J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

COMPÊNDIO
DE
MATEMÁTICA

J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º VOLUME

CURSO COMPLEMENTAR
DO ENSINO SECUNDÁRIO

1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA
Av. Miguel Bombarda, 20 — Lisboa

O texto deste Compêndio *foi utilizado no âmbito de uma experiência de modernização do ensino da matemática em Portugal, dirigida pelo Prof. Sebastião e Silva e realizada pelo Ministério da Educação Nacional em colaboração com a O.C.D.E. (Projecto Especial STP-4/SP). Nesta experiência estiveram envolvidos alunos dos antigos 6.° e 7.° anos do ensino liceal (idades entre 15 e 17 anos).*

VECTORES

NÚMEROS COMPLEXOS

E

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

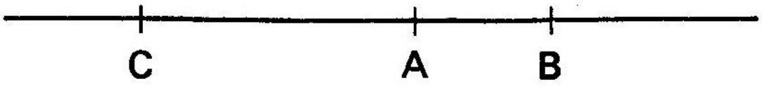
CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO VECTORIAL

1. **Relação 'situado entre'.** Dados três pontos A, B, C em linha recta, sabemos o que quer dizer a proposição

'A *está situado entre* B *e* C'

que pode ser verdadeira ou falsa, conforme os casos (verdadeira no exemplo da figura).



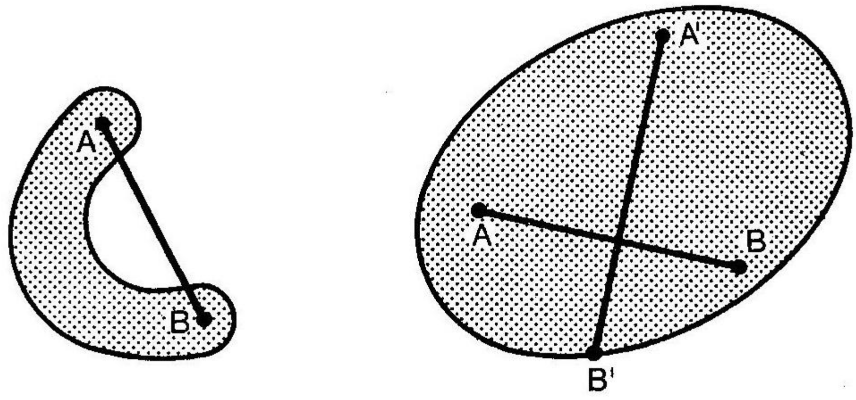
Assim, se considerarmos as letras A, B, C como variáveis, a anterior expressão proposicional define uma *relação ternária* entre pontos da recta. Chamar-lhe-emos, abreviadamente, a relação 'situado entre'. Esta é uma das noções que podem ser adoptadas como primitivas na geometria euclidiana. A partir dela se definem as noções de 'segmento de recta', de 'semi-recta' e de 'semiplano'.

Dados dois pontos A e B distintos, chama-se *segmento de recta de extremos A e B* o conjunto constituído pelos pontos A, B e por todos os pontos da recta AB situada entre A e B [1]. Se $A = B$, chama-se *segmento de extremos* A, B o conjunto singular $\{A\}$ (segmento *nulo*). Em qualquer dos casos o segmento de extremos A, B é designado pela notação $\overline{AB}$.

---

[1] O **estar situado entre** A **e** B implica **ser distinto de** A **e de** B.

Diz-se que um conjunto $\mathcal{C}$ de pontos é *convexo,* quando, quaisquer que sejam os pontos A e B de $\mathcal{C}$, o segmento $\overline{AB}$ está contido em $\mathcal{C}$. Na figura indica-se um conjunto que é convexo e outro que não o é.



É evidente que *toda a recta é um conjunto convexo.* Um plano também é um conjunto convexo: porquê?

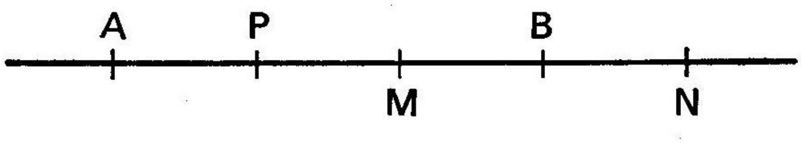
A noção de semi-recta resulta da seguinte proposição, que pode ser tomada como um dos axiomas da geometria euclidiana:

PROPOSIÇÃO 1. *Todo o ponto* P *duma recta* r *divide* r *em duas partes* r_1 *e* r_2 *tais que:*

1) r_1 *e* r_2 *são dois conjuntos convexos cuja reunião é* r *e cuja intersecção é* $\{P\}$;

2) *existe pelo menos um ponto de* r_1 *distinto de* P *e um ponto de* r_2 *distinto de* P;

3) *quaisquer que sejam os pontos* A *de* r_1 *e* B *de* r_2, *o ponto P pertence ao segmento* $\overline{AB}$.



Como é sabido, chamam-se *semi-rectas de origem* P os dois conjuntos r_1 e r_2 que verificam estas condições. Da proposição anterior resulta que uma semi-recta fica determinada, quando se indica a sua origem e um seu ponto qualquer distinto da origem. Se for P a origem e A o outro ponto indicado, designaremos a semi-recta pela notação $\dot{P}A$.

(Um segmento de recta será um conjunto convexo? Justifique a resposta, a partir da proposição 1.)

Diz-se que duas semi-rectas de r *estão voltadas para o mesmo lado,* se uma delas está contida na outra.

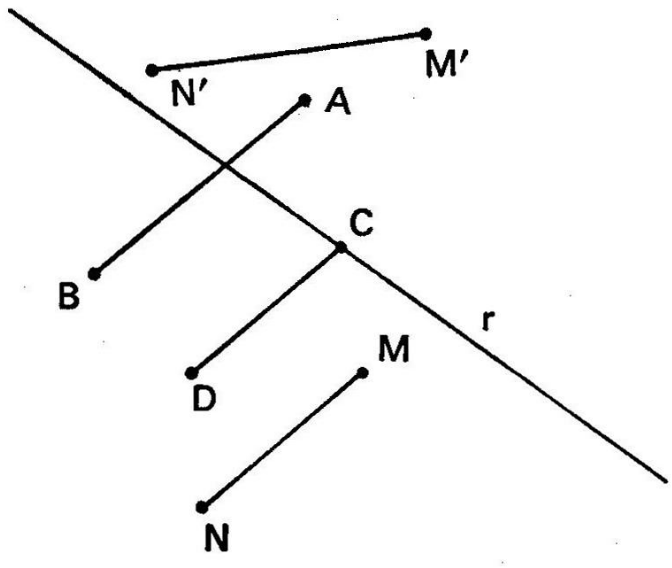
Por sua vez, a noção de semiplano assenta na seguinte proposição, que também pode ser tomada como axioma da geometria euclidiana:

PROPOSIÇÃO 2. *Toda a recta* r *dum plano* α *divide* α *em duas partes* α_1 *e* α_2, *tais que:*

1) α_1 *e* α_2 *são dois conjuntos convexos cuja reunião é* α *e cuja intersecção é* r;

2) *quaisquer que sejam os pontos* A *de* α_1 *e* B *de* α_2, *o segmento de recta* $\overline{AB}$ *intersecta a recta* r.

Os dois conjuntos que verificam estas condições são chamados *semiplanos* e a recta r *fronteira dos semiplanos.*



Um semiplano fica pois determinado quando se dá a sua fronteira e um seu ponto qualquer não pertencente à fronteira [1]. Se esta for *r* e o ponto indicado for A, o semiplano será designado pela notação $\overline{r}$ A.

[1] Prova-se que existe pelo menos um ponto do semiplano fora da fronteira.

2. Relações de ordem. Chama-se *relação de ordem*, num universo U, toda a relação binária R que tenha as seguintes propriedades:

1) ANTI-REFLEXIVA: $xRy \Rightarrow x \neq y$

2) ANTI-SIMÉTRICA ESTRITA: $xRy \Rightarrow y \not R x$

3) TRANSITIVA: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

4) TRICOTÓMICA: $\forall x, y \in U: xRy \vee yRx \vee x=y$

Por exemplo, a relação $<$ em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem e o mesmo sucede com a sua inversa, a relação $>$. Aliás, imediatamente se reconhece que:

Se R *é uma relação de ordem, também* R^{-1} *é uma relação de ordem.*

A relação definida pela expressão *'precede alfabeticamente'*, que se usa nos dicionários, nas listas de telefones, nas pautas de alunos, etc., é outro exemplo da relação de ordem (chamada, neste caso, *'ordem alfabética'* ou *'ordem lexicográfica'*).

Consideremos, agora, a relação R assim definida

$$xRy \Leftrightarrow x \textit{ é menos caro que } y$$

no universo das mercadorias. É anti-reflexiva, anti-simétrica estrita e transitiva. *Mas não é tricotómica, pois existem mercadorias* x, y *tais que*

$$x \not R y \wedge y \not R x \wedge x \neq y$$

Diz-se neste caso que x e y *têm o mesmo preço* (relação de equivalência). Mas já no *universo dos preços* (que são propriedades das mercadorias), a relação $<$ é uma relação de ordem.

Analogamente, a relação 'mais volumoso', definida no universo dos sólidos, tem as propriedades 1), 2), 3), mas não é tricotómica. Com efeito, dois sólidos x, y podem ter o *mesmo volume* (relação de equivalência) e serem distintos ($x \neq y$). Mas no *universo dos volumes* a relação $>$ é uma relação de ordem.

Um exemplo típico é o da relação de grandeza entre segmentos de recta. Dados dois segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a proposição

'$\overline{AB}$ é menor que $\overline{CD}$'

significa o mesmo que

'$\overline{AB}$ *é menos comprido que* $\overline{CD}$'

e escreve-se abreviadamente, neste caso,

$$\overline{AB} < \overline{CD}$$

Mas esta relação $<$ *entre segmentos não é uma relação de ordem.* Porquê? A razão é esta:

Se $\overline{AB} \not> \overline{CD}$ e $\overline{CD} \not> \overline{AB}$, não se pode concluir que seja $\overline{AB} = \overline{CD}$ (isto é, que os dois segmentos coincidem). O mais que se pode dizer é que os dois segmentos são *geometricamente iguais* (relação de equivalência), o que indicamos escrevendo

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Desta relação deriva a noção de comprimento.

Chama-se *comprimento* de $\overline{AB}$, e representa-se por $|AB|$, a propriedade comum a todos os segmentos geometricamente iguais a $\overline{AB}$. Assim:

$$|AB| = |CD| \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Por sua vez, escreve-se, por definição:

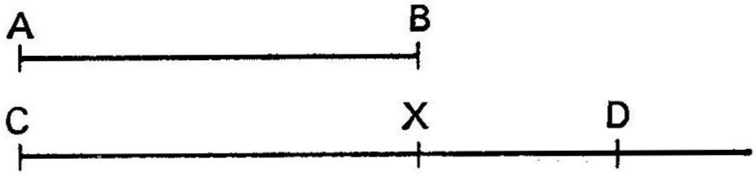
$$|AB| < |CD| \Leftrightarrow \overline{AB} < \overline{CD}$$

e prova-se que, *no universo dos comprimentos* (que são propriedades dos segmentos), a relação $<$ já é uma relação de ordem.

Por várias vezes temos salientado que o sinal $=$ exprime identidade lógica. Quando usado em geometria, deverá sempre ler-se '*coincidente com*' ou '*o mesmo que*' e, assim, o sinal $\cong$ já se poderá ler simplesmente 'igual a', sem receio de ambiguidade.

Convém ainda lembrar que a relação $<$, referida a segmentos de recta, deriva da relação *'situado entre'*, referida a pontos duma recta. Com efeito:

Diz-se que $\overline{AB} < \overline{CD}$, se existe um ponto X situado entre C e D tal que $\overline{CX} \cong \overline{AB}$.



EXERCÍCIOS:

I. Determinar todas as relações de ordem que é possível definir num conjunto $A = \{a, b, c\}$. (Observação: cada relação de ordem num conjunto finito pode ser definido por uma *cadeia*, por exemplo, $b \prec c \prec a$, $c \prec b \prec a$, etc.)

II. Determinar o número de relações de ordem que é possível definir num conjunto finito com *n* elementos.

3. **Conjuntos ordenados. Isomorfismos.** Chama-se *conjunto ordenado* todo o conjunto no qual se adopta uma determinada relação de ordem. Se designarmos esta relação pelo símbolo $\prec$ (que podemos ler 'precede'), o conjunto ordenado será precisamente o par $(U, \prec)$. Por exemplo, são conjuntos ordenados o conjunto $\mathbb{R}$ com a relação $<$ usual (ou com a sua inversa), o conjunto das palavras dum dicionário com a relação de ordem alfabética, etc.

Chama-se *isomorfismo* dum conjunto ordenado $(U, \prec)$ sobre um conjunto ordenado $(V, \prec)$ toda a aplicação f de U sobre V que respeita a relação de ordem, isto é, tal que

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) \prec f(y)$$

Facilmente se reconhece que *todo o isomorfismo de ordem é uma aplicação biunívoca, cuja inversa ainda é um isomorfismo* *de ordem.* E ainda: *o produto de dois isomorfismos de ordem ainda é um isomorfismo de ordem.*

Por exemplo, se for $U = \{1, 2, 3, 4\}$ com a relação $<$, $V = \{a, b, c, d\}$ com a relação 'precede no alfabeto' e

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

vê-se que f é um isomorfismo do primeiro conjunto ordenado no segundo, mas não g.

Analogamente a aplicação $x \rightsquigarrow -x$ é um isomorfismo de $(\mathbb{R}, <)$ sobre $(\mathbb{R}, >)$.

EXERCÍCIOS:

Indique quais das seguintes aplicações

$$x \rightsquigarrow x^2 \ , \quad x \rightsquigarrow x^3 \ , \quad x \rightsquigarrow 1/x \ , \quad x \rightsquigarrow 10^x$$

são isomorfismos de $(\mathbb{R}, <)$ sobre $(\mathbb{R}, <)$, de $(\mathbb{R}^+, <)$ sobre $(\mathbb{R}^+, >)$ e de $(\mathbb{R}, <)$ sobre $(\mathbb{R}^+, <)$.

Que nome se dá a uma função que respeita a relação 'menor que'? E a uma função que muda $<$ em $>$?

4. **Relações de ordem lata.** Dada uma relação de ordem $\prec$ num conjunto U, podemos definir a partir desta uma outra relação, expressa pelo sinal $\preceq$ (ler 'precede ou é igual a'), do seguinte modo:

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$$

Das propriedades da relação de ordem é fácil deduzir as seguintes, para a nova relação:

1) REFLEXIVA: $x \preceq x, \ \forall x \in U$

2) ANTI-SIMÉTRICA LATA: $x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y$

3) TRANSITIVA: $x \preceq y \wedge y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$

4) DICOTÓMICA: $\forall x, y \in U, \ x \preceq y \vee y \preceq x$

Chama-se *relação de ordem lata* toda a relação que verifique estas condições. Por vezes, chamam-se *relações de ordem estrita* as relações de ordem (tais como as definimos atrás) para as distinguir das anteriores.

Assim, a toda a relação de ordem estrita corresponde uma relação de ordem lata. Reciprocamente, a toda a relação de ordem lata R correspondente a relação de ordem estrita R* assim definida:

$$xR^*y \Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$$

Portanto, dar uma relação de ordem estrita equivale sempre a dar uma relação de ordem lata.

NOTA. Num conjunto singular a relação de identidade é manifestamente uma relação de ordem lata. A relação de ordem estrita correspondente é a relação binária vazia. Assim, um conjunto singular pode sempre considerar-se ordenado: tem um *primeiro* elemento, que é também o *último*.

5. **Relações de ordem parcial.** Consideremos a relação 'descendente' (filho, neto, bisneto, etc.) no universo dos seres humanos. É uma relação anti-reflexiva, anti-simétrica estrita e transitiva, e o mesmo sucede com a sua inversa, a relação 'ascendente' (ou 'antepassado'). Mas não é tricotómica (porquê?).

Dum modo geral, chamam-se *relações de ordem parcial (estrita)* as relações anti-reflexivas, anti-simétricas estritas e transitivas (podendo ser ou não tricotómicas). As relações de ordem, tais como atrás foram definidas, também, por vezes, são chamadas *relações de ordem total*, para evitar confusões (1).

São ainda exemplos de relações de ordem parcial estrita:

I. A relação 'divisor próprio' no universo IN. Diz-se que a é divisor próprio de b, se a divide b e a $\neq$ b.

---

(1) Alguns autores chamam **relações de ordem** precisamente às que chamamos aqui **relações de ordem parcial** e que incluem as de ordem total como caso particular.

II. A relação 'contido estritamente', no universo dos subconjuntos dum conjunto dado.

É claro que, a toda a relação de ordem parcial estrita, corresponde uma *relação de ordem parcial lata* (isto é, reflexiva, anti-simétrica lata e transitiva) e reciprocamente.

Por exemplo, a relação 'divide', a relação $\subset$, etc., são relações de ordem parcial lata.

A primeira, no universo $\mathbb{N}$, não é uma relação de ordem total (lata): por exemplo, 3 não divide 5 e 5 não divide 3 (falha portanto a dicotomia). Mas a sua restrição ao conjunto das potências dum número já é uma relação de ordem total (lata).

Por sua vez, a relação $\subset$ no conjunto

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

não é uma relação de ordem total, visto que

$$\{1\} \not\subset \{2\} \text{ e } \{2\} \not\subset \{1\}$$

Mas já o é a sua restrição ao conjunto

$$\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

EXERCÍCIOS:

I. Classifique as relações R, S, T assim definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a < c \wedge b < d$$

$$(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow a \leqslant c \wedge b \leqslant d$$

$$(a, b)\ T\ (c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c\ /\ b < d)$$

Será S a relação de ordem parcial lata associada a R?

II. Como classifica a relação *'precede'* no conjunto dos *instantes* (ou *épocas*) relativas a um dado lugar da Terra? E no conjunto dos instantes relativos a lugares considerados em diferentes astros? (Segundo a *Teoria da Relatividade*, esta relação não é *tricotómica* no 2.° caso.)

NOTA. Como, daqui por diante, trataremos exclusivamente de *relações de ordem total estrita*, omitiremos o qualificativo *'total estrita'*, por já não haver qualquer possibilidade de confusão.

6. **Relação 'situado entre' associada a uma relação de ordem.** Consideremos uma relação de ordem $\prec$ num conjunto U. A partir desta define-se uma relação ternária do seguinte modo:

(1) $$x \text{ está entre } a \text{ e } b \Leftrightarrow a \prec x \prec b \vee b \prec x \prec a$$

Esta relação ternária é chamada a *relação 'situado entre' associada à relação* $\prec$. Mas é evidente que a mesma está associada à relação de ordem inversa:

$$x \textit{ está entre } a \textit{ e } b \Leftrightarrow a \succ x \succ b \vee b \succ x \succ a$$

(O sinal $\succ$ pode ler-se 'segue', enquanto o sinal $\prec$ se lê 'precede').

Por sua vez as relações $\prec$ e $\succ$ dizem-se ambas *subordinadas* à relação 'situado entre', que se definiu.

EXERCÍCIOS — I. Considere num conjunto $U = \{a, b, c, d\}$ a seguinte relação ternária:

$$T = \{acd\ ,\ adc\ ,\ acb\ ,\ abc\ ,\ dcb\ ,\ dbc\ ,\ dab\ ,\ dba\}$$

e interprete a expressão T (x, y, z) como abreviatura de 'x *está entre* y *e* z'. Determine então as relações de ordem subordinadas a T, se porventura existem. [Observação: usamos a notação 'acd' como abreviatura de '(a, c, d)'.]

II. Quantas relações 'situado entre' se podem definir num conjunto finito com *n* elementos?

(Ver respostas no final do número seguinte.)

7. **Relações de ordem subordinadas à relação 'situado entre' numa recta.** Põe-se agora naturalmente a seguinte pergunta:

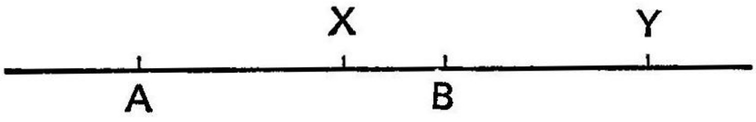
Será possível introduzir na recta uma relação de ordem que esteja subordinada à relação 'situado entre' lá existente?

A resposta é afirmativa.

TEOREMA. *Numa recta é sempre possível introduzir (de dois modos diferentes) uma relação de ordem que fique subordinada à relação geométrica 'situado entre'.*

Demonstração:

Sejam A e B dois pontos distintos da recta e *convencionemos* por exemplo que $A \prec B$.



Então, dados dois pontos X e Y quaisquer da recta escreveremos $X \prec Y$, se os pontos X, Y são distintos e as semi-rectas $\dot{A}B$ e $\dot{X}Y$ estão voltadas para o mesmo lado; isto é, simbolicamente:

$$X \prec Y \iff X \neq Y \wedge (\dot{X}Y \subset \dot{A}B \vee \dot{A}B \subset \dot{X}Y)$$

Então, é fácil ver, aplicando a PROPOSIÇÃO 1 do n.º 1, que a relação $\prec$ assim definida é de facto uma relação de ordem subordinada à relação geométrica 'situado entre'. Pois bem:

DEFINIÇÃO. *Chamam-se* sentidos *duma recta as duas relações de ordem subordinadas à sua relação 'situado entre'. Uma recta diz-se* orientada, *quando nela se define um sentido.*

Segundo o que vimos na demonstração anterior, para definir um sentido numa recta, basta dar um par ordenado (A, B) de pontos que verifique esse sentido ou (o que é equivalente) dar a semi-recta $\dot{A}B$.

Na prática, o sentido pode ser indicado intuitivamente por meio de uma seta paralela à recta ou mesmo incorporada na própria recta.

A origem intuitiva desta noção está no conceito físico de *sentido dum movimento.* Notemos a propósito que, segundo esta terminologia, a designação *'direcção proibida'*, tal como se usa entre nós em regras de trânsito está incorrectamente aplicada. Deveria dizer-se, nesses casos, *'sentido proibido'*. O significado de *'direcção proibida'* deveria ser o de *'trânsito proibido nos dois sentidos'*.

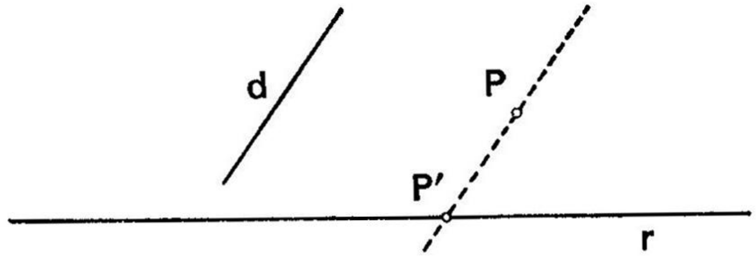
Recordemos que se chama *direcção duma recta* r à propriedade comum a todas as rectas paralelas a r. A noção de sentido pode ser estendida a todas as rectas com a mesma direcção. Mas, para isso, precisamos de utilizar *projecções paralelas.*

RESPOSTAS AOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. $c \prec a \prec d \prec b$ e inversa. II. $\frac{n!}{2}$ se $n > 1$; 1 se $n = 1$.

