em A* se os integrais de Darboux de f em A coincidirem; nesse caso designa-se por *integral de Riemann de f em A* o valor comum dos dois integrais de Darboux:

$$\int_A f = \int \tilde{f}\, \chi_A.$$

Observações: 2) No caso em que $A = B = \mathbb{R}^N$ reencontramos as noções dadas anteriormente de integral para funções definidas em $\mathbb{R}^N$, limitadas e nulas fora de um conjunto limitado, ou seja, nessas condições teremos:

$$\underline{\int}_{\mathbb{R}^N} f = \underline{\int} f, \text{etc.}$$

3) Também é fácil concluir que, no caso em que $A = B = I$, intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$ não degenerado, reencontramos as noções dadas anteriormente de integrais de Darboux e de Riemann para funções limitadas definidas em I, uma vez que nesse caso $\tilde{f}\chi_I = \tilde{f}$ é nula fora de I, pelo que podemos tomar o próprio I para definir os integrais de Darboux de $\tilde{f}$ e, em I, $\tilde{f}$ coincide com f. As novas notações e noções são portanto coerentes com as introduzidas anteriormente.

4) Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ podemos definir:

$$\mathcal{R}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ é integrável à Riemann em } A\}.$$

É fácil concluir que se trata de álgebra para as operações definidas como habitualmente, sendo além disso fechado para a passagem ao módulo. Com efeito, temos:

$$f \in \mathcal{R}(A) \text{ sse } f : A \to \mathbb{R} \text{ e } \tilde{f} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N),$$

já que neste caso $\tilde{f}.\chi_A = \tilde{f}$ e f ser integrável à Riemann em A significa precisamente $\tilde{f}.\chi_A$ ser integrável à Riemann (em $\mathbb{R}^N$). Ora é óbvio que:

$$(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g},\ (\lambda f)^{\sim} = \lambda \widetilde{f},\ (fg)^{\sim} = \widetilde{f}\widetilde{g},\ |f|^{\sim} = |\widetilde{f}|,$$

sempre que $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e facilmente se conclui que $\mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$ é fechado para a soma, produto por escalar e produto de funções, pois em cada caso reduzimo-nos sempre a um intervalo suficientemente grande. Pelas mesmas razões é fácil concluir que é forma linear crescente a aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_A f, \end{aligned}$$

tendo-se:

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|.$$

Por vezes, por abuso de linguagem, diz-se que "$f \in \mathcal{R}(A)$" para significar que f é integrável-R em A, mesmo quando o domínio de f é distinto de A; no entanto, em rigor, $\mathcal{R}(A)$ é apenas constituído por funções com domínio igual a A, sem o que não seria, em geral, possível dotá-lo de estrutura natural de espaço vectorial.

5) Mais geralmente podemos procurar definir operações sobre funções com domínios diferentes, de modo a que se mantenham as propriedades habituais. Para tal, sejam $f : B \to \mathbb{R}, g : C \to \mathbb{R}$; convém-nos então definir:

$$f + g, fg : B \cup C \to \mathbb{R},$$

pondo:

$$f + g = (\widetilde{f} + \widetilde{g})_{/B\cup C}, fg = (\widetilde{f}\widetilde{g})_{/B\cup C}.$$

Com estas definições, dado agora $A \subset \mathbb{R}^N$, sempre que faça sentido falar nos integrais de Darboux de f e g em A (f e g limitadas em A e nulas, em A, fora de um limitado) também fará sentido falar nos integrais de Darboux de $f + g$ e fg em A. Além disso, as definições foram dadas de modo a que:

$$(f+g)^{\sim} = \widetilde{f} + \widetilde{g}, (fg)^{\sim} = \widetilde{f}\widetilde{g},$$

pelo que virá também,

$$(f+g)^{\sim}\chi_A = \widetilde{f}\chi_A + \widetilde{g}\chi_A,$$

o que permite demonstrar as propriedades dos integrais de Darboux (Proposição 2.4, de 1. a 4.) com I substituído por A e quaisquer f e g nas condições agora consideradas; de modo análogo se generalizam a este caso as propriedades relativas ao módulo, produto e monotonia, só interessando em qualquer caso o comportamento das funções em A. No entanto estamos em condições de estudar novas propriedades dos integrais, relativas agora à variação do domínio:

PROPOSIÇÃO 3.3: *1. Se f for integrável à Riemann em três dos conjuntos A, $B, A \cap B, A \cup B$, então é integrável à Riemann no quarto, bem como em $A \setminus B$ e em $B \setminus A$; do mesmo modo, se f for integrável à Riemann em três dos conjuntos $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, A \cup B$ é-o no quarto, bem como em A e B. Em qualquer dos casos tem-se:*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f = \int_{A\setminus B} f + \int_{B\setminus A} f + \int_{A\cap B} f.$$

2. Se $f \geq 0$ em $\bigcup_{j=1}^{k} A_j$ e sempre que os integrais façam sentido, tem-se:

$$\overline{\int}_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} f \leq \sum_{j=1}^{k} \overline{\int}_{A_j} f.$$

3. Se $f \geq 0$ e $A \subset B$, então, sempre que os integrais façam sentido, tem-se:

$$\underline{\int}_A f \leq \underline{\int}_B f, \ \overline{\int}_A f \leq \overline{\int}_B f.$$

Demonstração: É fácil verificar que:

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} + \chi_{A\cap B},\ \chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B},$$

donde, em particular,

$$\tilde{f}\chi_{A\cup B} = \tilde{f}\chi_A + \tilde{f}\chi_B - \tilde{f}\chi_{A\cap B} = \tilde{f}\chi_{A\setminus B} + \tilde{f}\chi_{B\setminus A} + \tilde{f}\chi_{A\cap B},$$

pelo que o ponto 1. da Proposição resulta imediatamente da definição de integral num conjunto arbitrário, de $\mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$ ser espaço vectorial e da linearidade da aplicação "integral em $\mathbb{R}^N$".

Para demonstrar o ponto 2. basta notar que, trivialmente:

$$\chi_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j},$$

donde resulta,

$$\tilde{f}\chi_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \tilde{f}\chi_{A_j},$$

já que, obviamente, $f \geq 0 \Rightarrow \tilde{f} \geq 0$, pelo que, por definição:

$$\overline{\int}_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} f = \overline{\int} \tilde{f}\chi_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} \leq \overline{\int} \sum_{j=1}^{k} \tilde{f}\chi_{A_j} \leq \sum_{j=1}^{k} \overline{\int} \tilde{f}\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\int}_{A_j} f,$$

sendo a primeira desigualdade a conhecida monotonia dos integrais de Darboux e a segunda simples generalização a um número finito de parcelas da Proposição 2.4–1. Finalmente, 3. é deixado como exercício.□

3.3 Volume ou Medida de Jordan

Estamos agora em condições de estender a noção de volume a conjuntos mais gerais que intervalos fechados:

DEFINIÇÕES: Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ limitado; chamamos *volume interior* e *volume exterior de* A respectivamente a:

$$\underline{V}(A) = \underline{\int}_A 1 \; (= \underline{\int} \chi_A)$$

e

$$\overline{V}(A) = \overline{\int}_A 1 \; (= \overline{\int} \chi_A).$$

$A \subset \mathbb{R}^N$ diz-se *mensurável à Jordan* ou *mensurável-J* se A for limitado e $\underline{V}(A) = \overline{V}(A)$, ou seja, se a função identicamente igual a 1 for integrável em A, ou ainda se $\chi_A \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$; nesse caso chamamos *volume* ou *medida de Jordan de* A a:

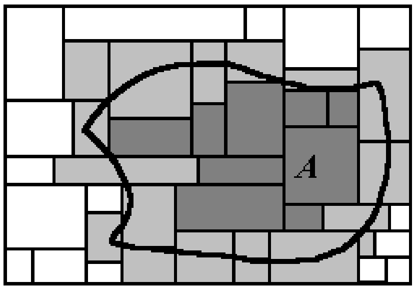
$$V(A) = \underline{V}(A) = \overline{V}(A) = \int_A 1 = \int \chi_A.$$

Representa-se por $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ o *conjunto das partes mensuráveis à Jordan de* $\mathbb{R}^N$.

Observações: 6) Traduzindo as definições através das aproximações por somas de Darboux e atendendo à definição de função característica, é fácil concluir que considerando $I \subset \mathbb{R}^N$ intervalo fechado não degenerado tal que $A \subset I$, e sendo P_n sucessão de partições de I tal que $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, se tem:

- $\underline{V}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \sum_{\substack{K \subset A \\ K \in P}} V(K) = \lim_n \sum_{\substack{K \subset A \\ K \in P_n}} V(K),$
- $\overline{V}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \sum_{\substack{K \cap A \neq \emptyset \\ K \in P}} V(K) = \lim_n \sum_{\substack{K \cap A \neq \emptyset \\ K \in P_n}} V(K).$

As definições correspondem portanto à ideia intuitiva de aproximação de um volume "por dentro" e "por fora"; graficamente:



7) É óbvio que $0 \leq \underline{V}(A) \leq \overline{V}(A)$. Daqui se conclui que $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ e $V(A) = 0$, sse A é limitado e $\overline{V}(A) = 0$.

8) A noção dada de volume é coerente com a já conhecida de volume de intervalo fechado; é óbvio, se J for intervalo não degenerado, pois, atendendo à Proposição 2.4 – 5, $V(J) = \int_J 1$. Se J for degenerado basta considerar um intervalo $I \subset \mathbb{R}^N$ não degenerado contendo J, $P_n \in \mathcal{P}(I)$ com $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ e aplicar o Lema da Secção 2.5:

$$\overline{V}(J) = \lim_n \sum_{\substack{K \cap J \neq \emptyset \\ K \in P_n}} V(K) = 0,$$

o que mostra que $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ com medida de Jordan igual a zero, que era também o volume de J com a definição dada no início do curso.

PROPOSIÇÃO 3.4 (Propriedades da medida de Jordan): *1) Se* $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$*, então* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ *e:*

$$\begin{aligned} V(A \cup B) &= V(A) + V(B) - V(A \cap B) = \\ &= V(A \setminus B) + V(B \setminus A) + V(A \cap B). \end{aligned}$$

2) Sendo $A_1, \ldots, A_k$ *partes limitadas de* $\mathbb{R}^N$*, tem-se:*

$$\overline{V}\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \overline{V}(A_j).$$

3) Se $A \subset B$ *forem partes limitadas de* $\mathbb{R}^N$*:*

$$\underline{V}(A) \leq \underline{V}(B),\ \overline{V}(A) \leq \overline{V}(B).$$

Demonstração: Atendendo a que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, concluímos imediatamente que:

$$A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \chi_A,\ \chi_B \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \chi_A{\cdot}\chi_B \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \chi_{A\cap B} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N),$$

pelo que o ponto 1) da Proposição é consequência imediata da Proposição 3.3 – 1. As restantes asserções do Teorema resultam imediatamente da aplicação da Proposição 3.3 à função identicamente igual a 1.□

Observações: 9) Se $C \in \mathbb{R}$ e $f(x) \equiv C$ em $A \subset \mathbb{R}^N$, limitado, tem-se:

$$\underline{\int}_A f = \underline{\int} \tilde{f}\chi_A = \underline{\int} C\chi_A = \begin{cases} C\,\underline{V}(A) & \text{se } C \geq 0 \\ C\,\overline{V}(A) & \text{se } C < 0 \end{cases},$$

$$\overline{\int}_A f = \overline{\int} \tilde{f}\chi_A = \overline{\int} C\chi_A = \begin{cases} C\,\overline{V}(A) & \text{se } C \geq 0 \\ C\,\underline{V}(A) & \text{se } C < 0 \end{cases}.$$

Se $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, vem evidentemente:

$$\int_A C = C\,V(A).$$

10) É útil, em certas situações, generalizar a desigualdade da norma a integrais de Darboux; de $f \leq |f|, -f \leq |f|$, podemos concluir, da monotonia dos integrais de Darboux que:

$$\overline{\int}_A f \leq \overline{\int}_A |f|, -\overline{\int}_A f = \underline{\int}_A (-f) \leq \underline{\int}_A |f| \leq \overline{\int}_A |f|,$$

donde,

$$\left|\overline{\int}_A f\right| \leq \overline{\int}_A |f|,$$

e, de modo análogo,

$$\left|\underline{\int}_A f\right| \leq \overline{\int}_A |f|.$$

PROPOSIÇÃO 3.5: *Se $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ e $V(A) = 0$, então toda a função real f limitada em A é integrável à Riemann em A e:*

$$\int_A f = 0.$$

Demonstração: Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ em A; então, pelo que acabámos de ver:

$$\left|\underline{\int_A} f\right|, \left|\overline{\int_A} f\right| \leq \overline{\int_A} |f| \leq \overline{\int_A} M = M\,V(A) = 0,$$

donde,

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f = 0 \Rightarrow f \text{ é integrável à Riemann em } A \text{ e } \int_A f = 0. \square$$

PROPOSIÇÃO 3.6: *Um limitado* $A \subset \mathbb{R}^N$ *tem volume nulo sse para cada* $\delta > 0$ *existirem intervalos fechados* $I_1, \ldots, I_k$ *de* $\mathbb{R}^N$ *tais que:*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j\,,\ \sum_{j=1}^{k} V(I_j) < \delta.$$

Demonstração: Se $V(A) = 0$, considerando I intervalo fechado não degenerado de $\mathbb{R}^N$ tal que $A \subset I$, virá:

$$0 = V(A) = \overline{V}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \sum_{\substack{K \cap A \neq \emptyset \\ K \in P}} V(K).$$

Então, dado $\delta > 0$, por definição de ínfimo, existirá uma partição P de I tal que:

$$\sum_{\substack{K \cap A \neq \emptyset \\ K \in P}} V(K) < \delta,$$

e é óbvio que A está contido na união dos K de P tais que $K \cap A \neq \emptyset$. Basta então tomar:

$$\{I_1, \ldots, I_k\} = \{K \in P \colon K \cap A \neq \emptyset\}.$$

Reciprocamente, supondo verificada a condição do Teorema, dado $\delta > 0$ existirá uma família de intervalos $\{I_1, \ldots, I_k\}$ nas condições referidas. Podemos então aplicar a Proposição 3.4 – 2,3, para concluir:

$$\overline{V}(A) \leq \overline{V}\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \overline{V}(I_j) \leq \delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, podemos concluir que $\overline{V}(A) = 0$, pelo que, de facto, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ e $V(A) = 0$.$\square$

3.4 Conjuntos desprezáveis e critério de Riemann-Lebesgue

Agora que já possuímos uma noção de "medida" para conjuntos mais gerais que intervalos, podemos voltar à questão de caracterizar as funções integráveis à Riemann num intervalo, através, eventualmente, da análise do conjunto dos pontos de descontinuidade. Podemos começar por pôr a questão de saber se tal conjunto terá sempre volume nulo, uma vez que esperamos que seja "pequeno" em sentido a definir; o exemplo que se segue mostra que nem sempre é assim!

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]0,1], \text{ fracção irredutível} \end{cases};$$

comecemos por verificar que f é contínua em todos os irracionais do intervalo $[0,1]$. Tomando $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ e $x_n \xrightarrow[n]{} x$, sucessão em $[0,1]$, provemos que $f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x) = 0$. Comecemos por notar que podemos supor os x_n todos não nulos, uma vezes que o são certamente a partir de certa ordem, ou x_n teria uma subsucessão a tender para $0 \neq x$; como f se anula nos irracionais, se, a partir de certa ordem, x_n for irracional é óbvio que terá lugar o segundo limite. Caso contrário, será infinito o conjunto C dos índices correspondentes a termos racionais não nulos da sucessão x_n e podemos escrever $C = \{n_k : k \in \mathbb{N}_1\}$, com n_k crescente; x_{n_k} é então subsucessão de x_n (portanto convergente para x) e basta agora verificar que $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k]{} 0$, pois, nos outros termos da sucessão x_n, f é nula. Sendo os x_{n_k} racionais diferentes de zero, ter-se-á $x_{n_k} = p_k/q_k$, fracção irredutível; mostremos que o facto de convergirem para um irracional x implica que $q_k \xrightarrow[k]{} \infty$. Com efeito, se assim não fosse, q_k admitiria subsucessão limitada, e portanto convergente; tratando-se de números inteiros, tal subsucessão teria de ser constantemente igual a certo número natural q a partir de certa ordem. Ou seja, q_k teria uma subsucessão constantemente igual a q; mas, nesse caso, a correspondente subsucessão de p_k convergiria para qx, pelo que, pelo mesmo raciocínio, qx teria de ser um número natural p, donde $x = p/q$ seria racional, contra a hipótese. Temos então $q_k \xrightarrow[k]{} \infty$, e portanto:

$$f(x_{n_k}) = \frac{1}{q_k} \xrightarrow[k]{} 0,$$

pelo que, de facto, f é contínua em x. Nos pontos racionais f é obviamente descontínua pois podemos aproximar um racional por sucessões de irracionais e f calculado nessas sucessões é constantemente igual a zero, ao passo que f de um racional é sempre diferente de zero. O conjunto dos pontos de descontinuidade de f coincide portanto com $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ que *não tem volume nulo*. Com efeito, nem sequer é mensurável à Jordan, já que a função característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ não é integrável-R em $[0,1]$ — foi precisamente o primeiro exemplo que vimos de função não integrável-R! (*cf.* Observação 3) do Capítulo 2). Ora f *é integrável à Riemann!* com efeito, as somas inferiores são obviamente todas nulas, uma vez que em qualquer intervalo não degenerado existem sempre números irracionais, onde f é nula. Quanto às somas superiores, o cálculo do respectivo limite é menos elementar; convém-nos escolher partições que permitam "isolar" os racionais do intervalo $[0,1]$, o que nos leva a introduzir a seguinte sucessão de conjuntos:

$$D_n = \{0\} \cup \{x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]0,1], \text{fracção irredutível}, q \leq n\}.$$

D_n é obviamente finito (tem cardinal não superior, por exemplo, a n^2+1), pelo que, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, existirá $k_n \in \mathbb{N}_1$ $(k_n \geq 2), r_1, \ldots, r_{k_n} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ $(r_i \neq r_j$, para $i \neq j$ com $i, j = 1, \ldots, k_n)$, tais que:

$$D_n = \{r_1, \ldots, r_{k_n}\}.$$

Podemos agora, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, escolher uma partição P_n do intervalo $[0,1]$ incluindo os intervalos $I_j = [r_j - \varepsilon, r_j + \varepsilon] \cap [0,1]$ $(j = 1, \ldots, k_n)$, em que ε é fixado satisfazendo às condições:

- $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2} \min\limits_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{1,\ldots,k_n\}}} |r_i - r_j|$;
- $\varepsilon < \dfrac{1}{nk_n}$.

Teremos:

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, P_n) &= \sum_{J \in P_n \setminus \{I_1,\ldots,I_{k_n}\}} \underbrace{(\sup_J f)}_{\leq \frac{1}{n}} V(J) + \sum_{j=1}^{k_n} \underbrace{(\sup_{I_j} f)}_{\leq 1} \underbrace{V(I_j)}_{\leq \frac{2}{nk_n}} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{J \in P_n \setminus \{I_1,\ldots,I_{k_n}\}} V(J) + k_n \frac{2}{nk_n} \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} = \frac{3}{n} \xrightarrow[n]{} 0, \end{aligned}$$

pelo que, do Teorema 2.9–2 e do que acima observámos quanto às somas inferiores, concluímos imediatamente que f é integrável à Riemann (com integral igual a 0).

Vamos ver que, no entanto, *o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função integrável à Riemann num intervalo é união numerável de conjuntos com volume nulo*. Para relacionarmos integrabilidade com continuidade convém--nos introduzir a noção de oscilação num ponto; o critério das oscilações e a equivalência que estabeleceremos entre continuidade e nulidade da oscilação tornará plausível aquela relação.

DEFINIÇÃO: Seja $A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$ limitada e $x \in A$; chamamos *oscilação de* f *em* x a:

$$\omega(f,x) = \inf_{\varepsilon>0} \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A).$$

PROPOSIÇÃO 3.7: *Seja* $A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $x \in A$*; então:*

1. $\omega(f,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A)$*;*

2. f *é contínua em* x *sse* $\omega(f,x) = 0$*.*

Demonstração: 1. Comecemos por notar que o ínfimo que intervém na definição de oscilação num ponto é finito já que a oscilação em conjunto não vazio é um valor não negativo. Por definição de ínfimo, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\omega(f,x) - \delta < \ \omega(f,x) \leq \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) < \omega(f,x) + \delta;$$

ora se $\varepsilon' < \varepsilon$ vem

$$B(x,\varepsilon') \cap A \subset B(x,\varepsilon) \cap A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega(f,x) - \delta \leq \omega(f, B(x,\varepsilon') \cap A) \leq \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) < \omega(f,x) + \delta,$$

donde, de facto, $\omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \omega(f,x)$.

2. Se f for contínua em x,

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \|y - x\| < \varepsilon, y \in A \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \delta,$$

donde

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) \leq 2\delta,$$

já que:

$$\begin{aligned}
\omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) &= \sup_{y,y' \in B(x,\varepsilon)\cap A} |f(y) - f(y')| \leq \\
&\leq \sup_{y,y' \in B(x,\varepsilon)\cap A} (|f(y) - f(x)| + |f(y') - f(x)|) = \\
&= \sup_{y \in B(x,\varepsilon)\cap A} |f(y) - f(x)| + \sup_{y' \in B(x,\varepsilon)\cap A} |f(y') - f(x)| \leq 2\delta.
\end{aligned}$$

Concluímos então que $\omega(f,x) = \inf_{\varepsilon>0} \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) = 0$. Reciprocamente, se $\omega(f,x) = 0$:

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, \varepsilon > 0 \text{: } \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) < \delta,$$

donde:

$$\|y - x\| < \varepsilon, y \in A \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap A) < \delta,$$

ou seja, f é contínua em x.$\square$

PROPOSIÇÃO 3.8: *Se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $D_f = \{x \in I\colon f$ não é contínua em $x\}$, então existem conjuntos com volume nulo $D_n \subset I$ $(n \in \mathbb{N}_1)$ tais que:*

$$D_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} D_n.$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}_1$ seja:

$$D_n = \{x \in I\colon \omega(f,x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Atendendo à Proposição anterior, é evidente que:

$$D_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} D_n;$$

resta então provar que cada D_n tem volume nulo. Fixemos $n \in \mathbb{N}_1$; pelo critério das oscilações (Teorema 2.6), dado $\delta > 0$, sabemos que existe uma partição $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que:

$$\sum_{J\in P} \omega(f,J)V(J) < \frac{\delta}{n}.$$

Ora se $x \in \overset{\circ}{J} \cap D_n$ $(J \in P)$, por definição de oscilação em x e de D_n , virá

$$\frac{1}{n} \leq \omega(f,x) \leq \omega(f,\overset{\circ}{J}) \leq \omega(f,J),$$

donde:

$$\frac{\delta}{n} > \sum_{J\in P} \omega(f,J)V(J) \geq \sum_{\substack{J\in P\\ D_n\cap\overset{\circ}{J}\neq\emptyset}} \omega(f,J)V(J) \geq$$
$$\geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{J\in P\\ D_n\cap\overset{\circ}{J}\neq\emptyset}} V(J) \Rightarrow \sum_{\substack{J\in P\\ D_n\cap\overset{\circ}{J}\neq\emptyset}} V(J) < \delta.$$

Mas:

$$D_n \subset \left(\bigcup_{\substack{J\in P\\ D_n\cap\overset{\circ}{J}\neq\emptyset}} J \right) \cup \left(\bigcup_{J\in P} \operatorname{fr}(J) \right);$$

sendo as fronteiras dos J de P união finita de intervalos de volume nulo, concluímos que podemos cobrir D_n com uma família finita de intervalos (os que constituem aquelas fronteiras e os intervalos de P cujos interiores intersectam D_n) com soma de volumes inferior ao $\delta > 0$ que tínhamos fixado. Pela Proposição 3.6 concluímos que D_n tem volume nulo.☐

A Proposição anterior sugere-nos a introdução de novo conceito, obtido por "ligeira" modificação da condição suficiente dada na Proposição 3.6 para um conjunto ter volume nulo:

DEFINIÇÃO: Seja $A \subset \mathbb{R}^N$; diz-se que A *é desprezável*, A *tem medida nula*, ou ainda que A *tem medida de Lebesgue nula*, e escreve-se $m(A) = 0,$ se para cada $\delta > 0$ existir uma família numerável $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$ tal que:

$$\bullet A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} I_n;$$

$$\bullet \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < \delta.$$

Observações: 11) Quando dada propriedade se verificar em $B \setminus A$, $A \subset B \subset \subset \mathbb{R}^N$, $m(A) = 0$, diremos, abreviadamente, que a propriedade se verifica "em quase todos os pontos de B". Utilizam-se ainda, com o mesmo sentido, as abreviaturas, "*p.p.* em B" (do francês "presque partout"), "$a.e.$ em B" (do inglês "almost everywhere"), "$q.t.p.$ em B", ou, finalmente, "$q.s.$ em B" (de "quase todos os pontos" e "quase sempre", respectivamente). Também se poderá por vezes omitir a referência explícita a B, quando resultar obviamente do contexto qual o conjunto a que nos queremos referir. Adoptaremos, regra geral, a abreviatura "*p.p.*".

12) É evidente, atendendo à Proposição 3.6, que todo o conjunto com volume nulo é desprezável; com efeito, para cada $\delta > 0$, basta completar a família finita de intervalos cuja existência é garantida por aquela Proposição com uma infinidade numerável de intervalos fechados degenerados (portanto com volume nulo).

13) Também é óbvio que toda a parte B de um conjunto A desprezável é desprezável; de facto, toda a "cobertura" de A por intervalos é também cobertura de B.

14) Na definição de conjunto de medida nula intervêm intervalos fechados; no entanto é fácil concluir que se obtém uma definição equivalente substituindo "intervalos fechados" por "intervalos abertos", ou mesmo por intervalos (limitados) de qualquer tipo. Mais precisamente, chamamos intervalo de $\mathbb{R}^N$ de extremos a e b ($a = (a_1, \dots, a_N), b = (b_1, \dots, b_N), a_i \leq b_i, \forall i = 1, \dots, N$) a qualquer conjunto da forma:

$$\prod_{i=1}^{N} |a_i, b_i|,$$

sendo cada $|a_i, b_i|$ intervalo de $\mathbb{R}$ aberto, fechado, ou semi-aberto à esquerda ou à direita, de extremos a_i, b_i. Um intervalo dir-se-á aberto se todos os $|a_i, b_i|$ forem abertos. É fácil concluir que a *aderência* de um intervalo não vazio coincide com o intervalo fechado com os mesmos extremos, o *interior* com o intervalo aberto e a *fronteira* coincide portanto com a do intervalo fechado, pelo que é constituída por união finita de intervalos degenerados, como sabemos. Podemos então afirmar que os intervalos são mensuráveis à Jordan, tendo-se, por aplicação da Proposição 3.4–1:

$$V\left(\prod_{i=1}^{N}]a_i, b_i[\right) = V\left(\prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]\right) - V(\mathrm{fr}([a,b])) =$$
$$= V\left(\prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i).$$

Concluímos agora que, para qualquer conjunto B tal que $\overset{\circ}{I} \subset B \subset I$, se tem:

$$V(I) = V(\overset{\circ}{I}) \leq \underline{V}(B) \leq \overline{V}(B) \leq V(I),$$

pelo que B é mensurável-J com volume igual ao de I; em particular qualquer intervalo (limitado) é mensurável-J, com volume igual ao do intervalo fechado com os mesmos extremos.

Se dado conjunto A satisfizer à condição definidora de conjunto desprezável, mas com "intervalo fechado" substituído por "intervalo aberto", é óbvio que é de facto desprezável, pois os correspondentes intervalos fechados também cobrem A, tendo os mesmos volumes. Reciprocamente, se A for desprezável, dado $\delta > 0$ e sendo $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ a cobertura de A por intervalos fechados correspondente a $\frac{\delta}{2}$, podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, um intervalo aberto J_n tal que:

$$I_n \subset J_n, V(J_n) \leq V(I_n) + \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

(basta notar que se $I_n = \prod_{i=1}^{N} [a_i\,, b_i]$, podemos escolher $J_n = \prod_{i=1}^{N}]a_i - \varepsilon\,, b_i + \varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, já que

$$V(J_n) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i + 2\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} V(I_n)).$$

Ter-se-á então:

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} J_n, \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(J_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{\delta}{2^{n+1}} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

pelo que, de facto, podemos, na definição de conjunto desprezável, utilizar intervalos abertos, e portanto intervalos quaisquer.

PROPOSIÇÃO 3.9: *Se $A \subset \mathbb{R}^N$ for compacto, então $m(A) = 0$ sse A for mensurável à Jordan e $V(A) = 0$.*

Demonstração: Já vimos que todo o conjunto com volume nulo é desprezável. Reciprocamente, se $m(A) = 0$, dado $\delta > 0$ existem intervalos abertos J_n $(n \in \mathbb{N}_1)$ que cobrem A e tais que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(J_n) < \delta.$$

Ora, sendo A compacto, A é coberto por uma sub-família finita $J_{n_1}, \ldots, J_{n_k}$, pelo que se verifica a condição da Proposição 3.6, o que mostra que $V(A) = 0$.□

PROPOSIÇÃO 3.10: *Se, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, A_n for parte desprezável de $\mathbb{R}^N$, então:*

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\Big) = 0.$$

Demonstração: Dados $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}_1$, por definição de conjunto desprezável, existe uma família numerável $(I_m^n)_{m\in\mathbb{N}_1}$ de intervalos tal que:

$$A_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}_1} I_m^n, \; \sum_{m\in\mathbb{N}_1} V(I_m^n) < \frac{\delta}{2^{n+1}};$$

então $(I_m^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}_1\times\mathbb{N}_1}$ é uma família numerável de intervalos tal que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1}\bigcup_{m\in\mathbb{N}_1} I_m^n = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}_1\times\mathbb{N}_1} I_m^n,$$

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_1\times\mathbb{N}_1} V(I_m^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\sum_{m\in\mathbb{N}_1} V(I_m^n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{\delta}{2^{n+1}} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Concluímos então que, de facto, $m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) = 0$.□

Deste resultado e da Proposição 3.8 deduzimos imediatamente que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função integrável à Riemann num intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}^N$ é desprezável, uma vez que é união numerável de conjuntos com volume nulo e, de acordo com a Observação 12) acima, todo o conjunto com volume nulo tem medida de Lebesgue nula. Vamos ver que aquela condição é também suficiente para concluir que a função é integrável à Riemann.

TEOREMA 3.11 (Critério de Riemann-Lebesgue): *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for limitada, então f é integrável à Riemann sse o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tiver medida de Lebesgue nula, ou seja, sse f for contínua em quase todos os pontos de I.*

Demonstração: Basta-nos demonstrar que a condição é suficiente, uma vez que, atendendo às Proposições 3.8 e 3.10 e à Observação 12) acima, é obviamente necessária. Suponhamos então que é desprezável o conjunto:

$$D = \{x \in I\colon f \text{ é descontínua em } x\},$$

e demonstremos que $f \in \mathcal{R}(I)$. Fixemos $\delta' > 0$, com o objectivo de tentar provar que f satisfaz ao critério das oscilações (Teorema 2.6); por definição de conjunto desprezável, e atendendo à Observação 14) acima, sabemos que existe uma família $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de intervalos abertos de $\mathbb{R}^N$ (não vazios) que cobre D e tal que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < \delta'$$

Por outro lado, se $x \in I \setminus D$, f é contínua em x, pelo que, atendendo à Proposição 3.7–2, $\omega(f,x) = 0$. Por definição de oscilação num ponto, existe portanto $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(f, B(x,\varepsilon) \cap I) < \delta'$; ora, considerando em $\mathbb{R}^N$ a "norma do sup", cada $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ é certo intervalo aberto J_x contendo x, e cuja aderência está contida em $B(x,\varepsilon)$, pelo que:

$$\omega(f, \overline{J_x} \cap I) \leq \omega(f, B(x,\varepsilon) \cap I) < \delta'.$$

Concluímos assim que I é coberto pela união de todos os intervalos I_n (com $n \in \mathbb{N}_1$) e J_x (com $x \in I \setminus D$); como se trata de intervalos abertos e I é compacto (visto ser limitado e fechado em $\mathbb{R}^N$), sabemos que I é coberto por um número finito apenas destes intervalos, sejam eles $I_{n_1}, \ldots, I_{n_k}, J_{x_1}, \ldots, J_{x_l}$. Por maioria de razão I será coberto pelas aderências destes intervalos, que são intervalos fechados de $\mathbb{R}^N$; podemos agora utilizar a Proposição 1.5 para concluir que existe $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que cada $K \in P$ está contido num dos $\overline{I_{n_i}}$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ ou num dos $\overline{J_{x_j}}$ $(j \in \{1, \ldots, l\})$. Então se $K \in P$ não estiver contido em nenhum dos $\overline{I_{n_i}}$ estará contido em certo $\overline{J_{x_j}} \cap I$, pelo que, atendendo ao que atrás vimos, $\omega(f,K) < \delta'$. Por outro lado f é limitada, pelo que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$, donde $\omega(f, I\ ) \leq 2M$. Temos então:

$$\begin{aligned}\sum_{K\in P} \omega(f,K)V(K) &\leq \sum_{i=1}^{k} 2M\ V(\overline{I_{n_i}}) + \sum_{K\in P} \delta'\ V(K) \leq \\ &\leq 2M \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(\overline{I_n}) + \delta'\ V(I) = 2M \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) + \delta'\ V(I) < \\ &< (2M + V(I))\ \delta'.\end{aligned}$$

É fácil agora concluir a demonstração; dado $\delta > 0$, basta escolher:

$$\delta' = \frac{\delta}{2M + V(I)} > 0,$$

o que garante a existência de uma partição P de I tal que:

$$\sum_{K\in P} \omega(f,K)V(K) < (2M + V(I))\ \delta' = \delta,$$

e portanto f satisfaz ao critério das oscilações, condição suficiente para que $f \in \mathcal{R}(I)$.□

COROLÁRIO 1: *1. Uma parte A limitada de $\mathbb{R}^N$ é mensurável à Jordan sse tiver fronteira desprezável ou ainda sse* $\mathrm{fr}(A)$ *tiver volume nulo.*

2. Se $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, $V(A) = 0$ sse $m(A) = 0$.

Demonstração: 1. Sendo A limitado, fr(A) é compacta, pelo que, atendendo à Proposição 3.9, fr(A) será desprezável sse tiver volume nulo. Por outro lado, o conjunto limitado A será mensurável à Jordan sse for integrável à Riemann a função χ_A. Considerando um intervalo fechado não degenerado I de $\mathbb{R}^N$ tal que $\overline{A} \subset \overset{\circ}{I}$, uma vez que χ_A é nula fora de I, será integrável-R sse $\chi_{A_{/I}} \in \mathcal{R}(I)$. Basta então aplicar o critério de Riemann-Lebesgue a esta função; é fácil concluir que ela será contínua em $I \setminus$ fr(A), já que se x é ponto interior a A, existe uma vizinhança de x contida em A e, nessa vizinhança, a função característica é constantemente igual a 1, sendo portanto contínua em x. Se $x \in I$ é exterior a A, pelo mesmo raciocínio se conclui que χ_A é contínua em x. Finalmente, se $x \in$ fr(A), uma vez que x está em $\overset{\circ}{I}$, existe uma vizinhança W de x contida em I; por outro lado, por definição de fronteira, para qualquer vizinhança V de x, como $V \cap W$ também é vizinhança, $V \cap W$ intersecta A e $\mathbb{R}^N \setminus A$, mas como $V \cap W \subset I$, é óbvio que $V \cap W$, e portanto o próprio V, intersecta A e $I \setminus A$. Concluímos assim que em qualquer vizinhança V de x existem pontos em que $\chi_{A_{/I}}$ é igual a 1 e pontos em que é igual a 0, pelo que $\chi_{A_{/I}}$ é descontínua exactamente nos pontos de fr(A). Pelo Critério de Riemann-Lebesgue, esta função é integrável à Riemann sse $m(\text{fr}(A)) = 0$.

2. Já sabemos que se $V(A) = 0$ então $m(A) = 0$. Reciprocamente, se $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, em particular A é limitado, pelo que $\overline{A}$ é compacto; se $m(A) = 0$, como, por 1., $m(\text{fr}(A)) = 0$, vem $m(\overline{A}) = m(A \cup \text{fr}(A)) = 0$. $\overline{A}$ é portanto compacto com medida nula, pelo que, pela Proposição 3.9, $V(A) = 0$.□

COROLÁRIO 2: *Seja* $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, $f : A \to \mathbb{R}$ *limitada ; então* $f \in \mathcal{R}(A)$ *sse* f *for contínua em quase todos os pontos de* A.

Demonstração: Por definição de integrabilidade à Riemann em A, $f \in \mathcal{R}(A)$ sse $\left(\widetilde{f}.\chi_A\right)_{/I} = \widetilde{f}_{/I} \in \mathcal{R}(I)$, sendo $\overline{A} \subset \overset{\circ}{I}$, I intervalo fechado não degenerado de $\mathbb{R}^N$. Esta nova função coincide com f em A, pelo que as descontinuidades de f também o são de $\widetilde{f}_{/I}$ (se $f(x_n)$ não convergir para $f(x)$, para certa sucessão de pontos de A, $x_n \underset{n}{\longrightarrow} x \in A$, obviamente também $\widetilde{f}_{/I}(x_n)$, que coincide com $f(x_n)$, não convergirá para $\widetilde{f}_{/I}(x) = f(x)$); por outro lado é evidente que as descontinuidades de $\widetilde{f}_{/I}$ no *interior* de A também são descontinuidades de f (as duas funções coincidirão numa vizinhança do ponto em questão) e $\widetilde{f}_{/I}$ é obviamente contínua no *exterior* de A, pois é aí constantemente igual a zero. Concluímos portanto que, sendo D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f, o conjunto $\widetilde{D}$ dos pontos de descontinuidade de $\widetilde{f}_{/I}$ satisfaz a:

$$D \subset \widetilde{D} \subset (D \cup \text{fr}(A));$$

como, pelo Corolário 1, $m(\text{fr}(A)) = 0$, é fácil concluir que $m(D) = 0$ sse $m(\widetilde{D}) = 0$, pelo que, de facto, $f \in \mathcal{R}(A)$ sse $m(D) = 0$.□

Para terminar esta secção, notemos que se uma função f é integrável-R em $A \subset \mathbb{R}^N$ e B é mensurável à Jordan, então f é integrável-R em $A \cap B$, já que, por hipótese, $\widetilde{f}.\chi_A, \chi_B \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$, donde $\widetilde{f}.\chi_{A\cap B} = \widetilde{f}.\chi_A.\chi_B \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$, e portanto f é integrável à Riemann em $A \cap B$. Em particular, se $B \subset A$ for mensurável-J, f é integrável-R em B se o for em A.

Exercícios

18) Sejam $I = [a, b]$ intervalo fechado de $\mathbb{R}^N$ não degenerado, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto.

a) Prove que se $f : I \to \mathbb{R}$ for contínua e estritamente positiva em todos os pontos, então $\int_I f > 0$.

b) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ for contínua e tal que $\int_J f = 0$ para todo o intervalo compacto $J \subset \Omega$, então $f \equiv 0$ em Ω.

c) Se f for contínua em I e $\int_I |f| = 0$, então $f \equiv 0$ em I.

19) Demonstre as seguintes propriedades das funções características ($A, B, A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^N$)

a) $\chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow A \subset B$.

b) $\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B$.

c) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

d) $\chi_{A\cap B} = \chi_A.\chi_B$.

e) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$.

f) $\chi_{\bigcup_{j=1}^k A_j} \leq \sum_{j=1}^k \chi_{A_j}$.

g) $\chi_{A\triangle B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = |\chi_A - \chi_B|$.

h) Os pontos de descontinuidade de χ_A são os pontos fronteiros a A.

20) Complete a demonstração da Proposição 3.4.

21) Se $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ e f for integrável-R em A e B, $f \geq 0$ em B, então $\int_A f \leq \int_B f$.

22) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^N$ limitados; mostre que:

a) $\overset{\circ}{A} = \emptyset \Leftrightarrow \underline{V}(A) = 0$.

b) $A \subset \overline{B} \Rightarrow \underline{V}(A) \leq \overline{V}(B)$.

c) $\underline{V}(A) \leq \underline{V}(\overline{A}) \leq \overline{V}(A) \leq \overline{V}(\overline{A})$.

d) Se A for mensurável à Jordan, então $\overline{A}$ é mensurável à Jordan e $V(\overline{A}) = V(A)$.

23) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^N$, $f : B \to \mathbb{R}$ e $S(f) = \{x \in B : f(x) \neq 0\}$; suponhamos além disso que $A \cap S(f) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, e que, neste conjunto, $m \leq f \leq M$ para certos $m, M \in \mathbb{R}$.

a) Prove que:

$$m\, V(A \cap S(f)) \leq \underline{\int}_A f \leq \overline{\int}_A f \leq M\, V(A \cap S(f))\,.$$

b) Conclua do que precede que se $V(A \cap S(f)) = 0$, então f é integrável-R em A e $\int_A f = 0$.

24) Sejam $A_n, B_n \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N), \forall n \in \mathbb{N}_1$. Prove que:

a) Se $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$, e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} B_n$, então:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(B_n).$$

b) $A_n \cap A_m = \emptyset = B_n \cap B_m, \forall n \neq m$, e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} B_n$, então:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(B_n).$$

c) Se $A_n \cap A_m = \emptyset$, sempre que $n \neq m$, e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} A_n \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, então:

$$V\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(A_n).$$

25) Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$ desprezável e $B \subset \mathbb{R}^p$; mostre que A tem interior vazio e que $A \times B$ é desprezável em $\mathbb{R}^{N+p}$.

26) Mostre que o conjunto M_1 do exercício 11) não é mensurável à Jordan. Qual o volume da respectiva fronteira?

27) *(Conjunto de Cantor)* Fixado $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, consideremos a partição de I em três intervalos de igual comprimento ("trisecção") e designemos os três intervalos resultantes desta operação respectivamente por:

$$I_0 = [a, a + (b-a)/3],\ I_1 = [a + (b-a)/3, a + 2(b-a)/3],$$
$$I_2 = [a + 2(b-a)/3, b].$$

Podemos iterar esta operação, procedendo à trisecção de cada um destes intervalos, o que permite obter os intervalos $I_{ij} = (I_i)_j\,(i, j = 0, 1, 2)$; por recorrência, podemos definir, para cada $k \in \mathbb{N}_1, s = (i_1, \ldots, i_k) \in \{0, 1, 2\}^k$ os intervalos:

$$I_s = I_{i_1 \dots i_k} = (I_{i_1 \dots i_{k-1}})_{i_k}.$$

Partindo do intervalo $I = [0,1]$, seja $C_n = \bigcup_{s \in \{0,2\}^n} I_s$ ("em cada trisecção elimina-se o intervalo do meio"); designa-se por *Conjunto de Cantor* a intersecção de todos os C_n, ou seja, o conjunto:

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} C_n.$$

a) Represente graficamente os primeiros conjuntos C_n ($n = 1, 2, 3$).

b) Demonstre que C é *compacto* e $V(C) = 0$.

d) Prove que C tem *a potência do contínuo.*

28) Mostre, com auxílio de um contra-exemplo, que o Corolário 2 do Critério de Riemann-Lebesgue não se generaliza a $A \subset \mathbb{R}^N$ limitado qualquer.

Capítulo 4

Cálculo de integrais múltiplos e volumes

Até agora o único processo que conhecemos para calcular integrais é a própria definição ou o Teorema 2.9, pelo qual sabemos que se pode aproximar o integral de uma função de $\mathcal{R}(I)$ por sucessões de somas inferiores, superiores ou de Riemann, correspondentes a uma sucessão de partições de I, com diâmetros a tender para zero. Examinemos o exemplo simples da função:

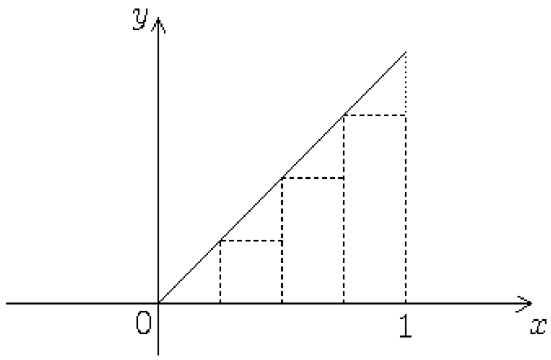
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$f(x) = x,\ \forall x \in [0,1].$$

Como f é contínua em $[0,1]$, tem-se $f \in \mathcal{R}([0,1])$. Por outro lado, podemos considerar a sucessão $P_n \in \mathcal{P}([0,1])$, com:

$$P_n = \{\left[\tfrac{j}{n}, \tfrac{j+1}{n}\right] : j = 0, \dots, n-1\};$$



é evidente que $\delta(P_n) = \frac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$, pelo que:

$$\int_{[0,1]} f = \lim_n \underline{S}(f, P_n) = \lim_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n} \times \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_n \left(\frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2}\right) = \lim_n \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Para funções mais complicadas, este processo pode tornar-se extremamente penoso, pelo que convém procurar processos mais expeditos de cálculo explícito de integrais.

4.1 Caso da dimensão 1: Teorema fundamental do cálculo integral e fórmula de Barrow

Examinemos o caso particular de uma função:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \ (a, b \in \mathbb{R}, a < b),$$

$f \in \mathcal{R}([a,b])$; é evidente que para cada $x \in [a,b]$, f é integrável à Riemann em $[a,x]$. Podemos então considerar a função:

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$F(x) = \int_{[a,x]} f;$$

estudemos F quanto à diferenciabilidade. Utilizando as propriedades conhecidas do integral de Riemann em conjuntos gerais, obtemos para a razão incremental de F em $x_0 \in [a,b]$ (com h tal que $x_0 + h \in [a,b]$):

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{[a,x_0+h]} f - \int_{[a,x_0]} f\right);$$

ora, se $h > 0$, tem-se $[a, x_0 + h] = [a, x_0] \cup [x_0, x_0 + h]$, e se $h < 0$, $[a, x_0] =$ $= [a, x_0 + h] \cup [x_0 + h, x_0]$, sendo as intersecções dos pares de conjuntos que intervêm nas uniões, respectivamente $\{x_0\}$ e $\{x_0 + h\}$, conjuntos com volume zero (trata-se dos intervalos degenerados de $\mathbb{R}$ $[x_0, x_0]$ e $[x_0 + h, x_0 + h]$), pelo que, pela aditividade do integral relativamente ao domínio de integração (Proposição 3.3–1), podemos concluir que a diferença dos integrais no segundo membro é igual ao integral em $[x_0, x_0 + h]$ (se $h > 0$) e igual a menos o integral em $[x_0 + h, x_0]$ (se $h < 0$). Em qualquer caso trata-se de intervalo com volume ("comprimento") igual a $|h|$, pelo que o integral, nesse intervalo, da constante $f(x_0)$ é dado por $|h|.f(x_0)$; temos então:

- Se $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} f - \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} f(x_0) = \\ &= \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} (f - f(x_0)).\end{aligned}$$

• Se $h < 0$,

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0) = -\frac{1}{h}\int_{[x_0+h,x_0]} f - \frac{1}{-h}\int_{[x_0+h,x_0]} f(x_0) =$$
$$= \frac{1}{h}\int_{[x_0+h,x_0]} (f(x_0)-f).$$

Em qualquer caso, designando por I_h o intervalo $[x_0, x_0+h]$ se $h > 0$ ou o intervalo $[x_0+h, x_0]$ se $h < 0$, tem-se:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| \leq \frac{1}{V(I_h)}\int_{I_h} |f - f(x_0)|;$$

suponhamos agora que f é contínua em x_0. Então, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $|h| < \varepsilon$ e $x \in I_h \subset]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\cap [a,b]$, então $|f(x)-f(x_0)| < \delta$. Por monotonia do integral, concluímos então que, para $|h| < \varepsilon$, o segundo membro da desigualdade é majorado por:

$$\frac{1}{V(I_h)}\int_{I_h} \delta = \delta,$$

ou seja, $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : 0 < |h| < \varepsilon, x_0 + h \in [a,b] \Rightarrow \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|$ $\leq \delta$, o que prova que f é derivável em x_0 , tendo-se $F'(x_0) = f(x_0)$.

Acabámos de demonstrar o chamado *Teorema fundamental do Cálculo Integral* (a uma variável), que podemos assim enunciar:

TEOREMA 4.1 (Teorema fundamental do Cálculo Integral a uma variável): *Seja $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{R}([a,b])$, contínua em $x_0 \in \mathcal{R}(I)$; então é derivável em x_0 a aplicação:*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$F(x) = \int_{[a,x]} f,$$

(integral indefinido de f), tendo-se:

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Em particular, se f for contínua em $[a,b]$, F é de classe C^1.

COROLÁRIO (Fórmula de Barrow): *Seja* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*,* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a,b]$*,* F *uma primitiva de* f *em* $[a,b]$*; então:*

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Atendendo ao Teorema anterior, o integral indefinido de f em $[a,b]$ é uma primitiva de f em $[a,b]$, pelo que difere de F por uma constante; temos então:

$$F(x) = \int_{[a,x]} f + C$$

(para certo $C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$), donde,

$$F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} f + C - \int_{[a,a]} f - C = \int_{[a,b]} f. \square$$

Observações: 1) É fácil concluir que f é integrável à Riemann em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a \leq b)$ sse o for em$]a,b[$, $[a,b[$ ou$]a,b]$, uma vez que $\{a,b\}$ tem volume nulo, tendo f, além disso, o mesmo integral em qualquer dos intervalos. Por essa razão podemos representar qualquer desses integrais pelos símbolos:

$$\int_a^b f, \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dx,$$

sem qualquer ambiguidade. Também é hábito, na mesma situação, convencionar a notação:

$$\int_b^a f = \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx;$$

note-se, no entanto que este integral *não é* o integral em $[b,a]$, intervalo vazio ou degenerado (visto que $a \leq b$), onde portanto qualquer integral é nulo!

2) A notação que acabámos de introduzir permite exprimir de modo sugestivo a propriedade de aditividade em relação ao domínio; com efeito, é fácil concluir, examinando todos os casos possíveis, que para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

sempre que os integrais façam sentido (bastando, para isso, supor que f é integrável no intervalo "maior" com extremos iguais a dois dos pontos a, b, c, ou então nos outros dois intervalos).

3) No teorema fundamental do cálculo integral, podemos substituir F por qualquer função G da forma:

$$G(x) = \int_c^x f(x)\,dx \text{ (}c\text{ arbitrário em } [a,b]),$$

uma vez que, pelo que acabámos de referir, virá:

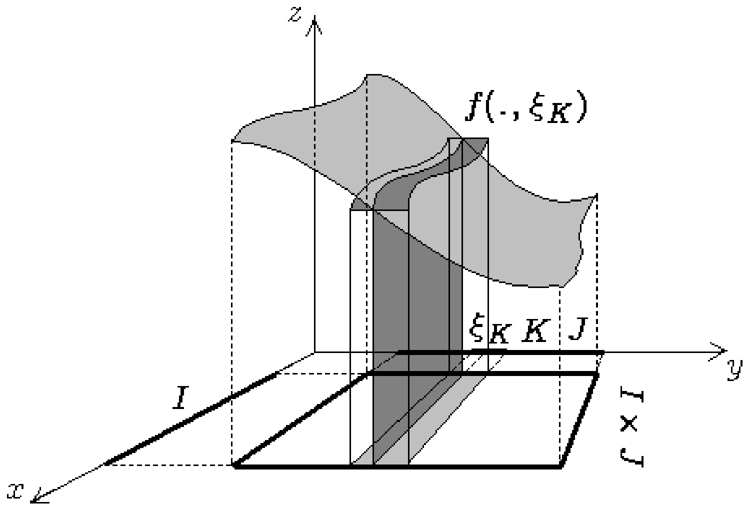
$$G(x) = \int_c^a f + \int_a^x f = F(x) + \int_c^a f;$$

G difere portanto de F por uma constante, pelo que vale para G a conclusão do Teorema 4.1.

4) O Teorema 4.1, juntamente com o critério de Riemann-Lebesgue, garante que o integral indefinido de uma função f integrável à Riemann num intervalo de $\mathbb{R}$ é derivável em quase todos os pontos, com derivada ($p.p.$) igual a f. A fórmula de Barrow fornece, além disso, um método em muitos casos expedito para o cálculo de integrais, pelo menos para funções contínuas em intervalos de $\mathbb{R}$, reduzindo esse cálculo ao de primitivas.

4.2 Caso geral: Teorema de Fubini para o Integral de Riemann

Interessa-nos agora examinar o caso dos integrais em dimensões superiores. O objectivo será reduzir o cálculo de tais integrais ao de integrais em intervalos de $\mathbb{R}$, onde possamos depois, eventualmente, utilizar a fórmula de Barrow. Uma vez que os integrais em conjuntos arbitrários, quando façam sentido, se reduzem a integrais em intervalos fechados não degenerados, podemos, sem perda de generalidade, examinar prioritariamente esse caso. Recordemos a ideia intuitiva inicialmente dada de integral (para funções não negativas em intervalos de $\mathbb{R}^2$), como “volume abaixo do gráfico”, e tentemos aproximar esse volume por um processo que faça apenas intervir integrais em intervalos de $\mathbb{R}$. Graficamente:



Ou seja, tomando para domínio de integração $I \times J$, e considerando uma partição P de J é natural "aproximar" o "volume abaixo do gráfico de f" pela soma dos volumes das "fatias", cada uma com base num $I \times K$ $(K \in P)$ e delimitada superiormente pela "superfície" que se obtém translatando o gráfico da função $x \mapsto f(x, \xi_K)$, paralelamente ao eixo dos yy, entre os extremos do intervalo K (sendo $(\xi_K)_{K \in \mathrm{P}}$ família compatível com P). O volume de cada "fatia" será, intuitivamente, dado pelo produto da área da "face lateral" pelo "comprimento" (volume) do intervalo K, sendo a área da face lateral igual à área "abaixo do gráfico da função $x \mapsto f(x, \xi_K)$", ou seja, de acordo com a interpretação intuitiva do integral, igual a:

$$\int_I f(x, \xi_K)\, dx,$$

(se este integral existir); teremos assim, intuitivamente:

$$\int_{I \times J} f \approx \sum_{K \in P} \left(\int_I f(x, \xi_K)\, dx \right) V(K).$$

Ora este somatório é uma soma de Riemann para a função definida em J:

$$y \mapsto \int_I f(x, y)\, dx,$$

pelo que é natural supor que:

(5) $$\text{“}\int_{I\times J} f = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx \right) dy\text{”},$$

o que reduziria o cálculo do integral em $I \times J$ à determinação, para cada y fixo em J, do integral em I de certa função definida nesse intervalo (portanto apenas com uma variável), obtendo-se assim nova função agora definida em J, seguida do cálculo do integral dessa função em J (novamente integral de função com uma só variável). Note-se, no entanto, que nada nos garante que cada função $x \mapsto f(x,y)$ (y fixo em J) seja integrável-R em I, ainda que f o seja em $I \times J$. É mesmo fácil construir exemplos em que $f \in \mathcal{R}(I \times J)$ mas em que, para certos $y \in J$, a função $x \mapsto f(x,y)$ é descontínua em todos os pontos de I (e portanto, evidentemente, não está em $\mathcal{R}(I)$); com efeito basta pensar que um "segmento" da forma $I \times \{y\}$ é intervalo degenerado de $\mathbb{R}^2$, pelo que f pode ser descontínua *em todos os pontos desse "segmento"* sem deixar de ser integrável em $I \times J$; se $J = [c,d]$, $y \in]c,d[$, f pode, por exemplo, ser igual a 0 em $I \times$ $\times\, [c,y[$ e igual a 1 em $I \times]y,d]$. Quaisquer que sejam os valores que f tome em $I \times \{y\}$, será integrável em $I \times J$; ora podemos, por exemplo, escolher os valores de $f(x,y)$ iguais a 0 se x for irracional e a 1 se x for racional. Nesse caso a função $x \mapsto f(x,y)$ não vem, como sabemos, integrável em I!

Podemos mesmo pensar num exemplo, mais elaborado, em que a função $x \mapsto f(x,y)$ não é integrável, para y a variar numa parte densa de J, ainda que f seja integrável em $I \times J$. Com efeito, seja:

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ ou } y \text{ for irracional} \\ 0 & \text{se } y = 0 \text{ e } x \text{ for racional} \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{se } y = \frac{p}{q}, \text{ fracção irredutível e } x \text{ for racional} \end{cases}.$$

É fácil concluir, por processo análogo ao utilizado no exemplo introduzido no início da Secção 3.4, que a função f é contínua exactamente nos pontos (x,y) de $[0,1]^2$ tais que y é irracional; ora o complementar em $[0,1]^2$ de tal conjunto é igual a:

$$\bigcup_{y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{y\} \times [0,1],$$

união numerável de intervalos degenerados de $\mathbb{R}^2$, e portanto desprezável; logo f é contínua em quase todos os pontos, donde podemos concluir que é integrável-R em $[0,1]^2$. No entanto a função $x \mapsto f(x,y)$ é descontínua em todos os pontos sempre que y seja racional, pelo que o integral:

$$\int_I f(x,y)\,dx$$

não existe para uma infinidade (densa em $[0,1]$) de valores de y.

Não podemos portanto esperar que uma fórmula como (5) seja válida em geral. Note-se, no entanto, que as funções $x \mapsto f(x,y)$ são sempre limitadas se f for integrável-R (e portanto limitada); podemos portanto falar sempre, pelo menos, nos integrais de Darboux:

$$\underline{\int}_I f(x,y)\,dx \ \text{ e } \ \overline{\int}_I f(x,y)\,dx,$$

dando o sentido óbvio às notações empregadas. vamos ver que a fórmula (5) tem sempre lugar desde que se substitua o integral dentro do parêntesis por qualquer dos integrais de Darboux que acabámos de escrever.

TEOREMA 4.2 (Teorema de Fubini para o integral de Riemann): *Sejam $I \subset \mathbb{R}^m$, $J \subset \mathbb{R}^p$ intervalos fechados não degenerados, $f \in \mathcal{R}(I \times J)$. Então são integráveis à Riemann em I as funções:*

$$x \mapsto \underline{\int}_J f(x,y)\,dy,\ x \mapsto \overline{\int}_J f(x,y)\,dy,$$

e são integráveis à Riemann em J as funções:

$$y \mapsto \underline{\int}_I f(x,y)\,dx,\ y \mapsto \overline{\int}_I f(x,y)\,dx,$$

tendo-se:

$$\int_{I\times J} f = \int_I \Big(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_I \Big(\overline{\int}_J f(x,y)\,dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_J \Big(\underline{\int}_I f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_J \Big(\overline{\int}_I f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Demonstração: Sendo P_n , P'_n sucessões de partições respectivamente do intervalo I e do intervalo J, é fácil concluir que, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, é partição de $I \times J$ a família:

$$P_n \bigstar P'_n = \{K \times K' : K \in P_n \text{ e } K' \in P'_n\}.$$

Além disso, considerando o diâmetro associado à norma do sup, ter-se-á:

$$\delta(P_n \bigstar P'_n) = \max\{\delta(P_n), \delta(P'_n)\} \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

se $\delta(P_n), \delta(P'_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$; podemos portanto aproximar o integral de f em $I \times J$ por somas de Darboux relativamente a estas partições. Ora:

$$\inf_{K\times K'} f \leq \inf_{y\in K'} f(x,y), \forall K \in P_n, K' \in P'_n, x \in K,$$

donde:

$$\sum_{K'\in P'_n} \Big(\inf_{K\times K'} f\Big) V(K') \leq \sum_{K'\in P'_n} \Big(\inf_{y\in K'} f(x,y)\Big) V(K') = \underline{S}(f(x,.), P'_n) \leq$$
$$\leq \underline{\int}_J f(x,y)\,dy, \forall K \in P_n,\ x \in K.$$

Podemos então garantir que o primeiro membro das desigualdades é menor ou igual ao ínfimo do último, com x a variar em K. Multiplicando por $V(K)$ e somando em $K \in P_n$, obtemos:

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, P_n\bigstar P'_n) &= \sum_{K\times K'\in P_n\bigstar P'_n} \Big(\inf_{K\times K'} f\Big) V(K\times K') = \\ &= \sum_{K\in P_n}\sum_{K'\in P'_n} \Big(\inf_{K\times K'} f\Big) V(K')V(K) \ \leq \\ &\leq \sum_{K\in P_n} \inf_{x\in K} \Big(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big) V(K) = \underline{S}(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy, P_n).\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade que acabámos de demonstrar à função $-f$ obtemos, por outro lado:

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, P_n\bigstar P'_n) &= -\underline{S}(-f, P_n\bigstar P'_n) \geq \\ &\geq -\underline{S}(\underline{\int}_J (-f(x,y))\,dy, P_n) = \overline{S}(\overline{\int}_J f(x,y)\,dy, P_n);\end{aligned}$$

concluímos então, utilizando a monotonia das somas e integrais de Darboux, que:

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, P_n\bigstar P'_n) \leq\ & \underline{S}(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy, P_n) \leq \overline{S}(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy, P_n) \leq \\ &\leq \overline{S}(\overline{\int}_J f(x,y)\,dy, P_n) \leq \overline{S}(f, P_n\bigstar P'_n),\end{aligned}$$

pelo que, passando ao limite as sucessões dos extremos da cadeia de desigualdades, que convergem ambas para:

$$\int_{I\times J} f,$$

concluímos que as restantes sucessões também convergem para este valor. Em particular, as sucessões de somas inferiores e superiores da função definida em I:

$$x \mapsto \underset{-\,J}{\int} f(x,y)\,dy,$$

convergem ambas para o mesmo limite, pelo que esta função é integrável à Riemann em I, tendo-se:

$$\int_I \left(\underset{-\,J}{\int} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{I\times J} f.$$

De modo análogo se demonstram as restantes asserções do Teorema.□

COROLÁRIO: *1) Se $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^p$ e $m(A)=0$, então $m(A\times B)=0$.*

2) Sendo $I \subset \mathbb{R}^m, J \subset \mathbb{R}^p$ intervalos fechados não degenerados, $f \in \mathcal{R}(I)$, $g \in \mathcal{R}(J)$, então é integrável à Riemann em $I \times J$ a função (produto tensorial de f e g):

$$f \otimes g : I \times J \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$f \otimes g\ (x,y) = f\ (x).g\ (y), \forall x \in I,\ y \in J,$$

tendo-se:

$$\int_{I\times J} f \otimes g = \left(\int_I f \right) \left(\int_J g \right).$$

3) Se $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ e $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, então $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{m+p})$ e $V(A\times B) = V(A).V(B)$.

Demonstração: 1) Atendendo a que $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^p$, basta demonstrar que este último conjunto é desprezável. Além disso, como:

$$A \times \mathbb{R}^p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} (A \times [-n,n]^p),$$

basta finalmente demonstrar que cada $A \times [-n,n]^p$ é desprezável. Fixemos então $m \in \mathbb{N}_1$ e seja $\delta > 0$; por definição de conjunto desprezável, sabemos que existe uma família $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de intervalos de $\mathbb{R}^m$ cobrindo A e tal que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < \frac{\delta}{V([-m,m]^p)},$$

donde:

$$A \times [-m,m]^p \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} I_n \times [-m,m]^p,$$

e

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n \times [-m,m]^p) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) \times V([-m,m]^p) < \delta,$$

pelo que, de facto, $m\,(A \times B) = 0$.

2) É evidente, a partir da definição, que a função $f \otimes g$ é contínua nos pontos (x,y) tais que f é contínua em x e g é contínua em y. O conjunto dos pontos de descontinuidade de $f \otimes g$ está portanto contido em:

$$(D_f \times J)\ \cup (\ I \times D_g),$$

onde D_f e D_g são os conjuntos dos pontos de descontinuidade respectivamente de f e de g; trata-se portanto de conjunto desprezável, visto ser união de dois conjuntos desprezáveis, atendendo a que D_f e D_g o são e ao ponto 1) deste Corolário. Concluímos assim que $f \otimes g$ é contínua em quase todos os pontos, e é portanto integrável-R; pelo Teorema de Fubini temos então:

$$\int_{I\times J} f\otimes g = \int_I \left(\int_J f \otimes g(x,y)\,dy \right) dx =$$
$$= \int_I \left(f(x) \int_J g(y)\,dy \right) dx = \left(\int_J g \right) \left(\int_I f \right).$$

3) Basta aplicar o resultado anterior a χ_A e χ_B em intervalos respectivamente I, tal que $A \subset I$, e J tal que $B \subset J$, pois, como é fácil verificar, $\chi_{A\times B} = \chi_A \otimes \chi_B$.□

Exemplos e observações: 5) Seja $f\colon [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x,y) = x.e^{xy};$$

temos:

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} f = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2]} x.e^{xy}\,dy \right) dx =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 x.e^{xy}\,dy \right) dx = \int_0^1 \ [e^{xy}]_{y=0}^{y=2}\,dx =$$
$$= \int_0^1 (e^{2x} - 1)\,dx = [\frac{e^{2x}}{2}]_0^1 - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}.$$

Podíamos também tentar calcular o integral invertendo a ordem de integração:

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} f = \int_{[0,2]} \left(\underline{\int}_{[0,1]} x.e^{xy}\, dx \right) dy =$$
$$= \int_0^2 \left(\int_0^1 x.e^{xy}\, dx \right) dy = \int_0^2 \Big([\frac{xe^{xy}}{y}]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{e^{xy}}{y}\, dx \Big)\, dy =$$
$$= \int_0^2 \Big(\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y^2} [e^{xy}]_{x=0}^{x=1} \Big)\, dy = \int_0^2 \Big(\frac{e^y}{y} - \frac{e^y}{y^2} + \frac{1}{y^2} \Big)\, dy;$$

obtemos um integral que não se pode calcular por processos directos de primitivação. Como se vê por este exemplo, não é indiferente a ordem por que se calcula um integral múltiplo; sabemos que o resultado é evidentemente único, mas a possibilidade de o determinar explicitamente pode depender da ordem de integração escolhida. Em particular, neste exemplo, ficamos a saber que o último integral escrito é igual a $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$.

6) No exemplo anterior pudémos utilizar o Teorema de Fubini com uma dupla integração sem ser necessário calcular um integral superior ou inferior. De maneira geral, se, por exemplo, para cada $x \in I$, a aplicação:

$$y \mapsto g_x(y) = f(x,y) \quad (g_x\colon J \longrightarrow \mathbb{R}),$$

for integrável-R em J, sendo $f \in \mathcal{R}(I \times J)$, vem, pelo Teorema de Fubini:

$$\int_{I\times J} f = \int_I \left(\underline{\int}_J f(x,y)\, dy \right) dx = \int_I \left(\int_J f(x,y)\, dy \right) dx.$$

É o que acontece sempre que f for contínua em $I \times J$, como no exemplo anterior.

Se $g_x \in \mathcal{R}(J)$ para todos os $x \in I$, excepto para certos $x_1, \dots, x_k \in I$ (em número finito), então a aplicação:

$$x \mapsto F^*(x) = \int_J f(x,y)\, dy$$

fica definida em $I \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ e coincide aí com:

$$x \mapsto F(x) = \underline{\int}_J f(x,y)\, dy.$$

Quaisquer que sejam os valores atribuidos a F^* em $\{x_1, \dots, x_k\}$, F^* fica então integrável em I e o seu integral coincide com o de F, visto $\{x_1, \dots, x_k\}$ ser finito e portanto de volume nulo. Designando ainda por F^* o prolongamento por zero de F^* a I temos assim:

$$\int_{I\times J} f = \int_I F(x) = \int_I F^*(x),$$

o que se pode escrever, por abuso de linguagem:

$$\int_{I\times J} f = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy \right) dx.$$

7) O exemplo anterior não se generaliza ao caso em que no lugar de um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$ se tratar de conjunto numerável; seja, com efeito:

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ ou } y \text{ for irracional} \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } y \text{ for racional} \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ fracção irredutível, e } y \text{ for racional} \end{cases}.$$

Já examinámos exemplo semelhante antes de enunciarmos o Teorema de Fubini; vimos então que f é integrável-R mas é fácil concluir que a função

$$y \mapsto g_x(y) = f(x,y)$$

é integrável-R em J sse x for irracional, caso em que o seu integral é igual a 1; se definíssemos a correspondente função F^* (*cf.* o exemplo anterior) por 0 nos racionais (conjunto numerável em que *a priori* não está definida) obteríamos a função característica dos irracionais do intervalo $[0,1]$, função que evidentemente não é integrável em $[0,1]$ (é descontínua em todos os pontos). Este exemplo mostra que seríamos conduzidos a um resultado falso se escrevêssemos a igualdade final da observação anterior substituindo o conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$ pelo conjunto numerável $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

4.3 Volumes e integrais em conjuntos limitados por gráficos

Iniciámos o estudo do integral de Riemann procurando definir o "volume debaixo do gráfico" de uma função positiva. Como através do integral temos agora uma definição precisa de volume põe-se o problema de saber se essa noção é coerente com a ideia intuitiva de que partimos para o conceito de integral de Riemann. A resposta é dada pela seguinte consequência do Teorema de Fubini:

TEOREMA 4.3: *Uma função real limitada f não negativa num intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}^N$ é integrável à Riemann sse for mensurável à Jordan o conjunto $A_f \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tal que:*

$$A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : x \in I,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

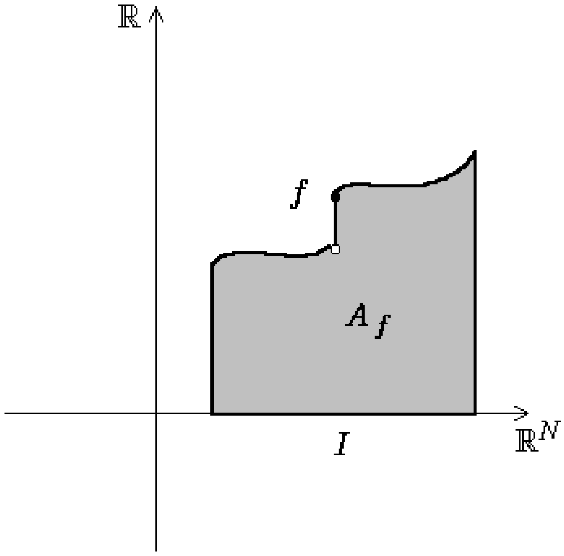
("sólido limitado pelo rectângulo $I \times \{0\}$, pelo gráfico de f e pelas bandas $\mathrm{fr}(I) \times \mathbb{R}$*); nesse caso tem-se:*

$$\int_I f = V(A_f) = \int_0^{+\infty} \overline{V}([f \geq t])\, dt,$$

onde

$$[f \geq t] = \{x \in I \colon f(x) \geq t\} = f^{-1}([t,+\infty[), \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Suponhamos que $f \in \mathcal{R}(I)$; provemos que A_f é mensurável--J, ou seja, que fr(A_f) tem volume nulo. Graficamente:



Sendo $M > 0$ tal que $f(x) \leq M \; \forall x \in I$, é fácil ver que:

(6) $\quad \mathrm{fr}(A_f) \subset \Big((I \times \{0\}) \cup (\mathrm{fr}(I) \times [0, M]) \cup G_f \cup (D_f \times [0, M])\Big),$

onde G_f é o gráfico de f, ou seja:

$$G_f = \{(x, f(x)) \colon x \in I\},$$

e D_f é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Com efeito, se (x_0, y_0) é fronteiro a A_f, é evidente que $x_0 \in I$ e $y_0 \in [0, M]$, já que:

$$A_f \subset I \times [0, M] \Rightarrow \mathrm{fr}(A_f) \subset \overline{A_f} \subset I \times [0, M].$$

Suponhamos então que f é contínua em x_0, $y_0 \neq 0$ e $x_0 \notin \mathrm{fr}(I)$; a inclusão (6) ficará demonstrada se verificarmos que nestas hipóteses se tem necessariamente:

$$(x_0, y_0) \in G_f.$$

Como $(x_0, y_0) \in \mathrm{fr}(A_f)$ existem sucessões $(x_n^i, y_n^i) \xrightarrow[n]{} (x_0, y_0)$ $(i = 1{,}2)$, tais que:

$$(x_n^1, y_n^1) \in A_f, (x_n^2, y_n^2) \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus A_f, \ \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

Uma vez que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, podemos supor que $x_n^i \in I$ (esta condição será satisfeita pelo menos a partir de certa ordem), e de $y_0 > 0$ concluímos que, a partir de certa ordem, $y_n^i > 0$. Por continuidade, vem $f(x_n^i) \underset{n}{\longrightarrow} f(x_0)$; portanto:

$$(x_n^1, y_n^1) \ \in A_f \Rightarrow y_n^1 \leq f(x_n^1) \Rightarrow y_0 \leq f(x_0).$$

Por outro lado:

$$(x_n^2, y_n^2) \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus A_f,$$

com $y_n^2 > 0$ e $x_n^2 \in I$, pelo que $y_n^2 > f(x_n^2)$ e portanto $y_0 \geq f(x_0)$. Então:

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow (x_0, y_0) \in G_f,$$

o que demonstra a inclusão (6). Para demonstrar que fr(A_f) tem volume nulo, basta então verificar que cada um dos conjuntos que intervêm na união do segundo membro de (6) é desprezável (com efeito, fr(A_f) é compacta, pelo que, sendo desprezável, terá volume nulo). O primeiro, segundo e quarto conjuntos em apreço são desprezáveis, atendendo, por exemplo, ao ponto 1. do Corolário do Teorema 4.2, e ao facto de D_f ser desprezável, visto f ser integrável-R. Resta então provar que G_f é desprezável; é fácil ver que se trata mesmo de conjunto com volume nulo, pois atendendo ao critério das oscilações (Teorema 2.6), dado $\delta > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(I)$ tal que

$$\sum_{J \in P} (\sup_J f - \inf_J f) V(J) < \delta.$$

Temos assim:

- $G_f \subset \displaystyle\bigcup_{J \in P} (J \times [\inf_J f, \sup_J f]),$
- $\displaystyle\sum_{J \in P} V(J \times [\inf_J f, \sup_J f]) = \sum_{J \in P} (\sup_J f - \inf_J f) V(J) < \delta,$

o que mostra que, de facto, G_f tem volume nulo, terminando a demonstração de que $A_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{N+1})$.

Reciprocamente, se $A_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{N+1})$, a função característica χ_{A_f} é integrável--R, por exemplo em $I \times [0, M]$, donde, pelo Teorema de Fubini, a função:

$$x \mapsto \int_0^{-M} \chi_{A_f}(x, y)\, dy$$

é integrável-R em I.

Ora, fixado $x \in I$, tem-se:

$$\chi_{A_f}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) < y \leq M \\ 1 & \text{se } 0 \leq y \leq f(x) \end{cases},$$

donde:

$$\overline{\int}_{[0,M]} \chi_{A_f}(x,y)\,dy = \int_0^{f(x)} 1\,dx = f(x),$$

ou seja, $f \in \mathcal{R}(I)$ e:

$$V(A_f) = \int_{I\times[0,M]} \chi_{A_f} = \int_I \left(\overline{\int}_{[0,M]} \chi_{A_f}(x,y)\,dy \right) dx = \int_I f.$$

Trocando a ordem de integração, obtemos:

$$V(A_f) = \int_0^M \left(\overline{\int}_I \chi_{A_f}(x,y)\,dx \right) dy;$$

ora, fixado y em $[0,M]$, vem:

$$\chi_{A_f}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) < y \leq M \\ 1 & \text{se } 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} = \chi_{[f\geq y]}(x),$$

donde,

$$\begin{aligned} V(A_f) &= \int_0^M \left(\overline{\int}_I \chi_{A_f}(x,y)\,dx \right) dy = \\ &= \int_0^M \overline{V}([f \geq y])\,dy = \int_0^{+\infty} \overline{V}([f \geq t])\,dt, \end{aligned}$$

pois para $t > M$ vem $[f \geq t] = \emptyset$.$\square$

Observações: 8) No decorrer da anterior demonstração viu-se, em particular, que *se* $f \in \mathcal{R}(I)$ *então* G_f *tem volume nulo*. A recíproca *é falsa*; basta pensar em $\chi_{A_{/I}}$, sendo $A \subset I$ não mensurável-J. Então $\chi_A \notin \mathcal{R}(I)$ e, no entanto:

$$G_{\chi_{A_{/I}}} \subset \Big(I \times \{0,1\}\Big),$$

donde $V(G_{\chi_{A_{/I}}}) = 0$.

9) Sejam $A \subset I, \varphi, \psi$ funções reais limitadas definidas em A, tais que:

$$\varphi(x) \leq \psi(x), \forall x \in A,$$

e seja:

$$D = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Se $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(A)$ (ou seja, $\widetilde{\varphi}_{/I}, \widetilde{\psi}_{/I} \in \mathcal{R}(I)$) podemos desenvolver raciocínios semelhantes aos utilizados na demonstração do Teorema anterior, começando por verificar que, sendo $M > 0$ tal que $-M \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq M$:

$$\operatorname{fr}(D) \subset \Big((\operatorname{fr}(I) \times [-M, M]) \cup G_{\widetilde{\varphi}_{/I}} \cup G_{\widetilde{\psi}_{/I}} \cup \\ \cup (D_{\widetilde{\varphi}_{/I}} \times [-M, M]) \cup (D_{\widetilde{\psi}_{/I}} \times [-M, M]) \Big)$$

[exercício]; conclui-se então que $\operatorname{fr}(D)$ é desprezável, pelo que D é mensurável à Jordan, tendo-se:

$$V(D) = \int_A (\psi - \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{V}([\psi \geq t \geq \varphi])\, dt,$$

onde $[\psi \geq t \geq \varphi] = \{x \in A : \psi(x) \geq t \geq \varphi(x)\}$. Mais geralmente, se $f \in \in \mathcal{R}(D)$, a aplicação do Teorema de Fubini ao cálculo do integral de f dá sucessivamente:

$$\int_D f = \int_{I \times [-M,M]} \widetilde{f} = \int_I \left(\overline{\int}_{[-M,M]} \widetilde{f}(x, y)\, dy \right) dx = \\ = \int_A \left(\overline{\int}_{[\varphi(x), \psi(x)]} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

já que, para x fora de A, (x, y) não pode estar em D, bem como para $x \in A$ mas com y fora de $[\varphi(x), \psi(x)]$, e porque $\widetilde{f}(x, y)$ é zero para (x, y) fora de D, coincidindo, em D, com f.

10) Como exemplo de aplicação da observação anterior, pensemos no caso da esfera tridimensional:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Podemos pôr:

$$E = \left\{ ((x, y), z) \in C \times \mathbb{R} : -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\},$$

onde:

$$C = \left\{ (x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\},$$

pelo que concluímos sucessivamente que $C \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ e depois que $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$; além disso, se $f \in \mathcal{R}(E)$, teremos, por aplicação sucessiva do Teorema de Fubini:

$$\int_E f = \int_{-1}^{1} \left(\overline{\int}_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\overline{\int}_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

4.4 Conjuntos definidos por desigualdades

É frequente, na prática, encontrar conjuntos que, tal como a esfera, são dados "por desigualdades", mas nem sempre é fácil ou cómodo (ou mesmo possível...) exprimir esses conjuntos na forma do domínio D da Observação 9) acima. No entanto podemos estabelecer um critério que permite facilmente concluir que, em certas condições, tais conjuntos são mensuráveis à Jordan:

PROPOSIÇÃO 4.4: *Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$: $\Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ aplicações de classe C^1, (Ω aberto com fronteira desprezável) tais que:*

$$\text{grad}\ \varphi_k(x) \neq 0, \forall x \in \varphi_k^{-1}(0), k = 1, \ldots, m,$$

e:

$$A = \bigcap_{k=1}^{m} \varphi_k^{-1}(]-\infty, 0\ |\ ) =$$
$$= \{x \in \Omega : \varphi_1(x)\ <(=)\ 0, \ldots, \varphi_m(x)\ <(=)\ 0\},$$

(onde $]-\infty, 0\ |$ é um dos intervalos $]-\infty, 0[$ ou $]-\infty, 0]$ e $<(=)$ representa a desigualdade estrita ou lata, conforme o intervalo considerado). Então, se A for limitado, tem-se:

$$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Uma vez que, sendo o conjunto A limitado, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ sse $m(\text{fr}(A)) = 0$, basta-nos demonstrar esta última asserção. Comecemos por provar que:

$$\text{fr}(A) \subset \bigcup_{k=1}^{m} \varphi_k^{-1}(0) \cup \text{fr}(\Omega) \tag{7}$$

Seja $x \in \text{fr}(A)$ tal que $x \notin \text{fr}(\Omega)$; então existem sucessões $x_n, y_n \xrightarrow[n]{} x$ com $x_n \in A, y_n \notin A, \forall n \in \mathbb{N}_1$. Uma vez que x não está na fronteira de Ω e $\text{fr}(A) \subset \overline{\Omega}$ temos $x \in \Omega$; podemos portanto supor que $y_n \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}_1$, uma vez que y_n estará em Ω para n suficientemente grande. Por definição de A teremos então:

- $\varphi_j(x_n) \leq 0,\ \forall j = 1, \ldots, k, n \in \mathbb{N}_1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}_1\ \exists\, j_n \in \{1, \ldots, k\}$: $\varphi_{j_n}(y_n) \geq 0$;

ora j_n, sendo sucessão limitada, tem subsucessão convergente, e, só tomando valores inteiros, essa subsucessão terá de ser constante a partir de certa ordem. Existe portanto uma subsucessão y_{n_l} de y_n e certo $j \equiv j_{n_l}$ tais que:

$$\varphi_j(y_{n_l}) \geq 0, \forall l \in \mathbb{N}_1.$$

Passando ao limite em l obtemos simultaneamente:

$$\varphi_j(x) \leq 0 \text{ e } \varphi_j(x) \geq 0,$$

donde $x \in \varphi_j^{-1}(0)$, o que acaba de demonstrar a inclusão (7).

Para terminar a demonstração basta agora verificar que cada um dos conjuntos $\varphi_j^{-1}(0)$ tem medida nula. As hipóteses feitas sobre os φ_j garantem que estes conjuntos são 1-variedades de dimensão $N-1$ em $\mathbb{R}^N$, ou seja, localmente são gráficos de funções de classe C^1, o que torna plausível o facto de serem desprezáveis. Fixemos então $j \in \{1, \ldots, k\}$ e seja $M = \varphi_j^{-1}(0)$. Se $x \in M$, temos:

- $\varphi_j(x) = 0$,
- grad $\varphi_j(x) \neq 0$;

sendo m tal que $\partial\varphi_j/\partial x_m(x) \neq 0$, pelo Teorema da função implícita, podemos garantir a existência de um intervalo aberto $I_x \times J_x \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{N-m}$ contendo $((x_1, \ldots, x_{m-1}), (x_{m+1}, \ldots, x_N))$, de um intervalo aberto $K_x \subset \mathbb{R}$ contendo x_m e de uma função C^1 $\psi : I_x \times J_x \to \mathbb{R}$, tais que:

$$(y, z, w) \in I_x \times K_x \times J_x \text{ e } \varphi_j(y, z, w) = 0$$

sse

$$z = \psi(y, w).$$

Ou seja:

$$M \cap I_x \times K_x \times J_x = T(G_\psi),$$

onde $G_\psi = \{(y, w, \psi(y, w)) \colon (y, w) \in I_x \times J_x\}$ é o gráfico de ψ e T é a aplicação de $\mathbb{R}^N$ sobre $\mathbb{R}^N$:

$$(x_1, \ldots, x_N) \mapsto T(x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_N, x_m, \ldots, x_{N-1}),$$

que transforma portanto o pontos $(y, w, \psi(y, w))$ em $(y, \psi(y, w), w)$. Podemos considerar $I_x \times K_x \times J_x$ como vizinhança fechada de x, uma vez que existem sub-intervalos fechados de $I_x \times K_x \times J_x$ contendo ainda x no interior; ora nesse caso G_ψ tem medida nula, atendendo à Observação 8 atrás, já que ψ é contínua em intervalo fechado e portanto aí integrável-R. Por outro lado é evidente que T transforma conjuntos desprezáveis em conjuntos desprezáveis, uma vez que transformando por T os intervalos de uma cobertura de G_ψ obtemos uma cobertura de $T(G_\psi)$ também por intervalos e com os mesmos volumes (apenas se "troca" a ordem por que se faz o produto cartesiano das projecções). Concluímos assim que para cada $x \in M$ existe uma vizinhança V_x de x tal que:

$$m(M \cap V_x) = 0;$$

mas, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $M \cap \overline{B}(0, n)$ é compacto (M é obviamente fechado por ser imagem inversa do fechado $\{0\}$ por uma função contínua). Sendo coberto pela família de vizinhanças $\{V_x \colon x \in M \cap \overline{B}(0, n)\}$ será coberto por um número finito destas vizinhanças, pelo que será igual à união de uma família finita de conjuntos desprezáveis. Ora:

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} M \cap \bar{B}(0,n),$$

pelo que, sendo união numerável de conjuntos desprezáveis, M é desprezável.□

Observações e exemplos: 11) No decorrer da demonstração da proposição anterior verificou-se que estando φ nas condições de um dos φ_j, então $\varphi^{-1}(0)$ *tem medida nula*, pelo que, se for *limitado*, uma vez que é fechado, será compacto, e portanto será *mensurável à Jordan com volume nulo*, atendendo à Proposição 3.9. Note-se que $\varphi^{-1}(0)$ é *"dado por uma equação"*; ficamos assim a saber que tal conjunto é desprezável, desde que a função que intervém na equação seja de classe C^1 *com gradiente não nulo nos pontos do conjunto*.

12) Consideremos, por exemplo, o conjunto:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \le x,\, z>0\};$$

A é limitado, pois

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in A \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 \le x \Rightarrow x(x-1) \le 0 \Rightarrow 0 \le x \le 1,\end{aligned}$$

e portanto $x^2+y^2+z^2 \le x \le 1$, donde $A \subset \bar{B}(0,1)$. Sejam agora:

$$\varphi_j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;\; (j=1,2),$$

tais que,

- $\varphi_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-x,$
- $\varphi_2(x,y,z) = -z.$

tem-se:

$$A = \varphi_1^{-1}(]-\infty,0]) \cap \varphi_2^{-1}(]-\infty,0[),$$

e:

$$\operatorname{grad}\varphi_1(x,y,z) = (2x-1,2y,2z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y=z=0 \end{cases};$$

ora $(\frac{1}{2},0,0) \notin \varphi_1^{-1}(0)$ $(\varphi_1(\frac{1}{2},0,0) = -\frac{1}{4})$, donde:

$$\operatorname{grad}\varphi_1(x,y,z) \ne (0,0,0), \forall (x,y,z) \in \varphi_1^{-1}(0),$$

e:

$$\text{grad}\ \varphi_2(x,y,z) = (0,0,-1) \neq (0,0,0), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Portanto, atendendo à Proposição 4.4, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$.

13) Para encerrar este capítulo calculemos o volume de um "sólido de $\mathbb{R}^3$" de difícil visualização. Trata-se de:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0 \text{ e } xy \leq z, yz \leq x, zx \leq y\};$$

é fácil concluir que S está nas condições da Proposição 4.4. Trata-se, com efeito, de conjunto "dado por desigualdades", os correspondentes "φ" são de classe C^∞ com gradiente diferente de zero em todos os pontos (um dos φ, por exemplo, será a função $xy - z$, com gradiente $(y, x, -1)$), restando demonstrar que S é *limitado*. Ora é fácil concluir que:

$$S \subset [0,1] \times [0,1] \times [0,1];$$

de facto:

$$\begin{aligned} xy \leq z,\ x > 0,\ zx \leq y,\ y > 0 \Rightarrow x^2 y \leq xz \leq y,\ x > 0,\ y > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 \leq 1,\ x > 0 \Rightarrow x \in [0,1], \end{aligned}$$

e, de modo análogo, $y, z \in [0,1]$. Fica portanto estabelecido que $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$, pelo que podemos determinar o respectivo volume; embora pudéssemos simplificar os cálculos aproveitando as "simetrias" de S, comecemos por proceder inicialmente apenas por aplicação sistemática das definições e resultados até agora obtidos. Teremos, por definição e aplicação do Teorema de Fubini:

$$V(S) = \int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \chi_S = \int_{[0,1]\times[0,1]} \left(\overline{\int_{[0,1]}} \chi_S(x,y,z)\, dx \right) dy\, dz.$$

Ora, fixado $(y,z) \in [0,1] \times [0,1]$, se $z = 0$ ou $y = 0$ vem $\chi_S(x,y,z) = 0$ para todo o $x \in [0,1]$, pelo que o integral dentro do parêntesis será nesse caso sempre nulo. Se $y, z \neq 0$ ter-se-á $\chi_S(x,y,z) = 1$ sse (de acordo com a definição de S e de função característica):

$$x \in \,]0,1],\ x \geq yz,\ x \leq \frac{z}{y},\ x \leq \frac{y}{z};$$

devemos pois distinguir dois casos:

$$\bullet\ z \leq y \Rightarrow \frac{y}{z} \geq 1;$$
$$\bullet\ y < z \Rightarrow \frac{z}{y} > 1.$$

No primeiro caso, a desigualdade $x \leq y/z$ nada acrescenta ao facto de $x \leq 1$, donde podemos concluir que para $z \leq y$, se terá $\chi_S(x,y,z) = 1$ sse $x \in \,]0,1]$, $x \geq yz$, $x \leq z/y$. O integral a calcular dentro do parêntesis será portanto o integral da função identicamente igual a 1 no intervalo $[yz, z/y]$, ou seja, será o *comprimento* deste intervalo; este comprimento será exactamente igual a $z/y - yz$, a menos que este valor seja *negativo*, caso em que o intervalo seria *vazio* e portanto de comprimento *nulo*. Ora, de facto $z/y - yz \geq 0$, pois esta desigualdade é equivalente, para o domínio de variação de y e z agora considerado, a $y^2 \leq 1$. Concluímos portanto que para $0 < z \leq y \leq 1$ a expressão dentro de parêntesis na fórmula do volume de S será igual a $z/y - yz$.

Analisando o segundo caso, concluímos, por raciocínio análogo, que para $0 < y < z \leq 1$ a expressão dentro de parêntesis na fórmula do volume de S será igual a $y/z - yz$. Resta-nos pois integrar em $[0,1] \times [0,1]$ a função (que o Teorema de Fubini garante ser integrável-R):

$$f(y,z) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \text{ ou } z = 0 \\ \frac{z}{y} - yz & \text{se } 0 < z \leq y \leq 1 \\ \frac{y}{z} - yz & \text{se } 0 < y < z \leq 1 \end{cases};$$

ora, aplicando mais uma vez Fubini:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f = \int_{[0,1]} \left(\overline{\int_{[0,1]}} f(y,z)\, dy \right) dz.$$

Fixando $z \in [0,1]$, se $z = 0$ vem $f(y,z) = 0$ para todo o $y \in [0,1]$ e se $z \in \,]0,1]$ então a expressão definidora de f é igual a $z/y - yz$ em $[z,1]$ e igual a $y/z - yz$ em $]0,z[$; como o integral em $[0,1]$ se pode decompor na soma dos integrais em $]0,z[$ e $[z,1]$ (o integral "em $\{0\}$", conjunto de volume nulo, é, como sabemos igual a 0) obtemos:

$$\overline{\int_{[0,1]}} f(y,z)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0 \\ \int_0^z (\frac{y}{z} - yz)\, dy + \int_z^1 (\frac{z}{y} - yz)\, dy & \text{se } z \in \,]0,1] \end{cases},$$

donde finalmente:

$$\begin{aligned} V(S) &= \int_{]0,1]} \left(\int_0^z (\frac{y}{z} - yz)\, dy + \int_z^1 (\frac{z}{y} - yz)\, dy \right) dz = \\ &= \int_{]0,1]} \left(\left[\frac{y^2}{2z} - \frac{y^2}{2} z \right]_{y=0}^{y=z} + \left[z \log y - \frac{y^2}{2} z \right]_{y=z}^{y=1} \right) dz = \\ &= \int_{]0,1]} \left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{2} - \frac{z}{2} - z \log z + \frac{z^3}{2} \right) dz = - \int_{]0,1]} z \log z \, dz. \end{aligned}$$

O último integral pode ser calculado com recurso à fórmula de Barrow, uma vez que é contínua a função que se obtém por prolongamento a $[0,1]$ da função integranda atribuindo o valor zero em $z = 0$. Representando os prolongamentos por continuidade pelas mesmas expressões analíticas (mesmo quando não façam sentido em 0) teremos (por continuidade da primitiva):

$$\int_{]0,1]} z \log z \, dz = \left[\frac{z^2}{2} \log z \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{z^2}{2} \frac{1}{z} \, dz = - \left[\frac{z^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{4},$$

pelo que, finalmente:

$$V(S) = \frac{1}{4}.$$

Vejamos agora em que medida, neste caso particular, se podem aproveitar as "simetrias" do conjunto para simplificar o cálculo do volume. Comecemos por calcular o volume da intersecção de S com o conjunto A dos pontos de $[0,1]^3$ tais que:

$$x < y < z;$$

as condições definidoras de S são equivalentes, para os pontos de A, a:

$$0 < z \leq 1, 0 < y < z, yz \leq x < y,$$

como é fácil concluir (a condição $xz \leq y$ decorre imediatamente de $x < y$ e $z \leq 1$ e, de modo análogo, $xy \leq z$ decorre de $y < z$ e $x \leq 1$). Teremos assim, analisando a função característica de $S \cap A$, e por raciocínios idênticos aos que acima desenvolvemos, ou utilizando duas vezes a Observação 9) acima:

$$V(S \cap A) = \int_{]0,1]} \left(\int_{]0,z[} \left(\int_{yz}^{y} 1 \, dx \right) dy \right) dz = \int_{]0,1]} \left(\int_{]0,z[} (y - yz) \, dy \right) dz =$$
$$= \int_{]0,1]} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2} z \right]_{y=0}^{y=z} dz = \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2}\right) dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24};$$

considerando agora os conjuntos que se obtêm de A permutando as coordenadas x, y, z nas desigualdades $x < y < z$ concluiríamos obviamente que os volumes das intersecções de tais conjuntos com S seriam também $1/24$, já que seríamos conduzidos ao cálculo exactamente do mesmo integral. Ora S é união disjunta destas $3! = 6$ intersecções e da intersecção de S com o subconjunto B de $[0,1]^3$ definido pelas condições adicionais:

$$x = y \text{ ou } x = z \text{ ou } y = z.$$

B tem volume nulo, já que coincide com a união dos três conjuntos $\varphi^{-1}(0) \cap$ $\cap [0,1]^3$, onde $\varphi(x,y,z) = y - x, z - x$ ou $z - y$ e, em qualquer caso:

$$\text{grad}\, \varphi(x,y,z) \neq 0$$

em $\mathbb{R}^3$, pelo que:

$$V(S) = 6 \times \frac{1}{24} + V(S \cap B) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

Exercícios

29) Calcule o volume do sólido tridimensional definido pelas desigualdades:

$$0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq x^2 + y,$$

justificando que se trata, de facto, de conjunto mensurável-J.