8. **Projecções paralelas. Extensão do conceito de sentido.** Consideremos num plano α duas rectas *r* e *d* concorrentes, e seja P um ponto qualquer do plano. Chama-se *projecção de* P *sobre* r *paralelamente a* d ao ponto P′ da intersecção de r com a recta que passa por P e é paralela a d. Fica assim definida uma apli-

cação (não biunívoca) do plano α sobre r, chamada *projecção paralela.* A projecção diz-se *ortogonal,* sse $d \perp r$.



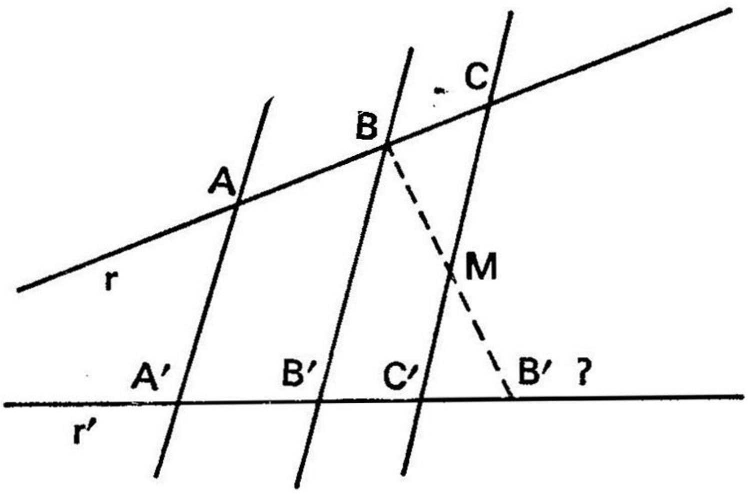
Analogamente se define projecção paralela (e *projecção ortogonal*) do espaço sobre um plano.

LEMA 1. *Sejam* r, r′ *duas rectas quaisquer dum plano e* d *uma outra recta do plano concorrente com as primeiras. Então, a projecção paralelamente a* d *define uma aplicação biunívoca de* r *sobre* r′ *que respeita a relação 'situado entre'. Quer dizer: se forem* A, B, C *três pontos quaisquer de* r *e* A′, B′, C′, *respectivamente as projecções de* A, B, C *sobre* r′, *tem-se:*

$$B \text{ está entre } A \text{ e } C \Leftrightarrow B' \text{ está entre } A' \text{ e } C'$$

Demonstração:*

A projecção paralela a *d* define manifestamente uma aplicação biunívoca de r sobre r′: a sua inversa é a projecção dos pontos de r′ sobre r paralelamente a *d.*



Sejam agora A, B, C três pontos de r tais que B esteja entre A e C. Suponhamos que B′ *não* está entre A′ e C′, e que, por exemplo, C′ está entre A′ e B′. Então A′ e B′ pertencem a dois semiplanos diferentes de fronteira CC′. Mas A e B estão no mesmo semiplano de fronteira CC′ (porquê?). Logo $\overline{BB'}$ intersecta CC′ num ponto M (porquê?) o que é impossível (porquê?). Portanto C′ não pode estar entre A′ e B′. Analogamente se prova que A′ não pode estar entre B′ e C′. Como B′ não pode ser A′ nem C′, conclui-se que B′ está entre A′ e C′.

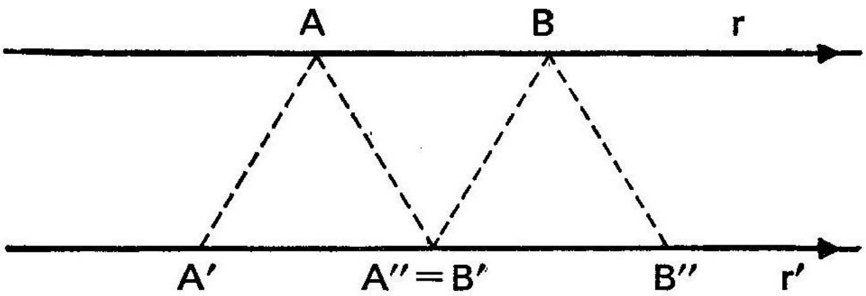
A recíproca fica provada pelo mesmo raciocínio e assim termina a demonstração.

Note-se que este lema é necessário para a demonstração do *teorema de Tales,* no caso em que os segmentos considerados numa das rectas são incomensuráveis.

LEMA 2. *Sejam* r, r′ *duas rectas paralelas dum plano e* d *uma outra recta do plano, concorrente com as primeiras. Se as rectas* r, r′ *estiverem orientadas, e se a projecção de* r *sobre* r′ *paralelamente a* d *respeita o sentido, a projecção de* r *sobre* r′ *paralelamente a qualquer outra recta* d′ *também respeita o sentido* (isomorfismo de ordem).

Demonstração:*

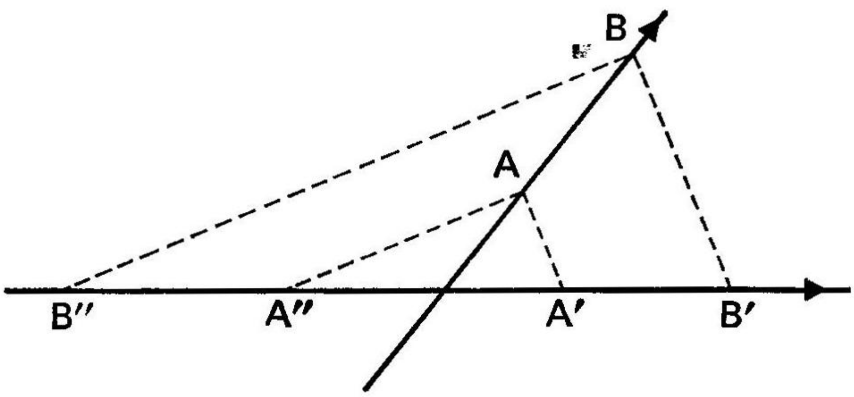
Seja A um ponto qualquer de r, A′ a sua projecção sobre r′ paralelamente a d e A″ a sua projecção sobre r′ paralelamente a outra recta d′. Designemos por B a projecção de A″ sobre r paralelamente a d′. Então A″ coincide com a projecção B′ de B sobre r′ paralelamente a d. Suponhamos que $A \prec B$ e $A' \prec B'$, segundo os critérios adoptados. Pretende-se provar que também $A'' \prec B''$.



Notemos que A′ e B estão em semiplanos opostos de fronteira AA″ (porquê?) e que B e B″ estão no mesmo semiplano de fronteira AA″ (porquê?). Logo A″ (ou seja B′) está entre A′ e B″ (porquê?). E, como A′ $\prec$ B′ (por hipótese), daqui se conclui que A″ $\prec$ B″,

q. e. d.

Convém notar que, se as rectas forem concorrentes, existe sempre uma projecção paralela que respeita e outra que não respeita os sentidos, como se pode inferir da figura junta.



DEFINIÇÃO 1. *Dadas duas rectas paralelas orientadas,* r *e* r′, *diz-se que* r concorda *com* r′, *sse qualquer projecção paralela de* r *sobre* r′ *respeita o sentido.*

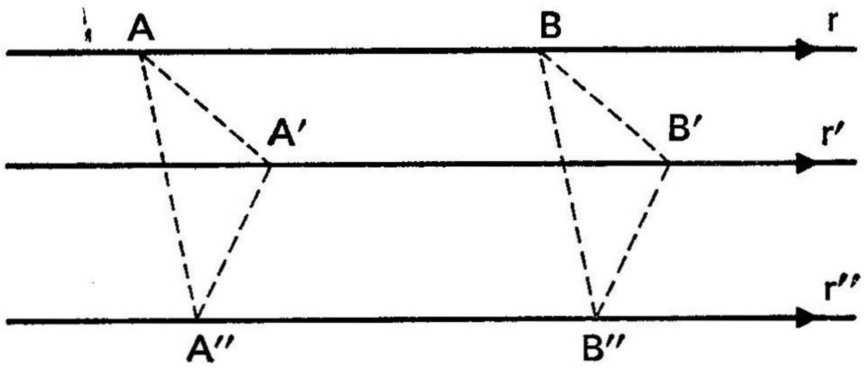
TEOREMA. *A relação de concordância assim definida é uma relação de equivalência.*

Demonstração:*

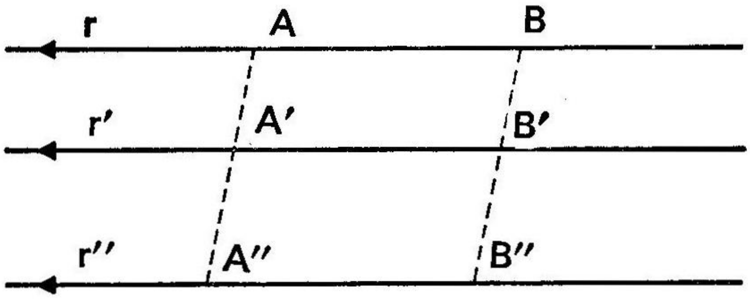
Imediatamente se reconhece que a relação é reflexiva e simétrica.

Sejam agora r, r′, r″ três rectas orientadas paralelas entre si, e suponhamos que r concorda com r′ e r′ concorda com r″. Trata-se de provar que r concorda com r″.

Suponhamos que as rectas não são complanares. Sejam: A, B dois pontos distintos de r; A′, B′ respectivamente as projecções de A, B sobre r′ paralelamente a uma recta d; e A″, B″ respectivamente as projecções de A′, B′ sobre r″ paralelamente a uma recta d′. Então os planos AA′ A″ e BB′ B″ são paralelos (porquê?). Logo as rectas AA″ e BB″ são paralelas (porquê?). Por outro lado, se $A \prec B$, também $A' \prec B'$ e $A'' \prec B''$ (porquê?) ([1]). Logo a projecção de r sobre r″ paralelamente a d′ respeita o sentido, o que significa que r concorda com r″.



Se as três rectas r, r′, r″ são complanares, basta considerar as projecções de r sobre r′ e de r′ sobre r″ *paralelamente a uma mesma recta*, para chegar trivialmente à mesma conclusão.



DEFINIÇÃO 2. *Diz-se que duas rectas orientadas paralelas* têm o mesmo sentido, *sse são concordantes. Se não são concordantes, diz-se que* têm sentidos contrários.

Deste modo chegamos, por abstracção, ao conceito generalizado de sentido.

Sentido duma recta orientada r é a propriedade comum a todas as rectas orientadas que concordam com r (do mesmo modo que a direcção duma recta é a propriedade comum a todas as rectas que lhe são paralelas).

---

(1) Quando dois planos paralelos são cortados por um terceiro...

Do exposto se conclui que:

Toda a direcção no espaço tem dois sentidos contrários.

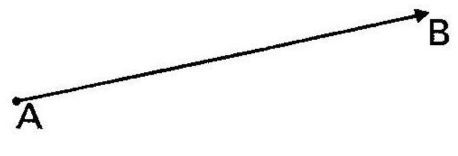
Para representar um sentido, basta dar um par ordenado de pontos distintos ou uma semi-recta que tenha esse sentido, do mesmo modo que, para representar uma direcção, basta dar uma recta que tenha essa direcção.

DEFINIÇÃO 3. *Chama-se* segmento orientado *qualquer segmento de recta, ao qual se atribui um sentido. Se os extremos do segmento são pontos distintos, o segmento fica orientado quando se estabelece que um dos extremos precede o outro extremo: então o primeiro chama-se* origem *e o segundo* extremidade *do segmento orientado. Se os extremos são coincidentes (segmento nulo), o segmento considera-se sempre orientado, de acordo com a nota final do n.º 4; mas diz-se que tem* direcção e sentido indeterminados (*ou* arbitrários).

Sendo A e B dois pontos quaisquer, o símbolo

$$[A, B]$$

designará o *segmento orientado de origem* A e *extremidade* B (mesmo que seja A=B).



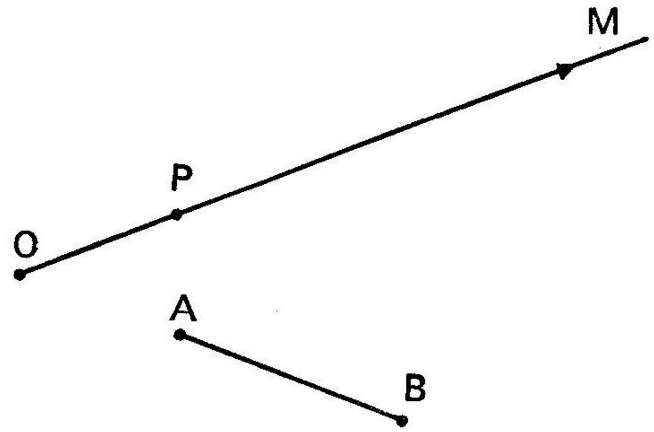
9. **Conceito de vector.** Em física apresentam-se entidades de diversas naturezas, constituídas pela associação duma grandeza absoluta a uma direcção e a um sentido no espaço. Essas entidades são chamadas *grandezas vectoriais* ou *vectores.* Por exemplo, quando se diz que a velocidade dum ponto material em dado instante é de 3 m/s (grandeza absoluta), isso não basta, muitas vezes, para definir inteiramente o estado de movimento do ponto nesse instante: é necessário associar àquela grandeza a direcção e o sentido do movimento, e esta associação

de dados é chamada *velocidade vectorial* do ponto no instante considerado. Situações análogas se apresentam a respeito de acelerações, forças, campos eléctricos ou magnéticos, etc.

Recordemos que toda a grandeza absoluta pode ser definida por um número real não negativo, que é a sua *medida* em relação à grandeza da mesma espécie tomada para *unidade*. Assim, no exemplo anterior, a unidade é o m/s e a medida é 3.

Deste modo, toda a grandeza absoluta, qualquer que seja a sua natureza, pode ser representada por um segmento de recta, uma vez fixada uma unidade de comprimento. E, assim, toda a grandeza vectorial pode ser representada por um segmento orientado, em virtude do seguinte

TEOREMA. *Dados um comprimento, uma direcção e um sentido, existe sempre, pelo menos, um segmento orientado, que tem esse comprimento, essa direcção e esse sentido.*



Demonstração:

Como vimos, a direcção e o sentido podem ser representados por uma semi-recta $\dot{O}M$ e o comprimento por segmento de recta $\overline{AB}$. Então, segundo um dos axiomas da geometria euclidiana, existe um (e um só) ponto P de $\dot{O}M$ tal que $\overline{OP} \cong \overline{AB}$. Ora é evidente que o segmento orientado [O, P] tem o comprimento, a direcção e o sentido que foram dados.

DEFINIÇÃO. *Diz-se que dois segmentos orientados são* equivalentes, *sse têm o mesmo comprimento, a mesma direcção e o mesmo sentido. Em particular, são equipolentes todos os segmentos nulos.*

É desde logo evidente que:

A relação de equipolência, assim definida, é uma relação de equivalência.

DEFINIÇÃO 2. *Diz-se que dois segmentos orientados representam o* mesmo vector, *sse são equipolentes.*

Assim, *o vector representado por um segmento orientado* [A, B] aparece-nos como a *conjunção* dos três atributos: o comprimento, a direcção e o sentido de [A, B] [1]. E o mesmo vector pode ser representado indistintamente por *qualquer* segmento orientado equipolente a [A, B] (do mesmo modo que a direcção duma recta *r* pode ser representada indistintamente por qualquer recta paralela a *r* ou o *metro* pode ser representado indistintamente por qualquer segmento com o comprimento de um metro).

Chama-se *comprimento, direcção* e *sentido* dum vector, respectivamente, o comprimento, a direcção e o sentido de qualquer dos segmentos orientados que o representam. Chama-se *vector nulo* o vector de comprimento nulo (representado por qualquer segmento [A, A] de extremos coincidentes).

Os segmentos orientados também por vezes são chamados *vectores aplicados.* Neste caso, os vectores são chamados *vectores livres* (isto é, com origem *livre*) para se distinguirem dos primeiros. Recordemos que, na física, é necessário um vector aplicado para representar uma força, visto que não bastam a *direcção,* o *sentido* e a *intensidade* para definir a força: é necessário dar ainda o *ponto de aplicação,* que é precisamente a origem do correspondente vector aplicado.

No entanto, quando se trata de forças aplicadas a sólidos, o ponto de aplicação da força *pode ser substituído* por outro ponto do sólido situado na mesma recta do segmento representativo. Daqui a noção de 'vector deslizante'.

Diz-se que dois segmentos orientados representam o mesmo vector *deslizante,* sse são equipolentes *e* pertencem à mesma recta.

---

[1] Também pode ser considerado como a **classe** dos segmentos orientados equipolentes a [A, B].

Como, daqui por diante, não precisaremos das expressões 'vector aplicado' e 'vector deslizante', diremos sempre 'vector' com o significado de 'vector livre'.

10. **Soma de um ponto com um vector.** O vector representado por um segmento orientado [A, B] será designado pela notação $\overrightarrow{AB}$. Quando não for preciso fazer alusão directa ao segmento representativo, os vectores serão designados, em geral, por letras minúsculas encimadas de setas, como por exemplo:

$$\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{x}\ ,\ \vec{y}\ ,\ \text{etc.}$$

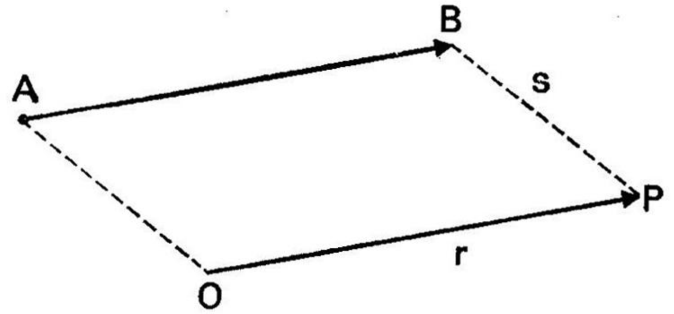
O vector nulo será designado pelo símbolo $\vec{0}$.

Importa salientar que *qualquer ponto do espaço pode ser tomado para origem do segmento representativo de um dado vector.* Com efeito:

TEOREMA. *Dados um ponto* O *e um segmento* [A, B], *existe sempre um e um só ponto* P *tal que* [O, P] *é equipolente a* [A, B].

Demonstração:

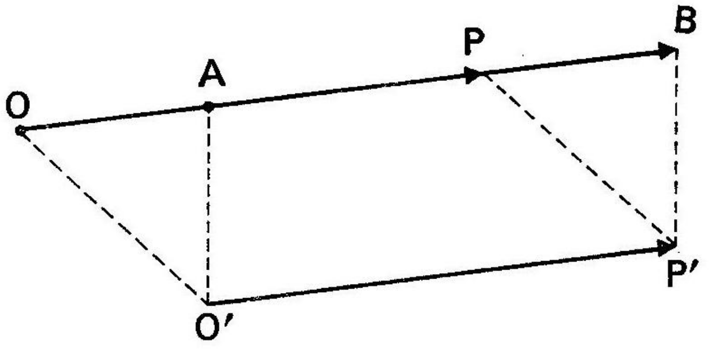
Suponhamos dados, arbitrariamente, O e [A, B]. Dois casos se podem verificar:



1.° caso. O ponto O não pertence à recta AB. Consideremos a recta r que passa por O e é paralela a AB, e a recta s que passa por B e é paralela a AO. Ora estas rectas encontram-se num ponto *único* P (porquê?) e [O, P] é equipolente a AB (porquê?).

Seja agora, reciprocamente, Q um ponto tal [O, Q] é equipolente a [A, B]. Então OQ// AB, BQ// AO (porquê?), donde

OQ = OP, BQ = BP (porquê?) e portanto P = Q. Logo existe um ponto único que verifica a condição indicada.



2.° caso. O ∈ AB. Este caso pode ser reduzido ao anterior, considerando um ponto O′ fora de AB e aplicando a transitividade da relação de equipolência, como se indica na figura supra.

Em termos de vectores, o teorema demonstrado pode ser traduzido do seguinte modo:

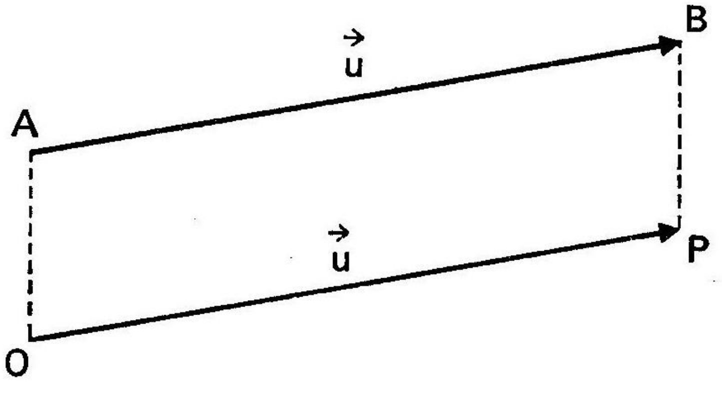
Dados um ponto O *e um vector* $\vec{u}$, *existe sempre um e só um ponto* P *tal que* [O, P] *representa o vector* $\vec{u}$.

DEFINIÇÃO. *Chama-se* soma do ponto O com o vector $\vec{u}$ *o ponto* P *a que se refere o teorema anterior, isto é, a* extremidade *do segmento orientado de origem* O *que representa o vector* $\vec{u}$. Escreve-se então:

$$P = O + \vec{u}$$

Também se diz neste caso que o vector $\vec{u}$ é a *diferença entre o ponto* P *e o ponto* O, e escreve-se

$$\vec{u} = P - O$$



Assim, temos duas maneiras diferentes de designar o mesmo vector: a expressão $\overrightarrow{OP}$ e a expressão P — O. Se for [A, B] outro segmento orientado representativo de $\vec{u}$, podemos escrever

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = P - O = B - A$$

Note-se, porém, que esta última igualdade *não* nos habilita a escrever:

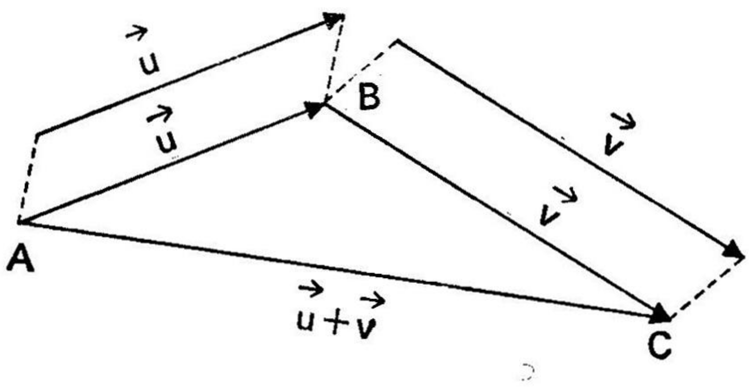
$$A + P = B + O$$

Habitualmente, não faz sentido falar de 'soma de dois pontos', embora, como acabamos de ver, se possa falar da diferença entre um ponto B e um ponto A, como sendo o vector representado por [A, B].

EXERCÍCIO. Represente no papel um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, com lápis azul, e desenhe, também a azul, um losango [ABCD] cujos lados e cujas diagonais não tenham a direcção de $\vec{u}$. Posto isto, desenhe a vermelho a figura [A′B′C′D′] que se obtém adicionando $\vec{u}$ aos pontos da primeira (linhas auxiliares a tracejado, com lápis preto). Que conclui, comparando a figura obtida com a dada?