30) Demonstre as asserções contidas na Observação 9).

31) Supõe-se que os integrais repetidos que se seguem foram obtidos por aplicação do Teorema de Fubini a certa função f integrável-R em determinado domínio (os integrais dentro de parêntesis devem ser entendidos como integrais superiores ou inferiores); obtenha em cada caso a expressão que resultaria de aplicar o Teorema de Fubini ao integral de f nesse domínio, mas invertendo a ordem de integração (em cada caso, pretende-se que, na expressão final, a função integranda seja f e não qualquer extensão "por zero" ou produto envolvendo funções características…):

a) $\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx$; **b)** $\int_0^2 dx \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\, dy \right)$;

c) $\int_0^1 dy \left(\int_y^{2-y} f(x,y)\, dx \right)$

32) Supondo que $f \in \mathcal{R}(D)$, escreva $\int_D f$ como integral repetido, tendo em conta as duas possíveis ordens de integração, nos casos em que:

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < a^2\}$ $(a \neq 0)$.

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 0 < y < 2, 1 < xy\}$.

c) D é o quadrilátero de vértices $(0,0), (1,1), (2,3), (0,2)$.

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y + 4x - 12 \leq 0\}$.

e) D é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas de equações $xy = 1, xy = 2, x = y, y = 4x$.

33) Calcule os seguintes integrais (considere as funções prolongadas por continuidade aos pontos dos domínios de integração em que não estiverem definidas):

a) $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y)\, dy\, dx$; **b)** $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$.

c) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx\, dy$

34) Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 2y & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$$

mostre que existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ mas não $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$.

35) Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ for irracional} \\ 0 & \text{se } x \text{ for racional e } y \text{ irracional ou } y = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{se } x \text{ for racional, e } y = \frac{p}{q}, \text{ fracção irredutível} \end{cases};$$

mostre que f é integrável-R e $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

36) a) Mostre que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log \frac{b}{a} \quad (a, b > 0).$$

(Sugestão: para calcular $\int_0^R$, com $R > 0$, escrever, para cada x, a função integranda como $\int_a^b$ de certa função de uma variável auxiliar y. Calcular o integral duplo obtido, utilizando o Teorema de Fubini, e finalmente passar ao limite quando $R \to +\infty$).

b) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que existe o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$; generalizando a), calcule:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \quad (a, b > 0).$$

37) Calcule o volume do N-*Simplex* $S = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, N,$ $x_1 + \cdots + x_N \leq C\}$ $(C > 0)$, justificando que se trata, de facto, de conjunto mensurável-J *(Sugestão: Teorema de Fubini e indução em N).*

38) Calcule o volume do subconjunto de $\mathbb{R}^3$ caracterizado pelas desigualdades:

$$|x| + |y| + |z| \leq 2, \quad z^2 \leq y.$$

39) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua;

a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}_1$:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^y \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt\, dx = \frac{1}{n!} \int_0^y (y-t)^n f(t)\, dt.$$

b) Mostre que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F(y) = \frac{1}{n!} \int_0^y (y-t)^n f(t)\, dt,$$

é a única função de classe C^n satisfazendo às condições:

$$\frac{d^n F}{dy^n}(y) = f(y),\ \forall y \in \mathbb{R} \text{ e } F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(n-1)}(0) = 0$$

40) Determine os volumes dos seguintes sólidos de $\mathbb{R}^3$, justificando tratar-se de mensuráveis-J:

a) Intersecção dos cilindros $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $x^2 + z^2 \leq a^2$ $(a \neq 0)$.

b) Contido no primeiro octante de $\mathbb{R}^3$ e limitado pelo plano $y + z = 4$ e pela superfície $y = x^2$.

c) Limitado pela superfície parabolóide elíptica $x^2 + 4y^2 = z$, pelo plano $z = 0$ e pelas superfícies cilíndricas $y^2 = x$ e $x^2 = y$.

d) Limitado pela superfície parabolóide elíptica $4y^2 + 9z^2 = 4x$ e o plano $x = 9$.

e) Definido pelas desigualdades $z \geq x^2 + y^2 - 1$ e $x^2 + (y-1)^2 + z \leq 0$

f) Definido pelas desigualdades $x^2 \leq y$, $y^2 \leq z$, $z^2 \leq x$.

g) Definido pelas desigualdades $xy \leq 2z$, $xz \leq y$, $yz \leq x/2$.

41) Seja $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ com volume não nulo. Designamos por *centróide* ou *centro de massa* de S o ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ definido pelas condições:

$$\int_S (x - \overline{x})\, dx\, dy = \int_S (y - \overline{y})\, dx\, dy = 0.$$

Determine o *centróide* dos seguintes conjuntos:

a) Triângulo de vértices $(0,0), (a,0), (a,b)$.

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^n \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Qual a posição limite do centróide quando $n \to +\infty$?

42) Seja $f(x,y,z)$ a distância de (x,y,z) à face mais próxima de determinado cubo C de aresta a; calcule $\int_C f$. *(Sugestão: Localize o cubo num sitema de coordenadas cartesianas de modo que fique definido pelas condições* $|x| \leq a/2$, $|y| \leq a/2$, $|z| \leq a/2$. *As rectas que ligam o centro aos vértices determinam a decomposição do cubo em seis pirâmides, em cada uma das quais* f *pode ser expressa de modo simples...).*

43) Sendo D definido em $\mathbb{R}^3$ pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, calcule $\int_D z\, dx\, dy\, dz$.

Capítulo 5

Integrais Paramétricos

5.1 Continuidade do integral paramétrico

Nas aplicações do Teorema de Fubini intervêm funções do tipo:

$$x \mapsto \int_J f(x,y)\,dy \ (x \in I);$$

põe-se o problema de estudar a continuidade, integrabilidade e derivabilidade de funções deste tipo, que se designam por integrais paramétricos.

O Teorema de Fubini garante que se $f : I \times J \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ for integrável-R, então, caso exista para cada $x \in I$ o integral "paramétrico":

$$\int_J f(x,y)\,dy,$$

esta função de x é integrável-R em I e:

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{I \times J} f.$$

Podemos fazer esta afirmação, por exemplo, quando f for contínua. Temos agora:

TEOREMA 5.1 (continuidade do integral paramétrico): *Seja*

$$f : I \times J \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

aplicação contínua (I, J intervalos fechados não degenerados); então os integrais paramétricos:

$$x \mapsto \int_J f(x,y)\,dy \ \ (x \in I)$$

e

$$y \mapsto \int_I f(x,y)\,dx \ \ (y \in J)$$

são funções contínuas.

Demonstração: Como f é uniformemente contínua de $I \times J$ (compacto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$) em $\mathbb{R}$, $\forall \delta > 0 \; \exists \, \varepsilon > 0$:

$$\|x_1 - x_2\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{\delta}{V(J)}, \forall y \in J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_J f(x_1, y)\, dy - \int_J f(x_2, y)\, dy \right| = \left| \int_J (f(x_1, y) - f(x_2, y))\, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_J |f(x_1, y) - f(x_2, y)|\, dy \leq \int_J \frac{\delta}{V(J)} = \delta. \square$$

5.2 Regra de Leibniz e aplicações

TEOREMA 5.2 (Regra de Leibniz): *Seja $f : I \times J \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ contínua (I, J intervalos fechados não degenerados) tal que existe e é contínua em $I \times J$ a derivada parcial $\partial f / \partial x_i$ (para certo $i \in \{1, \ldots, m\}$). Então o integral paramétrico:*

$$x \mapsto \int_J f(x, y)\, dy \quad (x \in I)$$

é uma função que admite derivada parcial contínua em ordem a x_i, tendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_J f(x, y)\, dy \right) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y)\, dy.$$

Demonstração: Seja:

$$F(x) = \int_J f(x, y)\, dy$$

onde $I \times J = \prod_{j=1}^{m+p} [a_j, b_j]$; então pelo Teorema de Fubini e pela Fórmula de Barrow:

$$F(x) = \int_J \left(\int_{a_i}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_m, y)\, ds + \right.$$

$$\left. + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_m, y) \right) dy =$$

$$= \int_{a_i}^{x_i} \left(\int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_m, y)\, dy \right) ds +$$

$$+ \int_J f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_m, y)\, dy.$$

Agora, pelo Teorema fundamental do cálculo integral em $\mathbb{R}$, o terceiro membro das igualdades é derivável em ordem a x_i (soma de integral indefinido em x_i com função independente de x_i), tendo-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,dy.\square$$

COROLÁRIO 1: *Nas condições do Teorema anterior, supondo* $m = p = 1$*, sendo:*

$$\varphi_1, \varphi_2 : I \to J$$

funções diferenciáveis e g: $I \to \mathbb{R}$ *tal que:*

$$g(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

então g *é diferenciável em* I*, e:*

$$g'(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + f(x,\varphi_2(x))\;\varphi_2'(x) - f(x,\varphi_1(x))\varphi_1'(x).$$

Demonstração: Seja $G : J \times J \times I \to \mathbb{R}$ tal que:

$$G(u,v,x) = \int_u^v f(x,y)\,dy;$$

G é de classe C^1 e $g(x) = G(\varphi_1(x), \varphi_2(x), x)$, donde, pelo Teorema da função composta:

$$\begin{aligned} g'(x) = {} & \frac{\partial G}{\partial u}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), x)\varphi_1'\,(x) + \frac{\partial G}{\partial v}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), x)\varphi_2'\,(x) + \\ & + \frac{\partial G}{\partial x}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), x) = \\ & = -f(x,\varphi_1(x))\varphi_1'\,(x) + f(x,\varphi_2(x))\varphi_2'\,(x) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.\square \end{aligned}$$

COROLÁRIO 2 (Teorema de Schwarz): *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Ω *aberto*), $(a,b) \in \Omega$ *tais que existe* $\partial f/\partial y\,(a,b)$ *e* $\partial f/\partial x$, $\partial^2 f/\partial y\partial x$ *existem e são contínuas numa vizinhança de* (a,b)*; então existe* $\partial^2 f/\partial x\partial y\,(a,b)$ *e:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b).$$

Demonstração: Por hipótese, $\partial f/\partial x, \partial^2 f/\partial y\partial x$ são contínuas em certo intervalo aberto $I \times J$ contendo (a,b); para (x,y) nesse intervalo teremos então, pela fórmula de Barrow e pela Regra de Leibniz:

$f(x,y) = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\,ds + f(a,y) \Rightarrow f$ é derivável em ordem a y em $I \times \{b\}$,

(utilizando também a hipótese de f ser derivável em ordem a y em (a,b)), e:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,b) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\,ds + f(a,y)\right)_{y=b} = \\ &= \int_a^x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s,b)\,ds + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \forall x \in I.\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral, $\partial f/\partial y\,(x,b)$ é derivável em a e:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,b)\right)_{x=a} = \\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_a^x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(s,b)\,ds + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)_{x=a} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).\square\end{aligned}$$

Exercícios

44) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^p $(p \geq 1)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(0)}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } t = 0 \end{cases};$$

mostre que g é de classe C^p. *(Sugestão: escreva g como integral paramétrico de determinada função.)*

45) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u(x,y) = -\frac{1}{8}\int_{x-y}^{x+y} \left[(x-t)^2 - y^2\right] f(t)\,dt;$$

a) Verifique que $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = 0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,0) = f(x)$.

b) Mostre que u é solução da equação de derivadas parciais:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Capítulo 6

Integral de Riemann e convergência

6.1 $\mathcal{R}(I)$ como espaço de Banach

O espaço vectorial $\mathcal{R}(I)$ das funções integráveis à Riemann num intervalo I de $\mathbb{R}^N$ adquire uma estrutura de espaço normado como subespaço de $\mathcal{B}(I)$, espaço das funções *limitadas* $f : I \to \mathbb{R}$ com a norma *"do supremo"*:

$$\|f\|_s = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Como sabemos, $\mathcal{B}(I)$ é *espaço de Banach* para $\|\,.\,\|_s$; é fácil concluir que $\mathcal{R}(I)$ é *fechado* em $\mathcal{B}(I)$, pois se $f_n \in \mathcal{R}(I), \forall n \in \mathbb{N}$ e $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ em $\mathcal{B}(I)$, designando por D_n o conjunto dos pontos de descontinuidade de f_n, e pondo

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} D_n,$$

vem:

$$m(D_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

donde:

$$m(D) = 0,$$

atendendo ao critério de Riemann-Lebesgue (Teorema 3.11) e à Proposição 3.10. Ora se $x_0 \in I \setminus D$ é fácil concluir que f é *contínua em* x_0, já que, dado $\delta > 0$ e considerando n suficientemente grande para que $\|f_n - f\|_s < \delta/3$, podemos fixar, por continuidade de f_n em x_0, ε suficientemente pequeno para que :

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\delta}{3} \text{ se } |x - x_0| < \varepsilon,$$

donde:

$$\begin{aligned}|x-x_0|<\varepsilon, x\in I \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| &\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+\\ &+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\|f-f_n\|_s+\frac{\delta}{3}+\|f_n-f\|_s<\\ &<\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\delta.\end{aligned}$$

Logo f é contínua em $I\setminus D$, ou seja, é contínua *p.p.* e, sendo limitada, é portanto integrável-R, o que prova que $\mathcal{R}(I)$ é fechado, logo *espaço de Banach* para $\|\,.\,\|_s$.

A aplicação:

$$\mathcal{I}:\mathcal{R}(I)\to\mathbb{R}$$

$$f\mapsto\mathcal{I}(f)=\int_I f$$

é, como sabemos, *linear* e satisfaz a:

$$|\mathcal{I}(f)|=\left|\int_I f\right|\le\int_I|f|\le\int_I\|f\|_s=V(I)\|f\|_s,$$

donde se conclui facilmente que é *uniformemente contínua*, pois dado $\delta>0$, tomando $\varepsilon=\delta/V(I)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\|f-g\|_s<\varepsilon\Rightarrow|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}(g)|=|\mathcal{I}(f-g)|\le V(I)\|f-g\|_s<\varepsilon V(I)=\\ =\frac{\delta}{V(I)}V(I)=\delta,\ \forall f,g\in\mathcal{R}(I).\end{aligned}$$

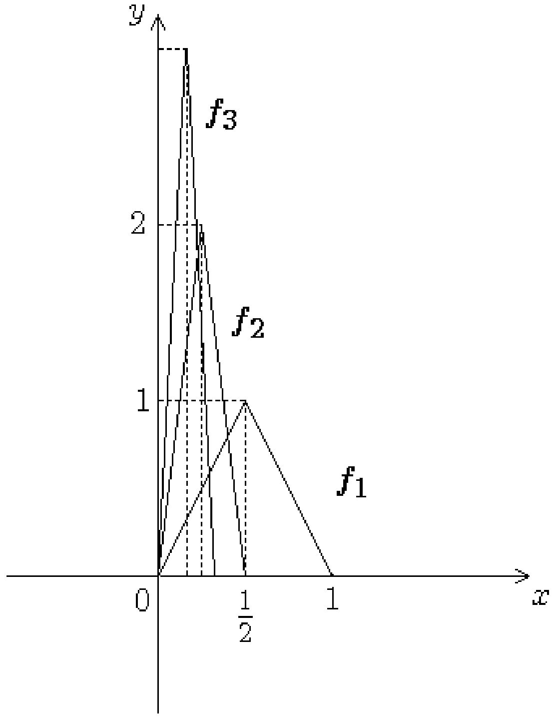
Em particular, o *integral de Riemann permuta com a passagem ao limite uniforme*, já que $f_n\xrightarrow[n]{} f$ em $\mathcal{B}(I)$ significa que f_n tende uniformemente para f. Sucede porém que, em inúmeras situações, interessa analisar o comportamento do integral relativamente a convergências mais fracas que a uniforme.

6.2 Integral de Riemann e convergência pontual

Pensemos, por exemplo, em sucessões de funções de $\mathcal{R}(I)$ convergindo apenas *pontualmente*. Comecemos por examinar o exemplo seguinte:

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},$$

tal que $f_n\equiv 0$ em $[\frac{1}{n},1]$ e em $[0,\frac{1}{n}]$ tem por gráfico um triângulo isósceles com base igual ao segmento $[0,\frac{1}{n}]$ do eixo dos xx e altura igual a n. Ou seja:



É fácil concluir que:

$$f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} 0, \forall x \in [0,1]$$

(de facto, para cada $x \in [0,1]$ fixado, ou $x = 0$, e nesse caso $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$, ou $x > 0$ e existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $x > 1/p \geq 1/n, \forall n \geq p$, donde $f_n(x) = 0, \forall n \geq p$); no entanto os integrais, que são as áreas dos triângulos, têm valor:

$$\int_{[0,1]} f_n = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

e portanto não tendem para $\int_{[0,1]} 0 = 0$. Poderíamos facilmente construir analogamente uma sucessão convergindo para zero em cada ponto e tal que os integrais convergissem para $+\infty$ ou não convergissem para qualquer limite finito ou infinito. Portanto *em geral* o integral de Riemann *não permuta* com o *limite pontual*.

Pensemos agora em:

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

tal que:

$$g_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}_1;$$

temos, obviamente:

$$g_n(x) \xrightarrow[n]{} 0, \text{ se } x \in [0,1[,$$

$$g_n(1) \xrightarrow[n]{} 1,$$

ou seja, g_n converge pontualmente para $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Além disso, neste caso,

$$\int_{[0,1]} g_n = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$$

e:

$$\int_{[0,1]} g = 0.$$

Neste caso há permutabilidade do integral com a passagem ao limite pontual, mas, ao contrário do que sucedia com f_n, g_n é uma sucessão *uniformemente limitada*. Será esta condição *suficiente* para garantir a referida permutabilidade? Para responder a esta pergunta examinemos um terceiro exemplo; seja $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ enumeração dos racionais de $[0,1]$ e:

$$h_n = \chi_{\{r_1,\ldots,r_n\}} \; (h_n : [0,1] \to \mathbb{R}).$$

Tem-se, evidentemente:

$$\int_{[0,1]} h_n = V(\{r_1, \ldots, r_n\}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

$$h_n(x) \xrightarrow[n]{} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x), \forall x \in [0,1].$$

Ora $h = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *não está em* $\mathcal{R}([0,1])$, como se viu no Capítulo 2 (Observação 3)) . Portanto, embora h_n seja uma sucessão globalmente limitada de funções integráveis-R com limite pontual, a função limite *já não é integrável--R!*

Se o exemplo dos f_n elimina qualquer esperança de se poder estender a noção de integral a uma classe mais vasta de funções de modo a tornar possível a permutabilidade do integral com o limite pontual sem mais condições, já os exemplos seguintes sugerem que tal permutabilidade poderá ser possível com alguma condição suplementar sobre a sucessão (no exemplo dos g_n há “limitação uniforme”), revelando simultaneamente que “faltam elementos” a $\mathcal{R}(I)$ para se poder passar ao limite pontual “debaixo do sinal de integral” mesmo com a referida hipótese de limitação uniforme.

Convém portanto estender a noção de integral a uma classe mais vasta que $\mathcal{R}(I)$ e que inclua, por exemplo, funções como h, que são *limites pontuais de sucessões monótonas em* $\mathcal{R}(I)$ *com integrais convergindo*. Na extensão a fazer, pretende-se evidentemente que:

$$\text{“}\int_I h = \lim_n \int_I h_n = 0\text{”}.$$

Antes de procedermos à extensão do conceito de integral, recordemos que na Secção 3.2 estendemos a noção de função *integrável à Riemann* a conjuntos arbitrários. Em particular, seja:

$$I = \prod_{j=1}^{N} I_j \subset \mathbb{R}^N,$$

onde cada I_j é *intervalo de* $\mathbb{R}$*, não reduzido a um ponto nem vazio, aberto, semi-aberto ou fechado, limitado ou não limitado* (por exemplo, pode ter-se $I =]-\infty, 1] \times [3,5] \times]-\infty, +\infty[$); I dir-se-á, naturalmente, intervalo *não degenerado de* $\mathbb{R}^N$. Sabemos então o que é $\mathcal{R}(I)$; ter-se-á $f \in \mathcal{R}(I)$ sse existir um intervalo *compacto* $K \subset \overline{I}$ tal que f é nula fora de K e integrável à Riemann em K; de agora em diante fixamos um intervalo I nas condições atrás descritas e procuramos estender a noção de integral em I. Em particular pretendemos levantar duas fortes restrições das funções $f \in \mathcal{R}(I)$:

- *O facto de f ser nula fora de um compacto;*
- *O facto de f ser limitada.*

Vem a propósito recordar que já é conhecida uma noção de integral para funções sem estas restrições, no caso de funções reais de variável real: a noção de integral impróprio. Tem-se assim, por exemplo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2,$$

embora $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *não seja limitada* em $]0,1]$. Por outro lado:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{L\to+\infty} [\arctan x]_0^L = \frac{\pi}{2},$$

embora $1/(1+x^2)$ *não seja nula fora de um compacto de* $[0,+\infty[$ (é sempre > 0). Convém ter em mente estas definições para serem confrontadas, a seu tempo, com a noção de integral que pretendemos introduzir.

Exercícios

46) Seja I intervalo compacto de $\mathbb{R}^N$;

a) Mostre que é *semi-norma* em $\mathcal{R}(I)$ a aplicação $f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|$ e verifique que a topologia por ela definida em $\mathcal{R}(I)$ é *comparável* com a topologia associada à norma do supremo $\| \,.\, \|_s$; qual das duas é *mais fina*?

b) Mostre que a aplicação $f \mapsto \mathcal{I}(f) = \int_I f$ é contínua relativamente à semi--norma $\| \,.\, \|_1$ e deduza, utilizando a alínea a), a continuidade relativamente a $\| \cdot \|_s$.

47) Obtenha expressões analíticas para as funções f_n da Secção 6.2 e demonstre as asserções dessa secção que a elas se referem.

48) Dê exemplo de duas sucessões de funções integráveis-R, convergindo para zero em todos os pontos, mas cujos integrais, respectivamente, tendam para $+\infty$ e não tenham qualquer limite, finito ou infinito.

49) Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sucessão de funções definidas por $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Mostre que todas as funções são contínuas e convergem pontualmente para a função constante igual a zero, não sendo a convergência uniforme; verifique que, apesar de tudo, neste caso, $\lim\limits_n \int_I f_n = \int_I (\lim\limits_n f_n)$.

50) Seja I intervalo *arbitrário* de $\mathbb{R}^N$. Prove que $f \in \mathcal{R}(I)$ sse existir K intervalo compacto contido em $\overline{I}$ tal que f é nula em $I \backslash K$ e integrável à Riemann em K (ou seja, por abuso de linguagem, tal que $f \in \mathcal{R}(K)$).

Capítulo 7

Integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$

7.1 Lema fundamental

Para alargar a classe de funções integráveis "em I" (I nas condições fixadas no final do Capítulo anterior) podemos pensar em tomar sucessões do tipo h_n atrás considerado, ou seja, *em* $\mathcal{R}(I)$ (classe das funções *integráveis-R em I*), *crescente* (no sentido lato) e tais que a correspondente sucessão de integrais *converge*. Para que seja possível definir coerentemente o "integral do limite" como o "limite dos integrais" é necessário provar que tal limite *não depende da sucessão* h_n *considerada*, mas apenas, quando muito, da função limite. Nesse sentido começaremos por demonstrar o seguinte resultado acerca do integral de Riemann (em I atrás fixado):

LEMA FUNDAMENTAL: *Seja* f_n *sucessão de funções integráveis à Riemann em I tal que:*

- f_n *é decrescente (em sentido lato:* $f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \forall x \in I, n \in \mathbb{N}_1$*);*
- $f_n \downarrow 0$ *p.p. em* I, $f_n(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Então:

$$\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: A sucessão f_n é globalmente limitada, pois f_1 é limitada por ser integrável-R e $\forall x \in I, n \in \mathbb{N}_1$:

$$f_n(x) \leq f_1(x).$$

Existe portanto $M > 0$ tal que:

$$\forall x \in I, 0 \leq \cdots \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \cdots \leq f_1(x) \leq M.$$

Para mostrar que $\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, mostremos que se pode "separar" o integral na soma de duas parcelas que se podem tornar arbitrariamente pequenas para n suficientemente grande, por razões distintas: a primeira por $f_n(x)$ se tornar "pequeno" no domínio de integração considerado, a segunda por se tratar de integral em domínio "pequeno".

Comecemos por notar que podemos supor I compacto, já que, fora de certo intervalo desse tipo, f_1, e portanto todos os f_n, são nulas, pelo que podemos, se necessário, substituir os f_n pelas restrições dos $\tilde{f}_n$ a um mesmo intervalo compacto. Admitindo já essa hipótese, notemos agora que tem *medida nula* a *união* D do conjunto dos pontos em que os f_n *não tendem para zero* com o conjunto $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} D_n$ (em que D_n é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f_n), uma vez que se trata de união *numerável* de conjuntos desprezáveis, atendendo às hipóteses e ao *Critério de Riemann-Lebesgue* (Teorema 3.11). Fixado $\delta' > 0$, podemos então cobrir D com uma união numerável de intervalos *abertos* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ tais que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < \delta'.$$

Por outro lado, se $x \in I \setminus D$, tem-se $f_n(x) \downarrow 0$ e f_n é contínua em $x, \forall n \in \mathbb{N}_1$. Logo, existe $p_x \in \mathbb{N}_1$, tal que:

$$f_{p_x}(x) < \delta'.$$

Por continuidade de f_{p_x} em x, existe J_x intervalo aberto contendo x tal que:

$$y \in J_x \cap I \Rightarrow f_{p_x}(y) < \delta'.$$

A monotonia da sucessão f_n implica agora que:

$$n \geq p_x \Rightarrow f_n(y) \leq f_{p_x}(y) < \delta', \forall y \in J_x \cap I.$$

O intervalo *compacto* I fica assim coberto pela união dos I_n e dos J_x. É portanto coberto por uma união *finita* de alguns destes intervalos, $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}, J_{x_1}, \ldots, J_{x_l}$. Seja então:

$$p = \max\{p_{x_1}, \ldots, p_{x_l}\} \in \mathbb{N}_1;$$

vem:

$$\begin{aligned}
n \geq p \Rightarrow \left|\int_I f_n\right| &\leq \int_I |f_n| = \int_{\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k} I_{i_j}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{j=1}^{l} J_{x_j}\cap I\right)} |f_n| \leq \\
&\leq \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{k} I_{i_j}} |f_n| + \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{l} J_{x_j}\cap I} |f_n| \leq \\
&\leq MV\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_{i_j}\right) + \delta' V\left(\bigcup_{j=1}^{l} J_{x_j} \cap I\right) \leq \\
&\leq M\sum_{j=1}^{k} V(I_{i_j}) + \delta' V(I) \leq M\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) + \delta' V(I) = \\
&= M\delta' + \delta' V(I) = (M + V(I))\delta',
\end{aligned}$$

ou seja, dado $\delta > 0$, tomando δ' positivo mas menor que $\delta/(M + V(I))$, existirá $p \in \mathbb{N}_1$ tal que:

$$n \geq p \Rightarrow \left| \int_I f_n \right| \leq (M + V(I))\delta' < (M + V(I)) \frac{\delta}{M + V(I)} = \delta,$$

o que prova que

$$\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} 0. \square$$

Observação: 1) Na demonstração anterior utilizámos os seguintes factos atrás provados (Proposição 3.3–2., 3.):

• *Se* $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N),\ f \in \mathcal{R}(A \cup B), f \geq 0$, então:

$$\int_{A \cup B} f \leq \int_A f + \int_B f;$$

• *Se* $A \subset B, A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N), f \in \mathcal{R}(B), f \geq 0$, então:

$$\int_A f \leq \int_B f.$$

COROLÁRIO 1: *Se* f_n, g_n *forem sucessões crescentes (em sentido lato) de funções integráveis-R em I tais que:*

- $f_n \uparrow f$, *p.p. em* I,
- $g_n \uparrow g$, *p.p. em* I,
- $f \leq g$, *p.p. em* I,
- $\displaystyle\int_I f_n, \int_I g_n$ *são sucessões convergentes,*

então:

$$\lim_n \int_I f_n \leq \lim_n \int_I g_n.$$

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}_1$ fixado, seja:

$$h_n = (f_m - g_n)^+ = \max\{f_m - g_n, 0\} = \frac{1}{2}\{f_m - g_n + |f_m - g_n|\}, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

h_n é, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, integrável-R em I, visto ser obviamente *limitada*, e contínua nos pontos em que f_m e g_n o são *simultaneamente*, visto a aplicação

$$t \mapsto t^+ = \max\{t, 0\} = \frac{1}{2}\{t + |t|\}$$

ser obviamente *contínua* em $\mathbb{R}$; ou seja, h_n é, de facto, *contínua* *p.p.* (poderíamos também ter invocado o Teorema 2.5 e a Proposição 2.7). Por outro lado a sucessão h_n é *decrescente*, visto g_n ser *crescente* e a função $t \mapsto t^+$ ser também crescente. Finalmente:

$$h_n(x) = (f_m(x) - g_n(x))^+ \xrightarrow[n]{} (f_m(x) - g(x))^+$$

para todos os x tais que $g_n(x) \xrightarrow[n]{} g(x)$, por continuidade de $t \mapsto t^+$. Como, além disso, $f_m(x) \leq f(x) \leq g(x)\, p.p.$ em I, tem-se:

$$h_n(x) \downarrow 0\, p.p. \text{ em } I,$$

donde, pelo Lema anterior:

$$\int_I h_n \xrightarrow[n]{} 0.$$

Então:

$$\int_I f_m - \int_I g_n = \int_I (f_m - g_n) \leq \int_I (f_m - g_n)^+ = \int_I h_n \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_n \left(\int_I f_m - \int_I g_n \right) \leq 0 \Rightarrow \int_I f_m \leq \lim_n \int_I g_n, \forall n \in \mathbb{N}_1;$$

passando a última desigualdade ao limite em m, obtém-se:

$$\lim_m \int_I f_m \leq \lim_n \int_I g_n. \square$$

COROLÁRIO 2: *Se f_n, g_n forem sucessões crescentes (em sentido lato) de funções integráveis-R em I, convergindo para uma função f p.p. em I e tais que $\int_I f_n, \int_I g_n$ são sucessões limitadas, então existem e são iguais os limites:*

$$\lim_n \int_I f_n \text{ } e \lim_n \int_I g_n.$$

Demonstração: Basta aplicar duas vezes o lema anterior, trocando o papel dos f_n e dos g_n e notar que sendo as sucessões *crescentes*, o mesmo se passa com as sucessões dos *integrais* e que portanto a convergência destas sucessões é *equivalente* a serem *limitadas* (ou majoradas).$\square$

7.2 Integral de Lebesgue de funções superiores

Estes resultados permitem-nos estender, de modo coerente, a noção de integral a uma classe de funções nas condições de f do corolário anterior.

DEFINIÇÕES: Seja:

$$\mathcal{S}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \big| \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \in \mathcal{R}(I)^{\mathbb{N}_1} \text{ t.q. } : f_n \text{ é crescente (em sentido lato),}$$
$$f_n \uparrow f \; p.p. \text{ e a sucessão } \int_I f_n \text{ é limitada}\}.$$

Os elementos de $\mathcal{S}(I)$ designam-se por *funções superiores* e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ diz-se *sucessão aproximante de* f. *Se* $f \in \mathcal{S}(I)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é sucessão aproximante de f, designa-se por *integral de Lebesgue de* f ou simplesmente *integral de* f o número real:

$$\bullet \int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

Que a definição é coerente resulta imediatamente do Corolário anterior. Além disso é óbvio que $\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{S}(I)$ e que o integral de Riemann coincide, em $\mathcal{R}(I)$, com o integral de Lebesgue (se $f \in \mathcal{R}(I)$ basta tomar para sucessão aproximante $f_n = f, \forall n \in \mathbb{N}_1$). Tem-se, além disso:

PROPOSIÇÃO 7.1: *1. Se* $f, g \in \mathcal{S}(I), \lambda \geq 0$, *então* $f + g, \lambda f \in \mathcal{S}(I)$ *(ou seja,* $\mathcal{S}(I)$ *é cone) e:*

$$\bullet \int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g;$$
$$\bullet \int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f.$$

2. Se $f, g \in \mathcal{S}(I), f(x) \leq g(x)$ *p.p. em* I*, então:*

$$\bullet \int_I f \leq \int_I g.$$

3. Se $f \in \mathcal{S}(I)$ *e* $g = f$ *p.p. em* I*, então* $g \in \mathcal{S}(I)$ *e:*

$$\bullet \int_I f = \int_I g.$$

Demonstração: 1. Sendo f_n, g_n sucessões aproximantes de f, g é óbvio que $f_n + g_n, \lambda f_n$ são sucessões aproximantes de $f + g$ e λf respectivamente, o que demonstra que $f + g, \lambda f \in \mathcal{S}(I)$. Além disso:

$$\int_I (f+g) = \lim_n \int_I (f_n + g_n) = \lim_n \left(\int_I f_n + \int_I g_n \right) =$$
$$= \lim_n \int_I f_n + \lim_n \int_I g_n = \int_I f + \int_I g,$$

e de modo análogo se demonstra a segunda igualdade. Note-se que foi essencial supor que $\lambda \geq 0$, ou λf_n já não seria necessariamente crescente!

2. É consequência imediata do Corolário 1 do Lema fundamental e da definição de integral de Lebesgue de f e g.

Para demonstrar 3. basta notar que qualquer sucessão aproximante de f o é também de g, visto que $f = g\, p.p.$.$\square$

7.3 Integral de Lebesgue no espaço $\mathcal{L}(I)$

Pode pôr-se a questão de saber se $\mathcal{S}(I)$ é *espaço vectorial*; atendendo ao ponto 1. da proposição anterior restaria provar que

$$f \in \mathcal{S}(I) \Rightarrow -f \in \mathcal{S}(I);$$

ora tal afirmação é manifestamente falsa — basta pensar em $\mathcal{S}(]0,1])$ e na função:

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in]0,1].$$

Pondo:

$$f_n = f.\chi_{[\frac{1}{n},1]},$$

f_n é obviamente sucessão *aproximante* de f em $]0,1]$, já que é *crescente, converge para f em todos os pontos de* $]0,1]$ (e portanto, *a fortiori*, $p.p.$), $f_n \in \in \mathcal{R}(]0,1])$, visto que é nula fora de $[\frac{1}{n},1]$ e $f_{n/[\frac{1}{n},1]}$ é contínua, e finalmente:

$$\int_I f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} 2,$$

o que demonstra que $f \in \mathcal{S}(]0,1])$ e:

$$\int_{]0,1]} f = 2.$$

No entanto $-f \notin \mathcal{S}(]0,1])$! com efeito é fácil concluir que $-f$ *não pode ser minorada* $p.p.$ *por nenhuma função em* $\mathcal{R}(]0,1])$, pois qualquer função minorando $-f$ fica *abaixo de um valor negativo pré-fixado em todo o intervalo* $]0,\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno); mesmo que a modifiquemos num conjunto de medida nula continuará *não-limitada*, pois $]0,\varepsilon[$ *não é desprezável* $\forall\varepsilon > 0$. Portanto *não podem existir sucessões aproximantes de* $-f$ e, de facto, $-f \notin \mathcal{S}(]0,1])$. A função f constitui também exemplo de função de $\mathcal{S}(I)$ *que não está em* $\mathcal{R}(I)$! outro exemplo poderia ter sido a função $h = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ pois, como vimos atrás (Secção 6.2), admite sucessão aproximante h_n, embora não esteja em $\mathcal{R}([0,1])$. Portanto:

$$\mathcal{R}(I) \subsetneq \mathcal{S}(I).$$

Não sendo $\mathcal{S}(I)$, em geral, espaço vectorial, interessa-nos considerar o espaço vectorial *gerado* por $\mathcal{S}(I)$.

DEFINIÇÃO: Designamos por *espaço das funções integráveis à Lebesgue*, ou das *funções somáveis* o espaço vectorial:

$$\mathcal{L}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} |\ \exists g, h \in \mathcal{S}(I) : f = g - h\}.$$

É óbvio que:

$$\mathcal{S}(I) \subset \mathcal{L}(I),$$

pois se $f \in \mathcal{S}(I), f = f - 0 \in \mathcal{L}(I)$; podemos então estender a noção de integral a $\mathcal{L}(I)$.

DEFINIÇÃO: Se $f \in \mathcal{L}(I)$ designamos por *integral de Lebesgue* ou simplesmente *integral de f* o número real:

$$\bullet \int_I f = \int_I g - \int_I h,$$

onde $h, g \in \mathcal{S}(I), f = g - h$.

É fácil concluir que *a definição é coerente*, pois se $g_1, h_1 \in \mathcal{S}(I)$ e:

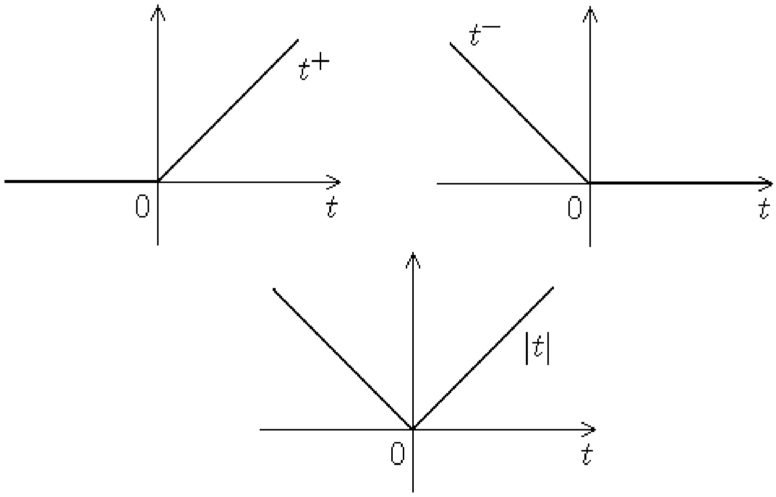
$$g_1 - h_1 = f = g - h,$$

vem:

$$\begin{aligned} h_1 + g = h + g_1 \Rightarrow \int_I h_1 + \int_I g = \int_I h + \int_I g_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_I g - \int_I h = \int_I g_1 - \int_I h_1, \end{aligned}$$

atendendo à Proposição 7.1–1.

Demonstremos agora algumas propriedades elementares de $\mathcal{L}(I)$ e do integral de Lebesgue. Já atrás se introduziu a função $t \mapsto t^+ = \max\{t, 0\}$; de modo análogo pomos $t^- = -\min\{t, 0\} = \max\{-t, 0\}$, de modo que $t = t^+ - t^-$, $|t| = t^+ + t^-$. Graficamente:



Temos então:

PROPOSIÇÃO 7.2: *se $f, g \in \mathcal{L}(I), \lambda \in \mathbb{R}$, então:*

1. $$f + g \in \mathcal{L}(I) \text{ e } \int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g;$$

2. $$\lambda f \in \mathcal{L}(I) \text{ e } \int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$$

(em particular $\mathcal{L}(I)$ é espaço vectorial e a aplicação $\mathcal{I} : \mathcal{L}(I) \to \mathbb{R}$ que a $f \in \mathcal{L}(I)$ associa $\mathcal{I}(f) = \int_I f$ é linear).

3. Se $f(x) \leq g(x)$ p.p. em I, então:

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

4. $f^+, f^-, |f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}(I)$, tendo-se:

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

5. Se $h = f$ p.p. em I, então $h \in \mathcal{L}(I)$ e:

$$\int_I h = \int_I f.$$

Demonstração: 1. resulta imediatamente da Proposição 7.1 e da definição de integral em $\mathcal{L}(I)$. Para demonstrar 2. notemos que se $f = h - k$ com $h, k \in \mathcal{S}(I)$, vem $-f = k - h$, donde $-f \in \mathcal{L}(I)$, tendo-se:

$$\int_I (-f) = \int_I k - \int_I h = -\Big(\int_I h - \int_I k\Big) = -\int_I f.$$

Então, se $\lambda \geq 0$ vem:

$$\lambda f = \underbrace{\lambda h}_{\in \mathcal{S}(I)} - \underbrace{\lambda k}_{\in \mathcal{S}(I)} \in \mathcal{L}(I)$$

e

$$\int_I \lambda f = \int_I \lambda h - \int_I \lambda k = \lambda \int_I h - \lambda \int_I k = \lambda\Big(\int_I h - \int_I k\Big) = \lambda \int_I f;$$

se $\lambda < 0$ vem $-\lambda > 0$, donde:

$$(-\lambda) f \in \mathcal{L}(I),$$

e portanto

$$\lambda f = -(-\lambda f) \in \mathcal{L}(I);$$

além disso

$$\int_I \lambda f = \int_I -(-\lambda f) = -\int_I (-\lambda f) = -(-\lambda) \int_I f = \lambda \int_I f$$

(utilizando os resultados para $\lambda \geq 0$ e $\lambda = -1$).

Para demonstrar 3. notemos que se $f(x) \geq 0\, p.p.$ vem $h(x) \geq k(x)\, p.p.$, donde, pela Proposição 7.1–2:

$$\int_I h \geq \int_I k,$$

pelo que

$$\int_I f = \int_I h - \int_I k \geq 0;$$

aplicando este resultado a $g - f$ e atendendo à *linearidade do integral* já demonstrada, obtém-se 3.

4. Comecemos por mostrar que $h, k \in \mathcal{S}(I) \Rightarrow \max\{h, k\} \in \mathcal{S}(I)$. Sejam h_n, k_n sucessões aproximantes de h, k, respectivamente, e seja $J \subset \overline{I}$ intervalo compacto, fora do qual h_1 e k_1 são identicamente nulas (J existe, visto que $h_1, k_1 \in \mathcal{R}(I)$). Do facto de $h_1, k_1 \in \mathcal{R}(I)$ resulta também que são funções limitadas e existe portanto $C > 0$ tal que:

$$h_1(x), k_1(x) \geq -C, \forall x \in I;$$

como $h_1(x) = k_1(x) = 0, \forall x \in I \setminus J$, vem:

$$h_1, k_1 \geq -C\chi_J.$$

Ora $h_n \geq h_1 \geq -C\chi_J,\ k_n \geq k_1 \geq -C\chi_J$, donde:

$$h_n + C\chi_J,\ k_n + C\chi_J \geq 0,$$

e portanto:

$$\max\{h_n + C\chi_J, k_n + C\chi_J\} \leq h_n + k_n + 2C\chi_J.$$

Temos assim:

$$\max\{h_n, k_n\} \in \mathcal{R}(I)$$

(atendendo, por exemplo, ao critério de Riemann-Lebesgue), e:

$$\int_I \max\{h_n, k_n\} = \int_I [\max\{h_n + C\chi_J, k_n + C\chi_J\} - C\chi_J] \leq$$
$$\leq \int_I (h_n + k_n + 2C\chi_J) - \int_I C\chi_J = \int_I h_n + \int_I k_n + CV(J),$$

pelo que $\int_I \max\{h_n, k_n\}$ é uma sucessão majorada, já que $\int_I h_n, \int_I k_n$ são majoradas, por hipótese. Como, evidentemente,

$$\max\{h_n, k_n\} \xrightarrow[n]{} \max\{h, k\}\ p.p.$$

e trata-se de sucessão não decrescente, atendendo a que h_n e k_n o são, concluímos que $\max\{h_n, k_n\}$ é sucessão aproximante de $\max\{h, k\}$ que está portanto em $\mathcal{S}(I)$.

Se tivermos agora $f \in \mathcal{L}(I), f = h - k\ (h, k \in \mathcal{S}(I))$ vem:

- $f^+ = \max\{f, 0\} = \max\{h - k, 0\} = \underbrace{\max\{h, k\}}_{\in \mathcal{S}(I)} - \underbrace{k}_{\in \mathcal{S}(I)} \in \mathcal{L}(I)$
- $f^- = \underbrace{f^+}_{\in \mathcal{L}(I)} - \underbrace{f}_{\in \mathcal{L}(I)} \in \mathcal{L}(I) \Rightarrow |f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}(I).$

Agora:

- $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \mathcal{L}(I).$

Finalmente:

$$f, -f \leq |f| \Rightarrow \int_I f, -\int_I f \leq \int_I |f| \Rightarrow \left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

5., para terminar, resulta imediatamente de:

$$h - f = 0\,p.p. \Rightarrow \left(h - f \in \mathcal{S}(I) \text{ e } \int_I (h - f) = 0\right)$$

(pela Proposição 7.1–3), donde:

$$h = (h - f) + f \in \mathcal{L}(I) \text{ e } \int_I h = \int_I (h - f) + \int_I f = \int_I f. \square$$

Observações: 2) $\mathcal{L}(I)$, tal como $\mathcal{R}(I)$, é, assim, espaço vectorial. Infelizmente não é, em geral, *álgebra* para o produto de funções; com efeito, basta considerar mais uma vez $\mathcal{L}(]0,1])$ e:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in]0,1];$$

já vimos que $f \in \mathcal{L}(]0,1])$, mas tem-se:

$$f^2(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]0,1].$$

Ora é fácil verificar que $f^2 \notin \mathcal{L}(]0,1])$! com efeito, supondo que $f^2 \in \mathcal{L}(]0,1])$, ter-se-ia, para a sucessão $g_n = f^2 \chi_{[\frac{1}{n},1]}$ (já que $g_n \leq f^2, g_n \in \mathcal{R}(]0,1]) \subset$ $\subset \mathcal{L}(]0,1]), \forall n \in \mathbb{N}_1$):

$$\int_{]0,1]} g_n \leq \int_{]0,1]} f^2, \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

Mas:

$$\int_{]0,1]} g_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_{\frac{1}{n}}^{1} = -\log \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} +\infty\,!$$

Na passagem para $\mathcal{L}(I)$ perdeu-se portanto, irremediavelmente, uma das propriedades algébricas de $\mathcal{R}(I)$.

3) Atendendo ao ponto 5. da Proposição anterior a *"somabilidade"* de determinada função f de I para $\mathbb{R}$, bem como o valor do respectivo integral (caso f seja somável), dependem apenas *"do que se passa fora de um conjunto de medida nula"*; ou seja, qualquer função g que seja igual a f *p.p.* será somável sse f o for e os integrais de f e g serão iguais se uma destas funções for somável (ou seja, se ambas o forem). Deste modo, se determinada função real f apenas estiver definida *em quase todos os pontos* de I (ou seja, em $I \backslash A$, sendo $m(A) = 0$), diremos, por abuso de linguagem, que *"$f \in \mathcal{L}(I)$"* se qualquer extensão f^* de f a I for somável (o que é equivalente, como vimos, a *existir uma* extensão somável); o integral de f em I será, nesse caso, por definição:

$$\int_I f = \int_I f^*,$$

valor que sabemos agora ser independente da extensão f^* fixada.

Exercícios

51) Mostre que $-1/\sqrt{x}$ *não pode ser minorada em* $]0,1]$ *p.p. por nenhuma função em* $\mathcal{R}(]0,1])$. Conclua que $S(]0,1])$ *não é espaço vectorial* para as operações habituais.

52) Mostre que $\mathcal{S}(I)$ não é espaço vectorial para *nenhum* intervalo I não degenerado de $\mathbb{R}^N$ (limitado ou não, ou seja, nas condições fixadas no final do capítulo anterior).

Capítulo 8

Teoremas de aproximação

Neste capítulo procuraremos examinar o comportamento do integral de Lebesgue por "passagem ao limite" das funções integrandas, para noções de limite *mais fracas* que a convergência uniforme.

8.1 Sucessões monótonas

Comecemos por analisar o caso de *sucessões monótonas*; vamos ver que as propriedades características das *sucessões aproximantes*, excluindo a convergência $p.p.$, são suficientes para garantir a existência do limite $p.p.$. Em seguida procuraremos estender o resultado a sucessões em $\mathcal{S}(I)$ e finalmente em $\mathcal{L}(I)$. Veremos depois o que se pode dizer para sucessões não necessariamente monótonas.

Temos assim:

LEMA: *Seja f_n sucessão crescente (no sentido lato) em $\mathcal{R}(I)$ tal que a sucessão $\int_I f_n$ é limitada; então existe $f \in \mathcal{S}(I)$ tal que:*

$$\bullet f_n \uparrow f \text{ p.p. em } I$$
$$\bullet \int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f.$$

Demonstração: Basta demonstrar que $f_n(x)$ tem limite finito para quase todos os $x \in I$. Com efeito, nesse caso, designando por $f(x)$ esse limite nos casos em que existe, e definindo f nos outros pontos com valores reais arbitrários, f_n é sucessão aproximante para f, donde, de facto, $f \in \mathcal{S}(I)$ e:

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n,$$

por definição. Pretendemos assim demonstrar que tem medida nula o conjunto:

$$E = \{x \in I : f_n(x) \text{ não tem limite finito}\}.$$

Comecemos por notar que podemos supor $f_n(x) \geq 0, \forall x \in I$. Com efeito, se demonstrarmos o Lema para sucessões nessas condições, podemos aplicá-lo à sucessão $f_n - f_1$; concluímos que existe $f \in \mathcal{S}(I)$ tal que:

$$f_n - f_1 \underset{n}{\longrightarrow} f \; p.p. \text{ e } \int_I (f_n - f_1) \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f,$$

donde:

$$f_n \underset{n}{\longrightarrow} f + f_1 \; p.p., \; \int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f + \int_I f_1 = \int_I (f + f_1),$$

e como $f \in \mathcal{S}(I), f_1 \in \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{S}(I)$, vem $f + f_1 \in \mathcal{S}(I)$, e o Lema 1 ficará demonstrado no caso geral. Faremos portanto a hipótese suplementar:

$$f_n(x) \geq 0, \forall x \in I.$$

Analisemos o conjunto E; atendendo a que a sucessão f_n é crescente, vem:

$$E = \{x \in I : f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} +\infty\};$$

por outro lado, por hipótese:

$$\exists C > 0 : \int_I f_n \leq C.$$

Com o objectivo de provar que $m(E) = 0$, fixemos $\delta > 0$; temos:

$$x \in E \Rightarrow (x \in I \text{ e } f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} +\infty) \Rightarrow \left(x \in I, \exists n \in \mathbb{N}_1 : f_n(x) \geq \frac{2C}{\delta}\right).$$

Ou seja, pondo:

$$E_n = \left\{x \in I : f_n(x) \geq \frac{2C}{\delta}\right\},$$

vem:

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} E_n \, , \; E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots. \tag{8}$$

Convém-nos portanto estimar o *volume exterior de* E_n. Notemos que, sendo $f_n \in \mathcal{R}(I)$, existe $J \subset \overline{I}$, intervalo compacto não degenerado, tal que $f_n(x) = 0, \forall x \in I \setminus J$, donde $E_n \subset J$, sendo portanto limitado. Além disso:

$$f_n(x) \geq \frac{2C}{\delta} \chi_{E_n}(x), \forall x \in I,$$

atendendo a que $f_n(x) \geq 0, \forall x \in I$ e à definição de E_n. Portanto:

$$C \geq \int_I f_n \geq \frac{2C}{\delta} \overline{\int_I} \chi_{E_n} = \frac{2C}{\delta} \overline{V}(E_n) \Rightarrow \overline{V}(E_n) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Conseguimos, deste modo, mostrar que E fica contido na união de uma cadeia *crescente* de conjuntos, cada um dos quais com volume exterior inferior ou igual a $\delta/2$. Este facto sugere que, de facto, $m(E) = 0$; para o demonstrar, no entanto, temos de recorrer à definição de conjunto desprezável que faz intervir coberturas por intervalos. Ora o volume exterior pode ser aproximado por somas de volumes de intervalos; sabemos que existe $P \in \mathcal{P}(J)$ tal que:

$$\sum_{\substack{K \in P \\ K \cap E_n \neq \emptyset}} V(K) - \frac{\delta}{2^{n+1}} \leq \overline{V}(E_n) \leq \sum_{\substack{K \in P \\ K \cap E_n \neq \emptyset}} V(K).$$

Para simplificar as notações, seja:

$$\bullet\ A_n = \bigcup_{\substack{K \in P \\ K \cap E_n \neq \emptyset}} K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N);$$

vem:

$$V(A_n) = \sum_{\substack{K \in P \\ K \cap E_n \neq \emptyset}} V(K).$$

Os A_n satisfazem então às seguintes propriedades:

$$(9) \qquad \begin{cases} \bullet\ A_n \textit{ é união finita de intervalos compactos;} \\ \bullet\ E_n \subset A_n; \\ \bullet\ V(A_n) - \dfrac{\delta}{2^{n+1}} \leq \overline{V}(E_n) \leq V(A_n). \end{cases}$$

Infelizmente, não podemos agora garantir que os A_n constituam uma cadeia crescente como os E_n (não sabemos se $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_1$). Para "remediar" este facto consideremos:

$$\bullet\ C_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Os C_n satisfazem agora a:

$$(10) \qquad \begin{cases} \bullet\ C_n \textit{ é união finita de intervalos compactos;} \\ \bullet\ E_n \subset C_n; \\ \bullet\ C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \subset C_{n+1} \subset \cdots. \end{cases}$$

Procuremos estimar os volumes dos C_n através dos $\overline{V}(E_n)$; notemos que da definição de C_n resulta facilmente:

$$C_{n+1} \setminus C_n = A_{n+1} \setminus (A_{n+1} \cap C_n),$$

donde:

$$V(C_{n+1}) - V(C_n) = V(C_{n+1} \setminus C_n) = V(A_{n+1}) - V(A_{n+1} \cap C_n) \leq$$
$$\leq \overline{V}(E_{n+1}) + \frac{\delta}{2^{n+2}} - \overline{V}(E_n)$$

(aplicando (9) e atendendo a que:

$$(E_n \subset C_n, E_n \subset E_{n+1} \subset A_{n+1}) \Rightarrow E_n \subset A_{n+1} \cap C_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{V}(E_n) \leq V(A_{n+1} \cap C_n))$$

Temos assim:

$$\begin{aligned} V(C_{n+1}) = {} & (V(C_{n+1}) - V(C_n)) + (V(C_n) - V(C_{n-1})) + \cdots + \\ & + (V(C_2) - V(C_1)) + V(C_1) \leq (\overline{V}(E_{n+1}) - \overline{V}(E_n)) + \\ & + (\overline{V}(E_n) - \overline{V}(E_{n-1})) + \cdots + (\overline{V}(E_2) - \overline{V}(E_1)) + \overline{V}(E_1) + \frac{\delta}{4} + \\ & + \frac{\delta}{2^{n+2}} + \frac{\delta}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\delta}{2^3} \leq \overline{V}(E_{n+1}) + \delta \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n}}_{=\frac{1}{2}} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Desta estimativa, de (8) e de (10), concluímos que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ é cadeia crescente de uniões finitas de intervalos compactos satisfazendo a:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \bullet\ V(C_n) \leq \delta \\ \bullet\ E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} E_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} C_n. \end{cases}$$

Resta ver que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} C_n$ pode ser obtida como união de intervalos cuja soma dos volumes ainda seja $\leq \delta$. Para isso podemos proceder do seguinte modo — Para cada $n \in \mathbb{N}_1$ seja $\mathcal{F}_n$ família de intervalos compactos tal que:

$$C_n = \bigcup_{K \in \mathcal{F}_n} K.$$

Por recorrência, vamos construir $(\mathcal{F}'_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ tal que $\bigcup_{K \in \mathcal{F}'_n} K = \bigcup_{K \in \mathcal{F}_n} K = C_n$, mas de tal maneira que cada $\mathcal{F}'_n$ seja constituído por intervalos com interiores dois a dois disjuntos e:

$$\mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}'_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}'_n \subset \mathcal{F}'_{n+1} \subset \cdots,$$

ou seja, *de tal modo que $\mathcal{F}'_{n+1}$ se obtenha de $\mathcal{F}'_n$ "juntando" a $\mathcal{F}'_n$ "mais alguns" intervalos*. Para obter os $\mathcal{F}'_n$ basta aplicar sucessivas vezes a Proposição 1.4; começa-se por considerar um intervalo compacto $I' \supset C_1$, "completa-se" $\mathcal{F}_1$ com uma família $\mathcal{F}$ nas condições da Proposição 1.4 relativamente a I' e repete-se o processo para $\mathcal{F}$, relativamente ao mesmo I'. Obtém-se, deste modo, uma família $\mathcal{F}'_1$ de intervalos tal que (atendendo ao exercício 5 do Capítulo 1):

$$\begin{cases} \bigcup_{K \in \mathcal{F}'_1} K = \bigcup_{K \in \mathcal{F}_1} K = C_1; \\ \overset{\circ}{K_1} \cap \overset{\circ}{K_2} = \emptyset, \forall K_1, K_2 \in \mathcal{F}'_1. \end{cases}$$

Para construir $\mathcal{F}'_{n+1}$, uma vez construído $\mathcal{F}'_n$, aplica-se novamente a Proposição 1.4 (e o exercício 5); começa-se por considerar um intervalo compacto

$I' \supset C_{n+1}$, completa-se $\mathcal{F}_{n+1}$ relativamente a I' através de uma família $\mathcal{F}$ pelo processo habitual e repete-se a construção, agora para $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'_n$, relativamente ao mesmo intervalo I'. Obtêm-se deste modo intervalos que juntos a $\mathcal{F}'_n$ constituem uma família $\mathcal{F}'_{n+1}$ nas condições requeridas. Temos assim:

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} E_n \subset \bigcup_{K\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}\mathcal{F}'_n} K = \bigcup_{K\in\mathcal{F}'_1\cup(\mathcal{F}'_2\setminus\mathcal{F}'_1)\cup\ldots\cup(\mathcal{F}'_{n+1}\setminus\mathcal{F}'_n)\cup\ldots} K =$$

$$= \bigcup_{K\in\mathcal{F}'_1} K \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1}\left(\bigcup_{K\in\mathcal{F}'_{n+1}\setminus\mathcal{F}'_n} K\right)$$

(união numerável de intervalos) e:

$$\sum_{K\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}\mathcal{F}'_n} V(K) = \sum_{K\in\mathcal{F}'_1} V(K) + \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\left(\sum_{K\in\mathcal{F}'_{n+1}\setminus\mathcal{F}'_n} V(K)\right) =$$

$$= V(C_1) + \sum_{n\in\mathbb{N}_1}(V(C_{n+1}) - V(C_n)) =$$

$$= V(C_1) + \lim_n \sum_{p=1}^{n}(V(C_{p+1}) - V(C_p)) =$$

$$= \lim_n V(C_{n+1}) \leq \delta,$$

atendendo a (11). Portanto, dado $\delta > 0$ construímos *uma sucessão de intervalos cujos volumes têm soma inferior ou igual a δ e cuja união contém E*, donde:

$$m(E) = 0.\square$$

COROLÁRIO: *Seja $f_n \in \mathcal{S}(I)$ sucessão crescente p.p. (em sentido lato), tal que a sucessão $\int_I f_n$ é limitada; então existe $f \in \mathcal{S}(I)$ tal que:*

- *$f_n \uparrow f$ p.p. em I;*
- $\displaystyle\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f.$

Demonstração: Por definição de $\mathcal{S}(I)$, para cada f_n existe uma sucessão $(\varphi_m^n)_{m\in\mathbb{N}_1}$, aproximante para f_n e portanto satisfazendo às hipóteses do Lema anterior. Seja então:

$$\psi_n = \max\{\varphi_n^1, \varphi_n^2, \ldots, \varphi_n^n\} \in \mathcal{R}(I)$$

(ψ_n é contínua nos pontos em que os φ_n^j o forem simultaneamente, logo *p.p.*). ψ_n é *crescente* (em sentido lato), já que:

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1} = \max \{\varphi^1_{n+1}, \varphi^2_{n+1}, \dots, \varphi^n_{n+1}, \varphi^{n+1}_{n+1}\} \geq \\
\geq \max \{\varphi^1_n, \varphi^2_n, \dots, \varphi^n_n, \varphi^{n+1}_n\} \geq \max \{\varphi^1_n, \varphi^2_n, \dots, \varphi^n_n\} = \psi_n
\end{aligned}
$$

e:

$$\psi_n \leq f_n \; p.p.$$

(visto ψ_n ser, em cada ponto, igual a um dos φ^j_n, com $j \in \{1, \dots, n\}$ e $\varphi^j_n \leq \leq f_j \leq f_n \; p.p.$). Esquematicamente:

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
 & f_1 & \leq & f_2 & \leq & \cdots & \leq & f_n & \leq & f_{n+1} & \leq \;\cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & \\
\psi_{n+1} = \max & \multicolumn{9}{l}{\boxed{\varphi^1_{n+1} \qquad \varphi^2_{n+1} \qquad \qquad \varphi^n_{n+1} \qquad \varphi^{n+1}_{n+1}}} & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & \\
\psi_n = \max & \multicolumn{7}{l}{\boxed{\varphi^1_n \qquad \varphi^2_n \qquad \qquad \varphi^n_n}} & & \varphi^{n+1}_n & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & \\
\psi_2 = \max & \multicolumn{3}{l}{\boxed{\varphi^1_2 \qquad \varphi^2_2}} & & & & \varphi^n_2 & & \varphi^{n+1}_2 & \\
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & \\
\psi_1 = \max & \boxed{\varphi^1_1} & & \varphi^2_1 & & & & \varphi^n_1 & & \varphi^{n+1}_1 &
\end{array}
$$

Do que precede concluímos que:

$$\int_I \psi_n \leq \int_I f_n, \tag{12}$$

pela Proposição 7.2–3, e portanto $\int_I \psi_n$ é limitada. Os ψ_n estão assim nas condições do Lema anterior, donde existirá $f \in \mathcal{S}(I)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
& \bullet\ \psi_n \uparrow f \; p.p., \\
& \bullet\ \int_I \psi_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f;
\end{aligned} \tag{13}
$$

mostremos que $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f \; p.p.$. De $\psi_n \leq f_n \; p.p.$ resulta:

$$f(x) = \lim_n \psi_n(x) \leq \lim_n f_n(x) \; p.p.$$

(sendo o último limite finito ou $+\infty$, visto $f_n(x)$ ser crescente $p.p.$, em sentido lato); por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}_1$ tem-se:

$$\varphi_m^n \leq \psi_m, \forall m \geq n \Rightarrow \varphi_m^n \leq f\ p.p., \forall m \geq n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_n(x) = \lim_m \varphi_m^n(x) \leq f(x)\ p.p.,$$

donde também:

$$\lim_n f_n(x) \leq f(x)\ p.p.,$$

e portanto, de facto:

$$f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)\ p.p..$$

Para demonstrar a convergência dos integrais, note-se que, de (12) e (13) acima, podemos deduzir imediatamente que:

$$\int_I f \leq \lim_n \int_I f_n;$$

para obter a desigualdade simétrica basta notar que, pelo que atrás vimos:

$$f_n(x) \leq f(x)\ p.p.,$$

donde:

$$\int_I f_n \leq \int_I f \Rightarrow \lim_n \int_I f_n \leq \int_I f$$

e portanto, de facto:

$$\int_I f_n \xrightarrow[n]{} \int_I f. \square$$

8.2 Teorema de Beppo Levi da convergência monótona

Vamos, finalmente, estender o resultado anterior a $\mathcal{L}(I)$. Trata-se de um dos resultados centrais de toda a teoria do integral de Lebesgue, constituindo condição suficiente simples para se poder "passar ao limite debaixo do sinal de integral".

TEOREMA 8.1 (Teorema de Beppo Levi da convergência monótona): *Seja $f_n \in \mathcal{L}(I)$ sucessão crescente p.p. (em sentido lato) tal que é limitada a sucessão $\int_I f_n$; então existe $f \in \mathcal{L}(I)$ tal que:*

- $f_n \uparrow f$ *p.p. em* I;
- $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n]{} \int_I f.$

Demonstração: Notemos que a sucessão f_n se pode escrever como soma parcial de uma série:

$$f_n = f_1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\underbrace{f_{p+1} - f_p}_{\geq 0\, p.p.}).$$

É então fácil concluir que o Teorema 8.1 é equivalente ao seguinte resultado para séries de funções: *"Se g_n é sucessão em $\mathcal{L}(I)$ tal que $g_n \geq 0\, p.p.$ em I e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} \left(\int_I g_n\right)$ converge, então a série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} g_n$ converge p.p. em I para uma função de $\mathcal{L}(I)$ e:*

$$\int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} g_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \left(\int_I g_n\right)\text{''}.$$

Demonstremos então este resultado. Cada g_n, estando em $\mathcal{L}(I)$, é da forma:

$$g_n = u_n - v_n,$$

com $u_n, v_n \in \mathcal{S}(I)$; podemos, além disso, supor que $v_n \geq 0\, p.p.$ e $\int_I v_n < 1/2^n$. Com efeito, se assim não fosse, poderíamos considerar uma sucessão aproximante de v_n em $\mathcal{R}(I)$, e para certo termo w dessa sucessão de ordem suficientemente grande viria:

$$\int_I v_n - \int_I w < \frac{1}{2^n},\ v_n \geq w\, p.p.;$$

bastava então substituir u_n por $u_n - w = u_n + (\underbrace{-w}_{\in\mathcal{R}(I)}) \in \mathcal{S}(I)$ e v_n por $v_n -$ $- w \in \mathcal{S}(I)$, pois:

$$g_n = u_n - v_n = (u_n - w) - (v_n - w).$$

Além disso virá também:

$$u_n = g_n + v_n \geq 0\, p.p., \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

Teremos então:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I v_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{1}{2^n} = 1,$$

e como, por hipótese, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I g_n$ é convergente, virá também convergente a série:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I g_n + \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I v_n$$

(já que $u_n = g_n + v_n$). Podemos agora aplicar o Corolário anterior às somas parciais das séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} u_n$ e $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} v_n$, pois trata-se de sucessões *crescentes p.p.* (em sentido lato) em $\mathcal{S}(I)$ *com integrais convergindo*. Concluímos então do referido resultado que as séries convergem *p.p.* para funções de $\mathcal{S}(I)$ e portanto converge *p.p.* a série:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} g_n = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}_1} u_n}_{\in\mathcal{S}(I)} - \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}_1} v_n}_{\in\mathcal{S}(I)} \in \mathcal{L}(I),$$

tendo-se, além disso:

$$\int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} g_n\right) = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} u_n\right) - \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} v_n\right) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I u_n - \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I g_n. \square$$

8.3 Teorema de Beppo Levi para séries

COROLÁRIO (Teorema de Beppo Levi para séries): *Seja f_n sucessão em $\mathcal{L}(I)$ tal que é convergente a série:*

$$\bullet \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I |f_n|;$$

então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n(x)$ converge p.p. para uma função de $\mathcal{L}(I)$ e:

$$\int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I f_n.$$

Demonstração: Basta aplicar o Teorema anterior às somas parciais das séries $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n^+$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n^-$ pois trata-se de sucessões crescentes de funções de $\mathcal{L}(I)$ com integrais convergentes, atendendo ao critério de comparação para séries, já que:

$$\int_I f_n^+, \int_I f_n^- \leq \int_I |f_n|,$$

porque $f_n^+, f_n^- \leq |f_n|$, e portanto

$$\int_I \sum_{k=1}^n f_k^+, \int_I \sum_{k=1}^n f_k^- \left(= \sum_{k=1}^n \int_I f_k^+, \sum_{k=1}^n \int_I f_k^- \right)$$

convergem, visto convergir, por hipótese:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_I |f_k|. \square$$

8.4 Teorema de Lebesgue da convergência dominada

TEOREMA 8.2 (Teorema de Lebesgue da convergência dominada): *Sejam* $f_n, g \in \mathcal{L}(I)$ $(\forall n \in \mathbb{N}_1)$ *tais que:*

- $f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. em* I,
- $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. em* I, $\forall n \in \mathbb{N}_1$;

então $f \in \mathcal{L}(I)$ *e:*

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

Demonstração: A demonstração processa-se por construção de duas sucessões *monótonas* g_n e G_n, respectivamente *crescente* e *decrescente* (em sentido lato), tais que $g_n, G_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ *p.p.* e *enquadram* a sucessão f_n. Seja então:

$$G_n(x) = \sup \{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{n+k}(x), \dots\},$$

nos pontos x em que f_n converge para f e nos quais $|f_n| \leq g$; nos restantes pontos, que constituem, por hipótese, um conjunto desprezável, G_n pode ser definida de modo arbitrário, mas, nos primeiros, G_n tem evidentemente valor *finito* (supremo de parte *limitada* de $\mathbb{R}$ — conjunto de termos de sucessão *convergente*). É fácil concluir que $G_n \in \mathcal{L}(I)$; com efeito G_n é o limite $p.p.$ da sucessão (em k):

$$G_k^n(x) = \max \{f_n(x), \dots, f_{n+k}(x)\},$$

sucessão *crescente* (em sentido lato) de funções de $\mathcal{L}(I)$ (pela Proposição 7.2–4 — estendida, por indução, a um número *finito* qualquer de funções), satisfazendo, evidentemente (monotonia do integral!) a:

$$\int_I G_k^n \leq \int_I g$$

(já que $|G_k^n| \leq g\, p.p.$). Note-se que sendo G_k^n *crescente em* k o seu limite coincide com o *supremo* (em k) dos termos da sucessão, ou seja, com $G_n(x)$. Então, pelo *Teorema de Beppo Levi*, G_k^n converge $p.p.$ (em k) para uma função de $\mathcal{L}(I)$ que, por unicidade do limite, coincide $p.p.$ com G_n, o que prova que $G_n \in \mathcal{L}(I)$ (pela Proposição 7.2–5).

Por outro lado, a sucessão G_n é *decrescente* $p.p.$ (em sentido lato), tendo-se também evidentemente (mais uma vez pela monotonia do integral):

$$-\int_I G_n \leq \int_I g$$

(note-se que, $p.p.$, $-G_n = \inf\{-f_n, \ldots, -f_{n+k}, \ldots\} \leq g$, por hipótese); aplicando novamente o *Teorema de Beppo Levi* (desta vez à sucessão $-G_n$ que é evidentemente *crescente* $p.p.$) concluímos que G_n converge $p.p.$ para uma função $G \in \mathcal{L}(I)$, tendo-se:

$$\int_I G_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I G.$$

Ora é fácil concluir que $G_n \underset{n}{\longrightarrow} f\ p.p.$, pois nos pontos em que $f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$, dado $\delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}_1 : n \geq p \Rightarrow f(x) - \delta < f_n(x) < f(x) + \delta$ e como, evidentemente, $n+1, \ldots, n+k, \ldots \geq n \geq p$, vem:

$$f(x) - \delta < \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x), \ldots\} \leq f(x) + \delta,$$

ou seja:

$$n \geq p \Rightarrow f(x) - \delta < G_n(x) \leq f(x) + \delta,$$

o que prova que, nesses pontos:

$$G_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x).$$

Por unicidade do limite:

$$f = G\ p.p.,$$

e portanto $f \in \mathcal{L}(I)$, tendo-se:

$$\int_I G_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f.$$

Podemos fazer raciocínio semelhante para:

$$g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x), \ldots\};$$

concluímos que se trata de uma sucessão de funções tomando valores *finitos* $p.p.$ em I, iguais $p.p.$ a funções de $\mathcal{L}(I)$, sendo a sucessão crescente $p.p.$ (em sentido lato) e convergindo para $f\ p.p.$ com:

$$\int_I g_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f.$$

Como evidentemente:

$$g_n \leq f_n \leq G_n\ p.p. \Rightarrow \int_I g_n \leq \int_I f_n \leq \int_I G_n,$$

virá também:

$$\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f. \square$$

COROLÁRIO 1: *Seja I intervalo limitado de $\mathbb{R}^N$ e $f_n \in \mathcal{L}(I)$ ($\forall n \in \mathbb{N}_1$) tais que:*

- $f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. em* I;
- f_n *é uniformemente limitada p.p. em* I

(ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \le M$ p.p. em I); então $f \in \mathcal{L}(I)$ e:

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

Demonstração: Basta notar que sendo I *limitado* a função $g(x) \equiv M$ é *integrável-R* e portanto $g \in \mathcal{L}(I)$; f_n está portanto nas condições do Teorema de Lebesgue, o que permite concluir.$\square$

COROLÁRIO 2: *Sejam $f_n, g \in \mathcal{L}(I)$ ($\forall n \in \mathbb{N}_1$) tais que:*

- $f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. em* I,
- $|f(x)| \le g(x)$ *p.p. em* I;

então $f \in \mathcal{L}(I)$.

Demonstração: Basta, para os pontos x tais que $f_n(x)$ fica fora do intervalo $[-g(x), g(x)]$, substituir $f_n(x)$ por $-g(x)$ ou por $g(x)$ (conforme fique "à esquerda" ou "à direita" do intervalo); ou seja, pomos:

- $\tilde{f}_n(x) = \min\{g(x), \max\{f_n(x), -g(x)\}\} \in \mathcal{L}(I)$.

Vem:

$$\tilde{f}_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} \min\{g(x), \max\{f(x), -g(x)\}\} = f(x) \text{ p.p. em } I,$$

$$|\tilde{f}_n(x)| \le g(x) \text{ (já que } \tilde{f}_n(x) \in [-g(x), g(x)] \text{ p.p. em } I\text{)},$$

donde:

- $f \in \mathcal{L}(I)$ (pelo *Teorema de Lebesgue*).$\square$

8.5 Lema de Fatou

Como vimos na Secção 6.2 existem sucessões de funções positivas em $\mathcal{R}(I)$ convergentes *pontualmente* tais que os integrais convergem, sem que se possa permutar o limite com o integral. Vamos ver que, no entanto, mesmo em situação mais geral, podemos afirmar a integrabilidade *à Lebesgue* da função limite e obter uma desigualdade no que respeita aos integrais:

COROLÁRIO 3 (Lema de Fatou): *Sejam* $f_n \in \mathcal{L}(I)$ $(n \in \mathbb{N}_1)$ *tais que:*

- $f_n(x) \geq 0$ *p.p. em* I, $\forall n \in \mathbb{N}_1$,
- $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$ *p.p. em* I,
- $\int_I f_n$ *é uma sucessão limitada;*

então:

- $f \in \mathcal{L}(I)$,
- $\int_I f \leq \underline{\lim}_n \int_I f_n$.

Demonstração: Este resultado é, mais propriamente "corolário da *demonstração*" do *Teorema de Lebesgue*; com efeito, podemos construir uma vez mais a sucessão:

$$g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+k}(x), \ldots\}$$

que fica constituída por funções de $\mathcal{L}(I)$ (definidas $p.p.$ em I por aquela expressão), atendendo agora a que f_n é uma sucessão de funções não negativas, mas, à parte esse facto, com a mesma demonstração que a sugerida no caso do Teorema de Lebesgue. Além disso trata-se de uma sucessão crescente $p.p.$, convergindo $p.p.$ para f e com integrais limitados pelos integrais dos f_n, logo constituindo uma sucessão limitada; portanto, pelo *Teorema de Beppo Levi*, $f \in \mathcal{L}(I)$ e:

$$\int_I g_n \xrightarrow[n]{} \int_I f.$$

Ora:

$$\int_I g_n \leq \int_I f_{n+k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

donde:

$$\lim_n \int_I g_n \leq \underline{\lim}_n \int_I f_n \Leftrightarrow \int_I f \leq \underline{\lim}_n \int_I f_n . \square$$

8.6 Aplicação às séries de funções

COROLÁRIO 4: *Seja f_n sucessão de funções em $\mathcal{L}(I)$ tal que:*

- $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n(x)$ *converge p.p. em* I,
- *Existe* $g \in \mathcal{L}(I)$ *tal que* $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq g(x)$ *p.p. em* I, $\forall n \in \mathbb{N}_1$;

então:

- $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n(x)$ *é igual p.p. a uma função de* $\mathcal{L}(I)$,
- $\int_I \sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I f_n$

(onde $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n$ *representa qualquer função de* $\mathcal{L}(I)$ *coincidente com esta série nos pontos em que ela converge).*

Demonstração: A sucessão $\sum_{k=1}^{n} f_k$ das somas parciais está obviamente nas condições do *Teorema de Lebesgue*, o que permite concluir.□

Observações: 1) Atendendo ao Teorema de Beppo Levi para séries, é equivalente dizer que $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} |f_n|$ converge *p.p.* para uma função somável ou que existe $g \in \mathcal{L}(I)$ tal que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} |f_n| \leq g \; p.p.$$

(supondo em qualquer caso que $f_n \in \mathcal{L}(I), \forall n \in \mathbb{N}_1$), já que esta majoração permite concluir imediatamente que a sucessão das somas parciais da série dos integrais dos $|f_n|$ é majorada pelo integral de g, sendo assim convergente. O Corolário 2 permite também obter imediatamente a mesma conclusão. Deste modo, sempre que exista o integral de Lebesgue de $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} |f_n|$, então existe o de $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n$ e podemos "permutar os sinais de série e integral", desde que, evidentemente, suponhamos à partida que todos os f_n são somáveis. Se associarmos o Corolário 4 com o Teorema de Beppo Levi para séries, podemos então dizer que:

"Se $f_n \in \mathcal{L}(I), \forall n \in \mathbb{N}_1$ *e existir uma das duas entidades:*

- $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_I |f_n|$ *(como série convergente), ou*
- $\int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} |f_n|\right)$ *(como integral de Lebesgue)*,

ou, em alternativa, se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n$ *for convergente* $p.p.$ *e as respectivas somas parciais forem todas majoradas* $p.p.$ *em módulo por uma mesma função somável, então:*

- $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n$ *converge* $p.p.$*, sendo igual* $p.p.$ *a uma função de* $\mathcal{L}(I)$*,*
- $\sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I f_n$ *converge, e*
- $\int_I\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} f_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I f_n$*."*

2) Se $f=0\,p.p.$ sabemos (Pela Proposição 7.2–5) que $f\in\mathcal{L}(I)$ e $\int_I f=0$. Reciprocamente, se $f\in\mathcal{L}(I)$ e:

$$\int_I |f|=0,$$

podemos utilizar o Teorema de Beppo Levi para séries. Pondo $f_n=f,\forall n\in\mathbb{N}_1$, vem:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_I |f_n|=0,$$

pelo que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1}|f_n| \text{ converge } p.p.;$$

como se trata de série de termo geral constantemente igual a $|f|$ só pode convergir nos pontos x tais que $|f(x)|=0$. Portanto $|f|=0\,p.p.$, donde $f=0\,p.p.$. Concluímos, portanto, que:

$$\text{“}f\in\mathcal{L}(I)\ e\int_I |f|=0\ sse\ f=0\ p.p.\ em\ I\text{”}.$$

Exercícios

53) Reexamine e comente os resultados obtidos no Capítulo 6 e respectivos exercícios quanto à convergência das diversas sucessões analisadas de funções e integrais, à luz dos teoremas de aproximação para o integral de Lebesgue.

54) **a)** Mostre que se $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ uniformemente, sendo $f_n \in \mathcal{L}(I)$, I intervalo *limitado* não degenerado de $\mathbb{R}^N$, então $f \in \mathcal{L}(I)$ e $\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f$.

b) Mostre, com o auxílio de um contra-exemplo, que a conclusão da alínea anterior pode não ser verdadeira para um intervalo I *não limitado*.

55) Prove que:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{nx}\,dx \underset{n}{\longrightarrow} 0.$ **b)** $\int_0^1 \frac{2n^2+(-1)^n}{n^2+x^2}\,dx \underset{n}{\longrightarrow} 2.$

c) $\int_0^{2n\pi} \left(\frac{1+\sin x}{n}\right)^n dx \underset{n}{\longrightarrow} 0.$ **c)** $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{n^3+(-1)^n n^2}{(2n+1)^3+x^n}\,dx \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{8}.$

(Sugestão: Note que os integrais em domínios variáveis se podem reduzir a domínios fixos utilizando funções características...)

56) Calcule os seguintes limites, justificando os resultados obtidos (quando conveniente pode utilizar a sugestão do exercício anterior; na alínea b) entende-se o integral para cada n como sendo integral da *restrição* da função integranda ao domínio indicado) :

a) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+yx^{10}}\,dx,$ quando $y \to 0^+$. **b)** $\lim_n \int_0^{1+\frac{1}{n}} x^n f(x)\,dx$ $(f \in \mathcal{L}([0,2]))$.

c) $\lim_n \int_0^{2n\pi} \left(\frac{n+\sin x}{n}\right)^n dx.$ **d)** $\lim_n \int_0^{2n\pi} \log\left(1+\frac{\sin x}{n}\right) dx$

57) Calcule $\lim_n \int_{-n}^{n} \frac{1-e^{-nx^2}}{nx^2+n^2x^4}\,dx$, justificando o resultado obtido. *(Sugestão: Comece por demonstrar que é limitada em* $]0,+\infty[$ *a função* $y \mapsto (1-e^{-y})/y$*).*

58) Mostre que no *Lema de Fatou* se pode enfraquecer a hipótese *"*$\forall n \in \mathbb{N}_1$, $f_n(x) \geq 0$ *p.p. em* I*"*, substituindo-a por *"*$\exists g \in \mathcal{L}(I) : \forall n \in \mathbb{N}_1, f_n(x) \geq$ $\geq g(x)$ *p.p. em* I*"*.

Capítulo 9

Aproximação por funções em escada

O integral de funções $f \in \mathcal{R}(I)$ pode ser aproximado, por exemplo, por somas inferiores. Tais somas são, afinal, integrais de funções de tipo muito particular: trata-se de *combinações lineares de funções características (definidas em I) de intervalos limitados contidos em I*; essas combinações lineares designam-se por *funções em escada* e constituem (ver secção seguinte), uma *sub-álgebra* $\mathcal{E}(I)$ de $\mathcal{R}(I)$, fechada para as operações:

$$f, g \mapsto \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|, f^+, f^-, \text{etc..}$$

Com efeito, sendo $J \subset \overline{I}$, intervalo compacto não degenerado fora do qual $f \equiv 0$ e tomando, por exemplo, $P_n \in \mathcal{P}(J)$ com $\delta(P_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, tem-se:

$$\int_I \underbrace{\left(\sum_{K \in P_n} \left(\inf_K \widetilde{f} \right) \chi_{\overset{\circ}{K}} \right)}_{\varphi_n \in \mathcal{E}(I)} = \sum_{K \in P_n} \left(\inf_K \widetilde{f} \right) V(K) = \underline{\mathcal{S}}(\widetilde{f}, P_n) \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f$$

Se, além disso, escolhermos os P_n tais que $P_{n+1} \succ P_n$, virá $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$, $\forall x \in \bigcup_{K \in P_{n+1}} \overset{\circ}{K}$ (já que cada $\overset{\circ}{K}$ está contido em algum $\overset{\circ}{K'}$ com $K' \in P_n$, e portanto $\varphi_{n+1}(x) = \inf_K \widetilde{f} \geq \inf_{K'} \widetilde{f} = \varphi_n(x)$, se $x \in \overset{\circ}{K}$). Em particular:

$$\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x) \; p.p.,$$

já que as fronteiras dos K constituem um conjunto desprezável, e fora de J os φ_n são todos identicamente nulos. Concluímos que os φ_n estão nas condições do Teorema de Beppo Levi, pelo que existe $g \in \mathcal{L}(I)$ tal que:

$$\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} g \; p.p., \; \int_I \varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I g,$$

donde:

$$\int_I g = \int_I f;$$

ora é óbvio que $\varphi_n \leq f \; p.p.$ (é-o, fora das fronteiras dos $K \in P_n$) e portanto também virá $g \leq f$ $p.p.$, ou seja, $f - g \geq 0$ $p.p.$. Logo:

$$\int_I |f-g| = \int_I (f-g) = \int_I f - \int_I g = 0 \Rightarrow |f-g| = 0\, p.p. \Rightarrow g = f\ p.p.,$$

atendendo à última observação do capítulo anterior. Concluímos assim, finalmente, que:

$$\varphi_n \xrightarrow[n]{} f\ p.p..$$

Do que precede resulta que qualquer função de $\mathcal{R}(I)$ é limite $p.p.$ de sucessão crescente $p.p.$ de funções em escada. O mesmo resultado é válido para funções de $\mathcal{S}(I)$. Basta para isso atender à construção efectuada na demonstração do corolário do Lema da Secção 8.1; se $f \in \mathcal{S}(I)$, podemos considerar uma sucessão aproximante em $\mathcal{R}(I)$:

$$f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots \xrightarrow[n]{} f\ p.p.,$$

escolher, para cada f_n, sucessões $(\varphi_m^n)_{m \in \mathbb{N}_1}$, agora em $\mathcal{E}(I)$, nas condições anteriores, e notar que a sucessão:

$$\psi_n = \max\{\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^n\} \in \mathcal{E}(I),$$

satisfaz precisamente a:

- $\psi_n \uparrow f\ p.p.,$
- $\displaystyle\int_I \psi_n \xrightarrow[n]{} \int_I f,$

como vimos na referida demonstração.

Vejamos, finalmente, o que se pode fazer para funções $f \in \mathcal{L}(I)$; sabemos, por definição, que existem $h, k \in \mathcal{S}(I)$ tais que:

$$f = h - k.$$

podemos escolher sucessões $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{E}(I)$ tais que $\varphi_n \uparrow h\ p.p., \psi_n \uparrow k\ p.p.$; temos assim:

- $f_n = \varphi_n - \psi_n \xrightarrow[n]{} h - k = f,$
- $f_n \in \mathcal{E}(I), \forall n \in \mathbb{N}_1$

e:

$$\int_I f_n = \int_I \varphi_n - \int_I \psi_n \xrightarrow[n]{} \int_I h - \int_I k = \int_I f.$$

Além disso os f_n podem ser dominados por uma função de $\mathcal{L}(I)$; basta notar que:

$$\begin{aligned}|f_n| = |\varphi_n - \psi_n| &= |\varphi_n - \varphi_1 - (\psi_n - \psi_1) + \varphi_1 - \psi_1| \leq \\ &\leq (\varphi_n - \varphi_1) + (\psi_n - \psi_1) + |\varphi_1 - \psi_1| \leq \\ &\leq h - \varphi_1 + k - \psi_1 + |\varphi_1 - \psi_1| \in \mathcal{L}(I).\end{aligned}$$

Concluímos assim que *qualquer função de* $\mathcal{L}(I)$ *pode ser aproximada* $p.p.$ *por uma sucessão de funções em escada, uniformemente majorada em módulo por uma função somável (ou seja, a sucessão converge "dominadamente").*

9.1 Propriedades algébricas das funções em escada

Das propriedades algébricas de $\mathcal{E}(I)$ são triviais as que caracterizam $\mathcal{E}(I)$ como sub-álgebra de $\mathcal{R}(I)$; com efeito, se $f, g \in \mathcal{E}(I)$ é imediato, a partir da definição de função em escada, que $f + g$ e $\lambda f \in \mathcal{E}(I)$, e para verificar que $f.g \in \mathcal{E}(I)$ basta notar que o produto de funções características é a função característica da intersecção. As propriedades relativas ao max, min, $|\,.\,|$, partes positiva e negativa, etc. exigem demonstração mais elaborada; como veremos adiante, resulta de propriedades elementares dos intervalos que se pode exprimir f e g como *combinações lineares de funções características dos mesmos intervalos, disjuntos dois a dois.* Ou seja, existe uma família $\{K_1, \ldots, K_l\}$ de intervalos limitados contidos em I e dois a dois disjuntos, tais que, em I:

$$f = \sum_{k=1}^{l} a_k \chi_{K_k},\ g = \sum_{k=1}^{l} b_k \chi_{K_k}\ (a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{R}).$$

Agora é fácil concluir as referidas demonstrações; de modo geral, se:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

satisfazem a:

$$F(0,0) = G(0) = 0,$$

ter-se-á:

$$F(f(x), g(x)) = \sum_{k=1}^{l} F(a_k, b_k)\chi_{K_k}(x),\ G(f(x)) = \sum_{k=1}^{l} G(a_k)\chi_{K_k}(x)$$

(como é fácil verificar, examinando as diversas situações possíveis para x: $x \in K_k$ para certo k ou $x \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{l} K_k$). Portanto:

$$F \circ (f, g) \in \mathcal{E}(I),\ G \circ f \in \mathcal{E}(I),$$

o que inclui os casos todos atrás referidos.

A possibilidade de exprimir f e g do modo atrás referido resulta, por exemplo, da seguinte construção; se tivermos à partida:

$$f=\sum_{j=1}^{m}c_j\chi_{I_j},\; g=\sum_{k=1}^{n}d_k\chi_{J_k}\;(c_1,\ldots,c_m,d_1,\ldots,d_n\in\mathbb{R}),$$

podemos, para cada $i=1,\ldots,N$, ordenar os extremos das *projecções* de índice i de todos os intervalos I_j e J_k, obtendo números reais:

$$a_i^1<\cdots<a_i^{m_i}\;(i=1,\ldots,N).$$

Fazendo agora todos os possíveis produtos cartesianos da forma:

$$\prod_{i=1}^{N}[a_i^{j_i},a_i^{j_i+1}]\;(j_1\in\{1,\ldots,m_1\},\ldots,j_N\in\{1,\ldots,m_N\}),$$

obtemos uma família $\{K_1',\ldots,K_m'\}$ de intervalos fechados; a união das respectivas fronteiras pode ser decomposta na união disjunta de intervalos degenerados, de acordo com a Observação 5) do Capítulo 1[5]. Seja então $\{K_1,\ldots,K_q\}$ constituído exactamente pelos interiores dos K_l' e pelas "componentes" disjuntas, atrás referidas, das respectivas fronteiras, portanto intervalos dois a dois disjuntos. O modo como os K_l foram construídos garante que dado um dos K_l e um dos I_j (ou J_k), ou se não intersectam, ou $K_l\subset I_j$ (resp. $K_l\subset J_k$); para demonstrar estes factos podemos servir-nos de argumentos semelhantes aos utilizados, por exemplo, na demonstração da Proposição 1.2 (*cf.* também Observação 11) do Capítulo 1). Com efeito, cada K_l será igual a um produto cartesiano em que cada factor de índice i $(i=1,\ldots,N)$ ou é um intervalo aberto de extremos iguais a certos $a_i^{j_i},a_i^{j_i+1}$, ou é um intervalo degenerado coincidente com certo $a_i^{j_i}$; se $K_l\cap J\neq\emptyset$, para certo J igual a um dos I_j ou a um dos J_k, considerando $x\in$ $\in K_l\cap J$, ter-se-á, para certos índices i:

$$\begin{cases}a_i^{j_i}<x_i<a_i^{j_i+1}\\ a_i^J\le x_i\le b_i^J\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_i^{j_i}<b_i^J\\ a_i^J<a_i^{j_i+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_i^{j_i+1}\le b_i^J\\ a_i^J\le a_i^{j_i}\end{cases},$$

e para os restantes:

$$\begin{cases}x_i=a_i^{j_i}\\ a_i^J\le x_i\le b_i^J\end{cases}\Rightarrow a_i^J\le a_i^{j_i}\le b_i^J,$$

atendendo a que os a_i^J,b_i^J são valores da sequência (crescente em j) dos a_i^j. As desigualdades provam que, de facto, $K_l\subset J$. Para exprimir f como combinação linear dos χ_{K_l} basta agora proceder do seguinte modo: se l for tal que K_l *não intersecta nenhum dos* I_j pomos $a_l=0$; caso contrário:

---

[5]Na referida observação considerava-se apenas *um* intervalo, mas é fácil concluir, neste caso, que o mesmo raciocínio se pode aplicar à *união das fronteiras* dos intervalos em apreço, atendendo ao modo como estes foram construídos.

$$\bullet\ a_l = \sum_{K_l \subset I_j} c_j.$$

É fácil concluir que:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{q} a_l \chi_{K_l}(x), \forall x \in I;$$

Do mesdo modo se pode proceder para g.

9.2 $\mathcal{L}(I)$ como espaço semi-normado

As propriedades de aproximação por funções em escada em $\mathcal{L}(I)$ podem exprimir-se utilizando a linguagem da Topologia. Em $\mathcal{L}(I)$ é *semi-norma* a função:

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|,$$

como é fácil verificar (não é *norma* pois $\|f\|_1 = 0$ apenas garante que $f = 0\ p.p.$ e não que $f \equiv 0$). Sabemos que se $f \in \mathcal{L}(I)$ existe $\varphi_n \in \mathcal{E}(I) \subset \mathcal{L}(I), g \in \mathcal{L}(I)$, tais que $\varphi_n \xrightarrow[n]{} f\ p.p.$ e $|\varphi_n| \leq g\ p.p.$. Portanto:

$$\bullet\ |\varphi_n - f| \xrightarrow[n]{} 0\ p.p.;\ |\varphi_n - f| \leq g + |f|\ p.p.,$$

donde, pelo Teorema de Lebesgue, $\int_I |\varphi_n - f| \xrightarrow[n]{} 0$, pelo que $\|\varphi_n - f\|_1 \xrightarrow[n]{} 0$, o que permite concluir que $\mathcal{E}(I)$ *é parte densa do espaço semi-normado* $\mathcal{L}(I)$. Veremos adiante como este facto pode ser utilizado no cálculo explícito de integrais (*cf.* Exemplo 4 da secção 12.3)

Exercício

59) Complete as demonstrações das propriedades das funções em escada enunciadas na Secção 9.1.

Capítulo 10

Integral de Lebesgue e integrais impróprios

Os teoremas de aproximação do Capítulo 8 permitem-nos, por exemplo, analisar mais sistematicamente a relação existente entre a noção de função somável e de função com *"integral impróprio convergente"*. Já atrás vimos que a função $1/\sqrt{x}$ é *somável* em $]0,1]$ (é mesmo *função superior*), não o sendo já a função $1/x$. Antes de prosseguirmos esse estudo notemos alguns factos triviais acerca de funções somáveis:

• *Se f é somável em I e I' é intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^N$ contido em I, então $f_{/I'}$ é somável em I'* [6].