11. **Soma de dois vectores.** Suponhamos dados dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e seja A um ponto qualquer do espaço. Somemos A com $\vec{u}$ e seja B o resultado:

$$B = A + \vec{u}$$



Somemos agora B com $\vec{v}$ e seja

$$C = B + \vec{v}$$

Então $C = (A + \vec{u}) + \vec{v}$ e somos tentados a escrever

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}),$$

onde

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

e chamar a $\vec{u} + \vec{v}$ *soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$.

Somos assim conduzidos naturalmente à seguinte

DEFINIÇÃO. *Dados dois vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *diz-se que um vector* $\bar{s}$ *é soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$, *sse existem três pontos* A, B, C *tais que:*

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad e \quad \vec{s} = \overrightarrow{AC}$$

Desde logo se vê que:

I. *Quaisquer que sejam os vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *existe (pelo menos) um vector que é soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$.

Com efeito, escolhido um ponto A, existe o ponto $B = A + \vec{u}$, o ponto $C = B + \vec{v}$ e, portanto, se designarmos por $\vec{s}$ o vector $\overrightarrow{AC}$ tem-se:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad e \quad \vec{s} = \overrightarrow{AC}$$

Vamos, agora, ver que a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é *unica*, isto é, não depende do ponto A escolhido.

II. *Quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não existe mais de um vector que seja soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.*

Demonstração:

Suponhamos que $\vec{s}$ e $\vec{s'}$ são soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$. Quer isto dizer que existem dois ternos de pontos (A, B, C) e (A′, B′, C′) tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad , \quad \vec{s} = \overrightarrow{AC}$$

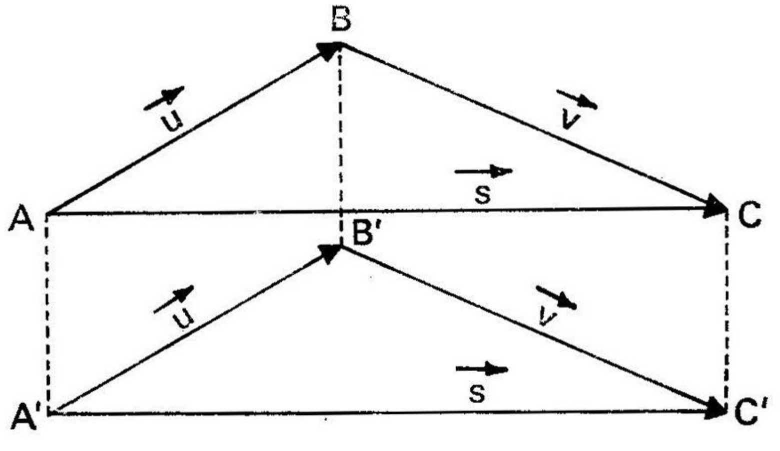
$$\vec{u} = \overrightarrow{A'B'} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{B'C'} \quad , \quad \vec{s} = \overrightarrow{A'C'}$$

Queremos provar que $\vec{s} = \vec{s}'$. Dois casos se podem dar:

1.° caso. A, B, C *não são colineares*. Então A, B, C definem um plano, ABC. Podemos, agora, distinguir duas hipóteses:

1) $A' \notin ABC$. Tem-se então $A'B' // AB$ e $B'C' // BC$ (porquê?). Logo os planos A′B′C′ e ABC são paralelos e distintos (porquê?). Por sua vez
$AA' // BB' // CC'$ (porquê?). Logo $A'C' // AC$ (porquê?) [1] e $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ (porquê) ou seja $\vec{s} = \vec{s}'$.

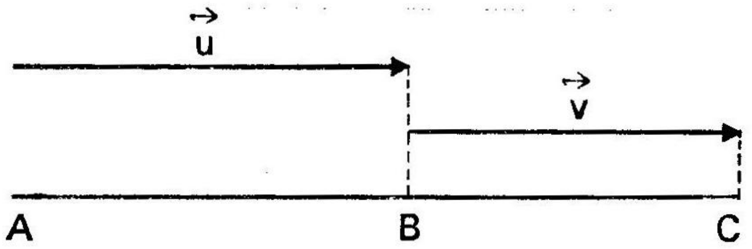
2) $A' \in ABC$. Esta hipótese reduz-se à anterior, considerando um ponto $A'' \notin ABC$. Basta então passar sucessivamente de A para A′ e de A′ para A″, e aplicar a transitividade da equipolência.



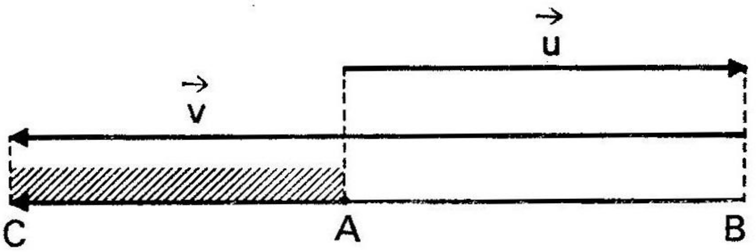
[1] Quando dois planos paralelos são cortados por um terceiro...

2.° caso. A, B, C *são colineares*. Neste caso, é fácil ver que:

1) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, o vector $\vec{s}$ tem a direcção e o sentido dos vectores dados, e o seu comprimento é igual à soma dos comprimentos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como sucede o mesmo com $\vec{s}\,'$, tem-se $\vec{s} = \vec{s}\,'$.

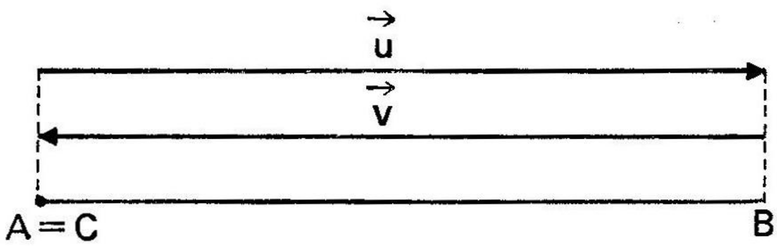


2) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ têm sentidos contrários e comprimentos diferentes, $\vec{s}$ tem a direcção de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o sentido do vector com maior comprimento e o seu comprimento é a diferença entre o maior e o menor dos comprimentos dados. O mesmo para $\vec{s}\,'$.

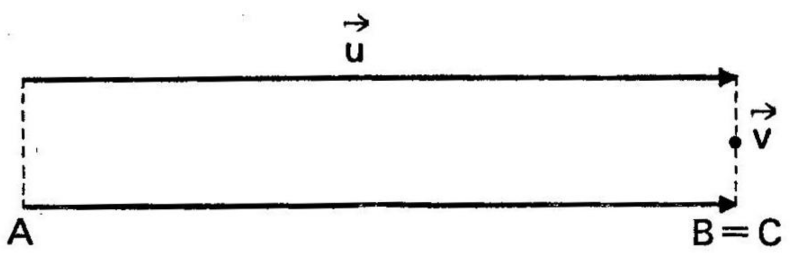


3) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ têm sentidos contrários e o mesmo comprimento, então

$$\vec{s} = \vec{s}\,' = \vec{0}$$



4) Se um dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ é nulo, então $\vec{s}$ é igual ao outro vector dado e o mesmo sucede com $\vec{s}'$.



Como não há nenhuma outra hipótese a considerar, o *teorema fica demonstrado.*

DEFINIÇÃO 2. *Dados dois vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$, *designa-se por* $\vec{u}+\vec{v}$ *a soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$, *cuja existência e unicidade acaba de ser provada.*

DEFINIÇÃO 3. *Diz-se que dois vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *são* colineares, *sse podem ser representados por segmentos orientados duma mesma recta.*

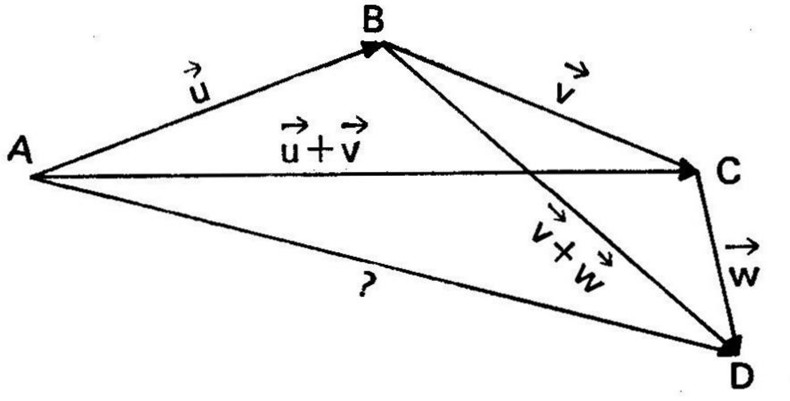
Equivale isto a dizer que os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *têm a mesma direcção ou um deles pelo menos é nulo.*

Segundo o que se viu na demonstração do teorema anterior (2.° caso):

A soma de dois vectores colineares pode ser obtida por meio de regras semelhantes às que são usadas para a adição de grandezas relativas — em particular, para a adição de números reais.

É fácil ver ainda que a adição de vectores tem as seguintes propriedades:

III. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *(associatividade)*



Demonstração:

Seja A um ponto qualquer do espaço e ponhamos

$$B = A + \vec{u} \quad , \quad C = B + \vec{v} \quad , \quad D = C + \vec{w}$$

Então

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ e } \vec{w} = \overrightarrow{CD}$$

donde

(1) $$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

Por outro lado, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{BD}$, donde

(2) $$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AD}$$

De (1) e (2) conclui-se o que se pretende.

IV. *A adição tem elemento neutro (o vector nulo).*

Com efeito, tem-se, como vimos:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad , \quad \forall \vec{u}$$

V. *Todo o vector $\vec{u}$ tem elemento simétrico.*

Com efeito, se $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vector que tem o comprimento de $\vec{u}$, a direcção de $\vec{u}$ e sentido contrário ao de $\vec{u}$, é o simétrico de $\vec{u}$ ou seja $-\vec{u}$:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

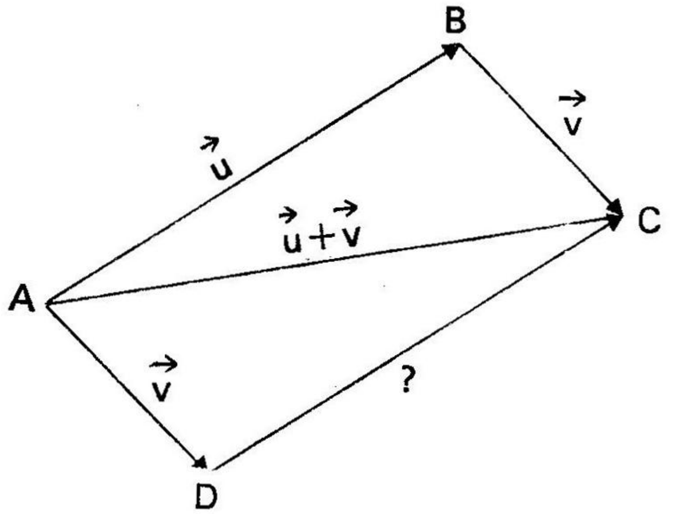
Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $-\vec{u} = \vec{0}$, como é fácil ver.

VI. *A adição de vectores é comutativa.*

Demonstração:

Dois casos se podem dar:

1.º caso. *Os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ não são colineares.*



Seja A um ponto qualquer e ponhamos

$$B = A + \vec{u} \quad , \quad C = B + \vec{v} \quad , \quad D = A + \vec{v}$$

Então A, B, C não são colineares (porquê?) e AD//BC (porquê?), donde DC//AB (porquê?). Portanto

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ (porquê?) e assim } \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

2.º caso. *Os vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são colineares.* Neste caso, como vimos, $\vec{u} + \vec{v}$ pode ser obtido segundo regras semelhantes às da adição de números reais — regras que não dependem da ordem dos vectores, isto é, tem-se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Esta demonstração põe em evidência o seguinte facto:

Quando os vectores $\vec{u}, \vec{v}$ *não são colineares — e só nesse caso — a soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$ *pode ser obtida pela REGRA DO PARALELOGRAMO, que se indica na física, para a composição de forças.*

Notemos, finalmente, que a conjunção das propriedades I-VI pode enunciar-se resumidamente do seguinte modo:

TEOREMA. *O conjunto de todos os vectores do espaço é um grupo comutativo a respeito da adição (portanto um módulo).*

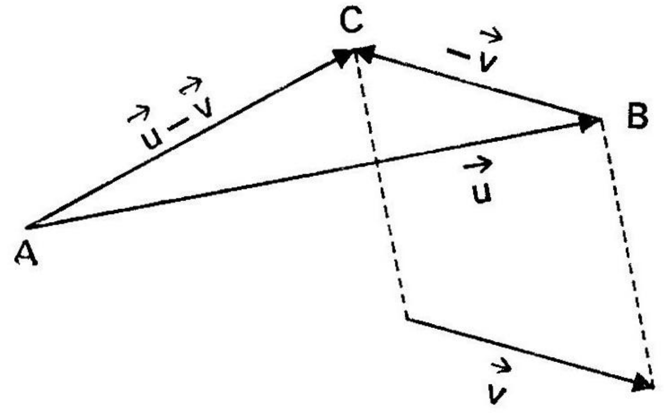
Daqui se deduz, desde logo:

COROLÁRIO. *Dados dois vectores* $\vec{u}, \vec{v}$, *existe sempre um e um só vector* $\vec{x}$ *tal que* $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$. *Este vector (que se chama diferença entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *e se representa por* $(\vec{u} - \vec{v})$ *é igual a* $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Será, portanto

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

isto é: subtrair $\vec{v}$ de $\vec{u}$ equivale a somar a $\vec{u}$ o simétrico de $\vec{v}$.



EXERCÍCIOS. I. Marque no papel três pontos A, B, C não colineares e determine os pontos assim definidos:

$$M = A + (B - A) + (C - A) \quad , \quad N = M + \overrightarrow{AC} \quad , \quad P = B - \overrightarrow{AN}$$

Relacione $\overrightarrow{NB}$ com $\overrightarrow{AC}$ e calcule $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}$.

II. Demonstre que se tem, quaisquer que sejam os pontos A, B e os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$:

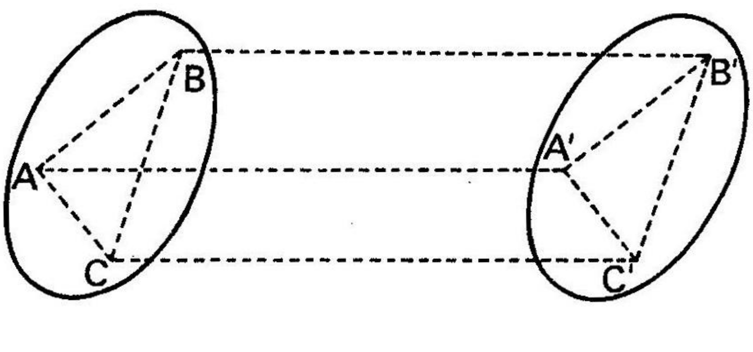
$$(A + \vec{u}) - (B + \vec{v}) = (A - B) + (\vec{u} - \vec{v})$$

(Sugestão: escreva o 1.º membro igual a $\vec{w}$).

III. Demonstre que se tem, quaisquer que sejam os pontos A, B, C, D:

$$(A - B) + (C - D) = (A - D) - (B - C)$$

12. **Translações.** Chama-se *movimento de translação* todo o movimento de um sólido, tal que as direcções das rectas ligadas ao sólido se mantêm invariáveis durante o movimento.



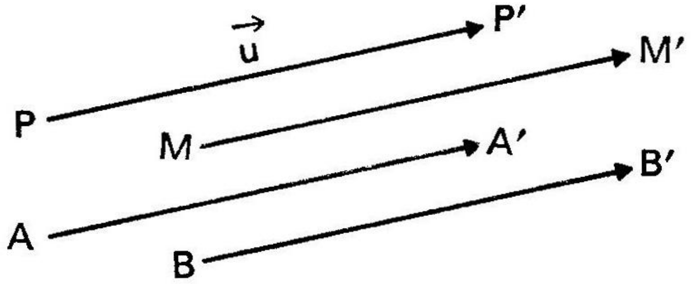
Se, além disso, o movimento é *rectilíneo* e *uniforme*, os pontos materiais do sólido descrevem segmentos paralelos, de igual comprimento e orientados todos no mesmo sentido — isto é, *segmentos orientados equipolentes*.

Assim, o conceito físico de 'movimento de translação' (em que intervém a ideia de 'tempo') sugere o seguinte conceito puramente geométrico, que se reduz a uma correspondência entre pontos:

DEFINIÇÃO. *Dado um vector* $\vec{u}$, *chama-se* translação definida *por* $\vec{u}$ *a aplicação*

$$P \rightsquigarrow P + \vec{u}$$

que faz corresponder a cada ponto P *do espaço* $\mathcal{E}$ *o ponto* $P' = P + \vec{u}$ *do mesmo espaço.*



Desde logo se verifica o seguinte

TEOREMA. *O produto (ou a resultante) de duas translações ainda é uma translação, cujo vector é a soma dos vectores que definem as translações dadas.*

Com efeito, sejam U, V duas translações, definidas respectivamente pelos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$. Então, para todo o $P \in \mathcal{E}$ virá

$$U(P) = P + \vec{u} \quad , \quad V(U(P)) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$$

donde, aplicando à esquerda a definição de 'produto de operadores' e à direita a definição de 'soma de vectores':

$$(V \cdot U)\ (P) = P + (\vec{u} + \vec{v}), \qquad \text{q.e.d}$$

Por outro lado, é de notar o seguinte:

Vectores diferentes definem translações diferentes.

Com efeito, seja $\vec{u} \neq \vec{v}$. Então, pondo $P' = P + \vec{u}$ e $P'' = P + \vec{v}$, tem-se $P'' \neq P$ (porquê?) e portanto as aplicações $P \rightarrow P'$ e $P \rightarrow P''$ assim definidas são distintas.

Posto isto, designemos por $\mathcal{V}$ o *conjunto de todos os vectores do espaço* e por $\mathcal{T}$ o *conjunto das translações do espaço.* Então, do teorema anterior e da nota que se lhe segue, deduz-se o seguinte:

A aplicação $\vec{u} \rightarrow U$, *que associa a cada vector* $\vec{u}$ *a translação definida por* $\vec{u}$ *é um isomorfismo de* $(\mathcal{V}, +)$ *sobre* $(\mathcal{T}, \cdot)$.

E daqui por sua vez resulta, pelo PRINCÍPIO DE ISOMORFIA:

O conjunto das translações é um grupo comutativo a respeito da multiplicação, isomorfo ao módulo dos vectores.

Assim, a linguagem aditiva em termos de vectores pode ser traduzida integralmente na *linguagem multiplicativa* em termos de *translações.* Em particular, ao vector $\vec{0}$ corresponde a *translação* I (aplicação identidade). Por outro lado:

A translação definida por um vector $\vec{u}$ *qualquer é uma aplicação biunívoca do espaço* $\mathcal{E}$ *sobre si mesmo. A sua inversa é definida por* $-\vec{u}$.

EXERCÍCIO — I. Sendo T a translação definida por um vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ e sendo r uma recta com a direcção de $\vec{a}$, determine T(r). (Ver resposta no final do número seguinte.)

13. **Produto de um número real por um vector.** O comprimento dum vector $\vec{u}$ é representado habitualmente pela notação $|\vec{u}|$ e também se lhe chama 'módulo de $\vec{u}$'. Quando se adopta uma unidade de comprimento, é costume identificar o módulo de $\vec{u}$ com o número real que é a sua medida relativamente à unidade adoptada.

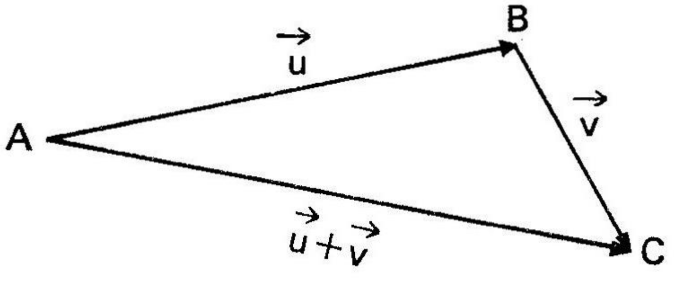
Convém, desde já, registar a seguinte importante PROPRIEDADE DO MÓDULO DA SOMA:

$$(1) \qquad |\vec{u}+\vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}| \quad , \ \forall \, \vec{u}, \vec{v}$$

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, a demonstração reduz-se à da correspondente propriedade para números reais.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, a propriedade (1), como se pode inferir da figura junta, é consequência imediata do seguinte teorema, bem conhecido, de geometria euclidiana:

Qualquer lado dum triângulo é menor que a soma dos outros dois.



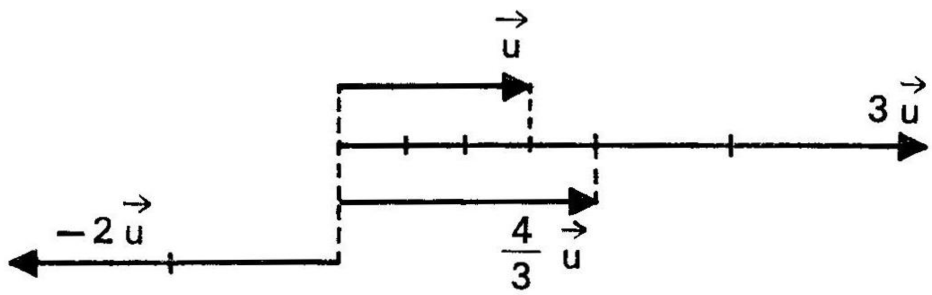
Posto isto, suponhamos dados um número real α e um vector $\vec{u}$:

DEFINIÇÃO. *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *chama-se* produto de α por $\vec{u}$, *o vector cujo comprimento é o produto de* $|\alpha|$ *por* $|\vec{u}|$, *cuja direcção é a direcção de* $\vec{u}$ *e cujo sentido é o sentido de* $\vec{u}$ *ou o sentido contrário, conforme* $\alpha > 0$ *ou* $\alpha < 0$. *Se* $\alpha = 0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$, *chama-se produto de* α *por* $\vec{u}$ *o vector* $\vec{0}$.

O produto de α por $\vec{u}$ representa-se por $\alpha\vec{u}$ ou $\alpha \cdot \vec{u}$. Assim, por definição, tem-se:

$$|\alpha\vec{u}| = |\alpha| . |\vec{u}| \quad , \quad \vec{0} \cdot u = \vec{0} \quad , \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathcal{V}$.



Na figura junta são indicados os produtos dos números

$$3, \quad \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad -2$$

por um vector $\vec{u}$.

Em particular, tem-se:

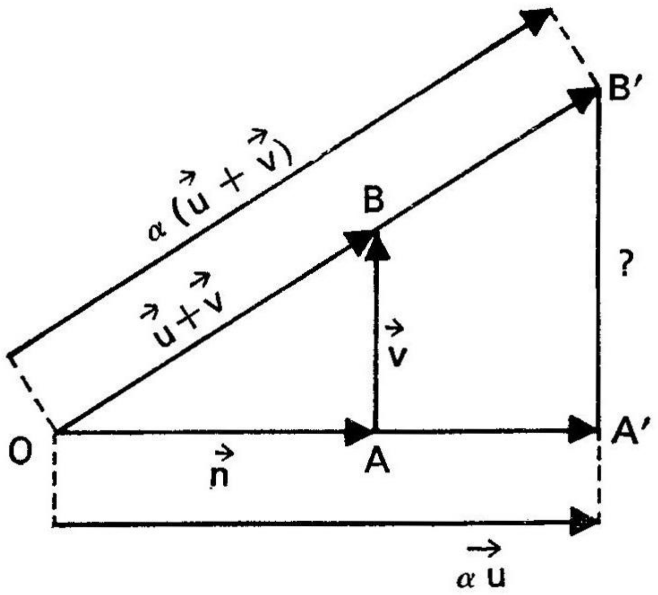
$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \quad , \quad (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u} \quad , \quad \text{para todo o } \vec{u} \in \mathcal{V}.$$

É fácil estabelecer as seguintes propriedades:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & (\alpha + \beta)\vec{u} & = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \\ \text{II.} & \alpha(\vec{u} + \vec{v}) & = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ \text{III.} & \alpha(\beta\, u) & = (\alpha \cdot \beta)\vec{u} \end{array}\right\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

chamadas, respectivamente, *distributividade à esquerda*, *distributividade à direita* e *associatividade*.

Estas são consequências simples da definição, excepto a propriedade II, no caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.



Tomemos, neste caso, um ponto O qualquer do espaço e seja

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \vec{v}$$

donde

$$\overrightarrow{OB} = \vec{u} + \vec{v}$$

Seja ainda

$$(1) \qquad \overrightarrow{OA'} = \alpha\vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB'} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$$

Suponhamos $\alpha > 0$. Então

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|} = \alpha \quad \text{(porquê?)}$$

$$\dot{O}A' = \dot{O}A \quad , \quad \dot{O}B' = \dot{O}B \quad \text{(porquê?)}$$

Logo, aplicando o recíproco do TEOREMA DE THALES, vem

$$A'B' \,//\, AB \quad \text{e} \quad |A'B'| = \alpha |AB|$$

Além disso, $\dot{A}B$ e $\dot{A}'B'$ têm o mesmo sentido (porquê?). Logo

(2) $$\overrightarrow{A'B'} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha \vec{v}$$

Mas $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$. Portanto, atendendo a (1) e (2),

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

A demonstração é análoga no caso em que $\alpha < 0$.
Se $\alpha = 0$, tem-se trivialmente $0(\vec{v} + \vec{v}) = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Assim, em resumo:

Além da operação $+$, definida no conjunto $\mathcal{V}$ *(operação binária interna)*, apresenta-se a operação $\cdot$, que, a cada par ordenado $(\alpha, \vec{u})$, tal que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathcal{V}$, faz corresponder um e um só elemento $\alpha \vec{u}$ de $\mathcal{V}$. A respeito da primeira, $\mathcal{V}$ é um grupo comutativo, portanto um *módulo*. A segunda operação tem as propriedades I-III e ainda a propriedade $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$.

Exprime-se a conjunção de todos estes factos dizendo que $\mathcal{V}$ é um *espaço vectorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$, ou um *espaço vectorial real*. Mas note-se: o terno $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ *não é um anel*, visto que a operação $\cdot$ *não é interna*, quer dizer, não é uma aplicação de $\mathcal{V}^2$ em $\mathcal{V}$, mas sim uma aplicação de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$, tendo-se $\mathbb{R} \not\subset \mathcal{V}$.

Dum modo geral:

Diz-se que um conjunto S de elementos u, v,... quaisquer é um *espaço vectorial sobre um dado corpo* K, sse são definidas duas operações $+$ e $\cdot$ tais que:

1) S é um grupo comutativo a respeito da adição (+).

2) A operação $\cdot$ associa a cada par (a, u) de elementos, *a* de K e *u* de S, um elemento au de S, de tal modo que:

$$(a + b)u = au + bu \quad , \quad a(u + v) = au + av,$$
$$a(bu) = (ab)u \quad e \quad 1 \cdot u = u \quad , \quad \forall a, b \in K; \; u, v \in S$$

Nestas condições, os elementos de S chamam-se *vectores* e os elementos de K chamam-se *escalares*. Veremos adiante exemplos de espaços vectoriais diferentes de $\mathcal{V}$.

EXERCÍCIOS — I. Marque no papel 4 pontos, O, A, B, C, não colineares 3 a 3 (a azul), e trace os lados dum triângulo [ABC] (a azul). Em seguida desenhe a vermelho o triângulo cujos vértices são:

$$A' = O + 3(A - O) \quad , \quad B' = O + 3(B - O) \quad , \quad C' = O + 3(C - O)$$

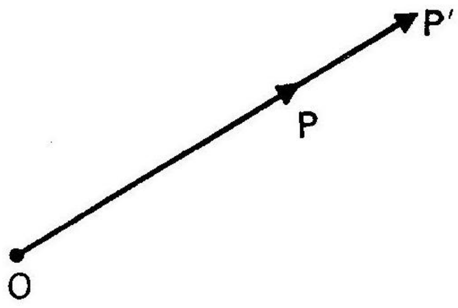
II. Exercício análogo, substituindo 3 por $-5/4$.

RESPOSTA AO EXERCÍCIO DO NÚMERO ANTERIOR:

$$T(r) = r.$$

14. **Homotetias.** Comece por resolver o exercício anterior. Feito isto, suponhamos dados em geral um ponto O e um número real $r \neq 0$. Seja agora P um ponto qualquer do espaço e ponhamos:

$$P' = O + r\,(P - O)$$



Tem-se, pois:

$$\overrightarrow{OP'} = r \cdot \overrightarrow{OP}$$

Se $r > 0$ e $P \neq O$, então P' é o ponto da semi-recta $\dot{O}P$, tal que $|OP'| = r|OP|$.

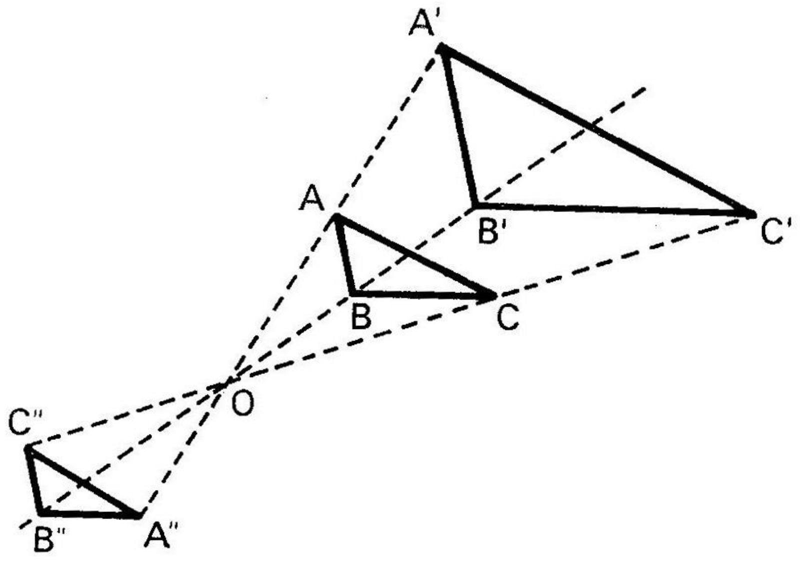
Se $r < 0$ e $P \neq O$, a única diferença é que P' pertence à semi-recta oposta.

Se $P = O$, tem-se $P' = P = O$.

DEFINIÇÃO. *Chama-se* homotetia de centro O e razão r *a aplicação que faz corresponder a cada ponto* P *de* $\mathcal{E}$ *o ponto*

$$P' = O + r\,(P - O)$$

A homotetia chama-se *directa* ou *inversa,* conforme $r > 0$ ou $r < 0$.



Na figura junta apresentam-se os transformados do triângulo [ABC] pelas homotetias de razões 2 e $-2/3$.

Em qualquer caso, uma homotetia é uma *transformação de semelhança:* uma *ampliação* se $|r| > 1$, uma *redução* se $|r| < 1$

e uma *igualdade* se $|r| = 1$. Assim, a homotética duma figura $\mathcal{F}$ é sempre uma figura *semelhante* a $\mathcal{F}$. Em particular, se $r = 1$ a homotetia reduz-se a I e se $r = -1$ a homotetia é a *simetria de centro* O.

Uma máquina de projecção é exemplo intuitivo de um aparelho que efectua uma homotetia sobre a figura que é projectada no alvo, ampliando-a consideravelmente.

A propriedade III enunciada no número anterior mostra-nos imediatamente que:

O produto de duas homotetias de centro O *é ainda uma homotetia de centro* O, *cuja razão é o produto das razões das primeiras.*

E, como duas homotetias de razões r_1 e r_2 distintas são aplicações distintas, segue-se que:

O conjunto das homotetias de centro O *é um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo multiplicativo dos números reais diferentes de zero.*

Como corolário:

A homotetia de centro O *e razão* r *é uma aplicação biunívoca do espaço* $\mathcal{E}$ *sobre si mesmo. A sua inversa é a homotetia de centro* O *e razão* $1/r$.

EXERCÍCIOS:

I. Sendo A e B dois pontos distintos, identifique os conjuntos de pontos P que verificam as seguintes condições:

a) $\exists t \geqslant 0 : P = A + t(B-A)$

b) $\exists t \leqslant 0 : P = A + t(B-A)$

c) $\exists t \in \mathbb{R} : P = A + t(B-A)$

d) $\exists t \in \mathbb{R} : P = A + t(B-A) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

II. Sendo A, B, C três pontos não colineares, identifique os conjuntos de pontos definidos pelas seguintes condições em **P**, pondo $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$:

a) $\exists\, y \in \mathbb{R} : P = A + 3\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

b) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

c) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0 : P = A + x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

d) $\exists\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 : P = A + x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

e) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\,\vec{u} + y\,\vec{v},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

f) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\,\vec{u} + y\,\vec{v},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

g) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\,\vec{u} + y\,\vec{v},\quad x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad x + y \leqslant 1$

NOTA: Para simplificar, substituimos o sinal $\wedge$ por vírgulas. (Ver soluções no final do número seguinte.)

15. **Vectores colineares e vectores complanares.** Como já vimos atrás, diz-se que dois vectores são *colineares*, sse são representáveis por segmentos orientados duma mesma recta r. Também se diz neste caso que são *vectores da recta* r (ou de qualquer outra recta paralela a r).

Consideremos dois vectores $\vec{u}$, $\vec{e}$. Da definição de 'produto dum número real *a* por $\vec{e}$' resulta imediatamente o seguinte:

$$(1) \qquad \vec{u} = a\,\vec{e} \Rightarrow \vec{u} \text{ é colinear com } \vec{e}$$

Por outro lado:

TEOREMA 1. *Se* $\vec{e} \neq \vec{0}$, *então, para todo o vector* $\vec{u}$ *colinear com* $\vec{e}$, *existe um e um só número real* a *tal que* $\vec{u} = a\,\vec{e}$.

A demonstração é bem simples. Se $\vec{u}$, $\vec{e}$ são colineares e $\vec{e} \neq \vec{0}$, o número *a* que satisfaz à referida condição será

$$a = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{e}|}, \quad a = -\frac{|\vec{u}|}{|\vec{e}|} \quad \text{ou } a = 0,$$

conforme $\vec{u}$ tem o sentido de $\vec{e}$, o sentido de $-\vec{e}$ ou é igual a $\vec{0}$.

Portanto, atendendo a (1):

COROLÁRIO. *Se* $\vec{e} \neq \vec{0}$, *a fórmula* $\vec{u} = a\,\vec{e}$ *estabelece uma correspondência biunívoca* $a \leftrightarrow \vec{u}$ *entre os números reais a e os vectores* $\vec{u}$ *colineares com* $\vec{e}$.

Simbolicamente:

$$\vec{u} \text{ é colinear com } \vec{e} \wedge \vec{e} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \exists^1\, a \in \mathbb{R}: \vec{u} = a\,\vec{e}$$

DEFINIÇÃO. *Diz-se que três vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *são* complanares, *sse podem ser representados por segmentos orientados dum mesmo plano* π. *Neste caso também se diz que* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *são* vectores do plano π *(ou de qualquer outro plano paralelo a* π*)* [1].

Consideremos três vectores $\vec{u}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. Das definições de 'soma de dois vectores' e de 'produto de um escalar por um vector', resulta o seguinte:

(2) $\vec{u} = a\,\vec{e} + b\,\vec{f} \Rightarrow \vec{u}$ *é complanar com* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$.

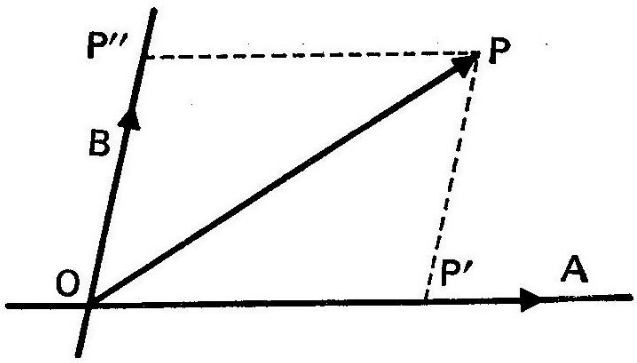
---

[1] É claro que os **vectores dum plano** π não são elementos de π: os elementos do plano π são **pontos**.

Por outro lado:

TEOREMA 2. *Se os vectores* $\vec{e}$, $\vec{f}$ *não são colineares, então, para todo o vector* $\vec{u}$ *complanar com* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$, *existe um e um só par ordenado* (a, b) *de números reais tal que*

$$\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$$



Demonstração:

Suponhamos verificada a hipótese e seja $\vec{e} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{f} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$. Então os pontos O, A, B não são colineares e P ϵ AOB.

Seja P′ a projecção de P sobre OA paralelamente a OB e P″ a projecção de P sobre OB paralelamente a OA. Então $\overrightarrow{OP'}$ é colinear com $\overrightarrow{OA} = \vec{e}$ e $\overrightarrow{OP''}$ é colinear com $\overrightarrow{OB} = \vec{f}$. Portanto, como $\vec{e}$, $\vec{f}$ não são nulos (porquê?), existem, pelo teorema 1, dois números reais a, b tais que

$$\overrightarrow{OP'} = a\vec{e} \quad , \quad \overrightarrow{OP''} = b\vec{f}$$

Além disso $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}$ e $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$. Logo

$$\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$$

Reciprocamente, seja (a′, b′) um par de números reais, tal que

$$\vec{u} = a'\vec{e} + b'\vec{f}$$

Então vem $a\vec{e} + b\vec{f} = a'\vec{e} + b'\vec{f}$, donde

$$(a - a')\vec{e} + (b - b')\vec{f} = \vec{0} \text{ (porquê?)}$$

Se fosse $a \neq a'$, seria $a - a' \neq 0$ e portanto

$$\vec{e} = \frac{b - b'}{a' - a}\vec{f}$$

Deste modo $\vec{e}$ seria colinear com $\vec{f}$, o que é contra a hipótese. Analogamente se prova que não pode ser $b \neq b'$.

Logo tem-se necessariamente $a = a'$ e $b = b'$, o que termina a demonstração.

Dum modo geral, chama-se *combinação linear de dois vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ toda a expressão da forma $a\vec{u} + b\vec{v}$, em que a, b são números reais *(coeficientes da combinação linear)*. Posto isto, o teorema 2 pode assim enunciar-se:

'Se $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$ *não são colineares, todo o vector* $\vec{u}$ *complanar com* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$ *pode exprimir-se, e de um só modo, como combinação linear de* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$.

Deste teorema deduz-se, atendendo a (2):

COROLÁRIO. *Se* $\vec{e}$, $\vec{f}$ *são vectores não colineares dum plano* π, *a fórmula* $\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$ *define uma correspondência biunívoca* $\vec{u} \leftrightarrow (a, b)$ *entre os vectores* $\vec{u}$ *do plano* π *e os pares* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Diz-se então que o par $(\vec{e}, \vec{f})$ é uma base do conjunto dos vectores do plano, e que os números a, b são as *componentes* do vector $\vec{u}$ nessa base: respectivamente a *1.ª componente* e a *2.ª componente*.

Consideremos, agora, dois vectores do plano π:

$$(3) \qquad \vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f} \quad , \quad \vec{v} = c\vec{e} + d\vec{f}$$

Então

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + c)\vec{e} + (b + d)\vec{f} \qquad \text{(porquê?)}$$

Assim, a adição de dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *traduz-se pela adição ordenada das componentes de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$. Simbolicamente:

$$\vec{u} \hookrightarrow (a, b) \wedge \vec{v} \hookrightarrow (c, d) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \hookrightarrow (a + c, b + d)$$

Seja agora r um número real qualquer. Então de (3) vem

$$r\vec{u} = (ra)\vec{e} + (rb)\vec{f} \qquad \text{(porquê?)}$$

Assim

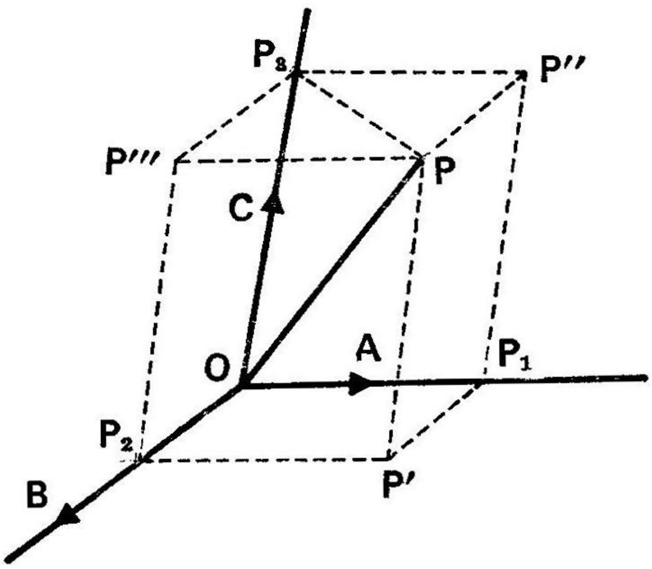
$$\vec{u} \hookrightarrow (a, b) \Rightarrow r\vec{u} \hookrightarrow (ra, rb) \quad , \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

DEFINIÇÃO. *Diz-se que um vector* $\vec{u}$ *é* unitário *sse* $|\vec{u}|$ *é a unidade de comprimento. Diz-se que uma base* $(\vec{u}, \vec{v})$ *é* ortonormal, *sse os vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *são unitários e perpendiculares entre si.*

Os resultados anteriores podem estender-se a vectores do espaço.

TEOREMA 3. *Se* $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ *são três vectores não complanares, então, para todo o vector* $\vec{u}$ *do espaço, existe um e um só terno* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$(4) \qquad \vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f} + c\vec{g}$$



Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor, apresentando, para sugestão, a figura junta em que supomos $\overrightarrow{OA} = \vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{f}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{g}$ e $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$.

Por conseguinte:

Se $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ *não são complanares, a fórmula* (4) *estabelece uma correspondência biunívoca* $\vec{u} \hookrightarrow (a, b, c)$ *entre os vectores do espaço e os elementos de* $\mathbb{R}^3$.

Diz-se então que o terno ordenado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma *base* do espaço vectorial $\mathcal{V}$ e que os números a, b, c são os *componentes* de $\vec{u}$ nesta base. Além disso:

A adição de vectores traduz-se na adição ordenada dos componentes e analogamente para a multiplicação dum número real por um vector.

EXERCÍCIOS:

I. Considere os vectores representados como se segue, relativamente a uma base $(\vec{e}, \vec{f})$ do plano:

$\vec{u} \hookrightarrow (3, -5)$, $\vec{v} \hookrightarrow (-1, 5/3)$, $\vec{w} \hookrightarrow (0,3)$, $\vec{0} \hookrightarrow (0,0)$

a) Indique, entre estes, os pares de vectores colineares e indique um par ordenado que possa ser tomado para nova base.

b) Determine as componentes (x, y) e (x′, y′) de $\vec{e}$ e $\vec{f}$ na nova base. [Sugestão: comece por achar as componentes de $\vec{e}$ e $\vec{f}$ na base $(\vec{e}, \vec{f})$].

II. Considere os vectores representados pelos ternos ordenados

$$(6, 2, -1) \quad , \quad (-9, -3, 3/2) \quad , \quad (1, 0, -1) \quad , \quad (0, 2, -1)$$

relativamente a uma base $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ e designe-os respectivamente por $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$.

a) Exprima as componentes de $\vec{u} = x\,\vec{p} + y\,\vec{r}$ como funções de x, y e determine-as em seguida para $x = 1/2$, $y = 3$.

b) Indique entre os vectores dados os pares de vectores colineares, os ternos de vectores complanares e um terno ordenado que possa ser tomado para nova base. [Sugestão: para saber se três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são complanares, considere por exemplo a fórmula $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$, traduza-a num sistema de três equações lineares em x, y utilizando as componentes dos vectores e veja se essas equações são compatíveis].

(Ver soluções no final do n.º 15.)

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. a) $\dot{A}B$; b) semi-recta $\dot{A}C$ oposta a $\dot{A}B$; c) AB; d) $\overrightarrow{AB}$.
II. a) recta que passa por $A+3\vec{u}$ e é paralela a $\vec{v}$; b) ABC; c) $\overrightarrow{ABC}$; d) $B\hat{A}C$; e) faixa entre duas paralelas; f) paralelogramo [ABCD], com $D = A + \vec{u} + \vec{v}$; g) triângulo [ABC].

NOTA. Os factos anteriores sugerem as seguintes definições em $\mathbb{R}$ (sendo n um número natural qualquer):

1) Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

2) Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Por exemplo, com $n = 4$:

$$(2, 0, -1, 1/2) + (0, 2, 1, -1/2) = (2, 2, 0, 0)$$
$$4 \, . \, (2, 0, -1, 1/2) = (8, 0, -4, 2)$$

Posto isto, é fácil ver que $\mathbb{R}^n$ é *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$, relativamente às operações definidas (cf. n.° 13, final).

É ainda de notar que *o conjunto dos vectores dum plano ou o conjunto dos vectores duma recta são espaços vectoriais, relativamente às operações definidas de 'soma' e de 'produto por um número real'*. Dizem-se *subespaços vectoriais de* $\mathcal{V}$.

16. **Referenciais cartesianos em forma vectorial.** Consideremos um ponto O dum plano π e dois vectores $\vec{e}, \vec{f}$ não colineares desse plano. Então é fácil ver que:

Para todo o ponto P *de* π *existe um e um só par* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\text{(1)} \qquad P = O + x\vec{e} + y\vec{f}$$

Basta notar que $P - O$ é complanar com $\vec{e}, \vec{f}$ e aplicar o teorema 2 do número anterior.

Por conseguinte:

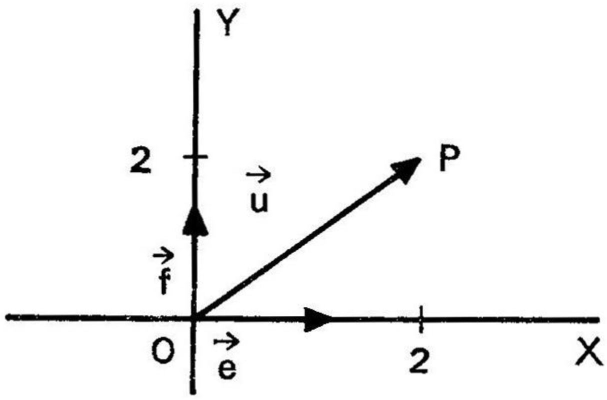
A fórmula (1) *estabelece uma correspondência biunívoca* $P \rightarrow (x, y)$ *entre os pontos* P *de* π *e os pares* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Diz-se então que o terno ordenado $(O, \vec{e}, \vec{f})$ é um *referencial cartesiano* do plano π e que os números x, y são as *coordenadas* de P nesse referencial: respectivamente a 1.ª *coordenada* (ou *abcissa*) e a 2.ª *coordenada* (ou *ordenada*).