• *Se $I = I' \cup I''$, I', I'' intervalos não degenerados disjuntos e $f : I \to \mathbb{R}$ é tal que $f_{/I'} \in \mathcal{L}(I'), f_{/I''} \in \mathcal{L}(I'')$, então $f \in \mathcal{L}(I)$, tendo-se $\int_I f = \int_{I'} f + + \int_{I''} f$* [7].

Suponhamos agora que $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ é tal que $f_{/[a,b]} \in \mathcal{L}([a,b]), \forall b > a$ $(a, b \in \mathbb{R})$, tendo-se:

$$\int_a^b |f| = \int_{[a,b]} |f|_{/[a,b]} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}.$$

Provemos que $f, |f| \in \mathcal{L}([a, +\infty[)$ e que $\int_a^{+\infty} |f| = \mathcal{I}, \int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$, ou seja, que os integrais impróprios *absolutamente convergentes* são, afinal, integrais *de Lebesgue* de funções *somáveis*. Para isso consideremos, para $n > a$, $n \in \mathbb{N}_1$:

---

[6]Basta começar por demonstrar este facto para $f \in \mathcal{S}(I)$, o que é imediato, pensando numa sucessão aproximante em $\mathcal{R}(I)$ $f_n \uparrow f$ *p.p.* em I e notando que $f_{n/I'} \uparrow f_{/I'}$ *p.p.* em I', tendo-se:

$$\int_{I'} f_{n/I'} = \int_{I'} (f_n - f_1)_{/I'} + \int_{I'} f_{1/I'} \leq \int_I (f_n - f_1) + \int_{I'} f_{1/I'} \leq C,$$

por definição de sucessão aproximante e propriedades conhecidas do integral de Riemann.

[7]Mais uma vez basta fazer a demonstração para $f \in \mathcal{S}(I)$, o que resulta imediatamente de considerar φ_n, ψ_n sucessões em $\mathcal{R}(I)$, aproximantes de $f_{/I'}$ e $f_{/I''}$ respectivamente, e a partir delas construir f_n, igual a φ_n em I' e a ψ_n em I'', donde resulta trivialmente que f_n é sucessão aproximante de f, e portanto que $f \in \mathcal{S}(I)$).

$$f_n = f \cdot \chi_{[a,n]}.$$

Tem-se, evidentemente, $f_n \in \mathcal{L}([a,+\infty[)$, pois $f_{n/[a,n]} = f_{/[a,n]} \in \mathcal{L}([a,n])$, por hipótese, e $f_{n/[n,+\infty[} \equiv 0 \in \mathcal{L}(]n,+\infty[)$, donde, pela observação acima feita, podemos concluir. Por outro lado:

- $|f_n| \uparrow |f|$ em $[a,+\infty[$ (pontualmente),
- $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} |f_n| = \int_a^n \left|f_{/[a,n]}\right| + \int_n^{+\infty} 0 = \int_a^n |f| \xrightarrow[n]{} \mathcal{I}$,

donde, pelo Teorema de Beppo Levi, $|f| \in \mathcal{L}([a,+\infty[)$, $\int_a^{+\infty}|f| = \mathcal{I}$. Mas também se tem agora:

- $f_n \xrightarrow[n]{} f$ em $[a,+\infty[$,
- $|f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}([a,+\infty[)$,

donde, pelo Teorema de Lebesgue:

- $\displaystyle f \in \mathcal{L}([a,+\infty[), \int_a^{+\infty} f = \lim_n \int_a^n f$

(por abuso de linguagem denotámos $\int_{[a,n]} f_{/[a,n]}$ por $\int_a^n f$, etc.).

Que se poderá dizer dos integrais impróprios *simplesmente convergentes*, ou seja, tais que o integral do módulo *não é* convergente, embora o seja o integral da função considerada? Pensemos, por exemplo em:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx;$$

tem-se:

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\, dx,$$

e existe o limite desta expressão quando $b \to +\infty$ pois $(\cos b)/b \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$ e o integral do último membro converge, visto que $|\cos x|/x^2 \leq 1/x^2$ que tem integral convergente (critério de comparação). Portanto $(\sin x)/x$ tem integral convergente em $[1,+\infty[$; como se prolonga por continuidade à origem ($\lim\limits_{x\to 0}$ $(\sin\ x)/x = 1$), concluímos que é convergente o integral considerado. No entanto, se pensarmos no integral do módulo, temos:

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{(k+1)\pi},\end{aligned}$$

donde:

$$\int_{\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\underset{n}{\longrightarrow}+\infty.$$

É fácil concluir que $(\sin x)/x \notin \mathcal{L}([\pi,+\infty[)$ (*a fortiori*, $(\sin x)/x \notin \mathcal{L}(]0,+\infty[)$, pois se estivesse nesse espaço ter-se-ia também $|(\sin x)/x| \in \mathcal{L}([\pi,+\infty[)$ e como:

- $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| .\chi_{[\pi,n\pi]}(x) \underset{n}{\longrightarrow} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ em $[\pi,+\infty[$
- $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| .\chi_{[\pi,n\pi]}(x) \leq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, \forall x \in [\pi,+\infty[, n \in \mathbb{N}_1,$

ter-se-ia, pelo Teorema de Lebesgue, $\int_{\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \underset{n}{\longrightarrow} \int_{[\pi,+\infty]}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx < +\infty$, contra o que atrás se viu.

Concluímos assim que a noção de integral de Lebesgue engloba a de integral impróprio *absolutamente convergente* mas não a de integral *simplesmente convergente*.

Evidentemente, tudo o que se fez para integrais impróprios em $[a,+\infty[$ se estende *mutatis mutandis* aos casos $]-\infty,a]$, $]-\infty,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$, $]a,b]$, $[a,b[$ e $]a,b[$.

10.1 Função Gama

Examinemos um exemplo importante de integral impróprio absolutamente convergente:

$$\bullet\ \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx;$$

vejamos para que valores de t é *somável* a função $x \mapsto \exp(-x)\,x^{t-1}$; fixado t em $\mathbb{R}$, notemos que:

$$\frac{e^{-x}x^{t-1}}{e^{-\frac{x}{2}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

donde existe $C > 0$ tal que $|\exp(-x)\,x^{t-1}| \leq \exp(-x/2), \forall x \geq C$. Ora $\exp(-x/2)$ tem manifestamente integral convergente em $[C,+\infty[$ ($\int_c^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = [-2\exp(-x/2)]_C^{+\infty} = 2\exp(-C/2)$) donde, pelo critério de comparação, é convergente em $[C,+\infty[$ o integral de $\exp(-x)\,x^{t-1}$, ou seja, $\exp(-x/2).$ $.x^{t-1} \in \mathcal{L}([C,+\infty[)$ (visto ser *positiva*). Em $]0,C[$ tem-se $\exp(-x).$ $.x^{t-1} \leq 1/x^{1-t}$ que tem integral convergente sse $1-t<1$, ou seja, $t>0$; atendendo a que também $\exp(-x)\,x^{t-1} \geq \exp(-C)\,(1/x^{1-t})$ concluímos que

$\exp(-x)\,x^{t-1}$ é somável em $]0,C[$ sse $t>0$. Portanto $x\mapsto\exp(-x)\,x^{t-1}$ é somável em $]0,+\infty[$ sse $t>0$, o que mostra que podemos definir $\Gamma:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ (*função Gama*).

Exercícios

60) Mostre que:

a) $1/x^\alpha\in\mathcal{L}([1,+\infty[)$ sse $\alpha>1$;

b) $1/x^\alpha\in\mathcal{L}(]0,1])$ sse $\alpha<1$.

61) Seja $a\in\mathbb{R}$ e suponha que $f:[a,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ é somável em qualquer intervalo compacto $[a,b]$ (f diz-se *localmente somável*); mostre que:

a) Se existir $\alpha>1$ tal que $\overline{\lim_{x\to+\infty}}(x^\alpha|f(x)|)<+\infty$, então f é somável.

b) Se existir $\alpha\le 1$ tal que $\underline{\lim_{x\to+\infty}}(x^\alpha|f(x)|)>0$, então f não é somável.

62) Estude as seguintes funções quanto à somabilidade nos domínios indicados:

a) $\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2}$ em $[0,+\infty[$. **b)** $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ em $[1,+\infty[$.

c) $\frac{x\log x}{1+x^2}$ em $[0,+\infty[$. **d)** $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ em $[0,+\infty[$.

Capítulo 11

Funções mensuráveis

Convém-nos estudar sistematicamente as funções que podem ser aproximadas $p.p.$ por funções em escada.

DEFINIÇÕES: $f : I \to \mathbb{R}$ dir-se-á *mensurável* se existir uma sucessão $\varphi_n \in \in \mathcal{E}(I)$ tal que:

$$\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} f \; p.p. \text{ em } I;$$

designaremos por $\mathcal{M}(I)$ o *conjunto das funções mensuráveis em* I.

Pelo que vimos no Capítulo 9, qualquer $f \in \mathcal{L}(I)$ é *mensurável*, ou seja, tem-se:

$$\mathcal{L}(I) \subset \mathcal{M}(I).$$

É agora fácil concluir que:

PROPOSIÇÃO 11.1: *$f \in \mathcal{L}(I)$ sse $f \in \mathcal{M}(I)$ e existir $g \in \mathcal{L}(I)$ tal que $|f| \leq \leq g \; p.p.$.*

Demonstração: Já sabemos que se $f \in \mathcal{L}(I)$, então $f \in \mathcal{M}(I)$ e $|f| \in \mathcal{L}(I)$. Reciprocamente, se $f \in \mathcal{M}(I)$, existe uma sucessão $\varphi_n \in \mathcal{E}(I)$ tal que $\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ $p.p.$; supondo que, $p.p.$, $|f| \leq g \in \mathcal{L}(I)$, pelo Corolário 2 do Teorema de Lebesgue, virá $f \in \mathcal{L}(I)$.□

COROLÁRIO: *$f \in \mathcal{L}(I)$ sse $f \in \mathcal{M}(I)$ e $|f| \in \mathcal{L}(I)$.*□

PROPOSIÇÃO 11.2: *Sejam $f, g \in \mathcal{M}(I)$.*

1. Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forem funções contínuas tais que $\varphi(0) = = \psi(0,0) = 0$, então:

$$\varphi \circ f \in \mathcal{M}(I), \psi \circ (f, g) \in \mathcal{M}(I);$$

em particular:

$$f^+, f^-, |f|, f + g, \lambda f \; (\lambda \in \mathbb{R}), f.g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{M}(I).$$

2. Se $g \neq 0 \; p.p.$ em I, qualquer função igual a f/g nos pontos em que $g \neq 0$ é mensurável.

Demonstração: 1. Basta considerar sucessões em $\mathcal{E}(I)$, φ_n, ψ_n, tais que $\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ *p.p.*, $\psi_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ *p.p.* (por definição de $\mathcal{M}(I)$) e notar que $\psi \circ (\varphi_n, \psi_n)$ é uma sucessão em $\mathcal{E}(I)$ que converge para $\psi \circ (f, g)$ nos pontos em que $\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ e $\psi_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ simultaneamente (portanto *p.p.*), por continuidade de ψ (*cf.* secção 9.1). De modo análogo se prova que $\varphi \circ f \in \mathcal{M}(I)$.

2. Tomando $\psi_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ *p.p.* em I, $\psi_n \in \mathcal{E}(I)$, se considerarmos:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{se } \psi_n(x) \neq 0 \\ 1 & \text{se } \psi_n(x) = 0 \end{cases},$$

nos pontos em que simultaneamente $g(x) \neq 0$ e $\psi_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} g(x)$ ter-se-á também $\tilde{\psi}_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} g(x)$, pois, nesses pontos, a partir de certa ordem virá $\psi_n(x) \neq 0$, donde $\tilde{\psi}_n(x) = \psi_n(x)$. Portanto $\tilde{\psi}_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} g(x)$ *p.p.*, $\tilde{\psi}_n(x) \neq 0$, pelo que $\varphi_n(x)/\tilde{\psi}_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)/g(x)$ *p.p.*; ora é fácil concluir que $\varphi_n/\tilde{\psi}_n \in \mathcal{E}(I)$, notando que esta função é nula onde φ_n o for. Logo, de facto, $f/g \in \mathcal{M}(I)$.□

PROPOSIÇÃO 11.3: *Se f_n for uma sucessão em $\mathcal{M}(I)$ tal que $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ p.p. em I, então $f \in \mathcal{M}(I)$.*

Demonstração: Comecemos por notar que existem funções g em $\mathcal{L}(I)$ *estritamente positivas*. Basta verificar que existem tais funções em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, atendendo a que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f_{/I} \in \mathcal{L}(I)$ (ver início do Capítulo 10); um exemplo é:

$$g(x) = \frac{1}{1+x_1^2} \times \cdots \times \frac{1}{1+x_N^2} \; (x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N).$$

De facto, pondo:

$$g_n(x) = g(x).\chi_{[-n,n]^N}(x),$$

tem-se:

$$\bullet\ g_n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N),$$

pois é nula fora de $[-n, n]^N$ e aí *contínua*; portanto $g_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$,

$$\bullet\ g_n \uparrow g \text{ em todos os pontos de } \mathbb{R}^N,$$

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^N} g_n = \int_{[-n,n]^N} g_n = \int_{-n}^{n}\left(\cdots\int_{-n}^{n}\frac{1}{1+x_1^2}\times\cdots\times\frac{1}{1+x_N^2}\,dx_1\right)\cdots dx_N =$$

$$= \left(\int_{-n}^{n}\frac{1}{1+x_1^2}\,dx_1\right)\cdots\left(\int_{-n}^{n}\frac{1}{1+x_N^2}\,dx_N\right) \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\right)^N = \pi^N$$

(pelo Teorema de Fubini para o integral de Riemann). Logo, pelo Teorema de Beppo Levi, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e, evidentemente, $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Seja então:

$$F_n = g\frac{f_n}{1+|f_n|} \in \mathcal{M}(I);$$

tem-se:

$$|F_n| < g \in \mathcal{L}(I) \Rightarrow F_n \in \mathcal{L}(I), \forall n \in \mathbb{N}_1$$

(Proposição 11.1). Além disso:

$$F_n(x) \xrightarrow[n]{} g(x)\frac{f(x)}{1+|f(x)|} \ p.p.,$$

donde, pelo Teorema de Lebesgue, $F = gf/(1+|f|) \in \mathcal{L}(I)$; ora:

$$|F| = g\frac{|f|}{1+|f|} \Rightarrow |f| = \frac{|F|}{g-|F|}, |F| < g.$$

Como F tem o sinal de f, visto que $g > 0$, vem:

$$f = \frac{F}{g-|F|} \in \mathcal{M}(I),$$

já que $g - |F| > 0$.□

COROLÁRIO: *1. Se f for contínua em I, então $f \in \mathcal{M}(I)$.*

2. Se $f, g \in \mathcal{M}(I)$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem contínuas, então $F \circ (f,g), G \circ f$ são mensuráveis em I.

Demonstração: 1. Se f for contínua em I, então:

$$f.\chi_J \in \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{M}(I)$$

para qualquer intervalo compacto $J \subset I$, já que é nula fora de J e é aí contínua. Sendo:

$$J_n = \prod_{i=1}^{N} [a_n^i, b_n^i],$$

onde $I = \prod_{i=1}^{N} |a_i, b_i|$ (intervalos abertos ou fechados, limitados ou não) e $a_n^i = a_i + 1/n$ se $a_i \neq -\infty$, $a_n^i = -n$ se $a_i = -\infty$ e analogamente para b_n^i, então, para n suficientemente grande, vem $J_n \neq \emptyset$ e compacto, tendo-se evidentemente:

$$f.\chi_{J_n} \underset{n}{\longrightarrow} f \text{ } p.p. \text{ em } I,$$

pelo que, pelo Teorema anterior, $f \in \mathcal{M}(I)$.

2. Se φ_n,$\psi_n \in \mathcal{E}(I)$ e $\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ *p.p.*, $\psi_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ *p.p.*, $F \circ (\varphi_n, \psi_n)$ e $G \circ \varphi_n$ podem não ser funções em escada pois vêm iguais respectivamente a $F(0,0)$ e $G(0)$ fora de um limitado. São-no, no entanto, as funções:

$$F_n = (F \circ (\varphi_n, \psi_n)).\chi_{J_n},\ G_n = (G \circ \varphi_n).\chi_{J_n}$$

onde os J_n são escolhidos como na demonstração anterior (*cf.* secção 9.1). Além disso vem obviamente:

$$F_n \underset{n}{\longrightarrow} F \circ (f, g) \text{ } p.p., \text{ e } G_n \underset{n}{\longrightarrow} G \circ f \text{ } p.p.,$$

pelo que, de facto, $F \circ (f, g), G \circ f \in \mathcal{M}(I)$.□

Observações: 1) Os Teoremas anteriores mostram que a classe das funções mensuráveis é extremamente vasta; com efeito, demonstra-se que a existência de funções *não mensuráveis* depende do *axioma da escolha*.

2) É fácil concluir que as observações feitas no início do Capítulo 10 valem para funções mensuráveis; ou seja, *"se $J \subset I$ e $f \in \mathcal{M}(I)$, então $f_{/J} \in \mathcal{M}(J)$"* e *"se $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é tal que $f_{/I_1}, f_{/I_2} \in \mathcal{M}(I_1), \mathcal{M}(I_2)$, respectivamente, então $f \in \mathcal{M}(I)$"*, onde, evidentemente, J, I_1, I_2 são intervalos não degenerados.

3) Se $I \subset \mathbb{R}^N$, dada $f : I \to \mathbb{R}$ conclui-se facilmente que $f \in \mathcal{M}(I)$ sse está em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ o prolongamento por zero de f a $\mathbb{R}^N$, $\widetilde{f}$. Assim, se $A \subset \mathbb{R}^N$, podemos estender de modo coerente a definição de mensurabilidade a funções definidas em A, pondo:

$$\mathcal{M}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid \widetilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)\},$$

onde, evidentemente, $\widetilde{f}$ é o prolongamento por zero de f a $\mathbb{R}^N$.

4) Os Teoremas de Beppo Levi e Lebesgue garantem que se $f_n \uparrow f$ *p.p.* em I, $f_n \in \mathcal{L}(I), \forall n \in \mathbb{N}_1$, a única hipótese de f *não ser somável* é *não ser limitada* a sucessão *crescente:*

$$\int_I f_n;$$

mas, nesse caso, $\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$ e a função f é mensurável. Por outras palavras, f *não será somável* sse os integrais dos f_n tenderem para $+\infty$. Se definíssemos o integral de f mensurável *não somável* como sendo $+\infty$, poderíamos generalizar parcialmente o Teorema de Beppo Levi ao caso em que a sucessão dos integrais não é limitada, garantindo-se *sempre* que se pode *permutar a passagem ao limite com a integração se $f_n \uparrow f$ p.p., sendo os f_n somáveis*. No entanto, apenas convém introduzir esta generalização da noção de integral *no caso em que f é não negativa p.p.*, pois, caso contrário, para as funções com integral impróprio *simplesmente convergente*, teríamos acabado de dar nova noção de integral, tomando o valor $+\infty$! a restrição às funções "positivas" permite, além disso, generalizar as propriedades operatórias conhecidas, nomeadamente a "linearidade", como é fácil verificar.

DEFINIÇÃO: Se $f \in \mathcal{M}(I) \setminus \mathcal{L}(I)$ e $f \geq 0\, p.p.$, dizemos que f tem *integral* (de Lebesgue) $+\infty$, e escrevemos:

$$\int_I f = +\infty.$$

Observação: 5) Podemos agora reenunciar o Corolário da Proposição 11.1; ter-se-á:

$$\text{“}f \in \mathcal{L}(I) \textit{ sse } f \in \mathcal{M}(I) \textit{ e } \int_I |f| < +\infty.\text{”}$$

Exercício

63) Demonstre as asserções contidas nas Observações 2) a 4).

Capítulo 12

Integral paramétrico de Lebesgue

Vimos na Secção 10.1 que fazia sentido definir $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ por:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\, dx.$$

Põe-se agora a questão de saber se Γ é *contínua*, *diferenciável*, etc.; vamos ver como os teoremas de aproximação estudados no Capítulo 8 nos permitem estudar estas questões, de modo geral, para integrais de Lebesgue *paramétricos*. Basta impor às funções em questão propriedades suficientes para se poderem efectuar as passagens ao limite requeridas, por aplicação do Teorema de Lebesgue; temos assim:

12.1 Continuidade

PROPOSIÇÃO 12.1: *Sejam I, J intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$, tais que:*

- *Para cada $t \in I$, a função $x \mapsto f(t, x)$ é mensurável em J;*
- *existe $g \in \mathcal{L}(J)$ tal que $|f(t, x)| \leq g(x)$ p.p. em $J, \forall t \in I$;*
- $\lim\limits_{t \to t_0} f(t, x) = f(t_0, x)$ *p.p. em J;*

então, para cada $t \in I$ é somável em J a função $x \mapsto f(t, x)$ e é contínua em t_0 a função $F : J \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\bullet\ F(t) = \int_J f(t, x)\, dx, \forall t \in I.$$

Demonstração: Comecemos por notar que, para cada $t \in I$, a função $x \mapsto f(t, x)$ é *mensurável* e majorada em módulo pela função g que é somável; logo tal função é *somável*, pela Proposição 11.1. Considerando agora:

$$t_n \underset{n}{\longrightarrow} t_0, t_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

virá, por hipótese:

$$f(t_n, x) \underset{n}{\longrightarrow} f(t_0, x) \; p.p. \text{ em } J.$$

Então a sucessão de funções $x \mapsto f(t_n, x)$ está nas condições do Teorema de Lebesgue (trata-se de uma sucessão de funções *somáveis* dominada em módulo pela função $g \in \mathcal{L}(J)$ e convergindo $p.p.$ para $f(t_0, x)$); portanto:

$$F(t_n) = \int_J f(t_n, x)\, dx \underset{n}{\longrightarrow} \int_J f(t_0, x)\, dx = F(t_0),$$

o que prova a continuidade de F em t_0.□

12.2 Diferenciabilidade

PROPOSIÇÃO 12.2 (Teorema de Leibniz–Lebesgue): *Sejam I, J intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ tal que:*

- *Para cada $t \in I$, a função $x \mapsto f(t, x)$ é mensurável em J;*
- *para certo $t_0 \in I$ a função $x \mapsto f(t_0, x)$ é somável em J;*
- *para quase todos os $x \in J$ é diferenciável em I a função $t \mapsto f(t, x)$;*
- *existe $g \in \mathcal{L}(J)$ tal que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x)$ $p.p.$ em $J, \forall t \in I$;*

então são somáveis em I, para cada $t \in I$, as funções $x \mapsto f(t, x), \partial f/\partial t\,(t, x)$ e é diferenciável em I a função $F : I \to \mathbb{R}$, tal que:

$$F(t) = \int_J f(t, x)\, dx, \forall t \in I,$$

tendo-se:

$$F'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, dx, \forall t \in I.$$

Demonstração: Comecemos por notar que, pelo Teorema de Lagrange, para cada $t \in I \setminus \{t_0\}$ se tem, $p.p.$ em J:

$$\left|\frac{f(t, x) - f(t_0, x)}{t - t_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi, x)\right| \leq g(x),$$

donde:

$$|f(t, x)| \leq |f(t_0, x)| + |t - t_0| g(x) \; p.p. \text{ em } J,$$

e como, por hipótese, $x \mapsto |f(t_0, x)| + |t - t_0| g(x)$ *é somável*, vem também somável a função $x \mapsto f(t, x)$, visto ser mensurável e dominada, em módulo, por uma função somável (*cf.* Proposição 11.1). Seja agora $h_n \underset{n}{\longrightarrow} 0, h_n \neq 0, t \in I$, tais que $t + h_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}_1$; então:

- $\dfrac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n} \underset{n}{\longrightarrow} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, p.p.$ em J;
- $\left|\dfrac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n}\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(\xi,x)\right| \leq g(x) \in \mathcal{L}(J), p.p.$ em J;
- $x \mapsto \dfrac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n} \in \mathcal{L}(J), \forall n \in \mathbb{N}_1$;

podemos portanto aplicar o Teorema de Lebesgue, o que nos permite concluir que $x \mapsto \partial f/\partial t\,(t,x) \in \mathcal{L}(J)$ e:

$$\frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n} = \frac{\int_J f(t+h_n,x)\,dx - \int_J f(t,x)\,dx}{h_n} =$$
$$= \int_J \frac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n}\,dx \underset{n}{\longrightarrow} \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx,$$

ou seja:

$$F'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx.\square$$

Observação: 1) A função $x \mapsto \partial f/\partial t\,(t,x)$ apenas está definida $p.p.$, pelo que, no enunciado da proposição anterior, será necessário atender à convenção introduzida na Observação 3) da secção 7.3.

12.3 Exemplos

Vejamos alguns exemplos de aplicação destes teoremas.

Exemplo 1: Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2}\,dx.$$

Tem-se:

$$\left|\frac{\cos(tx)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}([1,+\infty[), \forall t \in \mathbb{R}, x \in [1,+\infty[$$

(de facto $1/x^2$ tem integral *impróprio* em $[1,+\infty[$ absolutamente convergente, sendo portanto somável). Como a função $x \mapsto \cos(tx)/x^2$ é contínua (e portanto *mensurável*), concluímos que F é *contínua* em todos os pontos. Podíamos pensar em utilizar o Teorema de Lebesgue para tentar estudar o limite de F no infinito; surge-nos um problema resultante de não existir $\lim\limits_{t\to+\infty} \cos(tx)/x^2$ para $x \in [1,+\infty[$. Veremos adiante (Exemplo 4) que, apesar de tudo, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ existe e é igual a *zero*. Do mesmo modo é difícil aplicar o resultado anterior ao estudo da diferenciabilidade de F pois a derivada em ordem a t da função integranda é $-\sin(tx)/x$ e $1/x \notin \mathcal{L}([1, +\infty[)\ldots$ veremos (também no Exemplo 4) que, apesar de tudo, neste caso, alguns cálculos simples permitem determinar a derivada em questão.

Exemplo 2:

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx;$$

embora este integral se possa calcular explicitamente, podemos estudá-lo utilizando os teoremas anteriores. Temos:

$$|e^{-tx}| \leq e^{-ax}, \forall x \in [0, +\infty[, t \in [a, +\infty[, a > 0;$$

ora:

$$e^{-ax} \in \mathcal{L}([0, +\infty[),$$

donde F é *contínua* em $[a, +\infty[, \forall a > 0$, e portanto é contínua em $]0, +\infty[$. Derivando a função integranda, obtém-se:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}(e^{-tx})\right| = |-xe^{-tx}| \leq xe^{-ax}, \forall x \in [0, +\infty[, t \in [a, +\infty[, a > 0;$$

como $x\,\exp(-ax)$ é também somável em $[0, +\infty[$, concluímos que F é derivável em $[a, +\infty[, \forall a > 0$, ou seja, F é derivável em $]0, +\infty[$, e:

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}(e^{-tx})\, dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-tx}\, dx.$$

Como $F(t) = [-\exp(-tx)/t]_0^{+\infty} = 1/t$, vem $F'(t) = -1/t^2$, pelo que:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-tx}\, dx = \frac{1}{t^2}$$

(pudémos assim calcular este integral sem integração por partes; em certos casos este processo permite-nos calcular integrais para os quais falham os processos habituais de primitivação da função integranda).

Exemplo 3: Examinemos a função $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida na secção 10.1; temos:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\, dx.$$

A função integranda é *contínua* em t e $x, \forall t, x \in]0, +\infty[$ e, para cada $t > 0$, é, como vimos, *somável* em $]0, +\infty[$. Para provar a continuidade de Γ é suficiente majorar $\exp(-x)\, x^{t-1}$ por uma função de x somável em $]0, +\infty[$, com t arbitrário na vizinhança de cada $t_0 \in]0, +\infty[$. Basta assim majorar a função integranda com $t \in [a, b]$, para cada a, b fixados ($0 < a < b$); ora:

$$\left|e^{-x}x^{t-1}\right| = e^{-x}x^{t-1} = e^{-x}e^{(t-1)\log x} \leq \begin{cases} e^{-x}e^{(a-1)\log x} & \text{se } x \in \left]0,1\right] \\ e^{-x}e^{(b-1)\log x} & \text{se } x \in \left]1,+\infty\right[\end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{-x}x^{a-1} & \text{se } x \in \left]0,1\right] \\ e^{-x}x^{b-1} & \text{se } x \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}, \ \forall t \in [a,b],$$

atendendo a que a função $t \mapsto \exp((t-1)\log x)$ é *decrescente* se $\log x \leq 0$ e *crescente* se $\log x > 0$ (em ambos os casos, em sentido lato). Resta então verificar que é *somável* em $]0,+\infty[$ a função g que é igual a $\exp(-x)\, x^{a-1}$ se $x \in]0,1]$ e a $\exp(-x)\, x^{b-1}$se $x \in]1,+\infty[$, para o que basta demonstrar a somabilidade de cada uma destas funções separadamente (atendendo ao que se estabeleceu no início do Capítulo 10). Ora:

$$\left|e^{-x}x^{a-1}\right| \leq \frac{1}{x^{1-a}} \in \mathcal{L}(]0,1]),$$

já que $1-a<1$, e, por outro lado:

$$\frac{e^{-x}x^{b-1}}{e^{-\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{x}{2}}x^{b-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde $\exists c > 0$ tal que:

$$x \in [c,+\infty[\ \Rightarrow \left|\frac{e^{-x}x^{b-1}}{e^{-\frac{x}{2}}}\right| < 1 \Rightarrow e^{-x}x^{b-1} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

em $[c,+\infty[$ e portanto $\exp(-x)\, x^{b-1} \in \mathcal{L}([c,+\infty[)$; como esta função é evidentemente somável em $]1,c[$, virá somável em $]1,+\infty[$, o que termina a demonstração de que $g \in \mathcal{L}(]0,+\infty[)$.

Concluímos assim que Γ é *contínua* em $]a,b[, \forall a,b$ t.q.: $0<a<b$ e portanto Γ é contínua em $]0,+\infty[$.

Quanto à diferenciabilidade, notemos que:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}(e^{-x}x^{t-1})\right| = \left|e^{-x}x^{t-1}\log x\right| = e^{-x}x^{t-1}|\log x| \leq$$

$$\leq \begin{cases} e^{-x}x^{a-1}|\log x| & \text{se } x \in \left]0,1\right] \\ e^{-x}x^{b-1}|\log x| & \text{se } x \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}, \forall t \in [a,b]\ (0<a<b).$$

Mais uma vez é fácil verificar que a função definida no último membro da desigualdade é *somável* em $]0,+\infty[$ pois, por exemplo, se $\varepsilon > 0, 1-a<\varepsilon<1$, vem:

$$\frac{e^{-x}x^{a-1}|\log x|}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}} = e^{-x}x^{\overbrace{a-1+\varepsilon}^{>0}}|\log x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donde existe $\delta > 0$ tal que $\exp(-x)\, x^{a-1}|\log x| < 1/x^{\varepsilon}, \forall x \in]0,\delta]$, e, como $\varepsilon < 1$, $1/x^{\varepsilon} \in \mathcal{L}(]0,\delta])$, donde também:

$$e^{-x}x^{a-1}|\log x| < \frac{1}{x^{\varepsilon}}, \forall x \in \mathcal{L}(]0,\delta]).$$

Nos intervalos da forma $[\delta, c]$ a função é somável pois é contínua e limitada quando restringida a $[\delta, 1]$ e a $]1, c]$ e para certo $c > 0$ majora-se por $\exp(-x/2)$ em $[c, +\infty[$ pelo processo atrás utilizado. Podemos assim concluir que Γ é *diferenciável* em $]0, +\infty[$ e que:

$$\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\log x\, dx.$$

Era agora fácil demonstrar, por indução, que Γ é de classe C^{∞} em $]0, +\infty[$ e calcular $\Gamma^{(n)}(t)$. Terminemos este exemplo com uma propriedade notável de Γ; tem-se:

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^t\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{b\to+\infty}\left(\left[-e^{-x}x^t\right]_{\varepsilon}^{b} + t\int_{\varepsilon}^{b} e^{-x}x^{t-1}\, dx\right) =$$
$$= t\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\, dx = t\Gamma(t), \forall t > 0.$$

Em particular:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\ldots 2.1\Gamma(1)$$
$$= (n-1)!\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = (n-1)!.$$

Exemplo 4: Retomemos o estudo da função do Exemplo 1; vamos ver como os conhecimentos até agora adquiridos nos permitem calcular o limite em $+\infty$ de:

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2}\, dx,$$

ainda que a função integranda não tenha limite quando $t \longrightarrow +\infty$ para nenhum valor de x em $[1, +\infty[$. Comecemos por notar que se, em lugar da função somável (em $[1, +\infty[$) $1/x^2$, aparecesse na função integranda, como factor de $\cos(tx)$, a função característica de um sub-intervalo limitado de $[1, +\infty[$, poderíamos calcular explicitamente o integral e determinar o limite pretendido. Com efeito, sendo I intervalo de extremos a, b $(1 \le a < b < +\infty)$, viria (para $t > 0$):

$$\int_1^{+\infty} \cos(tx).\chi_I\, dx = \int_a^b \cos(tx)\, dx = \frac{\sin(tb) - \sin(ta)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

O mesmo limite teria evidentemente lugar se substituíssemos χ_I por uma combinação linear de funções características do mesmo tipo, ou seja por qualquer *função em escada de* $\mathcal{E}([1, +\infty[)$, parte densa de $\mathcal{L}([1, +\infty[)$ (*cf.* Secção 9.2). Da referida densidade podemos agora deduzir que, em particular, $1/x^2$ pode ser aproximada por uma sucessão φ_n de funções em escada *no sentido da semi-*

norma de $\mathcal{L}([1,+\infty[)$. Provemos então que, de facto, $F(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; dado $\delta > 0$, fixemos $n \in \mathbb{N}_1$ tal que[8]:

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x^2} - \varphi_n(x) \right| dx = \left\| \frac{1}{\widehat{x}^2} - \varphi_n \right\|_1 < \frac{\delta}{2}.$$

Como, pelo que atrás se viu,

$$\int_1^{+\infty} \cos(tx).\varphi_n(x)\, dx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

podemos agora fixar $L > 0$, tal que, para $t \geq L$:

$$\left| \int_1^{+\infty} \cos(tx).\varphi_n(x)\, dx \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Então, para $t > L$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2}\, dx \right| &\leq \int_1^{+\infty} \underbrace{|\cos(tx)|}_{\leq 1} \left| \frac{1}{x^2} - \varphi_n(x) \right| dx + \\ &+ \left| \int_1^{+\infty} \cos(tx).\varphi_n(x)\, dx \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que prova o limite pretendido. Intuitivamente, o que se passa é que à medida que t aumenta, a função (*de* x) $\cos(tx)$ tem período cada vez menor, *"oscilando cada vez mais rapidamente"* entre valores positivos e negativos, pelo que o integral em questão será "soma" de parcelas correspondentes alternadamente às partes positivas e negativas do gráfico de $\cos(tx)$ e que, no limite quando $t \longrightarrow +\infty$, acabam por se "compensar", tornando nula a soma. É notável que a "forma" particular da função $1/x^2$ seja totalmente irrelevante para o resultado final, podendo ser substituída por qualquer função de $\mathcal{L}([1,+\infty[)$.

Procuremos agora estudar a função quanto à diferenciabilidade; podemos, neste caso, para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [9], fazer a mudança de variável $y = tx$. Teremos:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2}\, dx = t \int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^2}\, dy \Rightarrow \\ \Rightarrow F'(t) &= \int_t^{+\infty} \frac{\cos y}{y^2}\, dy - t\, \frac{\cos t}{t^2} = \\ &= \lim_{L\to+\infty} \left(\left[-\frac{\cos y}{y} \right]_t^L - \int_t^L \frac{\sin y}{y}\, dy \right) - \frac{\cos t}{t} = \end{aligned}$$

[8] Utilizaremos a notação "$f(\widehat{x})$" quando pretendermos designar uma função f explicitando a variável independente x. Deste modo, por exemplo, a função "$x \mapsto 1/x^2$" poderá ser designada por "$1/\widehat{x}^2$"

[9] O caso $t = 0$ teria que ser examinado directamente, utilizando os cálculos que se seguem e determinando o limite da razão incremental correspondente, por exemplo pela regra de Cauchy.

$$= \lim_{L\to+\infty}\left(-\int_t^L \frac{\sin y}{y}\,dy\right) = \lim_{L\to+\infty}\left(-\int_1^L \frac{\sin(tx)}{x}\,dx\right) =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{-\sin(tx)}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(tx)}{x^2}\right)dx$$

(pelo teorema fundamental do cálculo integral e utilizando duas integrações por partes), resultado esperado mas que não pode ser obtido por aplicação do Teorema de Leibniz–Lebesgue, visto que o último integral impróprio *não é absolutamente convergente*, não se tratando portanto do integral de Lebesgue de uma função somável, como vimos no Capítulo 10.

Exercícios

64) Mostre que $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2+x^2+x^4}\,dx$ é de classe C^1e calcule a respectiva derivada.

65) Sendo $h(t) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dx\,(t \geq 0)$ mostre que $h(0) = 0$ e $h(t) = 1$ se $t \neq 0$; indique por que razão se não pode aplicar o teorema de continuidade do integral paramétrico.

66) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f é somável em $]-\infty, a]$;

a) Mostre que está bem definida a função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{x} \sin(x-t)\,f(t)\,dt.$$

b) Mostre que y é de classe C^1 e satisfaz à equação $y'' + y = f$.

c) Mostre que $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

67) Seja $\alpha > 0$ fixado e $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,dx\ (\beta \in \mathbb{R})$. Mostre que:

$$\frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta),$$

e conclua que existe uma constante C tal que $I(\beta) = Ce^{-\beta^2/4\alpha}$; determine o valor de C sabendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ *(para o cálculo deste integral cf. Exercício 84)*.

68) Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos x\,dx\ (a > 0)$, derivando em relação a a e integrando por partes. Confronte com o exercício anterior.

69) Verifique que $\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-2|x|), \forall x \in \mathbb{R}$. *(Sugestão: Representando por $\varphi(x)$ o primeiro membro mostre que $\varphi'(x) = -2\varphi(x)$ para $x > 0$, utilizando a substituição $s = 1/t$.)*

70) Por processo semelhante ao utilizado nos exercícios anteriores calcule, justificando, o valor de $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\, dt$ para cada $x > 0$ *(Sol.: $\sqrt{\pi x}$; continua a supor-se conhecido o resultado: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$).*

71) Propomo-nos estudar, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, o integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x}\, dx$. Considere-se o integral auxiliar:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x}\, dx \ (\alpha > 0).$$

a) Mostre que:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

e que, portanto, $I(\alpha, \beta) = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$.

b) Mostre que $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta)$ e deduza daí o valor do integral em apreço para cada $\beta \in \mathbb{R}$.

Capítulo 13

Cálculo de integrais múltiplos de Lebesgue

Analisemos agora a questão da *integrabilidade* do integral paramétrico, ou seja, procuremos demonstrar uma versão do já conhecido Teorema de Fubini, mas, desta vez, para o integral de Lebesgue. Comecemos por examinar o caso de $f \in \mathcal{R}(I \times J)$ $(I, J$, intervalos compactos de $\mathbb{R}$ não degenerados). Temos:

$$\int_{I\times J} f = \int_J \left(\underline{\int}_I f(x,y)\,dx \right) dy = \int_J \left(\overline{\int}_I f(x,y)\,dx \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_J \underbrace{\left(\overline{\int}_I f(x,y)\,dx - \underline{\int}_I f(x,y)\,dx \right)}_{\geq 0} dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\int}_I f(x,y)\,dx - \underline{\int}_I f(x,y)\,dx = 0,$$

para quase todos os $y \in J$. Ou seja, *para quase todos os* $y \in J$*, é integrável à Riemann em* I *a função* $x \mapsto f(x,y)$ *e a função definida p.p. em* J *por* $y \mapsto \int_I f(x,y)\,dx$ *é somável em* J*, tendo-se:*

$$\int_{I\times J} f = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx \right) dy$$

(com efeito, a função $y \mapsto \int_I f(x,y)\,dx$ fica igual *p.p.*, por exemplo a $y \mapsto \underline{\int}_I f(x,y)\,dx$ que é *integrável-R* em J). É sob esta forma (substituindo *integrável-R* por *somável*) que pretendemos estender o Teorema de Fubini. Notemos ainda que podemos enunciar o teorema para $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, já que nos reduzimos a um intervalo compacto não degenerado $I \times J$, fora do qual f é nula. Ter-se-á então:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

13.1 Partes desprezáveis do plano

LEMA: *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ é desprezável sse existir uma família $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de intervalos de $\mathbb{R}^N$ tal que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < +\infty$ e para cada $x \in S$ existir uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}_1$ tais que $x \in I_n$.*

Demonstração: Se S for desprezável, para cada $n \in \mathbb{N}_1$ existe uma família $(J_m^n)_{m\in\mathbb{N}_1}$ tal que:

- $S \subset \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}_1} J_m^n$
- $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}_1} V(J_m^n) < \dfrac{1}{2^n}$.

Então $(J_m^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}_1\times\mathbb{N}_1}$ é uma família numerável de intervalos tal que:

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1}\sum\limits_{m\in\mathbb{N}_1} V(J_m^n) \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} \dfrac{1}{2^n} = 1 < +\infty$;
- Cada $x \in S$ está, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, em certo J_m^n, estando portanto em J_m^n para uma infinidade de pares $(n, m) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$.

Reciprocamente, se $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ estiver nas condições do Teorema, dado $\delta > 0$ existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que:

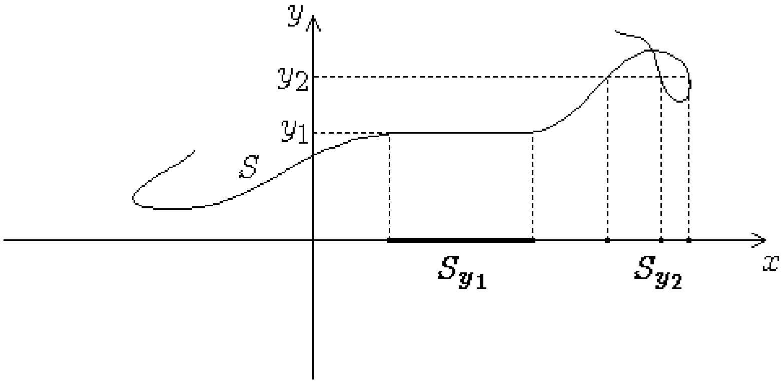
- $\sum\limits_{n\ge p} V(I_n) < \delta$

(é o resto de ordem p da série); além disso é óbvio que $S \subset \bigcup\limits_{n\ge p} I_n$, visto cada ponto de S ter que estar em algum I_n com $n \ge p$, já que entre 1 e p só existe um número finito de inteiros… concluímos assim que $m(S) = 0$.☐

Dado $S \subset \mathbb{R}^2$ consideremos as suas *secções* definidas por:

- $S^x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in S\}, (x \in \mathbb{R})$,
- $S_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in S\}, (y \in \mathbb{R})$.

Se S for desprezável, será que S_y, S^x são desprezáveis (em $\mathbb{R}$)? É fácil concluir que nem sempre… basta considerar o seguinte exemplo gráfico:



Existem pontos "excepcionais" como y_1 tais que $m(S_{y_1}) \neq 0$, embora, em geral (caso de y_2), $m(S_{y_2}) = 0$. Vamos ver que *"para quase todos os y e x"* S_y e S^x são *desprezáveis em* $\mathbb{R}$!

PROPOSIÇÃO 13.1: *Se $S \subset \mathbb{R}^2$ for desprezável, então é desprezável o conjunto dos $y \in \mathbb{R}$ tais que S_y não é desprezável e é desprezável o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que S^x não é desprezável; ou seja, para quase todos os $x \in \mathbb{R}$, $m(S^x) = = m(S_x) = 0$.*

Demonstração: Pelo Lema anterior, sendo S desprezável, existe uma família $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de intervalos, tal que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < +\infty$ e cada ponto de S está em I_n para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}_1$. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, temos:

$$I_n = J_n \times K_n,$$

onde J_n, K_n são intervalos de $\mathbb{R}$, tendo-se:

$$\bullet\, V(I_n) = V(J_n) \times V(K_n) = V(J_n) \int_{\mathbb{R}} \chi_{K_n},$$

donde:

$$\bullet \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{\mathbb{R}} V(J_n)\chi_{K_n}(y)\, dy = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) < +\infty;$$

então pelo *Teorema de Beppo Levi para séries* (Corolário do Teorema 8.1), concluímos que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} V(J_n)\chi_{K_n}(y)$ é convergente, para quase todos os $y \in \mathbb{R}$. Para terminar a demonstração da primeira parte do Teorema basta então provar que para os $y \in \mathbb{R}$ tais que a série é convergente, se tem $m(S_y) = 0$. Fixando um tal y, se $S_y = \emptyset$ vem obviamente $m(S_y) = m(\emptyset) = 0$; se $S_y \neq \emptyset$, tem-se:

$$\bullet\, x \in S_y \text{ sse } (x, y) \in S,$$

donde:

$x \in S_y \Rightarrow (x, y) \in S \Rightarrow (x, y)$ *está em* I_n *para uma infinidade de* $n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in J_n$ *para uma infinidade de* $n \in \mathbb{N}_1$ *e* y *está nos correspondentes* K_n;

seja então:

$$\mathcal{F}_y = (J_m)_{m \in \{n \in \mathbb{N}_1 : y \in K_n\}} = (J_m)_{m \in \{n \in \mathbb{N}_1 : \chi_{K_n}(y) = 1\}}.$$

$\mathcal{F}_y$ é constituída por intervalos correspondentes a uma infinidade de $n \in \mathbb{N}_1$, cada $x \in S_y$ está numa infinidade de termos de $\mathcal{F}_y$ e:

$$\sum_{J \in \mathcal{F}_y} V(J) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_1 \\ \chi_{K_n}(y) = 1}} V(J_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(J_n) \chi_{K_n}(y) < +\infty,$$

atendendo ao modo como y foi escolhido. Portanto, atendendo ao Lema anterior, $m(S_y) = 0$. De modo análogo se demonstra a segunda parte do Teorema.□

13.2 Teorema de Fubini para o Integral de Lebesgue

TEOREMA 13.2 (Teorema de Fubini para o Integral de Lebesgue): *Seja* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$*; então, para quase todos os* $y \in \mathbb{R}$ *é somável em* $\mathbb{R}$ *a função:*

$$\bullet\ x \mapsto f(x, y),$$

e, para quase todos os $x \in \mathbb{R}$ *é somável em* $\mathbb{R}$ *a função;*

$$\bullet\ y \mapsto f(x, y).$$

Além disso são somáveis em $\mathbb{R}$ *quaisquer funções que coincidam respectivamente com:*

$$\bullet\ y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx,$$

e

$$\bullet\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy$$

nos pontos em que estes integrais de Lebesgue existam (portanto p.p.*), tendo-se:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \right) dx$$

(onde as expressões dentro do parêntesis representam, respectivamente, quaisquer funções nas condições acima referidas).

Demonstração: Comecemos por tomar $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$; então existe uma sucessão $\varphi_n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$ tal que:

$$\bullet\ \varphi_n \uparrow f\ p.p. \text{ em } \mathbb{R}^2$$

e:

$$\bullet\ \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n \xrightarrow[n]{} \int_{\mathbb{R}^2} f.$$

Ora para cada φ_n é válido o Teorema de Fubini, como vimos no início deste capítulo, donde:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x, y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n \xrightarrow[n]{} \int_{\mathbb{R}^2} f.$$

Pondo:

$$g_n(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x, y)\, dx, \tag{14}$$

nos y para os quais o segundo membro faz sentido (portanto para quase todos os $y \in \mathbb{R}$) tem-se (definindo g_n arbitrariamente nos restantes pontos de $\mathbb{R}$, que constituem certo conjunto desprezável A_n):

$$\bullet\ g_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}_1,$$
$$\bullet\ g_n \textit{ é crescente (em sentido lato),}$$

em quase todos os pontos (pelo menos fora de $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_1} A_n$), visto φ_n o ser e pela *monotonia* do integral, e:

$$\bullet\ \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n \xrightarrow[n]{} \int_{\mathbb{R}^2} f.$$

Portanto, pelo *Teorema de Beppo Levi* (Teorema 8.1) podemos concluir que existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{aligned} &\bullet\ g_n \xrightarrow[n]{} g\ p.p. \text{ em } \mathbb{R} \\ &\bullet\ \int_{\mathbb{R}} g_n \xrightarrow[n]{} \int_{\mathbb{R}} g \ \ \Big(\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}^2} f, \text{ pela } \textit{unicidade do limite}\Big). \end{aligned} \tag{15}$$

Sendo $E^* \subset \mathbb{R}$ conjunto desprezável tal que $g_n(y) \xrightarrow[n]{} g(y)$, se $y \notin E^*$, então se $y \notin E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_1} A_n \cup E^*$, conjunto desprezável, os g_n são todos dados por (14) em y e portanto:

$$\bullet\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x, y)\, dx = g_n(y) \xrightarrow[n]{} g(y);$$

como a sucessão de funções $x \mapsto \varphi_n(x, y)$ é crescente, podemos mais uma vez aplicar o Teorema de Beppo Levi e concluir que, para $y \notin E$:

$$\varphi_n(x,y) \underset{n}{\longrightarrow} h_y(x) \; p.p. \text{ em } x \in \mathbb{R},$$

em que[10]:

$$\bullet\; h_y(\widehat{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$
$$\bullet\; \int_{\mathbb{R}} h_y(x)\,dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x,y)\,dx = g(y).$$

Ora $\varphi_n(x,y) \underset{n}{\longrightarrow} f(x,y)$ fora de certo $S \subset \mathbb{R}^2$ tal que $m(S) = 0$; pela Proposição 13.1, para y fora de certo conjunto $E' \subset \mathbb{R}$ desprezável, vem $m(S_y) = 0$. Então, para y fora de $E \cup E'$ (conjunto desprezável) vem simultaneamente:

- $\varphi_n(x,y) \underset{n}{\longrightarrow} h_y(x) \; p.p$ em $\mathbb{R}$,
- $\varphi_n(x,y) \underset{n}{\longrightarrow} f(x,y)$ fora de S_y, logo $p.p.$ em $\mathbb{R}$,

donde, para y fora de $E \cup E'$, $h_y(x) = f(x,y) \; p.p.$ em $\mathbb{R}$, e portanto a função $x \mapsto f(x,y)$ é somável em $\mathbb{R}$. Tem-se, além disso:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x,y)\,dx \underset{n}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} h_y(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx, \forall y \in \mathbb{R} \setminus (E \cup E');$$

como:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x,y)\,dx = g_n(y) \underset{n}{\longrightarrow} g(y),$$

fora de E, vem:

$$\bullet\; g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \; p.p. \text{ em } \mathbb{R},$$

donde:

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

e portanto, atendendo a (15):

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ basta recordar que $f = g - h$ com $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ e utilizar a linearidade do integral. De modo análogo se demonstram as restantes asserções do Teorema.☐

[10] *Cf.* nota 8, pág. 157.

13.3 Teorema de Tonelli–Hobson

COROLÁRIO (Teorema de Tonelli–Hobson): *Seja* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ *tal que existe um dos integrais de Lebesgue:*

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, dx \right) dy,\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, dy \right) dx$$

(no sentido em que os integrais dentro de parêntesis existem $p.p.$ *em* $\mathbb{R}$ *e definem, a menos de conjuntos desprezáveis, funções somáveis em* $\mathbb{R}$*); então* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *(e portanto, em particular, pelo Teorema de Fubini:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) dx).$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}_1$, seja:

$$\varphi_n(x,y) = \begin{cases} n & \text{se } |x|, |y| \leq n \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin [-n,n]^2 \end{cases} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2);$$

Pondo:

- $f_n(x,y) = \min\{\varphi_n(x,y), |f(x,y)|\}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

vem:

- $f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ (pela Proposição 11.2–1);
- $|f_n| \leq \varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2),$

e portanto $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, atendendo à Proposição 11.1. Ora:

- $f_n(x,y) \uparrow |f(x,y)|, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f_n = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x,y)\, dx \right) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, dx \right) dy,$

pelo Teorema anterior e a hipótese do Teorema; portanto, atendendo ao Teorema de Beppo Levi, f_n converge *p.p.* para uma função somável, donde $|f| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ e, pelo Corolário da Proposição 11.1, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. De modo análogo se demonstraria o Teorema com a outra hipótese.□

Como exemplo de aplicação do Teorema de Tonelli, podemos pensar em demonstrar, agora mais rapidamente, a integrabilidade à Lebesgue da função auxiliar atrás introduzida (*cf.* demonstração da Proposição 11.3):

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{1+x_1^2} \times \cdots \times \frac{1}{1+x_N^2};$$

$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, visto ser contínua e:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x_1,\ldots,,x_N)|\,dx_1\right)\ldots\,dx_N = \right.$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x_1^2}\times\cdots\times\frac{1}{1+x_N^2}\,dx_1\right)\ldots\,dx_N = \right.$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x_1^2}\,dx_1\right)\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x_N^2}\,dx_N\right) = \pi^N,$$

existindo os integrais como *integrais impróprios absolutamente convergentes* e portanto como integrais de Lebesgue; logo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Note-se que utilizámos aqui a extensão do Teorema de Tonelli–Hobson a mais de duas variáveis; com efeito, tanto o Teorema de Fubini como o de Tonelli–Hobson se estendem a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ e, por indução, a um número finito de factores. As demonstrações são análogas às apresentadas para o caso de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, embora com notações mais complicadas.

Exercícios

72) Enuncie e demonstre as generalizações a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ dos teoremas deste capítulo.

73) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções somáveis;

a) Mostre que é mensurável em $\mathbb{R}^2$ a função $H(x,y) = f(x-y)g(y)$ *(Sugestão: considere sucessões de funções em escada convergindo p.p. para f e g, respectivamente, e construa, a partir delas uma sucessão de funções mensuráveis convergindo p.p. para a função em apreço; não se esqueça de analisar o conjunto dos pontos em que eventualmente não tenha lugar a convergência...).*

b) Utilizando os teoremas de Fubini e Tonelli-Hobson, mostre que $H \in \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, que existe um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de medida nula tal que se $x \notin E$ é somável em $\mathbb{R}$ a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ e que é somável a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy & \text{se } x \notin E \\ 0 & \text{se } x \in E \end{cases}.$$

c) A função h da alínea anterior representa-se por $f{*}g$ e designa-se por *convolada de f e g* (a operação $*$ assim definida em $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ designa-se por *produto de convolução* ou simplesmente *convolução*). Mostre que:

$$\int_{\mathbb{R}}|f{*}g| \le \left(\int_{\mathbb{R}}|f|\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|g|\right).$$

d) Verifique que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ é *álgebra comutativa* para as operações habituais de soma e produto por escalar e para o produto de convolução.

Capítulo 14

Medida e Integral de Lebesgue nas partes mensuráveis de $\mathbb{R}^N$

14.1 Medida de Lebesgue de partes mensuráveis de $\mathbb{R}^N$

DEFINIÇÕES: Uma parte A de $\mathbb{R}^N$ diz-se *mensurável* se for mensurável em $\mathbb{R}^N$ a sua função característica:

$$\bullet\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus A \end{cases};$$

escrevemos então $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$. Em $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ define-se a *medida de Lebesgue* (ou simplesmente *medida* quando não houver perigo de confusão), aplicação:

$$m : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty],$$

tal que:

$$m(A) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \chi_A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A & \text{se } \chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \end{cases}.$$

Observações: 1) Uma vez que já introduzimos uma noção de integral para funções "positivas" mensuráveis quaisquer (*cf.* a definição que se segue à Observação 4) do Capítulo 11), poderíamos ter definido mais simplesmente $m(A)$ como sendo *em qualquer caso* o integral da função característica.

2) É fácil concluir que $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ e que m é extensão a $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ da *medida de Jordan* (volume) definida em $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito,

$$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \chi_A \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N),$$

e:

$$V(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A = m(A), \forall A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N).$$

3) Atendendo à definição dada de *função mensurável em conjunto arbitrário* (*cf.* Observação 3) do Capítulo 11), é fácil concluir que $A \subset \mathbb{R}^N$ é *mensurável* sse *a função identicamente igual a* 1 *em* A *for mensurável em* A, ou seja sse "$1 \in$ $\in \mathcal{M}(A)$".

14.2 σ-Álgebra dos conjuntos mensuráveis e σ-Álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}^N$

PROPOSIÇÃO 14.1: *1.* $\emptyset \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

2. $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

3. Se $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), \forall n \in \mathbb{N}_1$, *então* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

4. Se $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), \forall n \in \mathbb{N}_1$, *então* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: 1. É imediato, pois $\chi_\emptyset \equiv 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$.

2. Resulta de $\chi_{\mathbb{R}^N \setminus A} = 1 - \chi_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ se $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Para demonstrar 3., notemos que:

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} = \max\{\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}, \dots\} = \lim_n \left(\max\{\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}\}\right),$$

atendendo a que a sucessão $\max\{\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}\}$ é crescente, tendo portanto limite pontual igual ao supremo (neste caso máximo, visto as funções só tomarem os valores 0 ou 1), e à definição de função característica ($\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n}$ é igual a 1 sse x está num dos A_n, ou seja, sse um dos $\chi_{A_n}(x) = 1$, ou ainda, sse:

$$\max\{\chi_{A_1}(x), \dots, \chi_{A_n}(x), \dots\} = 1).$$

Concluímos assim, atendendo às Proposições 11.2 e 11.3, que $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

4. Resulta imediatamente de 2. e 3., pois:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} A_n = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \left(\mathbb{R}^N \setminus A_n\right) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N). \square$$

DEFINIÇÃO: Chamamos *σ-álgebra de partes de um conjunto X* a uma colecção $\mathfrak{A}$ de partes de X satisfazendo às propriedades 1., 2., 3. da proposição anterior com $\mathbb{R}^N$ substituído por X e $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ por $\mathfrak{A}$.

1., 2., 3. caracterizam portanto $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ como *σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^N$*.

DEFINIÇÕES: Dada uma família $\mathcal{F}$ de partes de X, chamamos *σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$* à *menor σ-álgebra de partes de X contendo $\mathcal{F}$* (ou seja, à *intersecção* de todas as σ-álgebras de partes de X contendo $\mathcal{F}$). Designamos por $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ a σ-álgebra *gerada pelos sub-conjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$* — diz-se *σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}^N$*.

Vamos ver que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, para o que basta evidentemente verificar que *todos os abertos de $\mathbb{R}^N$ são mensuráveis*. Mais precisamente, temos:

PROPOSIÇÃO 14.2: *Se $A \subset \mathbb{R}^N$ for aberto, então existe uma família $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de cubos limitados de $\mathbb{R}^N$, dois a dois disjuntos, tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} K_n$, $\overline{K}_n \subset A, \forall n \in \mathbb{N}_1$; em particular $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ contém a σ-álgebra dos borelianos.*

Demonstração: Considere-se a família de intervalos semi-abertos de $\mathbb{R}$,

$$\{]\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}] : k \in \mathbb{Z}\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}_1$ fixo. Seja $\mathcal{F}_n$ a família de cubos de $\mathbb{R}^N$ que se obtém fazendo os possíveis produtos cartesianos com N factores, cada um dos quais elemento daquela família de intervalos de $\mathbb{R}$, ou seja, cada cubo K será da forma:

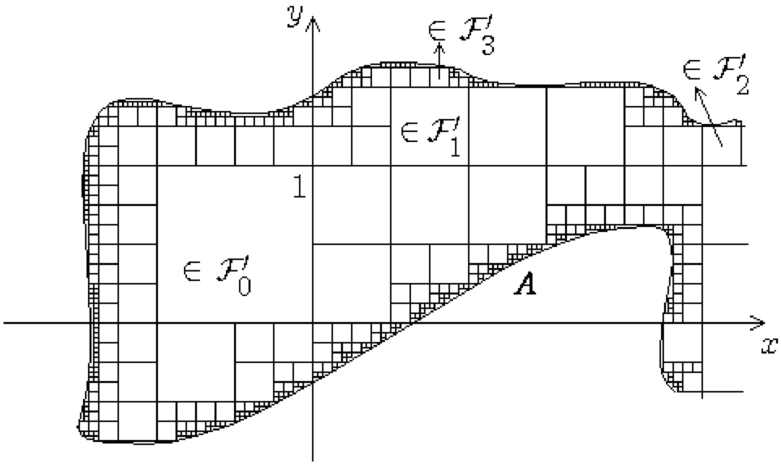
$$K = \prod_{j=1}^{N}]\frac{k_j}{2^n}, \frac{k_j+1}{2^n}],$$

para certos $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}$. É evidente que $\bigcup_{K\in\mathcal{F}_n} K = \mathbb{R}^N$, já que os $]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ $(k \in \mathbb{Z})$ cobrem $\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}_1$ fixo. É fácil verificar que os $\mathcal{F}_n$ constituem mesmo *partição* de $\mathbb{R}^N$, no sentido da teoria dos conjuntos; note-se, além disso, que $\mathcal{F}_{n+1}$ pode ser obtido *"dividindo em duas partes iguais cada projecção dos intervalos de $\mathcal{F}_n$"*, pelo que se torna claro que dados $K \in \mathcal{F}_n, K' \in \mathcal{F}_m$, com $n \geq m$, então ou $K \cap K' = \emptyset$, ou $K \subset K'$ [11]. Podemos agora, por recorrência, construir uma sucessão de famílias de cubos, pondo:

- $\mathcal{F}'_0 = \{K \in \mathcal{F}_0 : \overline{K} \subset A\}$,
- $\mathcal{F}'_n = \{K \in \mathcal{F}_n : \overline{K} \subset A \text{ e } K \not\subset K', \forall K' \in \bigcup_{m<n} \mathcal{F}'_n\}$,

[11]Podemos demonstrar directamente este facto; se $K \cap K' \neq \emptyset$, com $K \in \mathcal{F}_n, K' \in \mathcal{F}_m$, sendo $K = \prod_{j=1}^{N}]\frac{k_j}{2^n}, \frac{k_j+1}{2^n}]$, $K' = \prod_{j=1}^{N}]\frac{k'_j}{2^m}, \frac{k'_j+1}{2^m}]$, provemos que $K \subset K'$. Atendendo à hipótese feita, existirá $x \in K \cap K'$, pelo que, para cada $i = 1, \ldots, N$:

ou seja, graficamente:



Sendo:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}_n',$$

trata-se de família *numerável*, visto ser união numerável de conjuntos com cardinal no máximo igual ao cardinal de $\mathbb{N}$. Além disso, por construção, os elementos de $\mathcal{F}$ são cubos com aderência contida em A e são disjuntos dois a dois, já que, como atrás vimos, se $K \in \mathcal{F}_n, K' \in \mathcal{F}_m$ com $n > m$, tem-se $K \cap K' = \emptyset$ ou $K \subset K'$; como, por construção de $\mathcal{F}_n'$, excluimos a segunda hipótese, ter-se-á $K \cap K' = \emptyset, \forall K \in \mathcal{F}_n', K' \in \mathcal{F}_m' \, (m < n)$ e se $K, K' \in$ $\in \mathcal{F}_n' \subset \mathcal{F}_n$, ou coincidem ou são disjuntos, por construção de $\mathcal{F}_n$. Resta então verificar que, de facto:

$$A \subset \bigcup_{K\in\mathcal{F}} K;$$

ora, se $x \in A$, como A *é aberto*, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{k_i}{2^n} < x_i \le \dfrac{k_i+1}{2^n} \\ \dfrac{k_i'}{2^m} < x_i \le \dfrac{k_i'+1}{2^m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k_i'}{2^m} < \dfrac{k_i+1}{2^n} \\ \dfrac{k_i}{2^n} < \dfrac{k_i'+1}{2^m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{n-m}k_i' < k_i+1 \\ k_i < 2^{n-m}(k_i'+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{n-m}k_i' \le k_i \\ k_i+1 \le 2^{n-m}(k_i'+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k_i'}{2^m} \le \dfrac{k_i}{2^n} \\ \dfrac{k_i+1}{2^n} \le \dfrac{k_i'+1}{2^m} \end{cases},$$

pelo que, de facto, $\left]\frac{k_i}{2^n}, \frac{k_i+1}{2^n}\right] \subset \left]\frac{k_i'}{2^m}, \frac{k_i'+1}{2^m}\right]$ $(\forall i = 1, \ldots, N)$, ou seja, $K \subset K'$.

$$\prod_{i=1}^{N}]x_i - \delta, x_i + \delta[\subset A \ (x = (x_1, \dots, x_N)).$$

Fixando $n \in \mathbb{N}_1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$, podemos, para cada $i = 1, \dots, N$ encontrar $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x_i \in]\tfrac{k_i}{2^n}, \tfrac{k_i+1}{2^n}],$$

donde:

$$[\tfrac{k_i}{2^n}, \tfrac{k_i+1}{2^n}] \subset]x_i - \delta, x_i + \delta[,$$

já que:

$$\frac{k_i}{2^n} < x_i \leq \frac{k_i+1}{2^n} \Rightarrow \underbrace{x_i - \frac{1}{2^n}}_{>x_i-\delta} \leq \frac{k_i}{2^n}, \frac{k_i+1}{2^n} < \underbrace{x_i + \frac{1}{2^n}}_{<x_i+\delta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_i - \delta < \frac{k_i}{2^n} < \frac{k_i+1}{2^n} < x_i + \delta.$$

Logo:

$$x \in \prod_{i=1}^{N}]\tfrac{k_i}{2^n}, \tfrac{k_i+1}{2^n}] \subset \prod_{i=1}^{N} [\tfrac{k_i}{2^n}, \tfrac{k_i+1}{2^n}] \subset \prod_{i=1}^{N}]x_i - \delta, x_i + \delta[\subset A,$$

ou seja, x está em pelo menos certo $K \in \mathcal{F}_n$ tal que $\overline{K} \subset A$; se n_0 for o *menor* dos n para os quais esta propriedade se verifica (n_0 existe sempre por ser o *primeiro elemento* de um conjunto *não vazio* de números naturais, já que $\mathbb{N}$ é *bem ordenado*), é fácil concluir que o correspondente K está em $\mathcal{F}'_{n_0}$. Com efeito, se $K \notin \mathcal{F}'_{n_0}$ tendo-se $\overline{K} \subset A, K \in \mathcal{F}_{n_0}$ seria porque $K \subset K'$ para certo $K' \in \mathcal{F}'_m$ com $m < n_0$; mas então n_0 não seria *o primeiro elemento* do conjunto de naturais acima referido pois $m < n_0$ e m ainda estaria no conjunto (ou seja, $\exists K' \in \mathcal{F}_m : x \in K', \overline{K'} \subset A$). Tem-se assim:

$$x \in K \in \mathcal{F}'_{n_0} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} \mathcal{F}'_n = \mathcal{F},$$

e portanto, de facto:

$$A \subset \bigcup_{K \in \mathcal{F}} K.$$

Como cada $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, visto ser *intervalo limitado*, cada K é *mensurável*, e portanto A também o é visto $\mathcal{F}$ ser *numerável*, e atendendo à Proposição 14.1-3.□

14.3 Propriedades da medida de Lebesgue na σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis

As duas proposições anteriores mostram-nos que a classe dos conjuntos mensuráveis é extremamente vasta; com efeito, não é fácil construir conjuntos não mensuráveis, e prova-se mesmo que a existência de tais conjuntos depende de modo essencial do *axioma da escolha*. Vamos agora demonstrar propriedades fundamentais da *medida de Lebesgue*:

PROPOSIÇÃO 14.3: *A medida de Lebesgue m é uma aplicação de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ em $[0,+\infty]$ que satisfaz às seguintes propriedades:*

1. $m(A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

2. $m\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n)$, *se* $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), \forall n \in \mathbb{N}_1$ *e* $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n, m \in \mathbb{N}_1, n \neq m$ *(σ–aditividade da medida de Lebesgue).*

3. $m\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n)$, *se* $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), \forall n \in \mathbb{N}_1$.

4. $A \subset B, A, B \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow (m(A) \leq m(B)$ *e* $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$, *se* $m(A) \neq +\infty)$.

5. • *Se* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ *e* $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), \forall n \in \mathbb{N}_1$*, então:*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) = \lim_n m(A_n).$$

• *Se* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$, $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$, *e* $m(A_1) \neq +\infty$, *então:*

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) = \lim_n m(A_n).$$

(σ–continuidade da medida de Lebesgue).

6. $A \subset \mathbb{R}^N$ *é desprezável sse* $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ *e* $m(A) = 0$.

7. Se $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ *e E for desprezável, então* $A \cup E, A \setminus E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ *e:*

$$m(A) = m(A \cup E) = m(A \setminus E).$$

Demonstração: 1. é imediato, por definição de m. Para demonstrar 2. notemos que, do facto de os A_n serem disjuntos dois a dois, resulta facilmente que:

$$\bullet\ \chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \chi_{A_n}.$$

Se para algum $n \in \mathbb{N}_1$ $m(A_n) = +\infty$, ou seja, $\chi_{A_n} \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, ter-se-ia também

$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, pois tratar-se-ia de funções *mensuráveis* e:

$$|\chi_{A_n}| = \chi_{A_n} \leq \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n},$$

donde, pela Proposição 11.1, se se tivesse $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, viria também $\chi_{A_n} \in$ $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Logo ter-se-ia, nesse caso:

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\Big) = +\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n)$$

(com a convenção usual $a + (+\infty) = +\infty, \forall a \in [0, +\infty[$).

Se $m(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}_1$, mas $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n) = +\infty$ também $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} \notin$ $\notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, pois caso contrário ter-se-ia:

- $\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \xrightarrow[n]{} \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n}, p.p.$ em $\mathbb{R}^N$
- $\left|\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\right| = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \leq \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$,

e pelo Teorema de Lebesgue:

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{A_k} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\Big) \xrightarrow[n]{} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} < +\infty$$

contra a hipótese de $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n) = +\infty$ (poderíamos também ter invocado, simplesmente, a Observação 1) do capítulo 8, notando que a existência do integral de Lebesgue da função $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \chi_{A_n}$ implicaria a convergência da série $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{A_k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n)$). Portanto, ainda neste caso:

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\Big) = +\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n).$$

Resta examinar o caso em que $m(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}_1$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n) < +\infty$. Tem-se então:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n) < +\infty,$$

donde, pelo *Teorema de Beppo Levi para séries* (Corolário do Teorema 8.1):

- $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \chi_{A_n} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$,
- $m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_n)$.

3., 4., e 5. são consequências simples de 1. e 2. e as respectivas demonstrações são deixadas como exercícios.

Para demonstrar 6., notemos que se A for *desprezável*, então $\chi_{\mathrm{A}} = 0\, p.p.$, donde $\chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e:

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A = \int_{\mathbb{R}^N} 0 = 0.$$

Reciprocamente, se $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ e $m(A) = 0$, por definição $\chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A = 0$; atendendo à Observação 2) do capítulo 8, virá $\chi_A = 0\, p.p.$, pelo que o conjunto A, em cujos pontos $\chi_A = 1$, será necessariamente desprezável, uma vez que coincide com o conjunto desprezável dos pontos em que χ_A não se anula.

7. resulta imediatamente de 6., de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ ser σ-álgebra e de, atendendo a 3. e 4.:

$$m(A \cup E) \leq m(A) + m(E) = m(A) \leq m(A \cup E);$$
$$A = (A \setminus E) \cup \underbrace{(A \cap E)}_{\text{desprezável}} \Rightarrow m(A) = m(A \setminus E).\square$$

DEFINIÇÃO: As propriedades 1. e 2. da Proposição anterior caracterizam m como *medida* ("abstracta") *sobre a* σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

14.4 Funções somáveis e integral de Lebesgue em partes arbitrárias de $\mathbb{R}^N$

Introduzamos agora a noção de função somável num conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ arbitrário.

DEFINIÇÕES: Diz-se que $f : A \to \mathbb{R}$ é *somável em* $A \subset \mathbb{R}^N$ (ou *integrável — à Lebesgue — em* A) e escreve-se $f \in \mathcal{L}(A)$ se for somável em $\mathbb{R}^N$ a função:

$$\bullet\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus A \end{cases}.$$

Ou seja:

$$f \in \mathcal{L}(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N).$$

Nesse caso põe-se:

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f},$$

que se designa por *integral de Lebesgue* (ou simplesmente *integral*) *de* f *em* A.

Observação: 4) Esta definição é evidentemente coerente com a definição de $\mathcal{L}(I)$, no caso em que I é *intervalo* de $\mathbb{R}^N$, ou seja, é fácil concluir através das definições que $f \in \mathcal{L}(I)$ (tal como $\mathcal{L}(I)$ foi definido em 7) sse $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ (com a citada definição). Basta pensar que as sucessões aproximantes que intervêm na definição de *"$\widetilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$"* podem ser sempre constituídas por funções nulas fora de I, atendendo a que:

$$\text{“}\widetilde{f} = 0 \textit{ fora de } I \textit{ e } f_n \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{f} \textit{ p.p.} \Rightarrow f_n\chi_I \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{f} \textit{ p.p.”}.$$

DEFINIÇÕES: Dados $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}^N$, diremos que f é *integrável (à Lebesgue) em* B ou *somável em* B (escreveremos por vezes, por abuso de linguagem "$f \in \mathcal{L}(B)$") se $\widetilde{f}_{/B} \in \mathcal{L}(B)$ (ou seja, sse $\widetilde{f}\chi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$) e, por definição:

$$\int_B f = \int_B \widetilde{f}_{/B} = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}\chi_B.$$

Observações: 5) É fácil concluir que estas definições são coerentes com as anteriores, ou seja, que, no caso em que $A = B$, se reduzem às anteriores; com efeito, nesse caso, $\widetilde{f}\chi_B = \widetilde{f}\chi_A = \widetilde{f}$.

6) Das definições anteriores resulta imediatamente (basta examinar as funções características envolvidas) que se $f : A \to \mathbb{R}$ for nula fora de certo $C \subset \mathbb{R}^N$ e dado $B \subset \mathbb{R}^N$, então:

$$\int_B f = \int_{B \cap C} f,$$

sempre que um dos integrais de Lebesgue faça sentido. Em particular, se f for nula fora de $C \subset B$, é equivalente ser somável em B e ser somável em C, tendo-se, nesse caso:

$$\int_B f = \int_C f,$$

7) Com estas definições tem-se, por exemplo, que $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ e $m(A) < +\infty$ sse $1 \in \mathcal{L}(A)$ (visto que $\widetilde{1}_{/A} = \chi_A$) e, nesse caso:

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{1}_{/A} = \int_A 1.$$

8) Também é agora óbvio que se $B \subset A, f \in \mathcal{L}(A)$ e $B \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, então f é *somável em B.*

9) É fácil constatar que $\mathcal{L}(A)$ é *espaço vectorial* para as operações habituais e que $f \mapsto \int_A f$ *é forma linear* sobre $\mathcal{L}(A)$.

10) Como é fácil verificar, os "teoremas de aproximação" (Lebesgue, Beppo Levi e corolários) podem enunciar-se, *mutatis mutandis*, substituindo o intervalo I por uma parte arbitrária de $\mathbb{R}^N$; é claro que temos sempre a alternativa de "passar a $\widetilde{f}$" e aplicar os teoremas em $I = \mathbb{R}^N$.

Podemos agora estudar o comportamento do integral de Lebesgue relativamente à "variação do domínio":

PROPOSIÇÃO 14.4: *1. Para cada $n \in \mathbb{N}_1$ seja $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, de tal modo que $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m,\ n, m \in \mathbb{N}_1$; então, se $f \in \mathcal{L}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right)$ tem-se $f \in$ $\in \mathcal{L}(A_n), \forall n \in \mathbb{N}_1$ e:*

$$\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} f = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{A_n} f.$$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}_1$ seja $A_n \subset \mathbb{R}^N$, de tal modo que $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}_1$; então, se $f \in \mathcal{L}(A_n), \forall n \in \mathbb{N}_1$ ($f : \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n \to \mathbb{R}$) e:

$$\bullet \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{A_n} |f| < +\infty,$$

tem-se:

$$\bullet\ f \in \mathcal{L}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) \text{ e } \int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} f = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{A_n} f.$$

Demonstração: 1. Se $f \in \mathcal{L}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right)$, vem $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$; como $\widetilde{f_{/A_n}} =$ $= \widetilde{f}.\chi_{A_n}$, esta função é mensurável, por ser produto de funções mensuráveis (χ_{A_n} é-o, visto que $A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$) e:

$$\bullet\ |\widetilde{f_{/A_n}}| \leq \widetilde{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

donde $\widetilde{f_{/A_n}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, e portanto:

$$\bullet\ f \in \mathcal{L}(A_n), \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

Além disso:

- $\widetilde{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \widetilde{f}\cdot\chi_{A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \widetilde{f_{/A_n}};$
- $\left|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{f_{/A_k}}\right| = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{f_{/A_k}}| \leq |\widetilde{f}| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$

donde, pelo Teorema de Lebesgue:

$$\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n} f = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f_{/A_n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \int_{A_n} f.$$

2. Mais uma vez se tem $\widetilde{f} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} \widetilde{f_{/A_n}}$ e a hipótese do teorema permite-nos aplicar o Teorema de Beppo Levi para séries (Corolário do Teorema 8.1) que garante que $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, que $f \in \mathcal{L}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right)$, sendo válida a fórmula para o integral em $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} A_n$.□

Note-se que acabámos de generalizar as considerações feitas no início do Capítulo 10.

Exercícios

74) Demonstre os pontos 3., 4. e 5. da Proposição 14.3.

75) Mostre que as propriedades referidas no exercício anterior se generalizam a qualquer medida (σ-aditiva) definida numa σ-álgebra.

76) Mostre, com um contra-exemplo, que a σ-continuidade para a intersecção (conclusão da segunda parte do ponto 5. da Proposição 14.3) pode não ter lugar se for omitida a hipótese *“$m(A_1) < +\infty$”*.

77) Demonstre as asserções contidas nas Observações 4) a 10).

78) Demonstra-se que a menor σ-álgebra de partes de certo conjunto X contendo determinada colecção numerável de partes de X (σ-álgebra *gerada* por essa colecção) não pode ter cardinalidade superior à *potência do contínuo*; atendendo ao Exercício 27, mostre que existe uma infinidade (com potência superior à do contínuo) de conjuntos mensuráveis que *não são borelianos*.

Capítulo 15

Teorema de mudança de variáveis para o integral de Lebesgue

Para o integral em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ de funções contínuas vale a fórmula de mudança de variáveis:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt = \int_a^b f[\varphi(s)].\varphi'(s)\, ds,$$

em que $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Basta notar que se F é primitiva de f, função contínua em $\varphi([a, b]) = [\min_{[a,b]} \varphi, \max_{[a,b]} \varphi] \supset [\varphi(a), \varphi(b)], [\varphi(b), \varphi(a)]$, então:

$$\bullet\ (F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi).\varphi' = (f \circ \varphi).\varphi',$$

ou seja, $F \circ \varphi$ é primitiva de $(f \circ \varphi).\varphi'$ em $[a, b]$. Pela Fórmula de Barrow:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) =$$
$$= \int_a^b f[\varphi(s)].\varphi'(s)\, ds.$$

No caso particular em que $\varphi'(s) \neq 0, \forall s \in]a, b[$ tem-se $\varphi'(s) > 0, \forall s \in]a, b[$, ou $\varphi'(s) < 0, \forall s \in]a, b[$ e portanto φ é crescente ou decrescente (estritamente). Transforma assim $]a, b[$ num dos intervalos $]\varphi(a), \varphi(b)[$ ou $]\varphi(b), \varphi(a)[$; no primeiro caso ($\varphi'(s) > 0$) vem:

$$\int_{\varphi(]a,b[)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt = \int_a^b f[\varphi(s)].\varphi'(s)\, ds = \int_{]a,b[} (f \circ \varphi).|\varphi'|.$$

No segundo caso ($\varphi'(s) < 0$) tem-se:

$$\int_{\varphi(]a,b[)} f = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(t)\,dt = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = -\int_a^b f[\varphi(s)].\varphi'(s)\,ds =$$
$$= \int_a^b f[\varphi(s)].(-\varphi'(s))\,ds = \int_a^b f[\varphi(s)].|\varphi'(s)|\,ds =$$
$$= \int_{]a,b[} (f\circ\varphi).|\varphi'|.$$

Em qualquer caso vem:

$$\bullet \int_{\varphi(]a,b[)} f = \int_{]a,b[} (f\circ\varphi).|\varphi'|,$$

desde que $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ seja difeomorfismo de classe C^1 (neste caso prolongável a $[a,b]$ como função de classe C^1). É sob esta forma que procuraremos generalizar a fórmula a $\mathbb{R}^N$, substituindo $]a,b[$ por um *aberto arbitrário* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, φ por um *difeomorfismo de classe* C^1 *arbitrário de* Ω *em* $\mathbb{R}^N$, e supondo f apenas *somável* em $\varphi(\Omega)$. O Teorema de mudança de variável sob esta forma geral é bastante mais difícil de demonstrar que o caso simples que acabámos de recordar; temos assim:

TEOREMA 15.1 (mudança de variável no integral de Lebesgue): *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto,* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *de classe* C^1 *tal que* $\mathcal{J}_\varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$ *(*$\mathcal{J}_\varphi(x) = \det D\varphi(x)$*),* φ *injectiva e* $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$*; então* $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$ *sse* $(f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega)$ *e:*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f = \int_\Omega (f\circ\varphi)|\mathcal{J}_\varphi|.$$

Demonstração[12]**:** Procederemos por etapas, seguindo o programa:

1. *Para demonstrar que "para quaisquer* Ω, φ *nas condições da hipótese,* $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$ *sse* $(f\circ\varphi)|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega)$*", basta demonstrar que "para quaisquer* Ω, φ *nas referidas condições* $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega)) \Rightarrow (f\circ\varphi)|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega)$*".*
2. *"A fórmula vale para* $\varphi_1, \varphi_2 \Rightarrow$ *a fórmula vale para* $\varphi_1 \circ \varphi_2$*".*
3. *"A fórmula vale em cada* $I \Subset \varphi(\Omega)$ *(ou seja,* I *intervalo limitado tal que* $\overline{I} \subset \varphi(\Omega)$*)* $\Rightarrow$ *a fórmula vale em* $\varphi(\Omega)$*".*
4. $\varphi^{-1}(J) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N), \forall J \Subset \varphi(\Omega)$, *intervalo limitado; se* J *for degenerado,* $V(\varphi^{-1}(J)) = 0$.

[12]Para uma demonstração alternativa *cf.* o artigo de João Carmona *"Sobre a demonstração do Teorema de Mudança de Variável"* – Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, nº45 (Out. 2001), pp. 73–82.

5. *Fixados Ω, φ nas condições da hipótese, demonstrar a tese para qualquer f é equivalente a provar que "para todo o intervalo limitado $J \Subset \varphi(\Omega)$ se tem:*

$$V(J) = \int_{\varphi^{-1}(J)} |\mathcal{J}_\varphi|".$$

6. *Caso N "qualquer" mas φ linear.*

7. *Demonstração do Teorema de mudança de variável por indução em N (dimensão do espaço).*

Etapa 1: Suponhamos que, *para quaisquer Ω, φ nas condições da hipótese:*

$$f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega)) \Rightarrow (f \circ \varphi)|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega);$$

provemos a implicação inversa. Uma vez que supomos demonstrada a implicação acima para qualquer φ nas condições da hipótese, podemos utilizá-la com φ substituído por φ^{-1}, e Ω por $\varphi(\Omega)$ (que também satisfazem, evidentemente às hipóteses do teorema, atendendo ao que sabemos acerca de difeomorfismos de classe C^1). Seja então $(f \circ \varphi)|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega) = \mathcal{L}(\varphi^{-1}(\varphi(\Omega)))$; da implicação podemos concluir que está em $\mathcal{L}(\varphi(\Omega))$ a função:

$$\begin{aligned}[(f \circ \varphi)|\mathcal{J}_\varphi|] \circ \varphi^{-1}.\left|\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}\right| = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}.\left|\det\left[(D\varphi) \circ \varphi^{-1} \times D\varphi^{-1}\right]\right| = \\ = f.|\det D(\underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{= Id})| = f,\end{aligned}$$

atendendo ao teorema de derivação da função composta, o que termina a Etapa 1.

Etapa 2: Suponhamos demonstrada a fórmula de mudança de variáveis *para $\varphi_2 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$, φ_2 restrição a Ω de certo difeomorfismo de classe C^1 em aberto contendo Ω) e para $\varphi_1 : \Omega' \to \mathbb{R}^N$ nas mesmas condições, sendo* $\varphi_2(\Omega) = \Omega'$ (note-se que *"relaxámos"* as hipóteses do teorema, não exigindo que Ω seja aberto). Provemos a fórmula para $\varphi_1 \circ \varphi_2$; aplicando o resultado sucessivamente para φ_1 e φ_2, temos então (para $f \in \mathcal{L}((\varphi_1 \circ \varphi_2)(\Omega)) = = \mathcal{L}(\varphi_1(\varphi_2(\Omega)))$:

$$(f \circ \varphi_1).|\mathcal{J}_{\varphi_1}| \in \mathcal{L}(\varphi_2(\Omega)), [((f \circ \varphi_1).|\mathcal{J}_{\varphi_1}|) \circ \varphi_2].|\mathcal{J}_{\varphi_2}| \in \mathcal{L}(\Omega)$$

e:

$$\int_{\varphi_1 \circ \varphi_2(\Omega)} f = \int_{\varphi_2(\Omega)} (f \circ \varphi_1).|\mathcal{J}_{\varphi_1}| = \int_\Omega [(f \circ \varphi_1).|\mathcal{J}_{\varphi_1}|) \circ \varphi_2].|\mathcal{J}_{\varphi_2}|$$

Ora:

$$\begin{aligned}[(f\circ\varphi_1).|\mathcal{J}_{\varphi_1}|)\circ\varphi_2].|\mathcal{J}_{\varphi_2}| &= [(f\circ\varphi_1)\circ\varphi_2)].(|\mathcal{J}_{\varphi_1}|\circ\varphi_2).|\mathcal{J}_{\varphi_2}| = \\ &= [f\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)].|\det[((D\varphi_1)\circ\varphi_2)\times D\varphi_2]| = \\ &= [f\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)].|\det D(\varphi_1\circ\varphi_2)| = \\ &= [f\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)].|\mathcal{J}_{\varphi_1\circ\varphi_2}|,\end{aligned}$$

tendo-se, em particular, $[f\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)].|\mathcal{J}_{\varphi_1\circ\varphi_2}|\in\mathcal{L}(\Omega)$, e:

$$\int_{\varphi_1\circ\varphi_2(\Omega)} f = \int_\Omega [f\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)].|\mathcal{J}_{\varphi_1\circ\varphi_2}|,$$

o que demonstra a fórmula para $\varphi_1\circ\varphi_2$.

Etapa 3: Suponhamos que *para cada I intervalo limitado tal que $\overline{I}\subset\varphi(\Omega)$ se tem $(f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi|\in\mathcal{L}(\varphi^{-1}(I))$ e:*

$$\int_I f = \int_{\varphi^{-1}(I)} (f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi|$$

(para qualquer $f\in\mathcal{L}(\varphi(\Omega)), \varphi, \Omega$ nas condições da hipótese do teorema). Provemos que *a conclusão do teorema resulta deste facto*. Pela Proposição 14.2 sabemos que $\varphi(\Omega)$ é união numerável de cubos K_n dois a dois disjuntos e tais que $\overline{K_n}\subset\varphi(\Omega)$ $(n\in\mathbb{N}_1)$; atendendo à hipótese agora feita, dado $f\in\mathcal{L}(\varphi(\Omega))$:

$$\bullet \int_{K_n} f = \int_{\varphi^{-1}(K_n)} (f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi|,\ \forall n\in\mathbb{N}_1,$$

tendo-se $(f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi|\in\mathcal{L}(\varphi^{-1}(K_n))$. Resulta então da Proposição 14.4–1, 2 que $(|f|\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi|\in\mathcal{L}(\Omega)$, pois $|f|$ está nas mesmas condições de f, e portanto:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_{\varphi^{-1}(K_n)}(|f|\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_{K_n}|f| = \int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}K_n}|f| = \int_{\varphi(\Omega)}|f| < +\infty.$$

Como $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}\varphi^{-1}(K_n) = \varphi^{-1}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}K_n\right) = \varphi^{-1}(\varphi(\Omega)) = \Omega$, sendo a união disjunta, pela referida Proposição 14.4 tem-se, de facto, $(f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi|\in\mathcal{L}(\Omega)$ e:

$$\bullet \int_\Omega (f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_{\varphi^{-1}(K_n)}(f\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\int_{K_n} f = \int_{\varphi(\Omega)} f,$$

o que termina a Etapa 3, atendendo também à Etapa 1.

Etapa 4: Provemos que *para quaisquer Ω, φ nas condições da hipótese, $J\Subset\varphi(\Omega)$, intervalo limitado, se tem $\varphi^{-1}(J)\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, sendo $V(\varphi^{-1}(J))=0$ se J for degenerado*.

Notemos que $\varphi^{-1}(J)$ é *limitado* (está contido no *compacto* $\varphi^{-1}(\overline{J})$), tratando-se de conjunto *"definido por desigualdades"*, no sentido da Secção 4.4; com efeito, designando por a_i, b_i $(i=1,\ldots,N)$ os extremos das projecções de J, teremos, com as notações da Proposição 4.4:

$$\varphi^{-1}(J) = \{x \in \Omega : a_i < (=)\, \varphi_i(x) < (=)\, b_i, i = 1, \ldots, N\} =$$
$$= \{x \in \Omega : a_i - \varphi_i(x) < (=)\, 0, \varphi_i(x) - b_i < (=) 0, i = 1, \ldots, N\},$$

pelo que podemos aplicar a referida Proposição para concluir que $\varphi^{-1}(J) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$. Mostremos que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição; primeiro que tudo, é fácil ver que na definição de $\varphi^{-1}(J)$ podemos substituir Ω por um *aberto com fronteira desprezável*. Basta notar que $\varphi^{-1}(\overline{J})$ é compacto, contido no aberto Ω, pelo que ficará coberto por uma união finita de bolas abertas contidas em Ω, que podem ser intervalos de $\mathbb{R}^N$, bastando para tal considerar as bolas associadas à "norma do máximo"; essa união será então aberta e mensurável à Jordan (união finita de intervalos), tendo portanto fronteira desprezável (*cf.* Corolário 1 do Teorema 3.11), bastando evidentemente, na definição de $\varphi^{-1}(J)$, tomar x nesse novo aberto. Por outro lado, atendendo à hipótese de $\mathcal{J}_\varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$, é óbvio que, para cada $i = 1, \ldots, N$, grad $\varphi_i(x) \neq 0, \forall x \in \in \Omega$, pelo que, em particular:

$$\begin{cases} \text{grad}\,(a_i - \varphi_i)(x) = -\text{grad}\,\varphi_i(x) \neq 0 \\ \text{grad}\,(\varphi_i - b_i)(x) = \text{grad}\,\varphi_i(x) \neq 0 \end{cases},$$

$\forall x \in (a_i - \varphi_i)^{-1}(0), (\varphi_i - b_i)^{-1}(0)$, respectivamente, ou seja, $\forall x \in \Omega$ tal que $\varphi_i(x) = a_i, \varphi_i(x) = b_i$, respectivamente. Esta constatação completa a verificação das hipóteses da Proposição 4.4; resta portanto mostrar que $V(\varphi^{-1}(J)) = 0$ se J for degenerado. Ora, no caso de J ser degenerado, para certo $i \in \{1, \ldots, N\}$, $a_i = b_i$, pelo que $\varphi^{-1}(J)$ fica, nesse caso, contido no conjunto dado pela equação $\varphi_i(x) = a_i$, o qual tem *medida nula*, de acordo com a Observação 11) do Capítulo 4; tratando-se de mensurável-J, $V(\varphi^{-1}(J)) = 0$, o que conclui a Etapa 4.