Em vez do terno $(O, \vec{e}, \vec{f})$ poderíamos utilizar o terno de pontos (O, A, B) tal que $\overrightarrow{OA} = \vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{f}$. Então a fórmula (2) assume o aspecto:

$$P = O + x(A - O) + y(B - O)$$

O referencial $(O, \vec{e}, \vec{f})$ diz-se *ortonormal*, sse os vectores $\vec{e}, \vec{f}$ são unitários e perpendiculares entre si. Desde logo se vê que este conceito equivale ao de *'referencial cartesiano ortogonal e monométrico'* a que nos temos referido em geometria analítica: os eixos coordenados são agora as rectas que passam por O e têm a direcção e o sentido, respectivamente, de $\vec{e}$ e de $\vec{f}$; a unidade de comprimento é $|\vec{e}| = |\vec{f}|$.



Importa ainda observar o seguinte:

Uma vez adoptado um ponto O do plano para *origem* (ou *ponto* de referência), a fórmula $\vec{u} = P - O$ estabelece uma correspondência biunívoca $P \leftrightarrow \vec{u}$ entre os pontos P e os vectores $\vec{u}$ do plano. Se além disso for dada uma base $(\vec{e}, \vec{f})$, as *coordenadas* de P coincidem, respectivamente, com as *componentes* do vector $\vec{u}$.

Mas é óbvio que, mudando O, muda o vector $\vec{u}$ associado ao ponto P – chamado *vector de posição* de P (relativamente a O).

As considerações deste número estendem-se obviamente ao espaço tridimensional $\mathcal{E}$.

EXERCÍCIOS:

I. Sejam A e $\vec{u}$, respectivamente, um ponto e um vector do plano, tais que

$$A \hookrightarrow (-1, 3) \quad , \quad \vec{u} \hookrightarrow (2, -5)$$

num referencial cartesiano. a) Determine as coordenadas dos pontos $M = A - 2\vec{u}$, $N = A + \frac{1}{2}\vec{u}$ e as componentes do vector $\overrightarrow{MN}$. b) Ache a equação cartesiana da recta de *equação vectorial* $P = A + t\,\vec{u}$ [Sugestão: $P \hookrightarrow (x, y)$, $x = \ldots$, $y = \ldots$]

II. Dados num referencial cartesiano os pontos

$$A \hookrightarrow (0, 0) \quad , \quad B \hookrightarrow (1, 2) \quad , \quad C \hookrightarrow (-2\ 0) \quad , \quad D \hookrightarrow (-4, 2)$$

verifique quais das proposições são verdadeiras: AB//CD, AC//BD.

III. Considere no espaço, em relação a um referencial cartesiano:

$$A \hookrightarrow (0, 0, 0) \quad , \quad B \hookrightarrow (-1, 2, 0) \quad , \quad C \hookrightarrow (2, 3, -1), \quad D \hookrightarrow (0, -1, 1)$$

a) Verifique se $D \in ABC$, averiguando se $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ são complanares.

b) Escreva a equação cartesiana do plano de *equação vectorial* $P = A + s(B - A) + t(C - A)$.

(Sugestão: elimine *s* e *t* entre as três *equações paramétricas* a que esta dá lugar, passando às coordenadas.)

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. a) $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$; b) $\vec{e} = x\vec{u} + y\vec{w}$, $\vec{f} = x'\vec{u} + y'\vec{w}$, donde $x = 1/3$, $y = 5/9$, $x' = 0$, $y' = 1/3$.

II. a) $6x + y$, $2x$, $-x - y$; b) $(\vec{p}, \vec{q})$, $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{s})$.

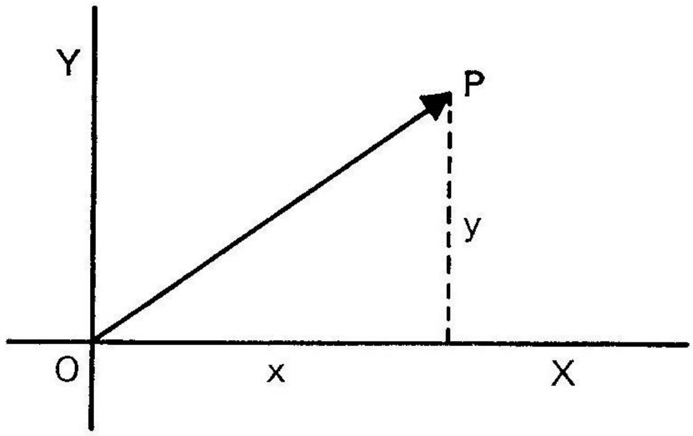
CAPÍTULO II

NÚMEROS COMPLEXOS EM FORMA TRIGONOMÉTRICA

1. **Representação geométrica dos números complexos.** Consideremos um número complexo

$$z = x + iy \quad (\text{com } x,\ y \in \mathbb{R})$$

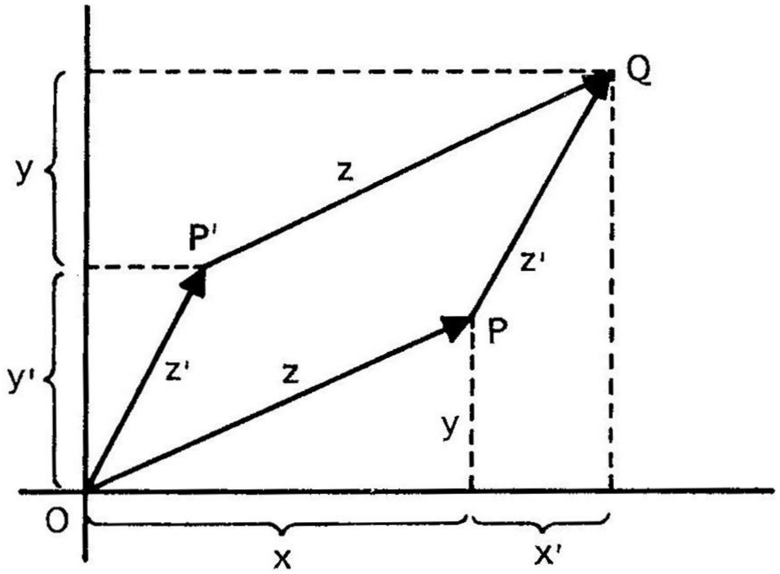
e suponhamos fixado num plano um referencial cartesiano ortogonal. Então, como é sabido, o número z é representado pelo ponto P do plano, cuja abcissa é x e cuja ordenada é y.



Ora, segundo a observação final do número anterior, o número z pode igualmente ser representado pelo vector do plano, cujas componentes são, ordenadamente, x e y.

Vamos desde já reconhecer uma das vantagens desta representação. Consideremos um segundo número complexo

$$z' = x' + iy' \text{ (com } x' \; y' \in \mathbb{R})$$



Então, como é sabido, $z+z'=(x+x')+i(y+y')$, isto é:

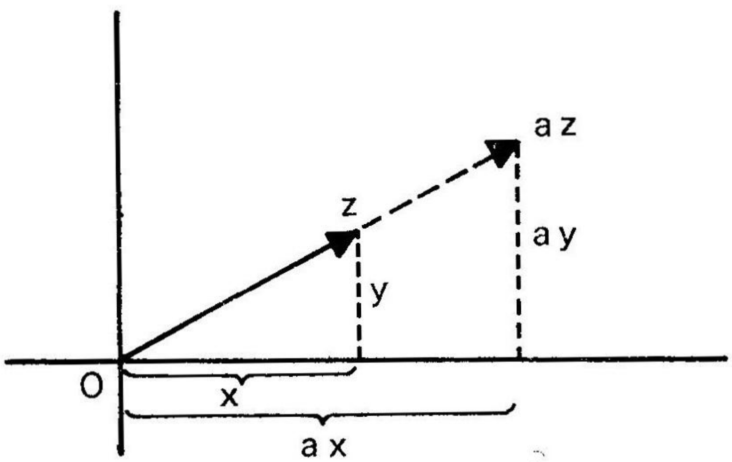
$$z \rightsquigarrow (x, y) \wedge z' \rightsquigarrow (x', y') \Rightarrow z + z' \rightsquigarrow (x + x', y + y')$$

donde, atendendo ao que foi estabelecido no Cap. I, n.º 15:

I. *O vector correspondente à soma de dois números complexos é a soma dos vectores correspondentes a esses números.*

Visto que a correspondência estabelecida entre números complexos e vectores do plano é bijectiva, podemos afirmar:

O grupo aditivo dos números complexos é isomorfo ao grupo aditivo dos vectores do plano.



Por outro lado, se *a* é um número real, tem-se:

$$az = (ax) + i(ay), \text{ isto é:}$$

$$z \rightarrow (x, y) \Rightarrow az \rightarrow (ax, ay)$$

donde:

II. *O vector correspondente ao produto dum número real a por um número complexo z é o produto de a pelo vector correspondente a z.*

A conjunção deste facto com o anterior exprime-se dizendo:

O conjunto $\mathbb{C}$ *dos números complexos é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *isomorfo ao espaço vectorial constituído pelos vectores do plano.*

Mas note-se que $\mathbb{C}$ é um corpo, onde é portanto definido o produto de dois elementos *quaisquer* de $\mathbb{C}$, como sendo ainda um elemento de $\mathbb{C}$ (operação interna), o que já não sucede com os vectores do plano no sentido usual.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

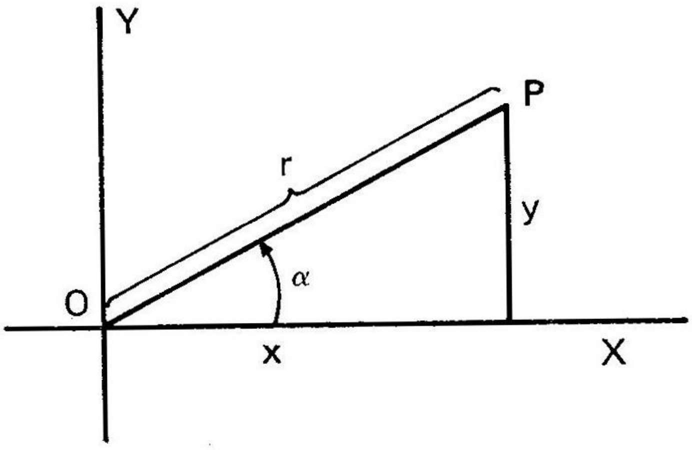
I. a) $(-5, 13)$, $(0, 1/2)$, $(5, -25/2)$;
   b) $5(x + 1) + 2(y - 3) = 0$.

II. AC//BD. III. a) $D \notin ABC$; b) $2x+y+7z=0$.

2. **Representação trigonométrica dos números complexos.** Consideremos de novo o número complexo

$$z = x + iy$$

representado pelo ponto P do plano cartesiano.



Chama-se *módulo do número* z, e representa-se *por* $|z|$, o módulo do vector $\overrightarrow{OP}$ correspondente, ou seja a distância do ponto P, representativo de z, ao ponto O, origem dos eixos [1]. Na figura, o módulo de z é designado por r. Será, pois

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Imediatamente se reconhece que

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

O que se disse atrás sobre o *módulo da soma de dois vectores permite também reconhecer que*

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad , \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}}$$

Por outro lado, supondo $z \neq 0$, chama-se *argumento de* z a qualquer medida α, em radianos, do ângulo $X\hat{O}P$, cujo primeiro lado é o semi-eixo positivo $\dot{O}X$ e cujo segundo lado é a semi--recta $\dot{O}P$. Desde logo se vê que:

---

[1] Como já sabemos, em geometria analítica identificam-se os comprimentos (ou distâncias) com os números reais que são as suas medidas.

Um número complexo $z \neq 0$ tem uma infinidade de argumentos, que diferem todos entre si por múltiplos inteiros de 2π. Chama-se *argumento principal* de z o argumento α de z tal que

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi$$

(Se $z = 0$, diz-se que z tem *argumento arbitrário*).

Posto isto, deduz-se imediatamente da figura anterior que

$$r = r \cos \alpha \quad , \quad b = r \operatorname{sen} \alpha$$

e, como $z = x + iy$, tem-se

$$(1) \qquad \boxed{z = r\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}$$

A expressão $r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ é chamada *forma trigonométrica* do número complexo z, enquanto a expressão $x + iy$ é chamada *forma algébrica de* z.

Para comodidade de escrita, usaremos daqui por diante o símbolo $E(\alpha)$ como abreviatura da expressão $\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$. Assim, a fórmula (1) passa a escrever-se

$$\boxed{z = r\,E(\alpha)}$$

Em particular, se $|z| = 1$ (isto é, se $r = 1$), tem-se $z = E(\alpha)$. Deste modo, a expressão geral dos números complexos de módulo 1 será

$$E(\alpha) \equiv \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

Recordemos o *critério de igualdade de dois números complexos na forma algébrica:*

$$x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow x = x' \wedge y = y' \quad (x,\ y,\ x',\ y' \in \mathbb{R})$$

Consideremos, agora, dois números complexos *não nulos* na forma trigonométrica

$$z = r\ E(\alpha) \quad , \quad z' = r'\ E(\alpha')$$

É óbvio que

(2) $$z = z' \Rightarrow r = r'$$

Mas, como vimos há pouco, um número complexo tem uma infinidade de argumentos e não podemos afirmar: $z = z' \Rightarrow \alpha = \alpha'$, mas apenas:

(3) $$z = z' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \alpha - \alpha' = 2n\pi \qquad (\text{se } z \neq 0)$$

Exprime-se esta última condição dizendo que α é *congruente com* α' *módulo* 2π e escrevendo

$$\alpha \equiv \alpha' \ (\text{mod } 2\pi)$$

Reciprocamente, é óbvio que a conjunção de (2) com (3) implica $z = z'$. Assim, o *critério de igualdade de dois números complexos não nulos na forma trigonométrica* será:

$$r\ E(\alpha) = r'\ E(\alpha') \Leftrightarrow r = r' \wedge \alpha \equiv \alpha' \ (\text{mod } 2\pi)$$

Em linguagem comum:

Dois números complexos não nulos são iguais, se e só se têm módulos iguais e os seus argumentos diferem por um múltiplo inteiro de 2π.

EXERCÍCIOS:

I. Represente graficamente os seguintes números complexos

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad 5, \quad -3, \quad 2i, \quad -\frac{2}{3}i,$$

$$1+i, \quad -i, \quad -1+i, \quad 1-i, \quad \sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

e ache as respectivas formas trigonométricas.

II. Represente sob forma algébrica os seguintes números complexos:

$$\cos\frac{\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}, \quad 2\,E\left(\frac{2}{3}\pi\right), \quad 4\,E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad E\left(\frac{3}{4}\pi\right), \quad E\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

NOTA. Também se pode chamar argumento dum número complexo ao próprio ângulo cuja medida é dada em radianos e que pode exprimir-se noutras unidades. Por exemplo, o primeiro número do exemplo anterior poderá também escrever-se:

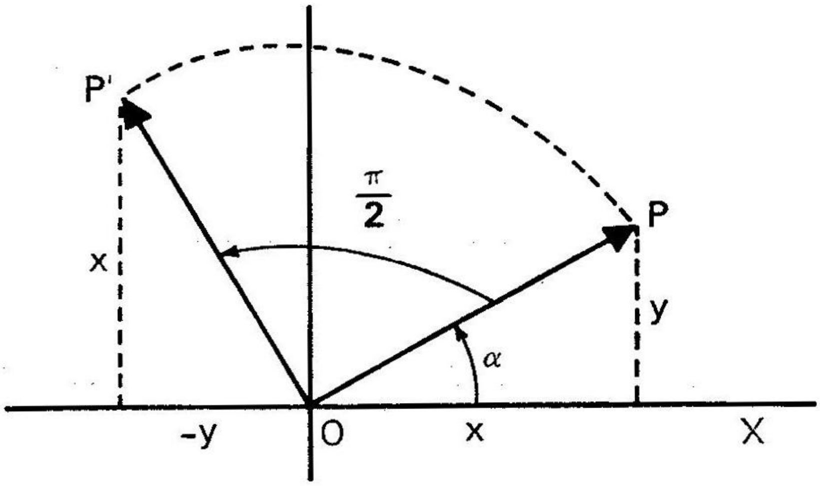
$$\cos 60^\circ + i\ \mathrm{sen}\ 60^\circ,$$

mas é claro que, neste caso, se trata de *funções trigonométricas de ângulo (ou arco)* e não de funções trigonométricas de números reais.

3. **Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos.** Comecemos pelo seguinte caso particular:

Produto do número i *por um número complexo qualquer,*

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$. Temos:

$$iz = -y + ix$$

$$|iz| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Seja $r = |z|$, α o argumento principal de z e α' o argumento principal de iz. Virá, então:

$$\cos \alpha' = -\frac{y}{r} = -\operatorname{sen} \alpha \quad , \quad \operatorname{sen} \alpha' = \frac{x}{r} = \cos \alpha,$$

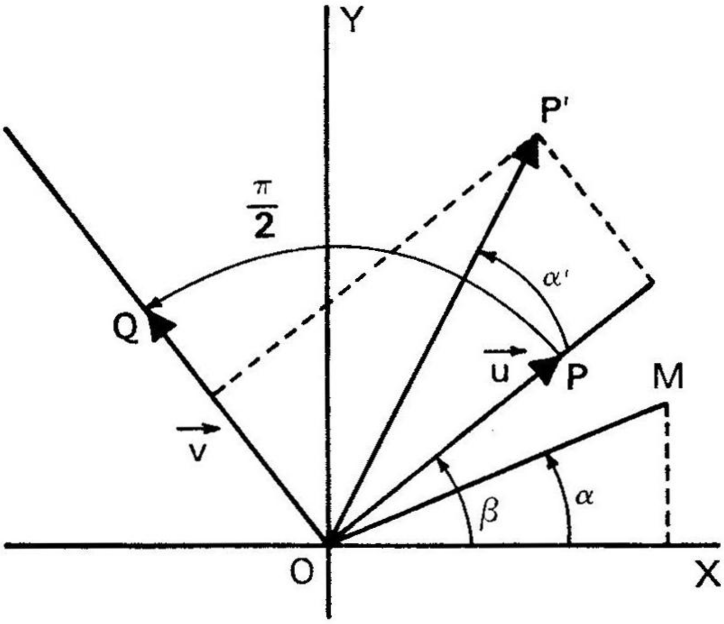
donde

$$\alpha' \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Por conseguinte: *a operação* $z \rightarrow iz$ (*multiplicação por* i) *traduz-se geometricamente pela rotação de* 90° *no sentido positivo.* (No caso da figura o sentido positivo é, como habitualmente, o sentido anti-horário.)

Podemos, agora, passar ao caso geral:

Produto de um número complexo z = x + iy *por outro número complexo,* w = u + iv (∀ x, y, u, v ∈ ℝ).



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Suponhamos que se tem, na forma trigonométrica:

(1) $$z = r\,E(\alpha) \quad , \quad w = \rho E(\beta)$$

(α, β argumentos principais)

Sejam M, P, P', Q os pontos que representam z, w, zw, iw, respectivamente, e ponhamos

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$

Então $\vec{v}$ resulta de $\vec{u}$ por uma rotação de 90° no sentido positivo. Ora

$$zw = (x + iy)\ w = xw + y(iw) \qquad \text{(porquê?)}$$

Logo, segundo o estabelecido no n.º 1:

(2) $$\overrightarrow{OP'} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$$

Além disso

(3) $$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}|$$

Consideremos agora o referencial cujo 1.º eixo é a recta OP orientada de O para P, cujo 2.º eixo é a recta OQ orientada de O para Q e cuja unidade de comprimento é igual à do primeiro referencial. Então de (2) e (3) resulta que a abcissa e a ordenada de P′ no novo referencial são, respectivamente,

$$x' = x\rho \quad , \quad y' = y\rho$$

donde $$|OP'| = \sqrt{(x\rho)^2 + (y\rho)^2} = \rho\sqrt{x^2 + y^2} = \rho\, r$$

ou seja $$|zw| = r\rho$$

Por outro lado, *se for* α' *a medida principal do ângulo orientado* PÔP′, tem-se

$$\cos\alpha' = \frac{x\rho}{r\rho} = \frac{x}{r} = \cos\alpha \quad , \quad \operatorname{sen}\alpha' = \frac{y\rho}{r\rho} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha$$

donde

$$\alpha' = \alpha$$

Ora

(4) XÔP′ = XÔP + PÔP′ (ângulos orientados)

Como o segundo referencial está orientado no mesmo sentido que o primeiro (sentido anti-horário na figura), deduz-se de (4) que *um dos argumentos de* zw – medida do ângulo orientado XÔP′ – será o número

$$\beta + \alpha' = \alpha + \beta$$

Assim, em conclusão:

$$zw = (r\,\rho)\ E\ (\alpha + \beta) \tag{5}$$

Comparando (1) e (5), chegamos à seguinte

REGRA. *O produto de dois números complexos tem por módulo o produto dos módulos dos factores e por argumento (entre outros) a soma dos argumentos dos factores.*

É claro que esta regra também é válida se um dos factores é 0 (argumento arbitrário).

Em particular, mantém-se a PROPRIEDADE DO MÓDULO DO PRODUTO:

$$\boxed{|zw| = |z| \cdot |w| \quad , \quad \forall z, w \in \mathbb{C}}$$

que já se verificava em $\mathbb{R}$, tal como a PROPRIEDADE DO MÓDULO DA SOMA (n.º 2).

Geometricamente, vimos que se passa do vector $\overrightarrow{OP}$, representativo de w, para o vector $\overrightarrow{OP'}$, representativo de zw, efectuando a rotação de amplitude α e em seguida a homotetia de razão r (ou vice-versa). Assim:

A aplicação $w \rightarrow zw$ *(multiplicação pelo número complexo* z*) traduz-se por uma transformação de semelhança: produto da rotação de amplitude* α *(argumento de* z*) pela homotetia de razão* r *(módulo de* z*).*

EXERCÍCIOS — I. Desenhe o triângulo cujos vértices são as imagens dos números

$$1 \quad , \quad 2 + 2i \quad , \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, em seguida, o triângulo cujos vértices correspondem aos produtos destes números por $-\sqrt{2}(1 + i)$ (dados a azul e resultados a vermelho).

II. Mostre que os números complexos z tais que $|z| = 1$ formam um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo multiplicativo das rotações do plano e ao grupo aditivo das classes de congruência de números reais para o módulo 2π.

III. Mostre que os conjuntos $\{1, i, -1, -i\}$ e

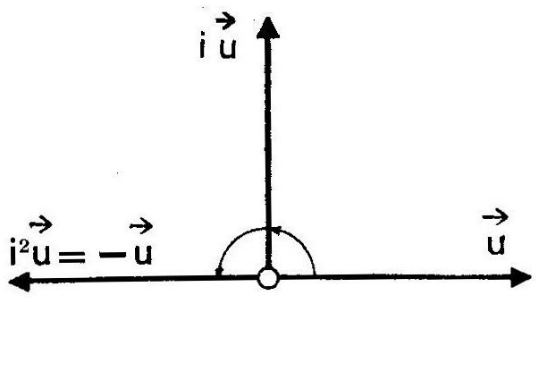
$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

são subgrupos multiplicativos do grupo anterior.

(Sugestão: nestes três exercícios convém usar a forma trigonométrica.)