Etapa 5: Fixados Ω, φ nas condições da hipótese, mostremos que *a conclusão do teorema é equivalente à seguinte asserção:*

(16) • *"Para todo o intervalo limitado $J \Subset \varphi(\Omega)$:*

$$V(J) = \int_{\varphi^{-1}(J)} |\mathcal{J}_\varphi| \text{"}.$$

Suponhamos então verificada a condição (16); provemos que a conclusão do Teorema tem lugar para qualquer f. Atendendo á Etapa 3, basta tomar um intervalo limitado $I \Subset \varphi(\Omega)$ e, para $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$, provar que:

$$(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\varphi^{-1}(I))$$

e:

$$\int_I f = \int_{\varphi^{-1}(I)} (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|.$$

Seja então $I \Subset \varphi(\Omega)$, e comecemos por supor que $f \in \mathcal{E}(I)$; f será então combinação linear de funções características de determinados intervalos, ou seja, existirão $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $J_1, \ldots, J_k$ intervalos limitados contidos em I, tais que, em I:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \chi_{J_i}.$$

Teremos assim, em $\varphi^{-1}(I)$:

$$f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{k} c_i\, (\chi_{J_i} \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \chi_{\varphi^{-1}(J_i)},$$

o que prova que $f \circ \varphi$ é integrável à Riemann em $\varphi^{-1}(I)$, visto cada $\chi_{\varphi^{-1}(J_i)}$ o ser, por se tratar, atendendo à Etapa 4, da função característica de conjunto mensurável à Jordan contido no mensurável à Jordan $\varphi^{-1}(I)$. Consequentemente também será integrável-R a função $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|$, visto o segundo factor ser contínuo e limitado em I (trata-se de função contínua no *compacto* $\overline{I}$); mais uma vez atendendo a (16) e à definição de *volume* teremos então:

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_I \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\, \chi_{J_i} \right) = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_I \chi_{J_i} = \sum_{i=1}^{k} c_i\, V(J_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\varphi^{-1}(J_i)} |\mathcal{J}_\varphi| = \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\chi_{\varphi^{-1}(J_i)}}_{=\chi_{\varphi^{-1}(J_i)} \cdot \chi_{\varphi^{-1}(I)}} |\mathcal{J}_\varphi|^{\sim} = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\varphi^{-1}(J_i)} \cdot \chi_{\varphi^{-1}(I)}\, |\mathcal{J}_\varphi|^{\sim} = \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{\varphi^{-1}(I)} \chi_{\varphi^{-1}(J_i)}\, |\mathcal{J}_\varphi| = \int_{\varphi^{-1}(I)} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\, \chi_{\varphi^{-1}(J_i)} \right) |\mathcal{J}_\varphi| = \\
&= \int_{\varphi^{-1}(I)} (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$. Pelo que se viu na Secção 14.4, sabemos que f é somável em I, pelo que será dada em I pela diferença de duas funções de $\mathcal{S}(I)$; atendendo à linearidade do integral e das operações envolvidas na fórmula de mudança de variáveis (composição e produto), basta evidentemente demonstrar o resultado separadamente para cada uma das funções de $\mathcal{S}(I)$. Por outras palavras, podemos supor que $f \in \mathcal{S}(I)$; sabemos então (*cf.* Capítulo 9) que existe uma sucessão f_n de funções de $\mathcal{E}(I)$ tal que:

- $f_n \uparrow f$ *p.p.* em I

(ou seja, fora de certo $E \subset I$ tal que $m(E) = 0$) e:

- $\displaystyle\int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f.$

Tem-se então:

$$(f_n \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \uparrow (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|,$$

fora de $\varphi^{-1}(E)$. Se provarmos que $m(\varphi^{-1}(E)) = 0$, como, pelo que acima vimos, $(f_n \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{R}(\varphi^{-1}(I)), \forall n \in \mathbb{N}_1$ e:

$$\int_{\varphi^{-1}(I)} (f_n \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \int_I f_n \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f,$$

resultará do teorema de Beppo Levi (*cf.* Observação 10) do Capítulo 14, Secção 14.4) que $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\varphi^{-1}(I))$ e:

$$\int_{\varphi^{-1}(I)} (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \lim_n \int_{\varphi^{-1}(I)} (f_n \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \int_I f,$$

como pretendíamos. Verifiquemos então que, de facto, $m(\varphi^{-1}(E)) = 0$; atendendo a que E é desprezável, dado $\delta > 0$ existe uma sucessão $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ de intervalos limitados de $\mathbb{R}$ *cobrindo* E tal que:

(17) $$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(I_n) < \frac{c\delta}{2}.$$

onde:

$$c = \min_{\varphi^{-1}(\overline{I})} |\mathcal{J}_\varphi| > 0,$$

já que $\varphi^{-1}(\overline{I})$ é *compacto* por ser imagem do compacto $\overline{I}$ pelo *homeomorfismo* φ^{-1} (atendendo ao Teorema da Função Inversa φ^{-1} é mesmo *difeomorfismo de classe* C^1), e $\mathcal{J}_\varphi \neq 0$ em Ω, por hipótese, tratando-se de função contínua. Podemos supor que $I_n \subset I, \forall n \in \mathbb{N}_1$, substituindo, se necessário, cada I_n pela respectiva intersecção com I, já que $E \subset I$ e $m(I_n \cap I) \leq m(I_n)$. Temos assim:

(18) $$\varphi^{-1}(E) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} \varphi^{-1}(I_n) \subset \varphi^{-1}(I);$$

ora pela Etapa 4 e (16), teremos $\varphi^{-1}(I_n) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ e:

$$V(I_n) = \int_{\varphi^{-1}(I_n)} |\mathcal{J}_\varphi| \geq \underbrace{\inf_{\varphi^{-1}(I_n)} |\mathcal{J}_\varphi|}_{c_n} \int_{\varphi^{-1}(I_n)} 1 = c_n\, m(\varphi^{-1}(I_n)),$$

onde:

$$c_n = \inf_{\varphi^{-1}(I_n)} |\mathcal{J}_\varphi| \geq \min_{\varphi^{-1}(\overline{I})} |\mathcal{J}_\varphi| = c.$$

Então $V(I_n) \geq c\, m(\varphi^{-1}(I_n))$, e portanto:

(19) $$m(\varphi^{-1}(I_n)) \leq \frac{V(I_n)}{c},$$

pelo que, atendendo a (17), (18), poderíamos estimar a medida de $\varphi^{-1}(E)$, utilizando a Proposição 14.3, *se soubéssemos que* $\varphi^{-1}(E) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$*!* como, infelizmente, não é o caso, teremos de substituir os $\varphi^{-1}(I_n)$ por uniões adequadas de intervalos para obtermos uma cobertura de $\varphi^{-1}(E)$ constituída apenas por esse tipo de conjuntos, de modo a verificarmos, directamente pela definição, que $\varphi^{-1}(E)$ é desprezável. Uma vez que na Etapa 4 demonstrámos a mensurabilidade à Jordan dos $\varphi^{-1}(I_n)$ podemos utilizar a Observação 6) do Capítulo 3 (Secção 3.3), no que se refere ao cálculo do volume exterior, para concluir que, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, existe uma família finita de intervalos[13] $\{J_1^n, \ldots, J_{k_n}^n\}$ tal que:

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} &\bullet\ \varphi^{-1}(I_n) \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} J_i^n \\ &\bullet\ \sum_{i=1}^{k_n} V(J_i^n) - V(\varphi^{-1}(I_n)) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

De $(18)-(20)$ deduz-se imediatamente que $\varphi^{-1}(E)$ é coberto pela família *numerável* de intervalos:

$$(J_i^n)_{(n,i)\in\mathbb{N}_1\times\mathbb{N}_1;\, i\leq k_n}$$

cujos volumes têm soma:

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\sum_{i=1}^{k_n} V(J_i^n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\left(\sum_{i=1}^{k_n} V(J_i^n) - V(\varphi^{-1}(I_n))\right) + \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(\varphi^{-1}(I_n)) \leq \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\frac{\delta}{2^{n+1}} + \sum_{n\in\mathbb{N}_1}\frac{V(I_n)}{c} < \frac{\delta}{2} + \frac{c\delta}{2c} = \delta, \end{aligned}$$

ficando provado que, de facto, $\varphi^{-1}(E)$ é desprezável, o que termina a demonstração de que (16) é condição suficiente para a conclusão do teorema.

Reciprocamente, admitindo a conclusão do teorema, podemos aplicá-la a χ_J, J nas condições de (16), obtendo (*cf.* também Observação 6) do Capítulo 14, secção 14.4):

$$\begin{aligned} V(J) &= \int_{\mathbb{R}^N}\chi_J = \int_{\varphi(\Omega)}\chi_J = \int_\Omega (\chi_J\circ\varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \\ &= \int_\Omega \chi_{\varphi^{-1}(J)}.|\mathcal{J}_\varphi| = \int_{\varphi^{-1}(J)}|\mathcal{J}_\varphi|, \end{aligned}$$

o que termina a Etapa 5.

Etapa 6: Se $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ for *linear*, tem-se $\mathcal{J}_\varphi(x) = \det M_\varphi, \forall x \in \mathbb{R}$, onde M_φ é a matriz de φ na base canónica de $\mathbb{R}^N$. Da hipótese do teorema, concluímos que M_φ é *invertível*, visto ter determinante não nulo; o processo de condensação de matrizes garante-nos então que podemos reduzir M_φ à matriz identidade multiplicando-a à direita e à esquerda por matrizes de certos tipos simples, todas

[13]Trata-se dos intervalos de uma partição de certo intervalo compacto, suficientemente "grande" para conter o limitado $\varphi^{-1}(I)$, sendo a partição escolhida de acordo com a condição que se segue, atendendo à referida observação e à definição de supremo.

invertíveis. M_φ fica assim igual ao produto de um número finito de inversas de matrizes do tipo referido (as inversas são, de facto, ainda do mesmo tipo), ou seja, φ fica composição de certo número de isomorfismos lineares de um dos seguintes tipos:

- $\theta^i(x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_N)$ $(i = 1, \ldots, N-1)$, com jacobiano:

$$\det M_{\theta^i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = -1$$

  donde $|\mathcal{J}_{\theta^i}| = 1$.

- $\theta_a(x_1, \ldots, x_N) = (ax_1, \ldots, x_N)$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, com jacobiano:

$$\det M_{\theta_a} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a,$$

  donde $|\mathcal{J}_{\theta_a}| = |a|$.

• $\theta(x_1, \ldots, x_N) = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_N)$, com jacobiano:

$$\det M_\theta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donde $|\mathcal{J}_\theta| = 1$.

Atendendo à Etapa 2 basta-nos demonstrar o teorema para cada θ^i, θ_a, e θ separadamente. Atendendo agora às Etapas 4 e 5, basta provar que para cada intervalo limitado $J \subset \mathbb{R}^N$ se tem:

$$V(J) = \int_{\varphi^{-1}(J)} |\det M_\varphi| = |\det M_\varphi|.V(\varphi^{-1}(J)),$$

onde φ é uma das aplicações θ^i, θ_a ou θ. Seja então (com as notações da Observação 14) do Capítulo 3):

$$J = \prod_{j=1}^{N} |a_j, b_j|$$

$(a_j \leq b_j, \forall j = 1, \ldots, N)$; comecemos por θ^i. Temos:

$$\theta^{i^{-1}}(J) = \prod_{j=1}^{i-1} |a_j, b_j| \times |a_{i+1}, b_{i+1}| \times |a_i, b_i| \times \prod_{j=i+1}^{N} |a_j, b_j|,$$

pelo que, obviamente:

$$V(J) = \prod_{j=1}^{N} (b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{i-1} (b_j - a_j) \times (b_{i+1} - a_{i+1}) \times$$
$$\times (b_i - a_i) \times \prod_{j=i+2}^{N} (b_j - a_j) = V(\theta^{i^{-1}}(J)) = \underbrace{|\det M_{\theta^i}|}_{=1}.V(\theta^{i^{-1}}(J)).$$

Quanto a θ_a, como é fácil concluir, se $a > 0$:

$$\theta_a^{-1}(J) = \left| \frac{a_1}{a}, \frac{b_1}{a} \right| \times \prod_{j=2}^{N} |a_j, b_j|,$$

e se $a < 0$, a primeira projecção é substituida por $\left| \frac{b_1}{a}, \frac{a_1}{a} \right|$. Em qualquer caso:

$$V(J)=\prod_{j=1}^{N}(b_j-a_j)=(b_1-a_1)\times\prod_{j=2}^{N}(b_j-a_j)=|a|\left|\frac{a_1}{a}-\frac{b_1}{a}\right|\times$$
$$\times\prod_{j=2}^{N}(b_j-a_j)=|a|V(\theta_a^{-1}(J))=\underbrace{|\det M_{\theta_a}|}_{=|a|}.V(\theta_a^{-1}(J)).$$

Finalmente, para θ, temos:

$$\theta^{-1}(J)=\{x\in\mathbb{R}^N : a_1<(=)\,x_1+x_2<(=)\,b_1,(x_2,\ldots,x_N)\in\prod_{j=2}^{N}|a_j,b_j|\};$$

sabemos, pela Etapa 4, que $\theta^{-1}(J)\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, sendo o seu volume dado, por definição, pelo integral da função característica em qualquer intervalo compacto contendo o conjunto (*cf.* Secções 3.2, 3.3). Ora é evidente, atendendo à definição de $\theta^{-1}(J)$, que:

$$\theta^{-1}(J)\subset[a_1-b_2,b_1-a_2]\times\prod_{j=2}^{N}[a_j,b_j]=J',$$

pelo que, utilizando o Teorema de Fubini (recorde-se que a função característica de $\theta^{-1}(J)$ é integrável à Riemann e portanto, em particular, somável em J'):

$$V(\theta^{-1}(J))=\int_{J'}\chi_{\theta^{-1}(J)}=\int_{\prod_{j=2}^{N}[a_j,b_j]}\left(\int_{a_1-b_2}^{b_1-a_2}\chi_{\theta^{-1}(J)}(x)\,dx_1\right)dx_2\cdots dx_N=$$
$$=\int_{\prod_{j=3}^{N}[a_j,b_j]}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1-x_2}^{b_1-x_2}1\,dx_1\right)dx_2\right)dx_3\cdots dx_N=$$
$$=\int_{\prod_{j=3}^{N}[a_j,b_j]}\left(\int_{a_2}^{b_2}(b_1-x_2-a_1+x_2)\,dx_2\right)dx_3\cdots dx_N=$$
$$=\int_{\prod_{j=3}^{N}[a_j,b_j]}\left(\int_{a_2}^{b_2}(b_1-a_1)\,dx_2\right)dx_3\cdots dx_N=\prod_{j=1}^{N}(b_j-a_j)=V(J).$$

Deste modo:

$$V(J)=V(\theta^{-1}(J))=\underbrace{|\det M_\theta|}_{=1}.V(\theta^{-1}(J)),$$

como pretendíamos. Fica assim demonstrado o resultado para φ *linear*, o que termina a Etapa 6.

Etapa 7*:* Demonstremos o Teorema por indução em N.

• *Caso* $N=1$*:* Atendendo à Etapa 5 basta demonstrar que *para todo o intervalo limitado* $J\Subset\varphi(\Omega)$:

$$V(J) = \int_{\varphi^{-1}(J)} |\mathcal{J}_\varphi|.$$

Ora, sendo $J = |a, b|$ $(a \leq b)$, φ de classe C^1 com derivada não nula no aberto Ω contendo $[a, b]$, ter-se-á (*cf.* o início deste Capítulo) $\varphi^{-1}(|a, b|) = |\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)|$ ou $\varphi^{-1}(|a, b|) = |\varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(a)|$, conforme φ' for positiva ou negativa. Em qualquer caso, pela fórmula de Barrow:

$$V(J) = b - a = \varphi(\varphi^{-1}(b)) - \varphi(\varphi^{-1}(a)) = \begin{cases} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi' & \text{se } \varphi' > 0 \\ -\int_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi' & \text{se } \varphi' < 0 \end{cases} =$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(|a,b|)} |\varphi'| = \int_{\varphi^{-1}(J)} |\mathcal{J}_\varphi|,$$

como pretendíamos.

• *Hipótese de indução: O teorema vale em* $\mathbb{R}^p, \forall p = 1, \ldots, N-1$.
• *Tese: O teorema vale em* $\mathbb{R}^N$.

Comecemos por mostrar que, *fixados* Ω, φ *nas condições da hipótese*, para cada $x_0 \in \Omega$ existe uma vizinhança aberta V_{x_0} de x_0 contida em Ω de tal modo que a fórmula vale em V_{x_0}, ou seja, se $f \in \mathcal{L}(\varphi(V_{x_0}))$, então $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \in \mathcal{L}(V_{x_0})$ e:

$$\int_{\varphi(V_{x_0})} f = \int_{V_{x_0}} (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|, \forall f \in \mathcal{L}(V_{x_0}).$$

Podemos supor que $D\varphi(x_0)$ *é a matriz identidade* Id; com efeito, se o não for, teremos:

$$\varphi = L \circ (L^{-1} \circ \varphi),$$

em que $L = d\varphi(x_0)$ (diferencial de φ em x_0), aplicação linear *invertível* de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$. Como a fórmula vale para L, atendendo à Etapa 6, basta demonstrá-la para $L^{-1} \circ \varphi$, atendendo à Etapa 2. Ora:

$$\bullet\ D(L^{-1} \circ \varphi)(x_0) = (DL^{-1})(\varphi(x_0)) \times D\varphi(x_0) = \\ = [D\varphi(x_0)]^{-1} \times D\varphi(x_0) = Id,$$

como pretendíamos.

Supondo então que $D\varphi(x_0) = Id$, vamos ver que, em certa vizinhança de x_0, φ é composição de dois difeomorfismos, cada um dos quais *deixa invariante pelo menos uma das coordenadas*, o que nos permitirá aplicar a hipótese de indução. Seja então:

• $h : \Omega \to \mathbb{R}^N$
• $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega \mapsto h(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{N-1}(x), x_N)$

(onde, evidentemente, $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{N-1}(x), \varphi_N(x)) = \varphi(x), \forall x \in \Omega$). Tem-se:

$$Dh(x_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{N-1}}(x_0) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial x_{N-1}}(x_0) & \dfrac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial x_N}(x_0) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = Id,$$

já que $D\varphi(x_0) = Id$. Em particular, $\mathcal{J}_h(x_0) \neq 0$, donde, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças abertas V_{x_0} de x_0, W_{y_0} de $h(x_0) = y_0$ ($V_{x_0} \subset \Omega$) tais que h é *difeomorfismo de classe C^1 de V_{x_0} sobre W_{y_0}*. Temos então:

$$\varphi = (\varphi \circ h^{-1}) \circ h,$$

em V_{x_0}; pondo $g = \varphi \circ h^{-1}$ trata-se de *difeomorfismo de classe C^1* de W_{y_0} sobre $W' \subset \varphi(\Omega)$, já que g é composição de difeomorfismos de classe C^1, e para cada $y = h(x) \in W_{y_0}$ ($= h(V_{x_0})$) tem-se:

$$\begin{aligned} g(y) &= g(h(x)) = \varphi \circ h^{-1}(h(x)) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{N-1}(x), \varphi_N(x)) = \\ &= (h_1(x), \dots, h_{N-1}(x), \varphi_N(x)) = (y_1, \dots, y_{N-1}, \varphi_N(h^{-1}(y))), \end{aligned}$$

ou seja, *g deixa invariantes as $N-1$ primeiras coordenadas*. Atendendo à Etapa 2, para obter a fórmula para φ, basta obtê-la independentemente para h e g. Faremos a demonstração para h, pois para g é idêntica e mesmo *"mais fácil"*, visto que g apenas não deixa invariante, eventualmente, a coordenada y_N. Atendendo à Etapa 5 , basta demonstrar que, para cada intervalo limitado J tal que $\overline{J} \subset h(V_{x_0}) = W_{y_0}$, se tem:

$$V(J) = \int_{h^{-1}(J)} |\mathcal{J}_h|,$$

estando já demonstrado que $h^{-1}(J)$ é mensurável à Jordan (Etapa 4). Podemos supor que $V_{x_0} = V_1 \times]a', b'[$ (V_1 aberto de $\mathbb{R}^{N-1}$ contendo $(x_{0_1}, \dots, x_{0_{N-1}})$, $a' < x_{0_N} < b', a', b' \in \mathbb{R}$), $J = J_1 \times |a, b|$ (J_1 intervalo de $\mathbb{R}^{N-1}$, $|a, b|$ intervalo de $\mathbb{R}$ de extremos a, b, de qualquer dos tipos possíveis), tendo-se portanto $[a, b] \subset]a', b'[$, já que $h_N(x) = x_N \in]a', b'[, \forall x \in V_{x_0}$. Virá:

$$(21) \qquad V(J) = V(J_1) \times (b-a) = \int_a^b V(J_1).$$

Agora, para cada $x_N \in |a, b| \subset]a', b'[$, podemos definir:

$$\begin{aligned} h_{x_N} : V_1 &\to \mathbb{R}^{N-1} \\ (x_1, \ldots, x_{N-1}) &\mapsto h_{x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}) = \\ &= (h_1(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N), \ldots, h_{N-1}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)) = \\ &= (\varphi_1(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N), \ldots, \varphi_{N-1}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)). \end{aligned}$$

Tem-se $J_1 \Subset h_{x_N}(V_1)$ e:

$$\mathcal{J}_{h_{x_N}}(x_1, \ldots, x_{N-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{N-1}}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_{N-1}}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) & \cdots & \dfrac{\partial h_{N-1}}{\partial x_{N-1}}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{N-1}}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_{N-1}}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) & \cdots & \dfrac{\partial h_{N-1}}{\partial x_{N-1}}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) & \dfrac{\partial h_{N-1}}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= \mathcal{J}_h(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \neq 0,$$

e é fácil concluir que h_{x_N} é injectiva, visto h o ser. Trata-se pois de difeomorfismo de classe C^1 definido no aberto V_1 de $\mathbb{R}^{N-1}$, pelo que podemos aplicar a hipótese de indução ao cálculo do volume de J_1, atendendo à Etapa 5, o que permite desenvolver (21):

$$
\begin{aligned}
V(J) &= \int_a^b V(J_1)\,dx_N = \\
&= \int_a^b \Big(\int_{h_{x_N}^{-1}(J_1)} \big|\mathcal{J}_{h_{x_N}}(x_1,\dots,x_{N-1})\big|\,dx_1 \dots dx_{N-1}\Big)\,dx_N = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \big|\mathcal{J}_{h_{x_N}}(x_1,\dots,x_{N-1})\big| . \\
&\qquad .\chi_{h_{x_N}^{-1}(J_1)}(x_1,\dots,x_{N-1})\,dx_1 \dots\dots dx_{N-1}\Big) .\chi_{]a,b[}(x_N)\,dx_N,
\end{aligned} \tag{22}
$$

e portanto, pelo Teorema de Fubini[14], o último membro das igualdades ainda vem igual a:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\big|\mathcal{J}_{h_{x_N}}(x_1,\dots,x_{N-1})\big|}_{=|\mathcal{J}_h(x_1,\dots,x_{N-1},x_N)|}\underbrace{\chi_{h_{x_N}^{-1}(J_1)}(x_1,\dots,x_{N-1}).\chi_{]a,b[}(x_N)}_{\substack{=\chi_{h^{-1}(J_1\times]a,b[)}(x_1,\dots,x_{N-1},x_N)= \\ =\chi_{h^{-1}(J)}(x_1,\dots,x_{N-1},x_N)}} dx_1 \cdots dx_{N-1} dx_N = \\
&= \int_{h^{-1}(J)} |\mathcal{J}_h|,
\end{aligned}
$$

pelo que, atendendo a (22), a fórmula fica demonstrada para h. Do que atrás dissémos resulta portanto que, para cada $x_0 \in \Omega$, existe uma vizinhança aberta V_{x_0} de x_0 contida em Ω tal que:

$$
\bullet \int_{\varphi(V_{x_0})} f = \int_{V_{x_0}} (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|, \forall f \in \mathcal{L}(\varphi(V_{x_0})),
$$

o que é equivalente, atendendo à Etapa 5, à formula de cálculo do volume para todos os intervalos limitados de aderência contida em $\varphi(V_{x_0})$. Para demonstrar o Teorema em Ω, voltemos a utilizar a Etapa 5, o que nos permitirá demonstrar a fórmula apenas para o volume de cada intervalo limitado I tal que $\overline{I} \subset \varphi(\Omega)$. $\overline{I}$ é compacto e pode ser coberto por intervalos abertos J_x, vizinhanças de cada $\varphi(x) \in \overline{I}$, escolhidos com aderência compacta contida em $\varphi(V_x)$[15]; $\overline{I}$ será portanto coberto por um número finito de J_x, o mesmo se passando, por maioria de razão, com I. Atendendo agora à Proposição 1.5 sabemos que existe uma partição P de $\overline{I}$ constituída por intervalos cada um dos quais está contido num dos $\overline{J_x}$ da referida cobertura finita. Cada $J \in P$ estará então contido em certo $\varphi(V_{x_0})$, pelo que o respectivo volume (bem como o volume do respectivo *interior*) pode ser calculado pela fórmula de mudança de variável; quanto à união das fronteiras

---

[14]Note-se que a somabilidade, e mesmo a integrabilidade-R da função integranda está assegurada, pois, como veremos em seguida, trata-se de $\chi_{h^{-1}(J)}|\mathcal{J}_h|$, função *limitada*, por $|\mathcal{J}_h|$ ser contínua no *compacto* $h^{-1}(\overline{J})$, fora do qual a função integranda é nula, sendo além disso produto da função *contínua* $|\mathcal{J}_h|$ pela função característica do conjunto *mensurável à Jordan* $h^{-1}(J)$ (de acordo com a Etapa 4).

[15]De facto $\varphi(V_x)$ é vizinhança de $\varphi(x)$, pelo que basta tomar uma “bola fechada” para a norma do máximo em $\mathbb{R}^N$, centrada en $\varphi(x)$ e contida em $\varphi(V_x)$ (trata-se, como sabemos de um *cubo*).

destes J será união finita de intervalos degenerados, de acordo com a Observação 5) do Capítulo 1, pelo que terá volume nulo, *bem como a imagem inversa por φ de cada um dos intervalos degenerados em questão* (atendendo à Etapa 4) e portanto de uniões finitas destes. Pela mesma razão, podemos supor que I é *compacto*, já que a fronteira de I e respectiva imagem inversa por φ têm volume nulo[16]. Deduzimos então do Teorema 1.3, do ponto 1 da Proposição 3.3[17] e da Proposição 3.5, que:

$$V(I) = \sum_{J\in P} V(J) = \sum_{J\in P} \int_{\varphi^{-1}(J)} |\mathcal{J}_\varphi| = \sum_{J\in P} \int_{\varphi^{-1}(\overset{\circ}{J})} |\mathcal{J}_\varphi| + \underbrace{\sum_{J\in P} \int_{\varphi^{-1}(\operatorname{fr} J)} |\mathcal{J}_\varphi|}_{=0} =$$

$$= \sum_{J\in P} \int_{\varphi^{-1}(\overset{\circ}{J})} |\mathcal{J}_\varphi| + \underbrace{\int_{\varphi^{-1}\left(\bigcup\limits_{J\in P} \operatorname{fr} J\right)} |\mathcal{J}_\varphi|}_{=0} =$$

$$= \int_{\left(\dot{\bigcup}\limits_{J\in P} \varphi^{-1}(\overset{\circ}{J})\right) \dot{\cup}\, \varphi^{-1}\left(\bigcup\limits_{J\in P} \operatorname{fr} J\right)} |\mathcal{J}_\varphi| = \int_{\varphi^{-1}(I)} |\mathcal{J}_\varphi|.$$

Acabámos de demonstrar a fórmula para o volume de qualquer intervalo limitado de aderência contida em $\varphi(\Omega)$, o que, de acordo com a Etapa 5, termina a demonstração do teorema.☐

Examinemos um exemplo de aplicação do teorema anterior. Procuremos calcular o volume de um *elipsóide* sabendo que o de uma esfera de raio 1 é igual a $(4/3)\,\pi$. Temos:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{c}\Big)^2 \leq 1\}\ (a,b,c>0),$$

ou seja:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Big(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\Big) \in \overline{B}(0,1)\} = T^{-1}(\overline{B}(0,1)),$$

onde:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

é tal que:

$$T(x,y,z) = \Big(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\Big).$$

Ora:

---

[16]Coincidem, portanto, por um lado o volume de I e da respectiva aderência, e, por outro, o integral de $|\mathcal{J}_\varphi|$ em $\varphi^{-1}(I)$ e em $\varphi^{-1}(\overline{I})$, atendendo à Proposição 3.5.

[17]Note-se que $|\mathcal{J}_\varphi|$ é integrável-R em $\varphi^{-1}(I)$, por se tratar de função contínua limitada em conjunto mensurável à Jordan, de acordo com a Etapa 4.

$$M_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \Rightarrow |\det M_T| = (abc)^{-1},$$

donde $|\det M_{T^{-1}}| = abc$ e:

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^3} (\chi_E \circ T^{-1}).|\det M_{T^{-1}}| = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\underbrace{T(E)}_{=\overline{B}(0,1)}} \, abc =$$
$$= abc\, m(\overline{B}(0,1)) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Podemos agora estender facilmente o teorema anterior a subconjuntos de Ω:

COROLÁRIO: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 tal que $\mathcal{J}_\varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$, φ injectiva, $E \subset \Omega$; então $f \in \mathcal{L}(\varphi(E))$ sse $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \in \mathcal{L}(E)$ e, nesse caso:*

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|.$$

Em particular, $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ sse $\varphi(E) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ (e a fórmula anterior vale sempre que, por exemplo, $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$ e $E \subset \Omega$ é mensurável); além disso, nesse caso:

$$m(\varphi(E)) = \int_E |\mathcal{J}_\varphi|.$$

Demonstração: Tem-se, atendendo ao Teorema anterior (*cf.* também a Secção 14.4):

$$f \in \mathcal{L}(\varphi(E)) \Leftrightarrow \widetilde{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \widetilde{f}_{/\varphi(\Omega)} \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega)) \Leftrightarrow (\widetilde{f} \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Além disso, nesse caso:

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_{\varphi(\Omega)} \widetilde{f} = \int_\Omega (\widetilde{f} \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = \int_\Omega [(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|]^\sim = \int_E (f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|,$$

já que $\widetilde{f} \circ \varphi$ é zero fora de E (visto $\widetilde{f}$ o ser fora de $\varphi(E)$), o mesmo se passando com $[(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|]^\sim$, uma vez que f só está definida em $\varphi(E)$, pelo que $(f \circ \varphi)$, e consequentemente $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|$, só está definida em E; portanto, de facto, $(\widetilde{f} \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| = [(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|]^\sim$, o que mostra, em particular, atendendo ao que atrás vimos, que $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(E)$ sse $f \in \mathcal{L}(\varphi(E))$.

Se $\varphi(E) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, $m(\varphi(E)) < +\infty$, então $\chi_{\varphi(E)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $\chi_{\varphi(E)} \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$, donde, pelo que acabámos de ver:

$$(\chi_{\varphi(E)} \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega) \Rightarrow \chi_E.|\mathcal{J}_\varphi| \in \mathcal{L}(\Omega) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \chi_E = \underbrace{\chi_E.|\mathcal{J}_\varphi|}_{\in \mathcal{L}(\Omega)}.\underbrace{|\mathcal{J}_\varphi|^{-1}}_{\in \mathcal{M}(\Omega)} \in \mathcal{M}(\Omega) \Rightarrow E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N).$$

Se $\varphi(E) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), m(\varphi(E)) = +\infty$, podemos considerar:

$$\varphi(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \underbrace{(\varphi(E) \cap B(0,n))}_{=\varphi(E_n),(E_n=\varphi^{-1}(\varphi(E)\cap B(0,n))\subset E)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \varphi(E_n) \tag{23}$$

e notar que cada $\varphi(E_n)$ está nas condições anteriores, pelo que:

$$E_n = \varphi^{-1}(\varphi(E_n)) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N),$$

tendo-se $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1} E_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$. Para a recíproca, basta aplicar o resultado a φ^{-1} e para a parte final do teorema notar que se $f \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$, $E \subset \Omega$ mensurável, então $f.\chi_{\varphi(E)} \in \mathcal{L}(\varphi(\Omega))$, e portanto $f \in \mathcal{L}(\varphi(E))$, já que, pelo que acabámos de ver, $\varphi(E) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$. A fórmula para o cálculo da medida de Lebesgue de $\varphi(E)$ resulta simplesmente de tomar $f \equiv 1$ em $\varphi(E)$, no caso em que $\varphi(E)$ tem medida finita, e, em seguida, para o caso de $m(\varphi(E)) = +\infty$ utilizar (23), passando ao limite a fórmula de cálculo (para cada n) da medida de Lebesgue de $\varphi(E_n)$. Esta passagem ao limite dá, de facto, $+\infty$ em ambos os membros da fórmula, bastando, no primeiro membro, utilizar a Proposição 14.3–5 e no segundo a Observação 4) do Capítulo 11 .☐

Observações: 1) Se $f \geq 0$ *p.p.*, podemos obter o resultado que resulta de substituir "$\mathcal{L}$" por "$\mathcal{M}$" no corolário anterior (*cf.* Observações 3) e 4) do Capítulo 11), utilizando argumentos análogos aos do final da respectiva demonstração.

2) Do corolário anterior resulta imediatamente que φ *transforma desprezáveis em desprezáveis*. É fácil então concluir que *se* $A \Subset \Omega$ *for mensurável à Jordan então* $\varphi(A)$ *é mensurável à Jordan* e, em seguida, que f *é integrável-R em* $\varphi(A)$ *sse* $(f \circ \varphi).|\mathcal{J}_\varphi|$ *for integrável-R em* A, tendo-se, evidentemente a fórmula de mudança de variáveis. Com efeito, basta notar que a fronteira de A fica contida em Ω, pelo que a fronteira de $\varphi(A)$ (igual a φ da fronteira de A, já que φ é *homeomorfismo*) também será desprezável; além disso A é, por hipótese, limitado, com aderência *compacta* contida em Ω, pelo que o mesmo se passará com $\varphi(A)$ relativamente a $\varphi(\Omega)$, atendendo mais uma vez a que φ é *homeomorfismo*. De modo análogo se analisa a questão relativa a f, pensando no conjunto dos pontos de descontinuidade das funções em questão e no critério de Riemann-Lebesgue. Acabámos de obter a versão do Teorema de mudança de variáveis relativa ao *integral de Riemann*, que, como se constata, impõe condições muito mais restritivas às funções e conjuntos envolvidos, dificultando a utilização do resultado mesmo em situações correntes envolvendo, por exemplo, as coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas que vamos estudar em seguida.

15.1 Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

Examinemos exemplos de transformações de coordenadas de frequente utilização:

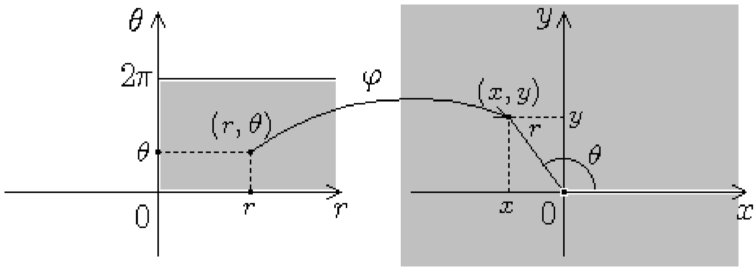
Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$*:*

Põe-se:

$$\varphi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2,$$

tal que:

$$(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta);$$



vem:

$$|\mathcal{J}_\varphi| = \left|\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\right| = r \neq 0 \text{ em }]0, +\infty[\times]0, 2\pi[,$$

e:

$$(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r'\cos\theta', r'\sin\theta') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r'^2\left(\cos^2\theta' + \sin^2\theta'\right) \Rightarrow r^2 = r'^2 \Rightarrow r = r'$$

(porque $r, r' > 0$) e agora:

$$\begin{cases}\cos\theta = \cos\theta'\\ \sin\theta = \sin\theta'\end{cases}, \theta, \theta' \in]0, 2\pi[\Rightarrow \theta = \theta'.$$

Portanto φ é *difeomorfismo de classe* C^∞ *de* $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ *sobre* $\mathbb{R}^2 \setminus \setminus\{(x, 0) : x \geq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{0x}^+$. Como o semi-eixo positivo $\overline{0x}^+$ é *desprezável* em $\mathbb{R}^2$ (basta notar, por exemplo, que é o produto cartesiano de $[0, +\infty[$ pelo *desprezável* $\{0\}$ e atender ao Corolário do Teorema 4.2) podemos utilizar a mudança de coordenadas φ para calcular integrais em quaisquer subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, visto que o integral não depende do que se passa num conjunto desprezável.

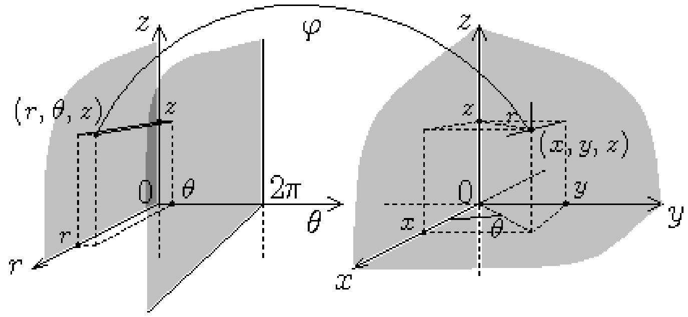
Coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$*:*

Põe-se:

$$\varphi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

tal que:

$$(r, \theta, z) \mapsto \varphi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z);$$



Tal como para as coordenadas polares conclui-se facilmente que φ é *difeomorfismo de classe* C^1, desta vez de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus x^+0z$ e, mais uma vez, x^+0z é *desprezável*, agora em $\mathbb{R}^3$ (é um produto cartesiano com um factor $\{0\}$), pelo que as coordenadas cilíndricas podem ser utilizadas em qualquer parte de $\mathbb{R}^3$. Tem-se, além disso:

$$\mathcal{J}_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

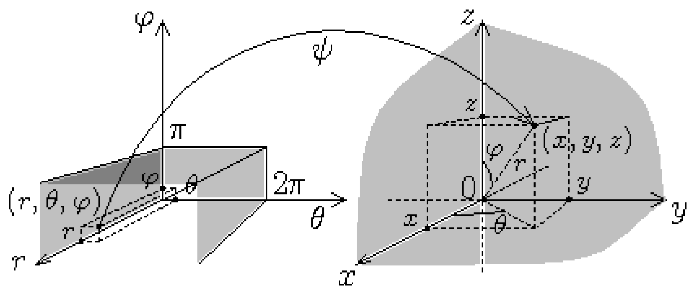
Coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$*:*

Tomemos:

$$\psi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3,$$

tal que:

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto \psi(r, \theta, \varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi);$$



de modo análogo ao que fizémos para as coordenadas polares e cilíndricas se vê que ψ é *difeomorfismo de classe* C^∞ *de* $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ sobre $\mathbb{R}^3\setminus\setminus x^+0z$, vindo:

$$\mathcal{J}_\varphi=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{vmatrix}=-r^2\sin^3\varphi\cos^2\theta+$$

$$+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin\varphi-r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\varphi-r^2\sin^3\varphi\sin^2\theta=$$
$$=-r^2\sin^3\varphi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-r^2\cos^2\varphi\sin\varphi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=$$
$$=-r^2\sin\varphi\ (\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=-r^2\sin\varphi\Rightarrow|\mathcal{J}_\varphi|=r^2\sin\varphi.$$

Calculemos, por exemplo, o volume da esfera de $\mathbb{R}^3$:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le R^2\};$$

vem:

$$m(E)=\int_E 1=\int_{E\setminus x^+0z}1=\int_{\varphi^{-1}(E\setminus x^+0z)}1.r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$
$$=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi r^2\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=2\pi\int_0^R r^2[-\cos\varphi]_0^\pi\,dr=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

No decorrer da demonstração do Teorema 15.1 examinámos o caso particular das *aplicações lineares*. Se em particular $T:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ for *transformação ortogonal*, vem $|\det M_T|=1$ e portanto a medida vem *invariante* por tais transformações. O mesmo se passa com as *translações*, pelo que, de modo geral, a medida é invariante pelas *isometrias* de $\mathbb{R}^N$ (compostas de uma *transformação ortogonal* com uma *translação*). Este facto corresponde, em $\mathbb{R}^3$, à ideia intuitiva de que o volume não deve variar por "deslocamento rígido" ou "reflexão".

Exercícios

79) Demonstre as asserções contidas nas Observações 1) e 2).

80) Calcule o volume da região do espaço interior ao cilindro $x^2+y^2=2x$, compreendida entre o parabolóide $x^2+y^2=2z$ e o plano xOy.

81) Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies esféricas $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2+(z-2)^2=4$,

a) utilizando coordenadas cilíndricas;

b) utilizando coordenadas esféricas.

82) Seja D a região do plano limitada pelas curvas $xy=1$, $xy=2$, $y=x^2$ e $y=2x^2$. Calcule a área de D como "área entre gráficos" de funções a uma variável (em domínios convenientemente escolhidos), e, em seguinda, utilizando uma mudança de variável que transforme D num quadrado.

83) Calcule $\iiint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, onde $D = \{(x,y,z) : 1 \le z \le 2, 0 < x \le z, 0 \le y \le x\sqrt{3}\}$.

84) Prove que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(Sugestão: mostre que elevando ao quadrado o integral que se pretende calcular se pode obter um integral em parte de $\mathbb{R}^2$, cujo cálculo pode ser facilmente efectuado com recurso a coordenadas polares.)*

85) Seja $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z \le 2, z \ge x^2+y^2\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \forall (x,y,z) \in D, (x,y) \neq (0,0);$$

mostre que f fica definida $p.p.$ em D, que $f \in \mathcal{L}(D)$ e calcule $\int_D f$, utilizando uma mudança de variáveis apropriada.

86) Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4 \le 2(x^2+y^2)\}$; mostre que é somável em C qualquer função definida em $C \setminus \{(0,0)\}$ por $(x^4+y^4)/(x^2+y^2)^2$ e calcule o respectivo integral

87) Determine o volume do menor dos sólidos em que uma esfera de raio r é dividida por um plano à distância h do centro $(0 < h < r)$.

88) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcule a área da região plana que é limitada pela curva de equação $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ (*lemniscata*) e exterior ao círculo $x^2+y^2 = a^2$. *(Sugestão: pode utilizar coordenadas polares.)*

89) Problema análogo ao anterior, para a parte do primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ limitada pela curva:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{4}} = 1$$

(a, b constantes positivas) e pelos eixos coordenados, usando uma mudança de variáveis da forma:

$$x = ar(\cos\theta)^{\alpha}\,,\ y = br(\sin\theta)^{\alpha},$$

cujo jacobiano é:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = ab\alpha r(\cos\theta)^{\alpha-1}(\sin\theta)^{\alpha-1}.$$

90) Seja $D = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$; calcule $\iint_D |ax+by|\,dx\,dy$. *(Sugestão: considere uma transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que aplique o vector (a,b) em $\vec{u} = (K,0)$, com $K = \sqrt{a^2+b^2}$.)*

91) Calcule, para $a > 0$, o volume de :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^5 + y^5 + z^5 \leq axyz,\ x, y, z \geq 0\}.$$

(Sugestão: considere uma mudança de variável de tipo $x = s^\alpha t^\beta u^\gamma, y =$ $= s^\beta t^\gamma u^\alpha, z = s^\gamma t^\alpha u^\beta$, sendo α, β, γ escolhidos de modo a transformar A numa esfera.)

92) *(Volume das esferas de $\mathbb{R}^N$)* Seja α_N o volume da esfera unitária de $\mathbb{R}^N$, $B_N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq 1\}$;

a) Mostre que o volume de $B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$ $(R \geq 0)$ é igual a $\alpha_N R^N$.

b) Prove, por indução, que $\alpha_N = 2\alpha_{N-1}\int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{N-1}{2}}\, du$.

c) Prove que $\alpha_4 = \frac{\pi^2}{2}$.

d) Recordando a definição dada na Secção 10.1 e o Exemplo 3 da Secção 12.3, mostre, com o auxílio da mudança de variável $x = s^2/2$, que:

$$\Gamma(u) = 2^{1-u} \int_0^{+\infty} s^{2u-1} e^{-s^2/2}\, ds.$$

e) Exprima $\Gamma(u)\Gamma(v)$ como integral duplo e, utilizando coordenadas polares, mostre que:

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 2^{2-u-v} \int_0^{+\infty} r^{2(u+v)-1} e^{-r^2/2}\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2u-1} (\sin\theta)^{2v-1}\, d\theta;$$

pondo $\beta(u, v) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2u-1} (\sin\theta)^{2v-1}\, d\theta, \forall u, v > 0$ (*função Beta*), conclua que:

$$\beta(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u + v)}.$$

f) Calcule $\Gamma(\frac{1}{2})$ utilizando e) e calculando $\beta(\frac{1}{2}.\frac{1}{2})$.

g) Fazendo a mudança de variáveis $\cos^2\theta = z$, mostre que :

$$\beta(u, v) = \int_0^1 z^{u-1} (1 - z)^{v-1} dz.$$

h) Mostre que $\alpha_N = \alpha_{N-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{N+1}{2}) / \Gamma(\frac{N}{2} + 1)$ e conclua finalmente que:

$$\alpha_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\frac{N}{2}\Gamma(\frac{N}{2})}.$$

93) Determine quais das seguintes funções são somáveis nos domínios indicados:

a) $\frac{e^{-|x-y|}}{1+|x-y|^2}$, em $\mathbb{R}^2$; **b)** $\frac{1}{(1+\|x\|^p)}$, em $\mathbb{R}^N$ $(p > N)$.

c) $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 1 \text{ e } x^2(y^2 + z^2) < 1\}$.

94) Determine $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(Ax,x)}\, dx$, onde (Ax, x) é forma quadrática definida positiva em $\mathbb{R}^N$, utilizando uma mudança de variável conveniente e o resultado do Exercício 84.

95) *(Volume dos sólidos de revolução)* Seja A uma parte mensurável do semiplano $x \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$, $A' = \{(x, 0, z) : (x, z) \in A\}$, ou seja, "$A$ considerado como parte do semiplano $x \geq 0, y = 0$ de $\mathbb{R}^3$", e considere o "sólido" S de $\mathbb{R}^3$ obtido por "rotação de A' em torno do eixo dos zz". Utilize coordenadas cilíndricas para resolver as seguintes questões:

a) Mostre que S é mensurável.

b) Mostre que $m(S) < +\infty$ sse a função $f(x, z) = x$ for somável em A e, nesse caso, obtenha uma expressão para o "volume" (medida) de S envolvendo apenas um integral bidimensional.

c) Recorde a definição de *centróide* ou *centro de massa* dada no exercício 41 e mostre que se existir centróide[18] e $m(A) < +\infty$, então o volume de S é igual ao produto da área de A pelo perímetro da circunferência descrita pelo centróide no movimento de rotação gerador de S.

d) Utilizando as alíneas anteriores calcule o volume do *toro* obtido por revolução em torno do eixo dos zz de um círculo de raio $r > 0$ situado no plano $x0z$ e centrado no semieixo positivo dos xx num ponto à distância $R \geq r$ da origem *(R.: $2\pi^2 Rr^2 = 2\pi R \times \pi r^2$)*.

e) No caso particular em que A é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ "abaixo do gráfico de uma função f não negativa definida num intervalo $I \subset [0, +\infty[$" obtenha uma expressão para S envolvendo apenas um integral em I; mostre, com exemplos, que é possível escolher f de modo que A tenha "área" infinita mas S "volume" finito, e também de modo que A tenha área finita mas S volume infinito *(Sugestão: pode utilizar potências de $1/x$...)*.

96) *(Área abaixo do arco de ciclóide e volumes de sólidos de revolução relacionados)* Considere a curva C (*ciclóide*) descrita por um ponto P da circunferência de um círculo que se "desloca sem escorregar" ao longo de uma recta r sem mudar de sentido ("curva descrita por um ponto da periferia de uma roda de combóio num percurso rectilíneo"). Pretende-se calcular a área determinada por C e pela recta r entre dois pontos consecutivos em que P toca a recta r (a porção de C assim determinada designa-se por *arco de ciclóide*).

a) Atendendo a que o centro da circunferência tem um deslocamento horizontal, em qualquer intervalo de tempo, igual ao comprimento do arco de circunferência que, nesse mesmo intervalo de tempo, teve contacto com r (é

[18]Basta, de facto, que exista a coordenada x do centróide [exercício].

esse o significado de “não escorregar”), tomando para eixo das abcissas a recta r, com origem num ponto em que P toca r e sentido igual ao do movimento, exprima o conjunto dos pontos de C em função do ângulo ao centro θ (medido em radianos) determinado por P no decurso do respectivo movimento, relativamente a um raio fixo da circunferência, e mostre que podemos tomar para arco de ciclóide o gráfico de uma função contínua não negativa f definida no intervalo $[0, 2\pi R]$, sendo R o raio do círculo (não se pede para determinar uma expressão analítica para f).

b) Utilize uma mudança de variável sugerida pela expressão (em função de θ) obtida na alínea anterior para os pontos de C, para calcular a “área abaixo do arco de ciclóide”, que é evidentemente dada pelo integral de f.

c) Atendendo ao exercício anterior, e designando por A a figura plana cuja área é pedida na alínea b), calcule os volumes dos sólidos gerados pela “revolução de A em torno do eixo dos zz” e pela revolução de A em torno de um eixo vertical passando pelos pontos de A de abcissa πR (ponto de máximo do arco de ciclóide).

Capítulo 16

Caracterização das medidas de Jordan e Lebesgue

Construída uma teoria matemática que permite atribuir *"medida"* a certas partes de $\mathbb{R}^N$ pode pôr-se agora a questão de saber se a definição dada é, de facto, a "única" possível que satisfaça às condições impostas informalmente na introdução deste curso a qualquer noção de medida ("N-dimensional") de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$.

Se analisarmos a descrição dos "processos de medição" feita no início, concluiremos que se exigem, implícita ou explicitamente, pelo menos duas propriedades a qualquer função μ definida em partes de $\mathbb{R}^N$ (portanto em certo $\mathfrak{A} \subset \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$) com valores em $[0, +\infty[$, tal que $\mu(A)$ pretenda ser exactamente o "volume N-dimensional" de A para qualquer $A \in \mathfrak{A}$:

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\forall A, B \in \mathfrak{A} : A \cup B \in \mathfrak{A}, A \cap B = \emptyset$;
- $\mu(a + A) = \mu(A)$, $\forall a \in \mathbb{R}^N, A \in \mathfrak{A} : a + A \in \mathfrak{A}$.

A segunda propriedade é apenas parte da exigência de que o volume de determinada "figura geométrica" seja invariante por qualquer "deslocamento rígido" (trata-se aqui do caso das *translações*). A escolha do "cubo de lado 1" para *unidade de medida* consiste em impor a μ a seguinte propriedade adicional:

- $\mu(]0, 1]^N) = 1$;

a classe $\mathfrak{A}$ deverá além disso ser "tão extensa quanto possível". Vamos ver que, pelo menos em $\mathfrak{A} = \mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, a única função *não negativa* satisfazendo às três propriedades atrás expressas é exactamente a *medida de Jordan*. Além disso $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ é, como sabemos, a classe mais vasta possível de partes *limitadas* de $\mathbb{R}^N$ cujos elementos têm "*volume exterior* e *interior* coincidentes"; a análise das definições destes conceitos esclarece em que sentido $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ pode ser considerada a mais extensa classe de partes de $\mathbb{R}^N$ a que se pode atribuir "volume" de acordo com uma primeira versão elementar desta noção.

Tal como foi necessário generalizar a noção pitagórica de "medida de segmento" para que fosse possível atribuir comprimento a todos os segmentos relativamente a uma mesma unidade, também a atribuição de "volume" a partes de $\mathbb{R}^N$ fora de $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$ foi feita através da definição do novo conceito de *medida de Le-*

besgue, extensão da medida de Jordan às *partes mensuráveis de* $\mathbb{R}^N$. Vamos ver que, em $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, a medida de Lebesgue também é *a única função não negativa* (agora podendo tomar o valor $+\infty$) que satisfaz às propriedades atrás expressas para μ, com a modificação seguinte relativa à "medida da união":

- $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \mu(A_n), \forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)^{\mathbb{N}_1} : A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m.$

Esta condição é natural no quadro da medida de Lebesgue, pois, mesmo pensando apenas nos conjuntos desprezáveis, a definição da medida faz intervir uniões *numeráveis* de intervalos, ao contrário do que se passava com a medida de Jordan.

Começaremos por analisar o caso da medida de Lebesgue, procurando também obter nova caracterização de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ que permita melhor compreender o âmbito de actuação da medida de Lebesgue.

16.1 Medida exterior de partes de $\mathbb{R}^N$

A definição de conjunto desprezável (que mais tarde vimos caracterizar exactamente os conjuntos *mensuráveis* com *medida de Lebesgue nula* — *cf.* Proposição 14.3–6) introduz um processo de "aproximação" da "medida" que pode ser facilmente estendido a qualquer parte de $\mathbb{R}^N$. Podemos, com efeito, pensar em "medir" uma parte *arbitrária* A de $\mathbb{R}^N$ utilizando processo semelhante, atribuindo, por definição a A a "medida" $m^*(A)$ definida por:

(24) $m^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n) : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} I_n, I_n \text{ interv. limitado de } \mathbb{R}^N, \forall n \in \mathbb{N}_1\}.$

DEFINIÇÃO: A aplicação:

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$$

definida em cada $A \subset \mathbb{R}^N$ por (24) diz-se *medida exterior*.

Atendendo ao resultado que acabámos de lembrar relativo a conjuntos desprezáveis, sabemos, portanto, que:

- $m^*(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ e $m(A) = 0$;

também é fácil verificar que a medida exterior goza das propriedades de *monotonia* ($A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$) e *$\sigma$-subaditividade* (*"a medida exterior da união numerável é menor ou igual à soma das medidas exteriores"*), além de ser "insensível" à "variação" de partes *desprezáveis* dos conjuntos. Será a *medida exterior* extensão da *medida de Lebesgue* a *todas* as partes de $\mathbb{R}^N$? Vamos ver que sim, obtendo simultaneamente novas caracterizações de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

PROPOSIÇÃO 16.1: *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$; então são equivalentes as condições:*

1. $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$.

2. Existe E*, boreliano de* $\mathbb{R}^N$*, e conjuntos desprezáveis* S *e* S' *tais que* $A = (E \setminus S) \cup S'$*, ou seja,* A *difere de certo boreliano por um conjunto desprezável.*

3. Para todo o intervalo limitado I *de* $\mathbb{R}^N$*:*

$$m(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A)$$

(condição de Carathéodory).

Além disso, se $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$*,* $m^*(A) = m(A)$*, sendo* $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ *a maior* σ*-álgebra de partes de* $\mathbb{R}^N$ *em que* m^* *é aditiva.*

Demonstração: Comecemos por provar que m^* é, de facto, *extensão* de m a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Seja $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$; verifiquemos, para já, que:

$$m(A) \leq m^*(A).$$

Esta desigualdade resulta imediatamente da monotonia e σ-subaditividade da medida de Lebesgue, pois sendo $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ família de intervalos limitados de $\mathbb{R}^N$ cobrindo A, tem-se evidentemente:

$$m(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} V(I_n),$$

pelo que se obtém a desigualdade pretendida tomando o ínfimo no último membro e atendendo à definição de medida exterior. Para obter a desigualdade inversa, comecemos por notar que se pode supor A limitado; com efeito, admitindo a referida desigualdade para os limitados, e pondo:

$$A_n = A \cap [-n, n]^N,$$

ter-se-á:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} (A_{n+1} \backslash A_n), \tag{25}$$

pelo que podemos utilizar a σ-subaditividade da medida exterior e a σ-aditividade da medida de Lebesgue para obter:

$$m^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m^*(A_{n+1} \backslash A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m(A_{n+1} \backslash A_n) = m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} (A_{n+1} \backslash A_n)\Big) = m(A).$$

Suponhamos então A mensurável *limitado*; em particular, $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Consideremos, por definição de função mensurável, uma sucessão φ_n de funções em escada tal que:

$$\varphi_n \xrightarrow[n]{} \chi_A \; p.p.;$$

podemos evidentemente supor que existe um intervalo limitado I fora do qual os φ_n são identicamente nulos; se substituirmos cada φ_n por ψ_n definido com o valor 1 nos pontos em que $\varphi_n > 1/2$ e com o valor 0 nos pontos em que $\varphi_n \leq 1/2$, é óbvio que ainda se terá:

$$\psi_n \xrightarrow[n]{} \chi_A \; p.p.,$$

visto que χ_A só toma os valores 0 ou 1, pelo que, em cada ponto x para o qual $\varphi_n(x) \xrightarrow[n]{} \chi_A(x)$, ter-se-á, a partir de certa ordem, $\psi_n(x) = 1$ ou 0, e portanto, a partir dessa ordem pelo menos, coincidente com $\chi_A(x)$. Ora ψ_n é *função característica da união E_n de certa família finita $\mathcal{F}_n$ de intervalos limitados contidos em I* (exactamente os intervalos de constância de φ_n em que $\varphi_n > 1/2$). É fácil concluir que também se terá:

$$\psi'_n = \sup\{\psi_n, \psi_{n+1}, \dots\} \xrightarrow[n]{} \chi_A \; p.p.,$$

pois fixado x tal que $\psi_n(x)$ convirja para $\chi_A(x)$, ter-se-á, a partir de certa ordem, $\psi_n(x)$ sempre igual a 1 ou sempre igual a 0, acontecendo portanto o mesmo para os "sup" acima expressos, pelo menos a partir dessa ordem. Aqueles supremos, ψ'_n, são exactamente as funções características das uniões:

$$\bigcup_{p \geq n} E_p,$$

cadeia *decrescente* de conjuntos contidos em I, portanto com medidas *finitas*. Os pontos x que estão em *todos* os conjuntos desta cadeia decrescente e para os quais, além disso, $\psi'_n(x) \xrightarrow[n]{} \chi_A(x)$ são exactamente os que estão em A e para os quais a referida convergência tem lugar; com efeito $x \in A$ significa que $\chi_A(x) = 1$, pelo que a convergência ter lugar em x significa que a partir de certa ordem $\psi'_n(x)$ é sempre igual a 1, ou, por outras palavras, que, a partir dessa ordem, x está em todas as uniões $\bigcup_{p \geq n} E_p$. Tratando-se de cadeia *decrescente*, é equivalente a afirmar que x está mesmo em *todas* essas uniões (para qualquer n). Designando por S o conjunto *desprezável* em que ψ'_n *não converge* para χ_A, teremos então:

$$A \setminus S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} \Big(\bigcup_{p \geq n} E_p \Big) \setminus S. \tag{26}$$

As propriedades da medida de Lebesgue (*cf.* Proposição 14.3), nomeadamente a σ-continuidade para a intersecção de conjuntos de medida finita e as propriedades dos conjuntos desprezáveis, permitem então concluir que:

$$m(A) = m(A \setminus S) = m\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} \Big(\bigcup_{p \geq n} E_p \Big) \setminus S \Big) = m\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} \Big(\bigcup_{p \geq n} E_p \Big) \Big) =$$
$$= \lim_n m\Big(\bigcup_{p \geq n} E_p \Big).$$

Ora os E_p são uniões finitas de intervalos; cada união numerável destes E_p

$(p \geq n)$ pode, portanto, ser substituída, sem que se altere a medida, pela união dos *interiores* dos respectivos intervalos, visto as fronteiras constituírem, como sabemos, conjunto desprezável (união numerável de intervalos degenerados). Estas uniões são evidentemente conjuntos *abertos*; cada aberto destes é, como sabemos, *união numerável de cubos disjuntos* (*cf.* Proposição 14.2), pelo que, finalmente, as uniões dos E_p $(p \geq n)$ podem ser substituídas, sem que se altere a medida, por uniões de cubos disjuntos, ou seja, pela σ-aditividade, $m\left(\bigcup_{p\geq n} E_p\right)$ é *soma (série...) de volumes de cubos* (caso particular de intervalos limitados de $\mathbb{R}^N$). As somas não se alterarão se acrescentarmos os volumes (nulos) dos intervalos degenerados constituindo as fronteiras dos respectivos E_p; juntando essas fronteiras a cada uma das uniões de cubos obteremos, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, uma família numerável de intervalos cobrindo $A \setminus S$, de tal modo que a soma dos respectivos volumes é igual a $m\left(\bigcup_{p\geq n} E_p\right)$ e tende portanto para a medida de Lebesgue de A. Por definição de medida exterior, teremos então:

$$\forall n \in \mathbb{N}_1, m^*(A \setminus S) \leq m\left(\bigcup_{p\geq n} E_p\right)(\xrightarrow[n]{} m(A)) \Rightarrow m^*(A \setminus S) \leq m(A);$$

do facto de S ser desprezável, e portanto poder ser coberto por uniões de intervalos com volumes cuja soma pode ser tomada arbitrariamente pequena, e atendendo à definição de medida exterior, facilmente se conclui, como acima foi observado, que $m^*(A \setminus S) = m^*(A)$, pelo que, finalmente:

$$m^*(A) = m^*(A \setminus S) \leq m(A),$$

o que termina a demonstração de que m^* é extensão de m a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

1. $\Leftrightarrow$ 2.) De (26) imediatamente se deduz que qualquer conjunto mensurável limitado A difere de certo boreliano por um conjunto desprezável, ou seja, é união de determinado conjunto desprezável $(A \cap S)$ com o complementar num boreliano $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_1}\left(\bigcup_{p\geq n} E_p\right)\right)$ de certo conjunto desprezável (S); utilizando uma decomposição em partes limitadas como (25), por exemplo, é fácil obter o mesmo resultado para qualquer mensurável A (também poderíamos, em alternativa, verificar que (26) pode ser obtido sem a hipótese de A ser limitado, a qual só é utilizada no cálculo da medida de A). A recíproca é imediata, visto os borelianos e os conjuntos desprezáveis serem mensuráveis e $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ σ-álgebra.

1. $\Rightarrow$ 3. resulta imediatamente da aditividade de m em $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, uma vez que, como vimos atrás, m^* coincide com m nesses conjuntos.

3. $\Rightarrow$ 1. Suponhamos que A satisfaz à condição de Carathéodory e provemos que é mensurável. Comecemos por notar que se pode supor mais uma vez que A é *limitado* (portanto com medida exterior *finita*), pois se o não for será, por exemplo, união numerável das intersecções de A com os cubos $K_n = [-n, n]^N$ $(n \in \mathbb{N}_1)$; ora é fácil concluir que $A \cap K_n$ ainda satisfaz à condição de

Carathéodory, pois, fixado I intervalo limitado de $\mathbb{R}^N$, temos:

$$\begin{aligned} m^*(I \cap (A \cap K_n)) + m^*(I \setminus (A \cap K_n)) &= m^*((I \cap K_n) \cap A) + \\ + m^*((I \setminus A) \cup (I \setminus K_n)) &= m(I \cap K_n) - m^*((I \cap K_n) \setminus A) + \\ + m^*(((I \cap K_n) \setminus A) \cup (I \setminus K_n)) &\leq m(I \cap K_n) - m^*((I \cap K_n) \setminus A) + \\ + m^*((I \cap K_n) \setminus A) + m(I \setminus K_n) &= m(I \cap K_n) + m(I \setminus K_n) = \\ &= m(I), \end{aligned}$$

sendo imediata a desigualdade inversa, atendendo à sub-aditividade de m^*. Supondo então $m^*(A) < +\infty$, por definição de medida exterior, dado $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}_1$, existirá uma família de intervalos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ cobrindo A e tal que:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(I_n) - \frac{\varepsilon}{2^m} \leq m^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(I_n).$$

A união dos I_n pode ser decomposta na união dos *interiores* dos intervalos, constituindo um aberto C_m, portanto *união numerável de cubos disjuntos*, e na união S_m das fronteiras, conjunto desprezável, como sabemos. Teremos:

- $m(C_m) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_1} V(I_n)$;
- $A \setminus S_m \subset C_m$.

Sendo cada C_m união numerável disjunta de cubos e a medida exterior coincidente com a de Lebesgue nos mensuráveis, portanto, em particular, σ-aditiva para estes cubos, facilmente se conclui que na condição de Carathéodory podemos substituir I por qualquer C_m (utiliza-se aqui a σ-subaditividade da medida exterior, facto imediatamente decorrente da definição). Então, designando por S'_ε o conjunto desprezável $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_1} S_m$, teremos:

$$m^*(C_m \setminus A) = m(C_m) - m^*(C_m \cap A) = m(C_m) - m^*(A \setminus S'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}\,.$$

Sendo $C'_\varepsilon = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_1} C_m$, virá então:

$$m^*(C'_\varepsilon \setminus A) = m^*\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_1} C_m \setminus A\right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}_1} m^*(C_m \setminus A) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}_1} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon;$$

designando por C_n^* o conjunto C'_ε com $\varepsilon = 1/n$, teremos agora $m^*(C_n^* \setminus A) \leq$ $\leq 1/n$, pelo que:

$$m^*\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} C_n^* \setminus A\right) \leq m^*(C_p^* \setminus A) \leq \frac{1}{p}, \forall p \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow m^*\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} C_n^* \setminus A\right) = 0.$$

O modo como foram definidos os C_n^* garante que se trata de borelianos, o mesmo se podendo portanto afirmar de $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} C_n^*$; ora acabámos de verificar que

$C \setminus A$ é desprezável, tendo-se $A \setminus S \subset C$, $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} S'_{1/n}$ também desprezável. Por conseguinte:

$$A = \underbrace{C \setminus (C \setminus A)}_{A \cap C} \cup A \cap S,$$

união do desprezável $A \cap S$ com o complementar no boreliano C do desprezável $C \setminus A$, pelo que, de facto, A é mensurável.

É fácil agora completar a demonstração da proposição. Com efeito, já verificámos que m^* coincide com m em $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, pelo que é aí, obviamente, aditiva (é mesmo σ-aditiva); em qualquer σ-álgebra $\mathfrak{A}$ de partes de $\mathbb{R}^N$ contendo estritamente $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ não poderá ser aditiva pois tomando um conjunto qualquer *não mensurável* $A \in \mathfrak{A}$, terá de existir um intervalo I de $\mathbb{R}^N$ para o qual não tem lugar a condição de Carathéodory (atendendo a que 1. $\Leftrightarrow$ 3.), pelo que a aditividade é infirmada pelos conjuntos disjuntos $I \cap A$ e $I \setminus A$ necessariamente pertencentes a $\mathfrak{A}$, por definição de σ-álgebra.□

Observação: 1) A condição de Carathéodory dá ideia do carácter "bizarro" dos conjuntos não mensuráveis, mostrando que $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ contém certamente todas as partes de $\mathbb{R}^N$ a que se possa atribuir alguma interpretação "física" minimamente intuitiva. Com efeito, parecendo a medida exterior ser extensão "natural" da medida de Lebesgue a todas as partes de $\mathbb{R}^N$ ficamos a saber que as partes não mensuráveis determinam partições em certos intervalos de tal modo que a soma das medidas exteriores das partes assim obtidas *difere* da medida do intervalo. É na existência de conjuntos não mensuráveis (facto em si não trivial, dependente, como já foi referido, do *axioma da escolha*) que se baseia o famoso *Paradoxo de Tarski*, constatação de que é possível "cortar" uma esfera em número finito de "pedaços" e construir "com esses pedaços" (ou seja, deslocando cada um deles rigidamente no espaço de modo adequado) uma esfera de raio arbitrário pré-fixado; deste modo, parece que a soma dos "volumes" dessas partes terá valor arbitrário (não nulo) previamente fixado! evidentemente que se tratará de fazer intervir partes não mensuráveis da esfera e identificar os respectivos volumes com a medida exterior…

16.2 Caracterização da medida de Lebesgue

PROPOSIÇÃO 16.2: *Seja* $\mu : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ *tal que, dados* $a \in \mathbb{R}^N$, $A, A_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)\, \forall n \in \mathbb{N}_1$, $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n, m \in \mathbb{N}_1, n \neq m$*:*

1. $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \mu(A_n)$;

2. $\mu(a + A) = \mu(A)$;

3. $\mu(]0, 1]^N) = 1$.

Então $\mu = m$*; ou seja, a medida de Lebesgue é a única medida (positiva e*

σ-aditiva) na σ-álgebra das partes mensuráveis de $\mathbb{R}^N$, invariante por translação e que toma o valor 1 *no cubo* $]0,1]^N$.

Demonstração: A ideia da demonstração consiste em verificar que μ fica bem determinada (e coincidente com m) nos cubos que intervêm na decomposição de qualquer aberto de acordo com a demonstração da Proposição 14.2; consequentemente, atendendo a 1., ficará bem determinada em qualquer aberto (em particular nos intervalos abertos, donde se concluirá que μ é zero nos desprezáveis), pelo que poderemos finalmente passar a qualquer mensurável utilizando a demonstração da Proposição anterior (parte 1. $\Rightarrow$ 2.).

Analisemos então o comportamento de μ nos referidos cubos introduzidos na demonstração da Proposição 14.2. Tratava-se dos intervalos de $\mathbb{R}^N$ definidos, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}$, por:

$$K = \prod_{j=1}^{N}]\frac{k_j}{2^n}, \frac{k_j+1}{2^n}] = (k_1, \ldots, k_N) +]0, \frac{1}{2^N}]^N;$$

ter-se-á, por 2.:

$$\mu(K) = \mu\Big(]0, \frac{1}{2^N}]^N\Big).$$

Ora é fácil concluir que $]0,1]^N$ *é união disjunta de* 2^{nN} *translatados de* $]0, \frac{1}{2^N}]^N$ (trata-se exactamente dos K associados aos $k_j \in \{0, \ldots, 2^n-1\}$, pelo que a família dos correspondentes $(k_1, \ldots, k_N)$ é precisamente $\{0, \ldots, 2^n-1\}^N$, com cardinal 2^{nN}), pelo que de 1., 2. e 3. se deduz:

$$1 = \mu(]0,1]^N) = 2^{nN}\mu\Big(]0, \frac{1}{2^N}]^N\Big) \Rightarrow \mu\Big(]0, \frac{1}{2^N}]^N\Big) = \frac{1}{2^{nN}}.$$

$\mu(K)$ coincide portanto com $m(K)$, que é, de facto, $1/2^{nN}$. Atendendo à demonstração da Proposição 14.2, μ e m coincidem então *em todos os abertos*. Em particular coincidem nos intervalos abertos, pelo que, por definição de conjunto desprezável, é fácil concluir que $\mu(A) = 0$ se A for desprezável (será necessário utilizar a *monotonia* de μ, consequência simples de 1., atendendo a que μ só toma valores *positivos*). Como as fronteiras dos intervalos são conjuntos desprezáveis, fica assim estabelecida a identidade de μ e m em *qualquer* intervalo, e mesmo em qualquer *união numerável de intervalos* (a união dos interiores é união disjunta de cubos do tipo K e a união das fronteiras é desprezável). Resta agora invocar (26) na demonstração da proposição anterior para obter uma expressão conveniente para qualquer conjunto mensurável *limitado* A e notar que, em (26), as $\bigcup\limits_{p \geq n} E_p$ constituem uma cadeia decrescente de conjuntos em que μ coincide com m (uniões numeráveis de intervalos), pelo que pela σ-continuidade de μ e m (consequência simples da σ-aditividade a que ambas satisfazem), virá:

$$\mu(A \setminus S) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{p\geq n} E_p\right) = \lim_n m\left(\bigcup_{p\geq n} E_p\right) = m(A \setminus S) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus S) + \underbrace{\mu(A \cap S)}_{=0} = m(A \setminus S) + \underbrace{m(A \cap S)}_{=0} = m(A).$$

Para um mensurável qualquer A bastará, finalmente, utilizar (25) e, mais uma vez, a σ-aditividade de m e μ.□

Observação: 2) Se procurarmos os μ que satisfazem às condições 1. e 2. da proposição anterior, tratar-se-á exactamente dos *múltiplos não negativos* da medida de Lebesgue, ou seja, das funções λm, com $\lambda \geq 0$. Basta tomar $\lambda = \mu(]0,1]^N)$, e, no caso de $\lambda \neq 0$, definir $\mu' = (1/\lambda)\,\mu$; facilmente se conclui que μ' satisfaz a 1., 2., 3., pelo que coincide com m, o que permite evidentemente concluir. Se $\lambda = 0$, basta notar que $\mathbb{R}^N$ se pode obter como união disjunta de translatados do "hiper-cubo" $]0,1]^N$, pelo que, nesse caso, $\mu(\mathbb{R}^N) = 0$ e μ será, pela monotonia (consequência, como já observámos, da aditividade e positividade), identicamente nula e portanto, de facto, igual a λm.

16.3 Caracterização da medida de Jordan

PROPOSIÇÃO 16.3: *Seja* $\mu : \mathcal{J}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty[$ *tal que, dados* $a \in \mathbb{R}^N$, A, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^N), A \cap B = \emptyset$*:*

1. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
2. $\mu(a + A) = \mu(A)$;
3. $\mu(]0,1]^N) = 1$.

Então $\mu = V$*; ou seja, a medida de Jordan é a única medida (positiva e simplesmente aditiva) nos mensuráveis à Jordan de* $\mathbb{R}^N$*, invariante por translação e que toma o valor* 1 *no cubo* $]0,1]^N$.

Demonstração: Este resultado é, em parte, corolário da *demonstração* da proposição anterior; com efeito apenas se utilizou a aditividade *para um número finito de conjuntos* quando atrás se pretendeu demonstrar que μ coincide com m nos cubos K então referidos. Nesses cubos teremos então μ (com as hipóteses agora feitas) coincidente com o volume. Para passar a um conjunto qualquer A de $\mathcal{J}(\mathbb{R}^N)$, podemos considerar um cubo da forma $[-n,n]^N$ $(n \in \mathbb{N}_1)$ que contenha $\overline{A}$ no interior (o que é sempre possível por A ser *limitado*) e observar que o volume de A pode ser aproximado por somas de Riemann do integral de χ_A, correspondentes a uma sucessão de partições de $[-n,n]^N$ constituídas por aderências de cubos do "tipo K". Escolhendo convenientemente as famílias compatíveis de pontos utilizadas para definir as somas de Riemann é fácil concluir que se pode enquadrar $V(A)$ por duas sucessões correspondentes a somas de volumes de um número finito de "intervalos K"; uma das sucessões corresponderá a intervalos K contidos em A e a outra a intervalos K cuja união contém A[19], pelo que o mesmo enquadramento poderá ser utilizado para $\mu(A)$, permitindo concluir que $\mu(A) = m(A)$, uma vez que coincidem nos K.□

Observação: 3) Podemos facilmente adaptar a Observação 2) acima ao caso da medida de Jordan, ficando caracterizadas todas as funções que satisfazem às condições 1. e 2. da proposição anterior.

Exercícios

97) Mostre que m^* é *monótona e sub-aditiva*, ou seja:

a) $A \subset B \subset \mathbb{R}^N \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$.

b) $A_n \subset \mathbb{R}^N$, $\forall n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_1} m^*(A_n)$.

98) Demonstre as asserções contidas nas Observações 2) e 3).

99) Complete a demonstração da Proposição 16.3.

[19] A escolha de somas de Riemann em lugar de somas superiores e inferiores destina-se apenas a evitar os problemas decorrentes de cada K não ser *fechado*; no caso, por exemplo, da sucessão *majorante* de $V(A)$ convirá escolher as famílias compatíveis de modo a que o valor de χ_A seja 1 nos pontos correspondentes aos K que intersectam A, e 0 nos outros, pelo que deverá ser escolhido um ponto de A no caso de $K \cap A \neq \emptyset$ e um ponto de $\overline{K} \setminus A$ no caso contrário.

Capítulo 17

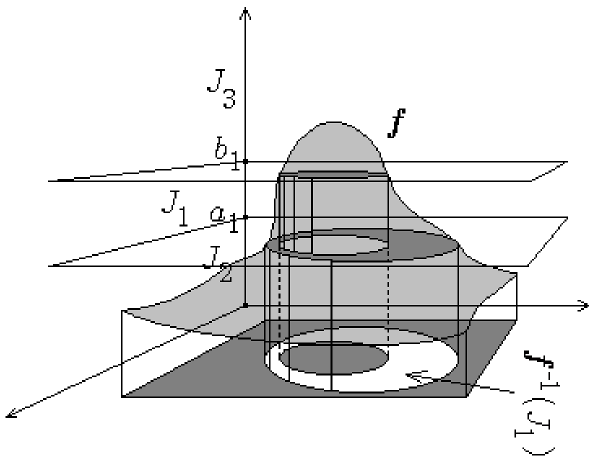
Outras definições do Integral de Lebesgue

17.1 Aproximação por funções simples

A ideia inicial que presidiu à definição de *integral de Riemann* centrava-se na aproximação por somas correspondentes a decomposições ("partições") arbitrárias do intervalo-domínio da função ou, de modo equivalente, a decomposições desse domínio em intervalos de diâmetro arbitrariamente pequeno. Como mais tarde se viu, a possibilidade de definir esta noção corresponde à de "medir" partes C de $\mathbb{R}^N$ do modo que parece "mais natural", ou seja, aproximando a "medida de C" por volumes de "figuras" constituídas unicamente por determinado tipo de intervalos compactos ("paralelepípedos de faces paralelas aos planos coordenados"). Analisámos, no capítulo anterior, em que sentido se pode dizer que a construção proposta conduz ao "único resultado possível", no que respeita à medida de partes de $\mathbb{R}^N$ e qual o alcance da generalização fornecida pelo integral de Lebesgue; podemos agora tentar perceber aonde nos conduziria uma "pequena" modificação na ideia que inicialmente nos guiou. Em lugar de pensarmos em decomposições do domínio, consideremos antes decomposições *do contradomínio* da função. Para fixar ideias, seja I intervalo qualquer de $\mathbb{R}^N$ (agora não necessariamente limitado) e:

$$f : I \to \mathbb{R},$$

tal que $f \geq 0$ em I; seja $\{J_1, \ldots, J_k\}$ partição de $[0, +\infty[$ (no sentido da Teoria dos Conjuntos, ou seja, os J_i dois a dois disjuntos com união igual a $[0, +\infty[$), constituída por intervalos (não necessariamente limitados, como é evidente…). Podemos considerar a partição de I constituída pelas imagens inversas por f dos $J_i = |a_i, b_i|$, e a partir dela definir uma "soma inferior" de f; graficamente:



Uma vez que os $f^{-1}(J_i)$ não são, em geral, intervalos, para que faça sentido definir a aproximação pretendida do "integral" de f, é necessário que se possa atribuir "medida" a esses conjuntos; admitamos então que f é tal que:

(27) $\bullet\, f^{-1}(J) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), \forall J$ intervalo de $\mathbb{R}$.

Podemos agora definir a "soma aproximante":

(28) $$S = \sum_{i=1}^{k} a_i\, m(f^{-1}(J_i)),$$

sendo necessário convencionar o significado da parcela de índice i quando $m(f^{-1}(J_i)) = +\infty$. A função de "aproximante" que pretendemos atribuir a S leva-nos a definir o valor como sendo $+\infty$, *excepto no caso em que a_i seja* 0, situação em que a parcela tomará, por definição, o valor 0. A soma, evidentemente, será definida com o valor $+\infty$ sempre que uma das parcelas tenha esse valor. Variando arbitrariamente a partição considerada no contradomínio $\mathbb{R}$ de f, obteremos diversos valores que, intuitivamente, deverão ser todos *não superiores* ao valor do *integral de f*, caso $f \geq 0$ seja *mensurável*[20]; vamos ver que, de facto, *o supremo desses valores é o integral de f*, sendo f *mensurável sse tiver lugar a condição (27)*.

Comecemos por notar que (28) se pode interpretar como o integral de certa função mensurável φ, desde que (27) tenha lugar. Trata-se da combinação linear das funções características dos conjuntos mensuráveis $f^{-1}(J_i) = f^{-1}(|a_i, b_i|)$

[20] Recorde-se que atribuímos o valor $+\infty$ ao integral de qualquer função *mensurável não negativa* que não seja somável. Portanto, se $f \geq 0$ *p.p.*, faz sempre sentido falar do *integral de f*.

dada por:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{f^{-1}(J_i)}.$$

DEFINIÇÃO: Uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ diz-se *simples* se for *combinação linear de funções características de partes mensuráveis de* I, ou seja, *se existirem* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}, A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N), A_1, \ldots, A_k \subset I$, *tais que, em* I:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \chi_{A_i}.$$

PROPOSIÇÃO 17.1: $f \in \mathcal{M}(I)$ *sse para todo o intervalo* J *de* $\mathbb{R}$ $f^{-1}(J) \in \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$. *Além disso, se* $f \in \mathcal{M}(I)$, *existe uma sucessão* φ_n *de funções simples, satisfazendo às seguintes propriedades:*

- *Se* $f(x) \geq 0$, *então* $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$;
- *Se* $f(x) \leq 0$, *então* $\varphi_n(x) \downarrow f(x)$;
- $\displaystyle\int_I |\varphi_n| \uparrow \int_I |f|$.

Em particular, $f \in \mathcal{L}(I)$ *sse* $\int_I |\varphi_n|$ *for limitada, tendo-se, nesse caso:*

$$\int_I \varphi_n \xrightarrow[n]{} \int_I f$$

Demonstração: Seja $f : I \to \mathbb{R}$; para cada $n \in \mathbb{N}_1$ definimos $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{se } x \in f^{-1}(]-\infty, -n]) \\ -n + \frac{j+1}{2^n} & \text{se } x \in f^{-1}(]-n + \frac{j}{2^n}, -n + \frac{j+1}{2^n}]), j = 0, \ldots, n2^n - 1 \\ \frac{j}{2^n} & \text{se } x \in f^{-1}([\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}[), j = 0, \ldots, n2^n - 1 \\ n & \text{se } x \in f^{-1}([n, +\infty[) \end{cases};$$

A análise da definição de φ_n permite concluir sem qualquer dificuldade que:

- *Se* $f(x) \geq 0$, *então* $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$;
- *Se* $f(x) \leq 0$, *então* $\varphi_n(x) \downarrow f(x)$.

Em particular $|\varphi_n(x)| \uparrow |f(x)|, \forall x \in I$. Supondo então que, *para todo o intervalo* J *de* $\mathbb{R}$, $f^{-1}(J) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$, os φ_n serão obviamente funções simples, em particular *mensuráveis*. Da Proposição 11.3 resulta imediatamente que $f \in \in \mathcal{M}(I)$, e a parte final do teorema resulta agora de simples aplicação dos Teoremas de Beppo Levi e Lebesgue, respectivamente às sucessões $|\varphi_n|$ e φ_n, recordando que o integral de função mensurável positiva é, por definição, $+\infty$ se a função não for somável (*cf.* Observação 4) do Capítulo 11 e a definição que se lhe segue).

Resta portanto demonstrar que se $f \in \mathcal{M}(I)$, então, *para todo o intervalo J de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(J) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$*. É evidente que qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ se pode obter como união de uma família *numerável* de intervalos *limitados*, e qualquer intervalo limitado pode ser obtido como união numerável de intervalos limitados *fechados* (por exemplo, $[a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} [a, b - \frac{1}{n}]$), pelo que, de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ ser σ-álgebra deduz-se que basta verificar a mensurabilidade de cada $f^{-1}([a, b])$ $(a, b \in \mathbb{R})$, já que f^{-1} *"permuta com o sinal de união"*. Ora, sendo f mensurável, existe, por definição, uma sucessão $\psi_n \in \mathcal{E}(I)$ que converge para f *p.p.*; existe portanto um conjunto *desprezável* $E \subset I$ tal que:

$$\bullet\ \psi_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x), \text{ sse } x \in I \setminus E.$$

Tem-se então para todo o $x \in I$:

$$\begin{gathered}
x \in f^{-1}([a, b]) \setminus E \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x \notin E \text{ e } f(x) \in [a, b]) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x \notin E, f(x) \in [a, b] \text{ e } \psi_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x \notin E, \forall m \in \mathbb{N}_1\, f(x) \in]a - \tfrac{1}{m}, b + \tfrac{1}{m}[\text{ e } \psi_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x \notin E \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}_1, \exists p \in \mathbb{N}_1 : \psi_n(x) \in]a - \tfrac{1}{m}, b + \tfrac{1}{m}[, \forall n \geq p) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}_1} \bigcup_{p \in \mathbb{N}_1} \bigcap_{n \geq p} \psi_n^{-1}(]a - \tfrac{1}{m}, b + \tfrac{1}{m}[) \setminus E
\end{gathered}$$

pelo que:

$$f^{-1}([a, b]) \setminus E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_1} \bigcup_{p \in \mathbb{N}_1} \bigcap_{n \geq p} \psi_n^{-1}(]a - \tfrac{1}{m}, b + \tfrac{1}{m}[) \setminus E$$

Como:

$$\bullet\ f^{-1}([a, b]) = (f^{-1}([a, b]) \setminus E) \cup \underbrace{(f^{-1}([a, b]) \cap E)}_{\subset E, \text{ desprezável, logo mensurável!}} \quad ,$$

atendendo às propriedades de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$ como σ-álgebra, basta ver que são mensuráveis os conjuntos:

$$\bullet\ \psi_n^{-1}(]a - \tfrac{1}{m}, b + \tfrac{1}{m}[)\ (m, n \in \mathbb{N}_1).$$

Ou seja, basta estudar a imagem inversa por uma função em escada ψ de um intervalo aberto limitado qualquer $]a, b[$. Seja então:

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} c_j \, \chi_{J_j}$$

$c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $J_1, \ldots, J_k$ intervalos limitados de I, dois a dois disjuntos (*cf.* Secção 9.1). É óbvio que, se $0 \notin]a, b[$, $\psi^{-1}(]a, b[)$ *será união dos* J_j *tais que* c_j *se situa entre* a *e* b e, se $0 \in]a, b[$, $\psi^{-1}(]a, b[)$ *será união de* $I \setminus \bigcup_{j=1}^{k} J_j$ *com os* J_j *tais que* c_j *se situa entre* a *e* b. Trata-se portanto, obviamente, de conjunto mensurável!☐

Observações: 1) Desta proposição resulta claramente que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é *função simples* sse for *mensurável* e $\varphi(I)$ for *finito*.

2) Sendo todo o aberto união numerável de intervalos, é óbvio, a partir da proposição anterior, que se $f \in \mathcal{M}(I)$, e Ω é aberto de $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(\Omega)$ é mensurável. Daqui resulta, sem dificuldade, que a mesma propriedade tem lugar para qualquer *boreliano* Ω. Com efeito, é fácil concluir que a classe dos conjuntos Ω para os quais $f^{-1}(\Omega)$ é mensurável, constitui uma *σ-álgebra contendo os abertos*, pelo que, por definição, deverá conter a *σ-álgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dos borelianos.* A propriedade *"$f^{-1}(\Omega)$ é mensurável para todo o $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$"* caracteriza f como *função mensurável da σ-álgebra $\mathfrak{M}(I)$ dos conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^N$ contidos em I na σ-álgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ dos borelianos de* $\mathbb{R}$, no sentido habitual de "função mensurável entre duas σ-álgebras".

3) Da observação anterior resulta imediatamente que se definirmos *função boreliana de* $\mathbb{R}$ *para* $\mathbb{R}$ como sendo qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal f^{-1} *de qualquer boreliano seja boreliano*, então:

$$g : I \to \mathbb{R} \text{ mensurável e } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ boreliana} \Rightarrow f \circ g \text{ mensurável}.$$

Esta observação generaliza parcialmente o ponto 2. do Corolário da Proposição 11.3.

4) Esta proposição permite concluir que se $f \geq 0$ *p.p.*, $f \in \mathcal{L}(I)$, então o integral de f pode, de facto, ser aproximado por somas do tipo (28) (para f não necessariamente "positiva" teremos, *mutatis mutandis* resultado semelhante). Teremos, mais precisamente o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 17.2: *Seja I intervalo de $\mathbb{R}^N$, $f : I \to \mathbb{R}$ mensurável; então são equivalentes as condições:*

1. $f \in \mathcal{L}(I)$.

2. É finito o supremo das somas:

$$S(|f|, \{J_1, \ldots, J_k\}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, m(|f|^{-1}(J_i))$$

com $\{J_1, \ldots, J_k\}$ a variar no conjunto das partições de $[0, +\infty[$ (no sentido da Teoria dos Conjuntos) constituídas por intervalos, $J_i = |a_i, b_i|$ $(i = 1, \ldots, k)$.

3. É finito o supremo dos integrais das funções simples não negativas (definidas em I) majoradas por $|f|$ (no sentido lato).

Em qualquer caso tem-se:

$$\int_I |f| = \sup\{\sum_{i=1}^{k} a_i\, m(f^{-1}(J_i)) : \{J_1,\ldots,J_k\} \textit{ é partição de } [0,+\infty[$$
$$\textit{constituída por intervalos, } J_i = |a_i, b_i|\ (i=1,\ldots,k)\} =$$
$$= \sup\{\int_I \varphi : \varphi \textit{ é função simples, } 0 \le \varphi \le |f|\}.$$

Demonstração: 1. $\Rightarrow$ 2. é imediato pois, como atrás vimos, as somas em questão são integrais de funções mensuráveis majoradas por $|f|$, pelo que basta aplicar a monotonia do integral.

2. $\Rightarrow$ 1. resulta imediatamente da proposição anterior, pois sendo finito o supremo em questão, em particular será limitada a sucessão $\int_I |\varphi_n|$ da referida proposição.

1. $\Rightarrow$ 3. é imediato pelo mesmo argumento de "1. $\Rightarrow$ 2.".

3. $\Rightarrow$ 2., uma vez que o conjunto de que se pretende calcular o supremo em 2. está contido no conjunto que intervém em 3.

As expressões para o integral de f resultam também imediatamente da proposição anterior e da monotonia do integral.□

Observação: 5) As condições 2. ou 3. são por vezes utilizadas para *definir* $\mathcal{L}(I)$ em métodos de construção do integral que partem da construção da medida e da noção de *mensurabilidade*. O integral pode ser definido, nesse caso, para funções positivas através de um dos "sup" da parte final do teorema, e no caso geral notando que podemos decompor qualquer f na diferença de f^+ e f^-, o que permite definir o integral de f através da diferença dos integrais destas funções positivas (ambas majoradas por $|f|$).

17.2 O espaço de Banach $L^1(I)$

Na Secção 9.2 mostrámos que em $\mathcal{L}(I)$ é semi-norma a aplicação:

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|.$$

Podemos verificar que $\mathcal{L}(I)$ é *completo* para esta semi-norma, ou seja, que qualquer sucessão de Cauchy converge. Costuma designar-se a convergência associada a esta semi-norma por *"convergência em média"*, pelo que pretendemos verificar que *"qualquer sucessão de Cauchy em média é convergente em média"*. Seja então f_n sucessão de Cauchy em $\mathcal{L}(I)$; por definição, para cada $k \in \mathbb{N}_1$ existirá $p \in \mathbb{N}_1$ tal que:

$$m, n \geq p \Rightarrow \int_I |f_m - f_n| < \frac{1}{2^k}.$$

Podemos agora, por recorrência, escolher, para cada $k \in \mathbb{N}_1$, $n_k \in \mathbb{N}_1$ tal que:

- $n_{k+1} > n_k$,
- $m, n \geq n_k \Rightarrow \displaystyle\int_I |f_m - f_n| < \frac{1}{2^k}$;

f_{n_k} será subsucessão de f_n satisfazendo à condição:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_1} \int_I |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_1} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Do Teorema de Beppo Levi para séries (Corolário do Teorema 8.1) resulta que existe $f \in \mathcal{L}(I)$ tal que:

$$f_{n_j} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{j-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \xrightarrow[j]{} f \; p.p.;$$

aplicando agora o Lema de Fatou (Corolário 3 do Teorema 8.2), ter-se-á, para cada $k \in \mathbb{N}_1$:

$$\int_I |f - f_{n_k}| \leq \varliminf_j \int_I \left| f_{n_j} - f_{n_k} \right| \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k]{} 0,$$

uma vez que a desigualdade se dá para todos os $m \geq n_k$, portanto, em particular, para todos os n_j com $j \geq k$. A subsucessão f_{n_k} de f_n converge portanto em média para f, o que implica que toda a sucessão f_n também convirja para f em média (propriedade geral das sucessões de Cauchy com subsucessão convergente). $\mathcal{L}(I)$ é portanto, de facto, espaço semi-normado *completo*. Registe-se também o facto importante de que toda a sucessão f_n *de Cauchy em média* admite *subsucessão convergente* $p.p.$ (para o limite *em média* de f_n, como é evidente).

A construção de um *espaço de Banach* a partir do espaço semi-normado completo $\mathcal{L}(I)$ pode fazer-se pelo processo habitual de quociente pelo subespaço dos elementos de semi-norma nula, ou seja, neste caso, pelo subespaço das funções que são iguais a zero $p.p.$. Para o efeito, considera-se a relação em $\mathcal{L}(I)$ "$f \sim g$ sse $f = g \; p.p.$", que é, obviamente, de equivalência, e verifica-se que é compatível com as operações algébricas de adição e produto por escalar, o que permite definir no conjunto das classes de equivalência uma estrutura de espaço normado induzida pelas operações e semi-norma de $\mathcal{L}(I)$. O espaço assim obtido *é de Banach*, como facilmente se verifica por $\mathcal{L}(I)$ ser completo, e designa-se por $L^1(I)$. Os elementos de $L^1(I)$ são portanto *classes de funções somáveis*; cada classe contém determinada função de $\mathcal{L}(I)$ e exactamente todas as que com ela coincidem $p.p.$.

Atendendo ao que se viu na Secção 9.2, $\mathcal{L}(I)$ contém como parte densa o espaço $\mathcal{E}(I)$ das funções em escada, e portanto também, obviamente, o espaço $\mathcal{R}(I)$ das funções integráveis à Riemann; podemos então interpretar a construção do integral de Lebesgue como processo de *completação* de quaquer destes espaços relativamente à semi-norma $\| \, . \, \|_1$. Uma possível via alternativa para a introdução do integral de Lebesgue poderia ser a definição de função somável como *limite p.p. de sucessão de funções em escada (ou integráveis à Riemann), de Cauchy em média*. A análise atrás efectuada revela que tais sucessões convergem, de facto, em média, pelo que facilmente se conclui que tal nova construção conduziria ao mesmo conceito de integral.

Bibliografia[21]

APOSTOL[22] – *Mathematical Analysis* – 2nd edition – Addison-Wesley (1974).

BARTLE, R. G. – *The Elements of Real Analysis* – 2nd edition – John Wiley & Sons (1976).

CARMONA, J. – *Sobre a demonstração do Teorema de Mudança de Variável* – Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, nº45 (Out. 2001), pp. 73–82.

DIAS AGUDO, F. R. – *Lições de Análise Infinitesimal – II – Cálculo Integral em* $\mathbb{R}^N$ – Escolar Editora (1973).

GUERREIRO, J. S. – *(Apontamentos do curso de Análise Superior leccionado na F.C.U.L. no ano lectivo de 1974/75).*

GUERREIRO, J. S. – *(Notas pessoais).*

SANCHEZ, L. – *(Notas pessoais para os cursos de Análise do 2º ano de Engenharia e Física da F.C.U.L.).*

SPIVAK, M. – *Calculus on Manifolds* – Benjamin, Inc. (1965).

RIESZ - NAGY – *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* – 3e édition – Gauthiers-Villars (1955).

[21]Dado que os assuntos tratados neste curso são há muito resultados clássicos da Análise, existindo portanto vastíssima bibliografia de qualidade que a eles diz respeito, indicam-se apenas as obras efectivamente consultadas para a redacção destas páginas, incluindo notas pessoais e manuscritos.

[22]Esta referência deve ser utilizada com cuidado, pois contém algumas incorrecções em enunciados de teoremas e demonstrações.

Índice remissivo

Expõe-se, neste volume, a teoria da integração em $\mathbb{R}^N$, começando pela construção do integral de Riemann e associada medida de Jordan. O integral e medida de Lebesgue surgem como desenvolvimento natural daquela teoria, sugerido pela análise do comportamento de sucessões de funções integráveis à Riemann; introduz-se, deste modo, uma versão modificada da clássica construção de Riesz.

Procurou-se motivar o encadeamento dos assuntos, fazendo ressaltar os aspectos intuitivos da teoria, mas simultaneamente desenvolver todas as demonstrações; espera-se, assim, que o texto possa ser útil a leitores com níveis distintos de formação matemática.