NOTA IMPORTANTE. Os factos anteriores mostram que os números complexos podem ser interpretados como *operadores sobre vectores do plano.* Nesta ordem de ideias, o símbolo $E(\alpha)$ representa o operador *rotação de amplitude* α. Em particular, o número i é a rotação de 90° (no sentido positivo) e portanto o número $i^2 = i \cdot i$ é a rotação de 180°:

$$i^2\vec{u} = i(i\,\vec{u}) = -\vec{u} = (-1)\,\vec{u}$$



Assim obtemos uma interpretação intuitiva da fórmula:

$$i^2 = -1$$

4. **Divisão de números complexos na forma trigonométrica.** Como já é sabido, dados dois números complexos z_1, z_2, sendo $z_2 \neq 0$ existe um e um só número complexo ζ tal que

$$(1) \qquad z_2 \zeta = z_1$$

Este número ζ é o quociente de z_1 por z_2 ou seja $\zeta = z_1/z_2$. Ponhamos

$$z_1 = r_1 \, E(\alpha_1) \quad , \quad z_2 = r_2 \, E(\alpha_2) \quad , \quad \zeta = \rho \, E(\varphi)$$

Então, segundo a regra da multiplicação, (1) equivalia

$$(1') \qquad (r_2 \rho) \; E(\alpha_2 + \varphi) = r_1 \; E(\alpha_1)$$

donde, aplicando o critério de igualdade (n.° 2):

$$(2) \qquad r_2 \rho = r_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 + \varphi \equiv \alpha_1 \pmod{2\pi}$$

ou seja

$$\rho = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{e} \quad \varphi \equiv \alpha_1 - \alpha_2 \pmod{2\pi}$$

Por conseguinte:

$$\frac{r_1 \, E(\alpha_1)}{r_2 \, E(\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} \, E(\alpha_1 - \alpha_2)$$

isto é:

REGRA. *O quociente de z_1 por z_2 (supondo $z_2 \neq 0$) tem por módulo o quociente de $|z_1|$ por $|z_2|$ e por argumento a diferença entre um argumento de z_1 e um argumento de z_2.*

5. **Potências de números complexos na forma trigonométrica.** A regra da multiplicação estabelecida no n.° 3 estende-se imediatamente a produtos de mais de dois factores. Assim, se forem dados *n* números

$$z_1 = r_1 \, E(\alpha_1) \quad , \quad z_2 = r_2 \, E(\alpha_2) \quad , \quad \dots \quad , \quad z_n = r_n \, E(\alpha_n)$$

tem-se, manifestamente:

$$z_1 \, z_2 \dots z_n = (r_1 \, r_2 \dots r_n) \; E(\alpha_1 \;\; \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

ou seja

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k \right) E \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right)$$

Em particular, os factores podem ser todos iguais:

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n$$

Designemo-los por z e seja $z = r \, E(\alpha)$. Então virá

$$\boxed{z^n = [r \; E(\alpha)]^n = r^n \; E(n \; \alpha)}$$

6. **Radiciação no corpo complexo.** Suponhamos que é *dado* um número complexo $z \neq 0$ e que se *procura* ζ tal que

(1) $$\zeta^n = z$$

Ponhamos

$$z = r \; E(\alpha) \quad , \quad \zeta = \rho \, E(\varphi)$$

Então, segundo a regra anterior, tem-se:

$$\zeta^n = z \Leftrightarrow \rho^n \, E(n \, \varphi) = r \, E(\alpha),$$

donde, pelo critério de igualdade,

$$\zeta^n = z \Longleftrightarrow \rho^n = r \wedge n\,\varphi \equiv \alpha \pmod{2\,\pi}$$

Ora

$$\rho^n = r \Longleftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \quad (\text{em } \mathbb{R}^+)$$

Por outro lado:

$$n\,\varphi = \alpha \pmod{2\,\pi} \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon\ n\,\varphi = \alpha + 2\,k\,\pi$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon\ \varphi = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\,\pi}{n}$$

Por conseguinte, as soluções da equação (1) em ζ serão *todos* os números dados pela fórmula

$$(2) \qquad \zeta = \sqrt[n]{r}\; E\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\,\pi}{n}\right), \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Os valores possíveis de k serão pois 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, $\pm$ 3,... *Mas os valores assim obtidos para ζ não são todos distintos.* Com efeito, consideremos dois inteiros relativos k_1, k_2 e seja

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{n} + k_1 \cdot \frac{2\,\pi}{n}, \quad \varphi_2 = \frac{\alpha}{n} + k_2 \cdot \frac{2\,\pi}{n}$$

Então

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k_1 - k_2}{n} \cdot 2\,\pi$$

Isto mostra que $\varphi_1 - \varphi_2$ *é múltiplo inteiro de* $2\,\pi$, sse $k_1 - k_2$ *é múltiplo inteiro de* n. Quer dizer:

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\,\pi} \Longleftrightarrow k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$$

Por conseguinte, se forem ζ_1 e ζ_2 os valores de ζ correspondentes a k_1 e k_2 segundo (2), será

$$\zeta_1 = \zeta_2 \Leftrightarrow k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$$

Ora, qualquer inteiro relativo k *é congruente com um dos números*

$$0, 1, \ldots, n-1 \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

e estes não congruentes entre si (módulo n).

Logo:

A equação (1) *tem exactamente* n *soluções. Essas soluções (chamadas 'raízes de índice* n *de* z*') são dadas pela fórmula*

$$\zeta = \sqrt[n]{r}\ E\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

atribuindo a k *todos os valores inteiros de* 0 *a* n − 1.

Se z = 0, é claro que z tem uma única raiz de índice n, que é 0.

Fica assim confirmado o que já tínhamos anunciado no 6.° ano, quanto a existência e número de raízes de índice n de um número complexo.

EXERCÍCIOS:

I. Determine as raízes quadradas de i, primeiro na forma trigonométrica e depois na forma algébrica, e represente-as graficamente.

II. Idem para as raízes cúbicas de − 8.

III. Idem para as raízes sextas e raízes oitavas de 1.

IV. Determine as raízes cúbicas de $4(1 + i\sqrt{3})$, primeiro na forma trigonométrica e depois na forma algébrica, com a aproximação que lhe permitirem as tábuas de funções naturais. Faça a sua representação gráfica.

V. Idem para as raízes cúbicas de $\dfrac{3+4i}{5}$.

7. **Fórmulas trigonométricas de adição de ângulos.** Sejam α e β as medidas em radianos de dois ângulos quaisquer.

Tem-se então, como vimos,

$$(1) \qquad E(\alpha + \beta) = E(\alpha) \,.\, E(\beta)$$

Ora

$$E(\alpha) = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad E(\beta) = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$$

e

$$E(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

Ponhamos

$$(2) \qquad x = \cos\alpha \quad , \quad y = \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad x' = \cos\beta \quad , \quad y' = \operatorname{sen}\beta$$

Ora $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\, i$. Então de (1) vem

$$\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\, i$$

donde

$$\cos(\alpha + \beta) = xx' - yy' \quad , \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = xy' + x'y$$

ou seja, atendendo a (2)

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \end{cases}$$

Estas são as *fórmulas do seno e do coseno da soma.* Mudando β em $-\beta$, destas se deduzem facilmente as *fórmulas do seno e do coseno da diferença:*

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \end{cases}$$

lembrando que $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$.

Por outro lado, tem-se

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha}$$

Daqui, dividindo ambos os termos da última fracção por $\cos\alpha \cos\beta$, deduz-se facilmente a *fórmula da tangente da soma:*

$$(2) \qquad \operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \, . \operatorname{tang}\beta}$$

Em particular pode ser $\alpha = \beta$ e portanto $\alpha + \beta = 2\alpha$. Assim, de (2) deduzem-se as fórmulas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha,$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha},$$

que, como as anteriores, convém decorar.

É claro que, em vez das letras α, β, podemos usar nestas fórmulas outras quaisquer, visto que se trata de *variáveis aparentes* (submetidas ao quantificador universal).

8. **Múltiplos de ângulos e potências de senos e cosenos.** Podemos obter fórmulas gerais para sen n α e cos n α, com n $\in$ IN, utilizando a identidade

$$E(n\,\alpha) = [E(\alpha)]^n$$

e a fórmula do binómio aplicada ao desenvolvimento

$$[E(\alpha)]^n = (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n$$

Por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned} E(3\,\alpha) &= (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + 3\,i^2\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha + i^3\,\mathrm{sen}^3\alpha \end{aligned}$$

donde, lembrando que $E(3\,x) = \cos 3\,\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\,\alpha$:

$$\begin{aligned} \cos 3\,\alpha &= \cos^3\alpha - 3\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\cos\alpha \\ \mathrm{sen}\,3\,\alpha &= 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha \end{aligned}$$

Em muitos problemas, o que interessa não é exprimir os senos e os cosenos de múltiplos de ângulos a partir de potências de senos e cosenos — mas exactamente o inverso. Para isso notemos que

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} E(x) = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x \\ E(-x) = \cos x - i\,\mathrm{sen}\,x \end{cases}$$

visto que $\cos(-x) = \cos x$, $\mathrm{sen}(-x) = -\,\mathrm{sen}\,x$. Daqui, por adição e por subtracção ordenada, resultam as fórmulas:

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{E(x) + E(-x)}{2} \\[2ex] \mathrm{sen}\,x = \dfrac{E(x) - E(-x)}{2\,i} \end{cases}$$

a que podemos chamar FÓRMULAS DE EULER, pelas razões que serão indicadas adiante.

Destas se deduz, por exemplo:

I) $$\cos^2 x = \frac{1}{4}\,[E(2\,x) + 2\,E(x)\;E(-x) + E(-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{E(2\,x) + E(-2x)}{2} + E(0)\right]$$

ou seja

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos\,2\,x}{2}}$$

II) $$\operatorname{sen}^2 x = -\,\frac{1}{4}\,[E(2\,x) - 2\,E(0) + E(-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{E(2\,x) + E(-2\,x)}{2}\right]$$

ou seja

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos\,2\,x}{2}}$$

III) $$\cos^3 x = \frac{1}{8}\,[E(3\,x) + 3\,E(x) + 3\,E(-x) + E(-3\,x)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{E(3\,x) + E(-3\,x)}{2} + 3\cdot\frac{E(x) + E(-x)}{2}\right]$$

ou seja

$$\cos^3 x = \frac{\cos\,3\,x + 3\,\cos\,x}{4}\,,$$

e assim por diante.

NOTA. Em matemática superior, a expressão E(x) é identificada com e^{ix}, que também se escreve exp(ix) (ler 'exponencial de ix'). Assim, as fórmulas (1) assumem a forma

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

e é com este aspecto que são habitualmente chamadas 'fórmulas de Euler', em homenagem ao grande matemático a quem são atribuídas.

9. **Fórmulas de transformação logarítmica. Derivadas das funções circulares.** Sobre este assunto, ver o compêndio de trigonometria adoptado.

Quanto a fórmulas de bissecção, basta registar as seguintes, que se deduzem imediatamente das anteriores:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\text{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

CAPÍTULO III

TRANSFORMAÇÕES AFINS E APLICAÇÕES LINEARES

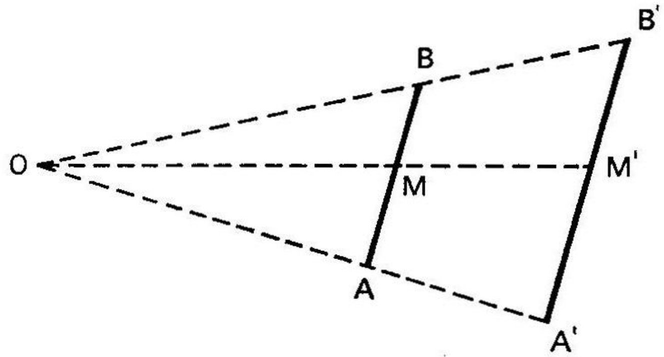
1. **Transformações de semelhança e isometrias.** Sendo *r* um número real positivo, chama-se *transformação de semelhança de razão* r (ou apenas *semelhança de razão* r) toda a aplicação biunívoca do espaço $\mathscr{E}$ sobre si mesmo, que transforma cada segmento de recta $\overline{AB}$ num segmento de recta $\overline{A'B'}$, cujo comprimento é o produto de r pelo comprimento do primeiro, isto é, tal que

$$|A'B'| = r|AB|$$

A transformação de semelhança chama-se uma *ampliação,* uma *redução* ou uma *isometria,* conforme $r > 1$, $r < 1$ ou $r = 1$. Por exemplo:

a) *Toda a homotetia de razão* ρ *(número real, positivo ou negativo) é uma semelhança de razão* $|\rho|$.

b) *Toda a translação é uma isometria.*



Estes dois factos podem ser facilmente demonstrados, como exercícios de aplicação do cálculo vectorial. Considerem-se três pontos A, B, M e os respectivos transformados A′, B′, M′. Por exemplo, na homotetia de centro O e razão ρ, tem-se

$$A' = O + \rho(A - O) \quad , \quad B' = O + \rho(B - O) \quad , \quad M' = O + \rho(M - O)$$

Trata-se de provar: 1.º $M \in \overline{AB} \Leftrightarrow M' \in \overline{A'B'}$; 2.º $|A'B'| = |\rho| . |AB|$

Para as translações, a demonstração é mais fácil.

É também fácil de reconhecer que:

I. *O produto de duas semelhanças de razões* r *e* s *é uma semelhança de razão* r · s.

Por outro lado:

II. *A aplicação inversa de uma semelhança de razão* r *é uma semelhança de razão* 1/r.

Demonstração:

Seja Φ uma semelhança de razão r e consideremos dois pontos P e Q quaisquer do espaço. Trata-se de provar que Φ^{-1} transforma o segmento $\overline{PQ}$ num segmento $\overline{P'Q'}$ tal que $|\overline{P'Q'}| = 1/r . |PQ|$.

Seja pois $P' = \Phi^{-1}(P)$, $Q' = \Phi^{-1}(Q)$. Então $P = \Phi(P')$, $Q = \Phi(Q')$ e portanto

$$\Phi(\overline{P'Q'}) = \overline{PQ} \quad , \quad |PQ| = r\,|P'Q'| \qquad \text{(porquê)}$$

donde

$$\overline{P'Q'} = \Phi^{-1}(\overline{PQ}) \quad , \quad |P'Q'| = \frac{1}{r}\,|PQ|,$$

q. e. d.

Das propriedades I e II resulta imediatamente que:

As transformações de semelhança de $\mathcal{E}$ formam um grupo multiplicativo.

Este é chamado o *grupo das semelhanças* (ou *grupo euclidiano*).

Consideremos, agora, uma semelhança qualquer Θ de razão r e seja Φ uma homotetia de razão 1/r (de centro arbitrário). Se efectuarmos sucessivamente Θ e Φ, a aplicação resultante

$$(1) \qquad \Psi = \Phi\,\Theta$$

será uma semelhança de razão $r \cdot (1/r) = 1$, portanto uma isometria. Ora de (1) vem

$$\Phi = \Psi\,\Theta^{-1} \qquad \text{(porquê?)}$$

Por conseguinte:

Toda a semelhança pode ser obtida por meio de uma homotetia seguida de uma isometria (ou vice-versa).

Assim, as homotetias permitem reduzir as semelhanças a isometrias.

Por outro lado, das propriedades I e II deduz-se imediatamente o seguinte facto:

As isometrias do espaço formam um grupo multiplicativo, portanto um subgrupo do grupo das semelhanças.

Chamar-lhe-emos *grupo das isometrias* ou *grupo métrico.*

DEFINIÇÃO 1. *Dadas duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *(conjuntos de pontos), diz-se que* $\mathcal{F}$ é semelhante a $\mathcal{G}$, *e escreve-se* $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$, *sse existe pelo menos uma transformação de semelhança* Φ *que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$, *isto é, tal que* $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{G})$.

Desta definição e das propriedades anteriores resulta que:

1) $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F}$. Com efeito, existe pelo menos uma transformação de semelhança que aplica $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{F}$ (qual é?).

2) $\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \sim \mathcal{F}$. Com efeito, se existe uma semelhança Φ tal que $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{G})$, também existe uma semelhança Ψ tal que $\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{F})$ (qual é?).

3) $\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \wedge \mathcal{G} \sim \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{H}$. Com efeito, se existem semelhanças Φ e Ψ tais que $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{G})$ e $\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{H})$, também existe uma semelhança Θ tal que $\mathcal{F} = \Theta(\mathcal{H})$ (qual é?).

Em conclusão:

A relação de semelhança (expressa pelo sinal ~) é uma relação de equivalência.

Segundo o raciocínio anterior, este facto é uma consequência do facto de as transformações de semelhança formarem um grupo.

Diz-se que duas figuras têm a mesma *forma*, sse são semelhantes. A *forma* é pois a propriedade das figuras que é conservada pelas transformações de semelhança.

DEFINIÇÃO 2. *Dadas duas figuras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, diz-se que $\mathcal{F}$* é isométrica *a $\mathcal{G}$ sse existe pelo menos uma isometria que aplica $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{F}$.*

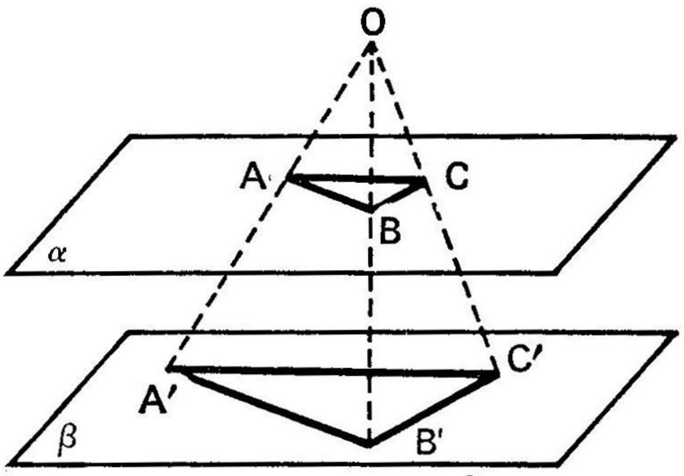
Como as isometrias formam um grupo, conclui-se, tal como para a relação de semelhança, que:

A relação de isometria é uma relação de equivalência.

As isometrias conservam não só a *forma*, como também as *dimensões* da figura.

Convém ainda salientar o seguinte facto:

As transformações de semelhança e as isometrias podem também ser definidas, de modo análogo, como aplicações biunívocas dum plano α sobre um plano β ou duma recta r sobre uma recta s (podendo ser em particular $\alpha = \beta$ ou r = s).



Consideremos, por exemplo, dois planos α, β paralelos e um ponto O fora de α e de β.

A aplicação que faz corresponder a cada ponto P de α o ponto P′ de intersecção de OP com β é manifestamente uma semelhança de α sobre β — aliás restrição duma homotetia espacial ao plano α (é o caso da projecção de um filme sobre um *écran*).

EXERCÍCIOS:

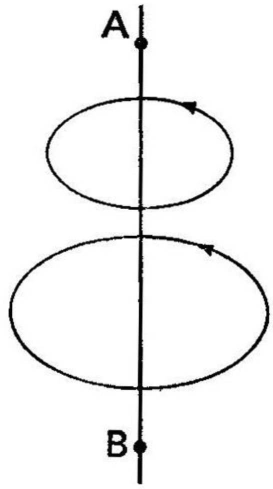
I. Considere um ponto P, o seu transformado P′ por meio da homotetia de centro O e razão ρ, e o transformado P″ de P′ pela translação definida por $\vec{u}$. Exprima P″ como função de P (por cálculo vectorial). Proceda depois em ordem inversa, considerando primeiro a translação e depois a homotetia. Que teorema deduz assim?

II. Problema análogo com duas homotetias de centro O_1, O_2 e razões ρ_1, ρ_2 quaisquer.

III. Prove que a reunião do conjunto de todas as translações com o conjunto de todas as homotetias é um grupo (não comutativo).

(Ver respostas no final do número seguinte.)

2. **Rotações do plano e do espaço.** Todos conhecem o seguinte facto, induzido da experiência quotidiana:



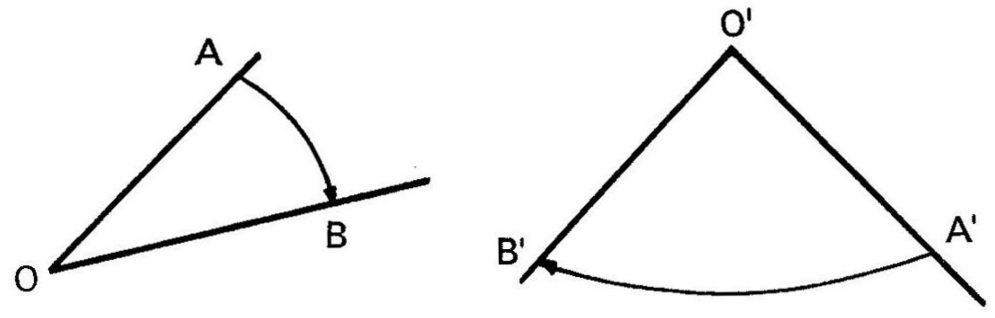
Quando dois pontos distintos A e B dum corpo sólido estão fixos, o corpo só pode ter movimentos de uma espécie: *os movimentos de rotação.* Durante um tal movimento não só os pontos materiais, A, B, mas todos os pontos do sólido situados na recta AB (eixo de rotação) se mantêm fixos; qualquer outro ponto do sólido é obrigado a mover-se sobre uma circunferência situada num plano perpendicular ao eixo e com o centro no eixo.

O conceito físico de *movimento de rotação* sugere o conceito geométrico de *rotação* (caso particular das isometrias). Este, por sua vez, está intimamente relacionado com o de *ângulo orientado,* que já foi estudado em trigonometria.

Um ângulo não nulo fica orientado quando se estabelece que um dos seus lados precede o outro lado. O lado que precede é o *lado antecedente* (ou *primeiro lado*); o outro é o *lado consequente* (ou *segundo lado*). Todo o ângulo nulo se considera orientado.

Será talvez conveniente, daqui por diante, designar pela notação $\hat{O}AB$ o ângulo orientado cujo primeiro lado é $\dot{O}A$ e cujo segundo lado é $\dot{O}B$.

Dados dois ângulos orientados — *no mesmo plano ou em planos paralelos* — é fácil distinguir à vista se têm o mesmo sentido ou sentidos contrários (ângulos não nulos) ([1]).



Por exemplo, os ângulos orientados $\hat{O}AB$ e $\hat{O}'A'B'$ têm o mesmo sentido, enquanto o ângulo $\hat{O}BA$ tem sentido contrário: o dos dois primeiros é o *sentido horário* e o do segundo *o sentido anti-horário* (em relação ao leitor).

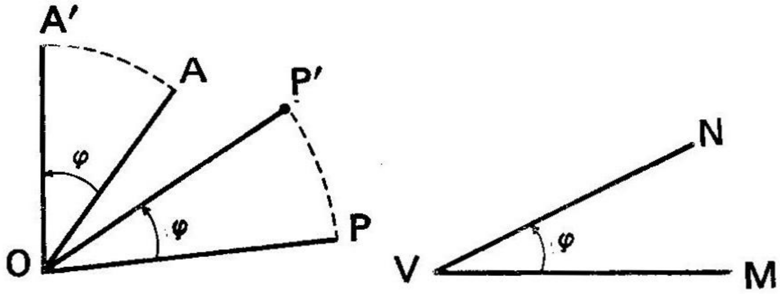
([1]) Abstemo-nos de fazer aqui o estudo rigoroso do sentido dos ângulos orientados (mais difíceis que o do sentido dos segmentos orientados).

Há ainda outro modo intuitivo de distinguir os dois sentidos de rotação no plano:

Por exemplo, um observador colocado sobre a face visível do plano, junto ao vértice do ângulo $\hat{O}AB$, vê o segundo lado *à direita* do primeiro. Por isso, o sentido horário também é chamado *dextrorso* (de 'dextra', que significa 'direita'), enquanto o sentido anti-horário é chamado *'sinistrorso'* (de 'sinistra', 'esquerda').

Diz-se que dois ângulos orientados, do mesmo plano ou de planos paralelos, são *equipolentes*, sse têm o mesmo sentido e a mesma grandeza absoluta.

Posto isto, podemos começar por definir *'rotações do plano'* (ou *'de um plano'*).



Cada rotação Φ do plano pode ser dada por um ponto O *(centro de rotação)* e por um ângulo orientado $\hat{V}MN$, do seguinte modo:

É a aplicação que deixa fixo o ponto O [isto é, $\Phi(O) = O$] e faz corresponder a cada ponto P do plano distinto de O o ponto P' tal que:

$$|OP| = |OP'| \text{ e } \hat{O}PP' \text{ é equipolente a } \hat{V}MN$$

Facilmente se reconhece que dois ângulos orientados do plano definem a mesma rotação de centro O, sse são equipolentes (também podemos dizer neste caso que definem o mesmo *vector--ângulo*).

Sendo assim, é claro que uma rotação Φ do plano também pode ser definida pelos seguintes dados:

1) um ponto (centro da rotação);

2) um sentido de rotação considerado como *positivo;*

3) um número real φ e uma unidade de medida de ângulos.

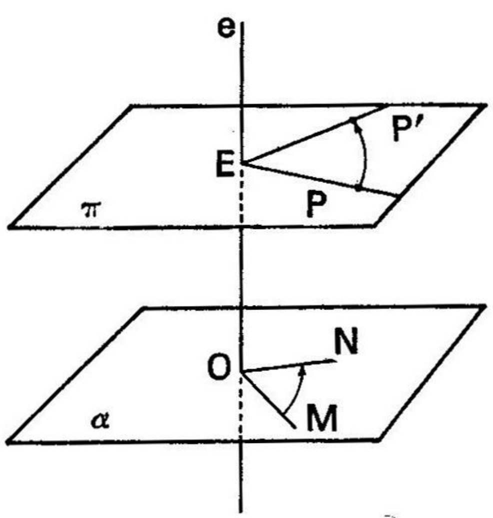
Neste caso, Φ é a rotação de centro O, definida por qualquer ângulo orientado cuja medida seja φ, relativamente à unidade e ao sentido de rotação adoptados. Diremos então que Φ é a *rotação de φ unidades em torno de* O (por exemplo, a rotação de 90°, a rotação de $-\pi/3$ rad., etc.). Em particular, se $\varphi = 0$, a rotação reduz-se à aplicação idêntica e o seu centro torna-se arbitrário.

Tornam-se agora intuitivos os seguintes factos:

I. *Toda a rotação do plano é uma isometria.*

II. *O conjunto das rotações do plano com um mesmo centro é um grupo multiplicativo, isomorfo ao grupo aditivo das classes de congruência dos números reais módulo* $m \neq 0$ (*por exemplo,* $m = 2\pi$ *ou* $m = 360$).

Passemos, agora, às *rotações do espaço:*



Cada rotação Φ do espaço pode ser definida por uma recta *e* (eixo da rotação) e por um ângulo orientado $\hat{O}MN$ num plano perpendicular a *e* do seguinte modo:

Φ é a aplicação que deixa fixos os pontos de *e* e faz corresponder a cada ponto P fora de *e* o ponto P′ tal que, sendo E a projecção ortogonal de P sobre *e*, se tem [1]:

$$|EP| = |EP'| \text{ e } \hat{O}PP' \text{ equipolente a } \hat{O}MN.$$

Uma rotação Φ do espaço também pode ser definida pelos seguintes dados:

1) uma recta *e* (eixo da rotação);

2) um sentido de rotação considerado como positivo (nos planos perpendiculares a *e*);

3) um número real φ e uma unidade de medida de ângulo.

Então Φ é a rotação dada por *e* e por qualquer ângulo orientado cuja medida seja φ, relativamente à unidade e ao sentido de rotação adoptados.

Posto isto, tornam-se intuitivos os seguintes factos:

I. *Toda a rotação é uma isometria do espaço.*

II. *O conjunto das rotações com um mesmo eixo é um grupo multiplicativo (portanto um subgrupo do grupo das isometrias) isomorfo ao grupo aditivo das classes de congruência de números reais módulo* $m \neq 0$ *(por exemplo* $m = 2\pi$ *ou* $m = 360$).

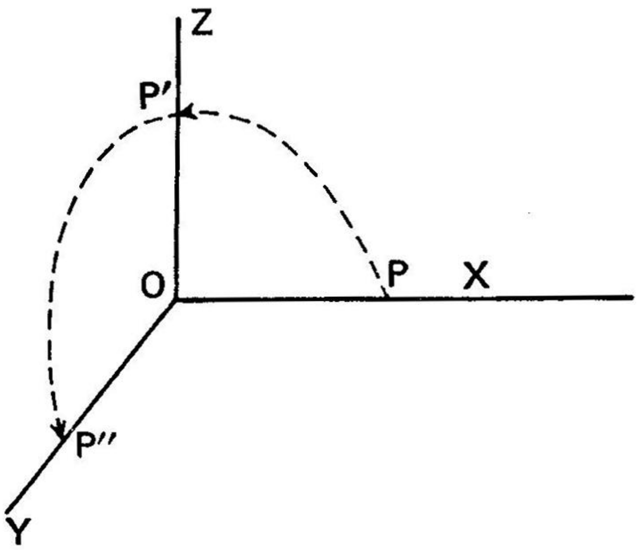
Um tal grupo é portanto comutativo.

---

[1] Chama-se projecção ortogonal de P sobre *e* o ponto de intersecção com *e* do plano π que passa por P e é perpendicular a *e*.

Veremos mais adiante que *o conjunto de todas as rotações cujos eixos passam por um mesmo ponto* O *também é um grupo.*

Mas esse grupo já não é comutativo!



Com efeito, consideremos três rectas OX, OY, OZ perpendiculares entre si e sejam: Φ a rotação em torno de OY que leva $\dot{O}X$ para $\dot{O}Z$, e Ψ a rotação em torno de OX que leva $\dot{O}Z$ para $\dot{O}Y$.

Seja agora P um ponto de OX distinto de O, $P' = \Phi(P)$ e $P'' = \Psi(P')$. Tem-se pois

$$P'' = (\Psi\,\Phi)\ (P)$$

Mas $\Psi(P) = P$ (porquê?) e portanto

$$(\Phi\,\Psi)(P) = P' \neq P'' \qquad \text{(porquê?)}$$

e assim

$$\Phi\,\Psi \neq \Psi\,\Phi \qquad \text{(porquê?)}$$

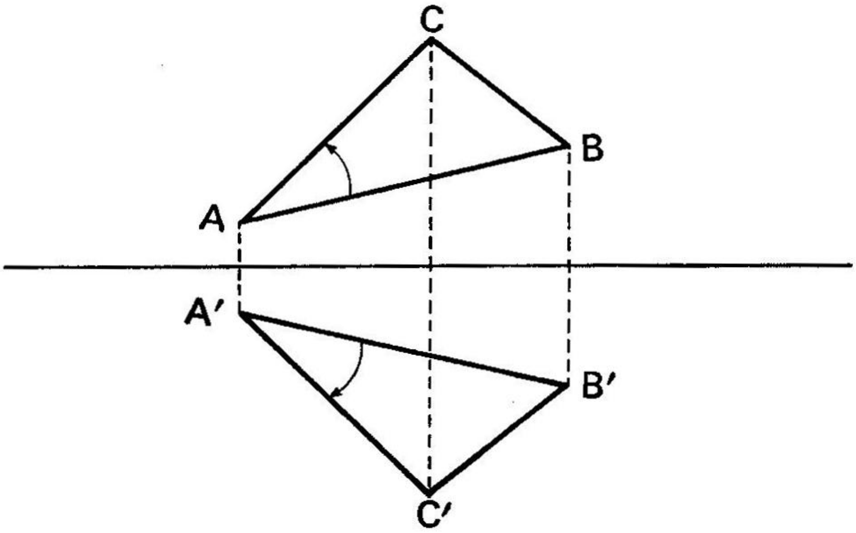
RESPOSTAS AOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. Uma translação e uma homotetia distintas da identidade nunca são permutáveis, mas o seu produto é sempre uma homotetia.

II. Duas homotetias distintas da identidade e de centros distintos nunca são permutáveis entre si; o seu produto é uma homotetia ou uma translação, conforme $\rho_1 \, \rho_2 \neq 1$ ou $\rho_1 \, \rho_2 = 1$.

3. **Reflexões. Deslocamentos e isometrias negativas.** Comecemos pelo caso do plano:

Dada uma recta r, chama-se *simetria em relação a* r a aplicação Φ que deixa fixos os pontos de r e faz corresponder, a cada ponto P do plano fora de r, o ponto P′ tal que a recta *r* é a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.



As simetrias em relação a rectas também se chamam *reflexões*.

É evidente que:

Toda a simetria Φ em relação a uma recta é uma simetria cuja inversa é a própria aplicação Φ, isto é, $\Phi = \Phi^{-1}$ (*ou seja* $\Phi^2 = I$).

Na figura supra está desenhado um triângulo [ABC] e o seu simétrico [A′B′C′] em relação a uma recta r. Mas note-se: o ângulo orientado $\hat{A}BC$ é transformado pela simetria no ângulo $\hat{A}'B'C'$ *orientado em sentido inverso* (e o mesmo para qualquer outro ângulo orientado).

Tal não sucede porém com as translações e as rotações: *estas não mudam o sentido dos ângulos orientados.*

DEFINIÇÃO 1. *Uma isometria do plano diz-se* positiva *ou* negativa, *conforme conserva ou muda o sentido dos ângulos orientados. As isometrias positivas também são chamadas* deslocamentos do plano.

É bem fácil ver que:

I. *Os deslocamentos do plano formam um grupo multiplicativo — portanto um subgrupo do grupo das isometrias planas.*

II. *O produto de duas isometrias negativas é uma isometria positiva.*

DEFINIÇÃO 2. *Dadas duas figuras isométricas* $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ *do plano, diz-se que são* positivamente isométricas, *sse existe pelo menos um deslocamento plano que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$; *caso contrário, diz-se que são* negativamente isométricas.

Por exemplo, os dois triângulos escalenos da figura anterior são negativamente isométricos (no plano).

Da propriedade I resulta imediatamente que *a relação de isometria positiva é uma relação de equivalência.*

Seja agora Φ uma isometria negativa e Θ uma simetria em relação a uma recta. Então, segundo II, a aplicação $\Psi = \Theta\,\Phi$ é uma isometria positiva. Ora

$$\Phi = \Theta^{-1}\,\Psi = \Theta\,\Psi$$

Por conseguinte:

III. *Toda a isometria negativa é o produto duma reflexão por um deslocamento.*

Havemos de demonstrar mais adiante que *todo o deslocamento plano é uma translação ou uma rotação.*

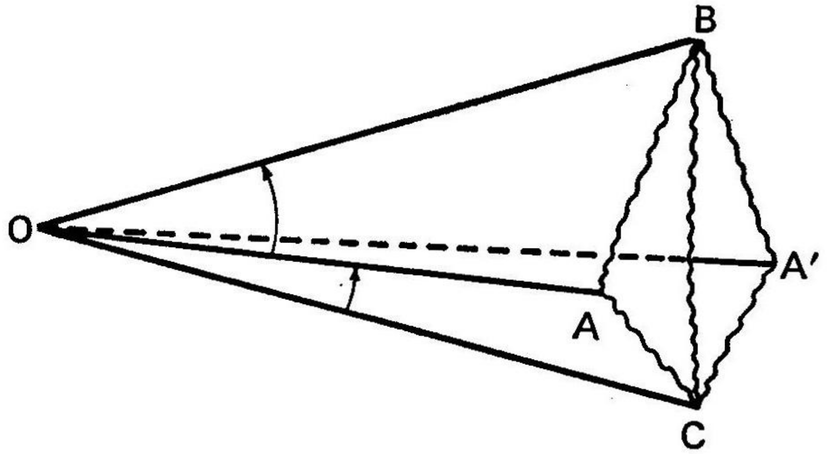
Podemos agora passar ao caso do espaço $\mathcal{E}$:

Dado um plano π, chama-se *simetria em relação a* π a aplicação Φ que deixa fixos os pontos de π e faz corresponder a cada ponto P fora de π o ponto P′ tal que π é o plano mediador do segmento $\overline{PP'}$.

As simetrias em relação a planos também são chamadas *reflexões*, atendendo a que a imagem de um objecto por reflexão num espelho plano é a figura simétrica do objecto em relação ao plano do espelho.

Para estender ao espaço noções de isometria positiva e de isometria negativa, há que introduzir a noção de *triedro orientado:*

Diz-se que um triedro está *orientado*, quando as suas faces (que são ângulos) estão orientadas de tal modo que o primeiro lado de cada face coincide com o segundo lado de uma face contígua.



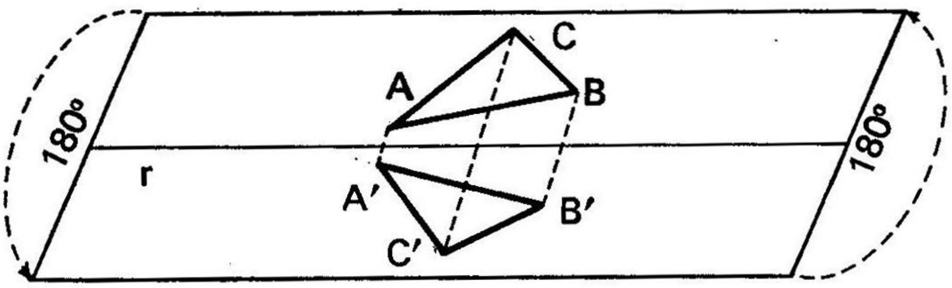
Por exemplo, na figura junta considera-se um triedro orientado, cujas faces são os ângulos orientados $\hat{O}AB$, $\hat{O}BC$ e $\hat{O}CA$. Intuitivamente, podemos dizer que este triedro está orientado no *sentido horário*, porque um observador voltado para o vértice vê os pontos A, B, C sucederem-se no sentido horário ou (o que é equivalente) um observador colocado ao longo de qualquer aresta com os pés no vértice vê a face oposta orientada no sentido horário.

Mas consideremos agora, por exemplo, o triedro $\hat{O}A'BC$, que é o simétrico do primeiro em relação ao plano OBC. É visível que esse triedro está orientado no sentido anti-horário. Assim:

As reflexões mudam o sentido dos triedros orientados, o que não sucede com as translações e as rotações (espaciais).

A partir deste momento, as definições 1 e 2, assim como as propriedades I, II e III podem ser formuladas e estabelecidas de modo análogo, substituindo o plano pelo espaço. Mas convém notar o seguinte:

DEFINIÇÃO 3. *Diz-se que duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *são* geometricamente iguais, *e escreve-se* $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, *sse são positivamente isométricas no espaço, isto é, sse existe pelo menos um deslocamento que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$.



Por exemplo, dois triângulos escalenos dum plano α, que sejam simétricos entre si em relação a uma recta r de α, são *negativamente isométricos no plano, mas positivamente isométricos no espaço.* Com efeito, prova-se que não existe nenhum deslocamento do plano que transforme um no outro, mas basta a rotação espacial de 180° em torno de r para aplicar um sobre o outro. São dois *geometricamente iguais* (também podemos dizer apenas 'iguais'). Por isso em geometria plana, em vez de 'positivamente isométrico' e 'negativamente isométrico', podemos dizer, respectivamente, *'directamente igual'* e *'inversamente igual'*.

Pelo contrário, dois triedros escalenos que sejam simétricos entre si em relação a um plano — ou mesmo em relação a um ponto, por exemplo o vértice (triedros verticalmente opostos) — são negativamente isométricos no espaço: *não são geometricamente iguais.*

Como se vê, a noção de igualdade geométrica é-nos sugerida pela nossa experiência quotidiana com os corpos sólidos. Diz-se que um corpo é *sólido* (ou rígido), quando não é susceptível de mudar de forma nem de dimensões, mas apenas de posição (em relação a outro sólido). Essa mudança de posição realiza-se em *movimentos*, que são compostos de uma *infinidade contínua de deslocamentos, no decorrer do tempo.* Deste modo, um sólido representa sempre figuras geométricas iguais nas suas diferentes posições — e dois sólidos serão iguais, sse puderem ocupar exactamente o mesmo lugar no espaço, *um após o outro* (ao mesmo tempo é impossível, segundo o PRINCÍPIO DA IMPENETRABILIDADE DA MATÉRIA).

NOTA. É preciso não esquecer que, em rigor, não existem corpos sólidos, mas apenas corpos a que podemos chamar 'sólidos' em determinadas circunstâncias, sem que daí resulte erro apreciável. Por exemplo, uma barra de ferro, em condições normais de pressão e temperatura, é *aproximadamente* sólida. Mas já sabemos que a temperatura ambiente nunca é rigorosamente constante — e o ferro dilata-se ou contrai-se consoante a temperatura aumenta ou diminui (tal como o mercúrio num termómetro). Mais ainda: a barra de ferro não é um *todo contínuo,* mas antes uma espécie de *nevoeiro de átomos,* em constante movimento uns em relação aos outros, de modo que as suas distâncias mútuas aumentam quando a temperatura sobe.

Normalmente não nos apercebemos destes factos devido à imperfeição dos nossos sentidos. *Por conseguinte, é a essa imperfeição que devemos afinal a noção de corpo sólido.* O mais curioso é que tal noção (ilusória até certo ponto, como todas as nossas noções acerca do mundo externo) é na realidade valiosíssima. Foi essa visão imperfeita dos objectos — como a de um quadro impressionista — que levou o homem a conceber a geometria euclidiana, cuja utilidade, no seu devido âmbito, se manifesta nos mais variados ramos da ciência e da técnica, incluindo as recentes explorações cósmicas.

E, vendo bem, foram também os corpos sólidos, com seus contornos nítidos e cortantes, que sugeriram ao homem a *lógica* *bivalente* — a lógica do 'ser ou não ser', do 'sim ou não', sem nebulosidades ou esfumaturas.

Mas, quando se trata de aplicar a matemática, há que saber transigir, fazendo um pouco *vista grossa*, à maneira dos artistas — isto é, há que ter o *sentido físico da aproximação e da contingência*, contrabalançado com o *rigor lógico da matemática pura.*

EXERCÍCIOS — I. Desenhe a azul dois triângulos escalenos directamente iguais e determine, se possível, o centro de uma rotação que transforme um no outro. Em que caso é possível o problema e em que caso não é? E, quando não é possível, que deslocamentos permitem transformar um triângulo no outro?

II. Considere no espaço dois triângulos escalenos iguais e prove que é sempre possível transformar um no outro, mediante uma translação seguida de uma rotação. Idem para dois tetraedros iguais.

III. Quantos deslocamentos transformam um triângulo equilátero em si mesmo? E um quadrado? E um rectângulo não quadrado?

IV. Quantas semelhanças permitem transformar um no outro dois triângulos equiláteros? E dois quadrados? E dois cubos? E dois círculos? E duas esferas? E duas elipses de excentricidade 1/2?

4. **Transformações afins.** Consideremos por exemplo dois planos α, β, não paralelos nem perpendiculares entre si, e seja Φ a operação de *projecção ortogonal* dos pontos de α sobre os pontos de β. Põem-se três perguntas:

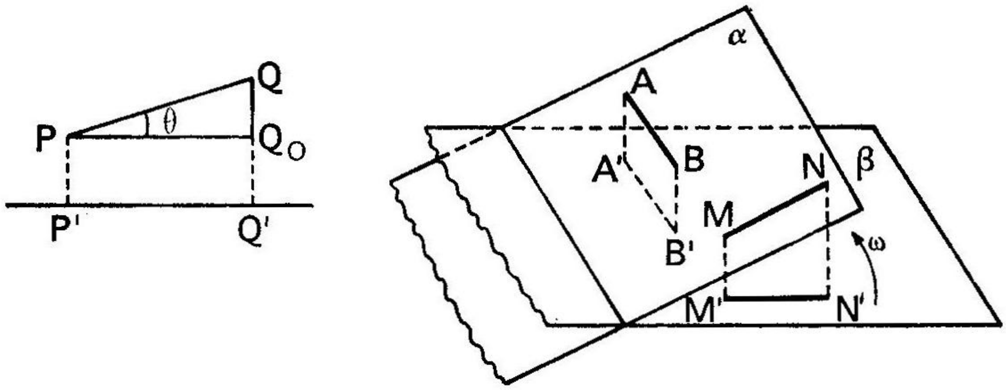
1) Será Φ uma aplicação biunívoca de α sobre β?

2) Φ transforma segmentos de recta em segmentos de recta?

3) Será Φ uma transformação de semelhança?

A resposta às duas primeiras perguntas é, manifestamente, afirmativa. Quanto à terceira, consideremos um segmento qualquer $\overline{PQ}$ de α; seja $\overline{P'Q'}$ a sua projecção ortogonal sobre β e seja θ o ângulo de PQ com β isto é, o menor dos ângulos formados pelas rectas PQ e P'Q'. Então virá (ver figura da esquerda):

$$|P'Q'| = |PQ_0| = |PQ| \cos \theta$$



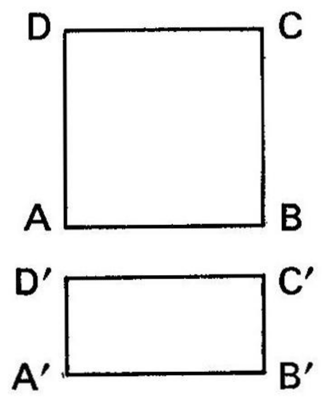
Assim, a aplicação Φ transforma cada segmento de recta num segmento de recta, *cujo comprimento é o produto do comprimento do primeiro pelo número* cos θ. Então Φ é uma transformação de semelhança? Claro que não. Porquê?

Porque o número cos θ *não é o mesmo para todos os segmentos.* Com efeito, θ depende da direcção do segmento: o seu valor mínimo é 0 (quando a direcção é paralela a β) e o seu máximo é o ângulo ω dos dois planos (quando a direcção é perpendicular à anterior). Deste modo, o máximo de cos θ é 1 e o mínimo é cos ω.

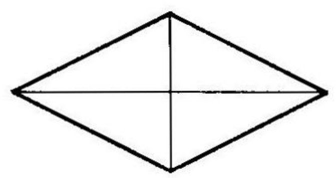
Por conseguinte, a projecção Φ produz nos comprimentos uma contracção, cujo coeficiente, cos θ, é *variável de* 1 *a* cos ω.

Seja por exemplo $\omega = 60°$. Então cos $\omega = 1/2$.

Consideremos no plano α um quadrado com dois lados paralelos a β. Então a projecção do quadrado será um rectângulo, com um dos lados igual aos do quadrado e outro lado igual a metade do primeiro.



Se o quadrado não tiver nenhum lado paralelo a β, a projecção será um paralelogramo não rectângulo — e será um losango, se uma das diagonais do quadrado for paralela a β.



Consideremos agora no plano α uma *circunferência*. Então a projecção desta sobre β será uma *elipse*, cujo eixo menor é *metade* do eixo maior (podemos prová-lo por meio da geometria analítica).

Vimos que Φ é uma aplicação biunívoca de α sobre β. Qual é a sua inversa? A projecção de β sobre α, segundo a direcção perpendicular a β. É claro que Φ^{-1} produz nos comprimentos uma *dilatação*, cujo coeficiente é sec θ, *variável* de 1 a sec ω.

Podíamos, mais geralmente, considerar uma projecção de α sobre β segundo uma direcção qualquer, não paralela a nenhum dos planos. As conclusões serão análogas: os comprimentos resultam multiplicados por um número positivo, variável com a direcção.

Vejamos agora um exemplo relativo ao espaço. Suponhamos fixado um referencial cartesiano ortogonal e seja Φ a aplicação que faz corresponder a cada ponto $P \rightarrow (x, y, z)$ o ponto $P' \rightarrow (x', y', z')$ tal que $x' = x$, $y' = y$ e $z' = z/2$. Quer dizer: a abcissa e a ordenada são conservadas; a cota é reduzida a metade.

Facilmente se reconhece o seguinte: Φ é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{E}$ sobre si mesmo, que transforma cada segmento de recta num segmento de recta, cujo comprimento é o do primeiro multiplicado por um número variável de 1/2 a 1. Portanto, também neste caso não se trata de uma transformação de semelhança. Por exemplo:

Um *cubo* será transformado num *paralelepípedo*, que nem sequer será rectângulo se não tiver arestas paralelas aos eixos coordenados.

Uma esfera será transformada num *elipsóide de revolução achatado*, sendo 1/2 o coeficiente de achatamento, etc.

Estes exemplos conduzem-nos à seguinte definição geral:

DEFINIÇÃO. *Chama-se* transformação afim *toda a aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{E}$ sobre si mesmo, ou de um plano α sobre um plano β (podendo ser $\alpha = \beta$), que transforma segmentos de recta em segmentos de recta.*

As transformações afins também são chamadas *afinidades*.

Desde logo se reconhece que:

São afinidades todas as transformações de semelhança (em particular, as homotetias, as translações, as rotações e as simetrias).

Mas, segundo mostram os exemplos anteriores, existem afinidades que não são semelhanças. Essas afinidades produzem deformações, chamadas *deformações afins*.

Também é muito fácil provar que:

I. *O produto de duas afinidades é uma afinidade.*

II. *A inversa duma afinidade é uma afinidade.*

Por conseguinte:

O conjunto de todas as transformações afins do espaço é um grupo multiplicativo, de que é subgrupo o grupo das semelhanças.

DEFINIÇÃO. *Dadas duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$*, diz-se que* $\mathcal{F}$ *é* afim *a* $\mathcal{G}$*, sse existe pelo menos uma transformação afim que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$*.*

Das propriedades I e II resulta que:

A relação de afinidade, entre figuras geométricas, é uma relação de equivalência.

Por exemplo, prova-se que as figuras afins a um quadrado são todos os paralelogramos, as figuras afins a uma circunferência são todas as elipses, etc.

O mundo físico oferece-nos várias concretizações do conceito de afinidade:

— a sombra produzida no chão por uma figura existente numa janela por onde entra sol (porquê?);

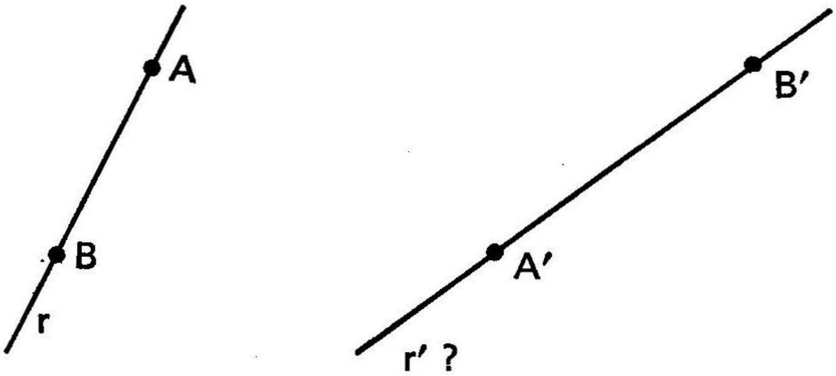
— a imagem produzida por certos espelhos cilíndricos que tornam as pessoas comicamente mais gordas ou mais magras (ao contrário dos espelhos esféricos, que aumentam ou diminuem sem deformar sensivelmente, em certas condições);

— a compressão ou dilatação dum corpo elástico segundo uma determinada direcção;

— a deformação de uma rede articulada, etc.

5. **Efeito das transformações afins sobre rectas paralelas e sobre vectores.** Começaremos por demonstrar os dois seguintes lemas:

LEMA 1. *Toda a transformação afim transforma rectas em rectas.*



Demonstração:

Seja Φ uma transformação afim e r uma recta contida no domínio de Φ (que pode ser o espaço ou um plano). Ponhamos $\Phi(r) = r'$. Pretende-se provar que r' é uma recta.

Para isso consideremos dois pontos distintos A, B de r e seja $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$. Então

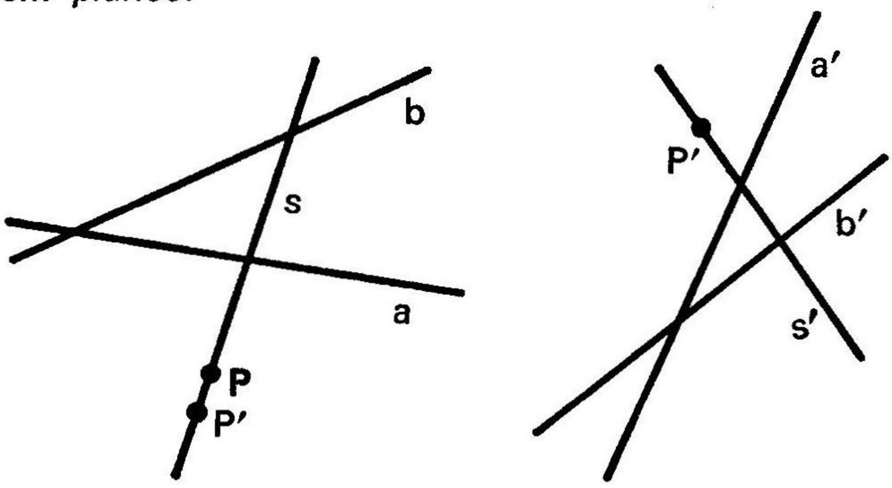
$$\Phi(\overline{AB}) = \overline{A'B'} \qquad \text{(porquê?)}$$

Seja agora P um ponto qualquer e ponhamos $P' = \Phi(P)$. Três casos se podem dar: ou $P \in \overline{AB}$ ou $B \in \overline{AP}$ ou $A \in \overline{BP}$. No 1.° caso tem-se $P' \in \overline{A'B'}$, no 2.° tem-se $B' \in \overline{A'P'}$ e no 3.° tem-se $A' \in \overline{B'P'}$. *Em qualquer dos casos tem-se* $P' \in A'B'$ e assim:

$$(1) \qquad P \in r \Rightarrow P' \in A'B'$$

O mesmo raciocínio com Φ^{-1} mostra que, para todo o $P' \in A'B'$, existe $P \in AB$, tal que $\Phi(P) = P'$. Ora este facto, aliado a (1), mostra que $\Phi(r) = A'B' = r'$ que portanto r' é uma recta.

LEMA 2. *Toda a transformação afim do espaço transforma planos em planos.*



Demonstração:*

Seja Φ uma transformação afim do espaço e seja α um plano. Consideremos duas rectas concorrentes a, b contidas em α e seja $a' = \Phi(a)$, $b' = \Phi(b)$. Então a′ e b′ também são concorrentes (porquê?).

Seja agora P um ponto qualquer de α e $P' = \Phi(P)$. Então existe pelo menos uma recta de α que passa por P e encontra *a* e *b* em dois pontos *distintos* (porquê?). Seja *s* uma tal recta e $s' = \Phi(s)$. Então s′ encontra a′ e b′ em dois pontos distintos e portanto P′ pertence ao plano α' definido por a′ e b′.

O mesmo raciocínio com Φ^{-1} mostra que, para todo o $P' \in \alpha'$ existe $P \in \alpha$ tal que $\Phi(P) = P'$.

Portanto Φ transforma o plano α num plano α'.

Destes dois lemas deduz-se:

TEOREMA 1. *Toda a transformação afim transforma rectas paralelas em rectas paralelas.*

Demonstração:

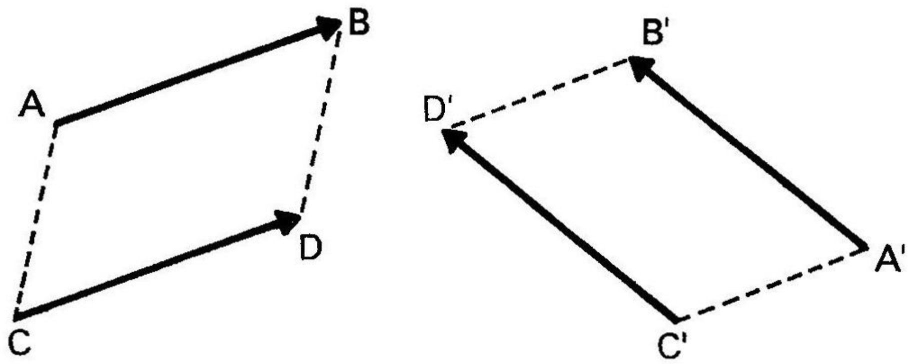
Seja Φ uma afinidade. Consideremos duas rectas paralelas r, s contidas no domínio de Φ e ponhamos $r' = \Phi(r)$, $s' = \Phi(s)$. Pretende-se provar que $r' // s'$.

Se $r = s$, também $r' = s'$ e a tese está provada.

Seja agora $r \neq s$. Então r, s são complanares e $r \cap s = \phi$. Logo r′, s′ também são complanares (porquê?) e $r' \cap s' = \phi$.

Com efeito, se existisse pelo menos um ponto $P' \in r' \cap s'$, o ponto $P = \Phi^{-1}(P')$ pertenceria a $r \cap s$ e, deste modo, seria $r \cap s \neq \phi$, contrariamente à hipótese.

COROLÁRIO. *Toda a afinidade transforma segmentos orientados equipolentes em segmentos orientados equipolentes.*



Demonstração:

Consideremos uma afinidade Φ. Sejam [A, B], [C, D] dois segmentos orientados equipolentes contidos no domínio de Φ e seja $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$ e $D' = \Phi(D)$.

Pretende-se provar que [A′, B′] é equipolente a [C′, D′].

Três casos se podem dar:

1.° caso. $A = B$. Então $C = D$, $A' = B'$, $C' = D'$ e assim a tese fica provada.

2.° caso. $A \neq B$ e $AB \neq CD$. Então $A' \neq B'$, $A'B' \neq C'D'$ e, como $AB//CD$, $AC//BD$, também $A'B'//C'D'$, $A'C'//B'D'$, o que mostra que [A′, B′] é aquipolente a [C′, D′].

3.° caso. $A \neq B$ e $AB = CD$. Reduz-se ao anterior, considerando um terceiro segmento [M, N] equipolente a [A, B] e tal que $MN \neq AB$.

Assim o corolário fica demonstrado.

Este pode ainda enunciar-se do seguinte modo:

Uma transformação afim transforma todos os segmentos orientados representativos de um mesmo vector $\vec{u}$ *nos segmentos orientados representativos de um mesmo vector* $\vec{v}$.

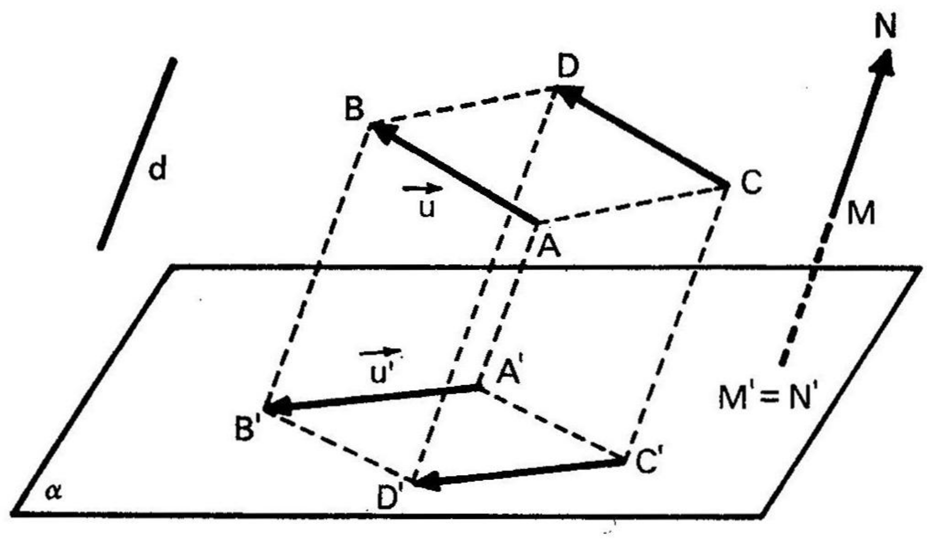
Por conseguinte, toda a transformação afim Φ determina deste modo uma correspondência unívoca $\vec{u} \curvearrowright \vec{v}$ entre vectores. Designaremos esta aplicação por Φ_o. Ter-se-á pois, *por definição:*

$$(2) \qquad \boxed{\Phi_o(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \Phi(B) - \Phi(A)}$$

para todo o par de pontos A, B do domínio de Φ. Então, se for $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, será $B = A + \vec{u}$ e portanto:

$$(3) \qquad \boxed{\Phi(A + \vec{u}) = \Phi(A) + \Phi_o(\vec{u})}$$

6. **Aplicações lineares.** Consideremos agora um plano α, uma recta d não paralela a α e seja Φ a aplicação que faz corresponder a cada ponto P do espaço a sua projecção P′ sobre α, paralelamente a d. É claro que se trata de uma aplicação do espaço $\mathcal{E}$ em si mesmo, *mas não de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{E}$*: o contradomínio da aplicação é o plano α. Além disso, a aplicação Φ *não é biunívoca:* todos os pontos de uma recta que seja paralela a d são transformados por Φ num único ponto de α. Porém, é fácil ver que Φ *transforma segmentos de recta em segmentos de recta,* tal como as transformações afins. Não podemos dizer que transforma rectas em rectas, porque transforma em pontos as rectas paralelas a d. *Mas, exceptuado este caso, transforma rectas paralelas em rectas paralelas.*



Então, raciocinando como na demonstração anterior, vê-se que Φ transforma segmentos orientados equipolentes em segmentos orientados equipolentes: *a única diferença está em que pode transformar segmentos não nulos (paralelos a* d) *em segmentos nulos.*

Podemos chamar *afinidades degeneradas* às aplicações Φ nestas condições. Tal como as transformações afins (bijectivas ao contrário desta), Φ determina uma aplicação Φ_o sobre vectores:

$$\Phi_o(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

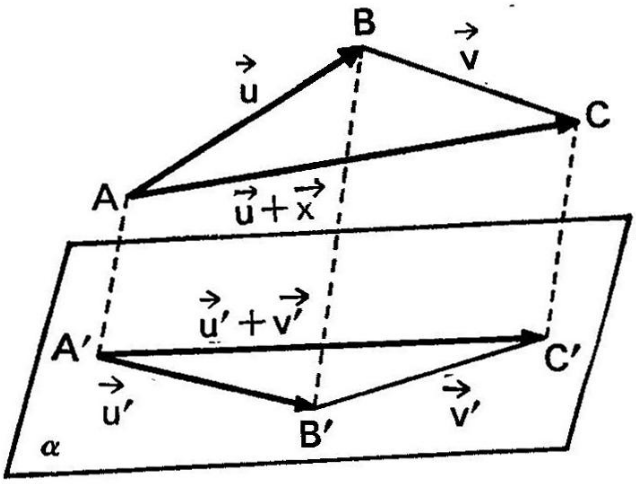
Diremos que o vector $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$ é a *projecção do vector* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre o plano α paralelamente a* d.

Já vimos que se designa por $\mathcal{V}$ o conjunto dos vectores do espaço. Designaremos por $\mathcal{V}_\alpha$ o conjunto dos vectores do plano α. Tanto $\mathcal{V}$ como $\mathcal{V}_\alpha$ são *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{R}$ (ver pág. 44).

Portanto Φ_o é uma aplicação de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{V}_\alpha$. Mas esta aplicação tem duas propriedades importantes que vamos estudar.

Consideremos dois vectores $\vec{u}, \vec{v}$ e as suas projecções

$$\vec{u}' = \Phi_o(\vec{u}) \quad , \quad \vec{v}' = \Phi_o(\vec{v}).$$



Se tomarmos

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC},$$

será $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \vec{u}' + \vec{v}'$

isto é:

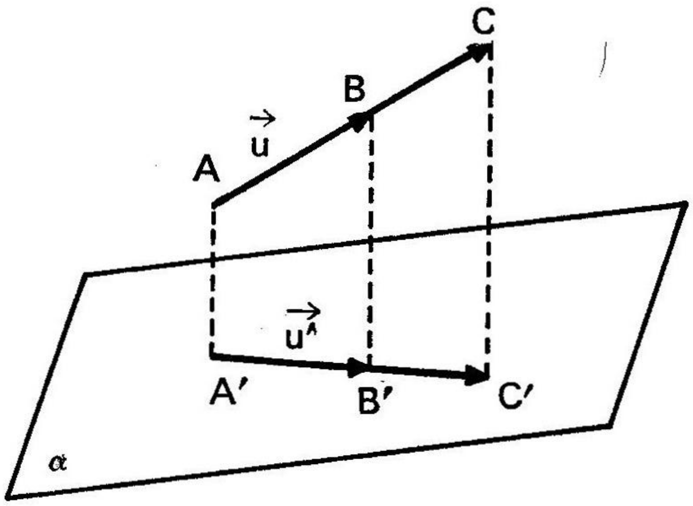
A projecção da soma $\vec{u} + \vec{v}$ *é igual à soma* $\vec{u}' + \vec{v}'$ *das projecções.*

Simbolicamente:

$$\text{I.} \quad \Phi_0(\vec{u} + \vec{v}) = \Phi_0(\vec{u}) + \Phi_0(\vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Consideremos, agora, um vector $\vec{u}$ e um número real α. Seja

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \alpha \vec{u} = \overrightarrow{AC}$$



Então, aplicando o TEOREMA DE THALES, vê-se que

$$\overrightarrow{A'C'} = \alpha \cdot \overrightarrow{A'B'} = \alpha \vec{u}'$$

isto é:

A projecção do produto de um escalar α por um vector $\vec{u}$ é igual ao produto de α pela projecção de $\vec{u}$ ([1]).

Simbolicamente:

II. $\Phi_o(\alpha \vec{u}) = \alpha \Phi_o(\vec{u}) \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{V}$

Pois bem, exprimem-se as propriedades I e II, dizendo que a aplicação Φ_o *respeita a adição de vectores e a multiplicação de vectores por escalares;* ou ainda, dizendo que Φ_o é uma *aplicação linear.* Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Dados dois espaços vectoriais* S *e* S′ *sobre* $\mathbb{R}$, *diz-se que uma aplicação* f *de* S *em* S′ *é linear sse tem as duas seguintes propriedades* ([2]):

1) $f(u + v) = f(u) + f(v) \quad , \quad \forall u, v \in S$

2) $f(au) = af(u) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R},\ u \in S$

(Mais geralmente ainda, podíamos considerar, em vez de $\mathbb{R}$, um corpo K qualquer.)

Desde logo se reconhece que, se f *é uma aplicação linear de* S *sobre* S′, *então:*

3) $f(au + bv) = af(u) + bf(v) \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{R};\ u, v \in S$

Tem-se, com efeito:

$$f(au + bv) = f(au) + f(bv) = af(u) + bf(v)$$

([1]) Recordemos que, quando se trata do um espaço vectorial S sobre um corpo K, os elementos de S chamam-se **vectores,** enquanto os de K se chamam **escalares.** Neste caso, os escalares são os **números reais.**

([2]) Sempre que não haja risco de confusão, podemos deixar de usar setas sobre letras que representam vectores.

Mais geralmente, tem-se, na mesma hipótese:

4) $f(a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + \ldots + a_n f(u_n)$,

quaisquer que sejam $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

TEOREMA. *Toda a afinidade* Φ *determina uma aplicação linear* Φ_o *(bijectiva) no conjunto dos vectores situados no domínio de* Φ.

Demonstração:

a) Seja Φ uma transformação afim de espaço $\mathcal{E}$. Então, como vimos no número anterior, Φ determina uma aplicação Φ_o de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$ segundo a fórmula:

$$\Phi_o(\overrightarrow{AB}) = \Phi(B) - \Phi(A) \quad , \quad \forall A, B \in \mathcal{E}$$

É claro que Φ_o é bijectiva, tendo-se

$$\Phi_o^{-1}(\overrightarrow{AB}) = \Phi^{-1}(B) - \Phi^{-1}(A).$$

Para simplificar a escrita, vamos pôr $\Phi_o = f$ *e omitir as setas sobre as letras* u, v,..., *o que não traz perigo de confusão.*

Consideremos dois vectores u, v quaisquer e seja $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$, $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$. Então:

$$u + v = \overrightarrow{AC} \qquad \text{e} \qquad f(u + v) = \overrightarrow{A'C'}$$

e como $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = f(u) + f(v)$, vem

$$(1) \qquad f(u + v) = f(u) + f(v)$$

Em particular, se $v = -u$, tem-se $f(u + v) = f(0) = 0$ e portanto

$$(2) \quad f(u) + f(-u) = 0 \text{ ou seja } f(-u) = -f(u)$$

Consideremos agora um vector u e um número real a. Se $a = 0$ ou $u = 0$, tem-se obviamente $f(au) = af(u) = 0$. Se $a \neq 0$ e $u \neq 0$, verifica-se um dos seguintes casos:

1.° caso: a *é um número natural* n. Se $n = 1$, tem-se obviamente $f(au) = af(u)$. Se $n > 1$, tem-se

$$au = u + \ldots + u \quad (n \text{ vezes})$$

e, aplicando (1) repetidamente, vem

$$f(au) = f(u) + \ldots + f(u) \quad (n \text{ vezes}) \text{ e portanto } f(au) = af(u).$$

2.° caso: a *é um número fraccionário* > 0. Seja $a = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e ponhamos

$$v = \frac{1}{n} u$$

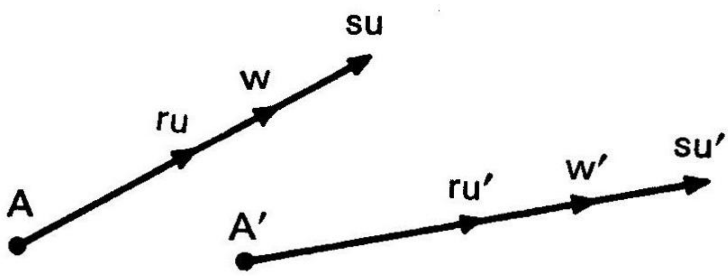
Então $u = n\,v$, $a\,u = m\,v$ donde

$$f(u) = n\,f(v), \quad f(au) = m\,f(v)$$

e portanto

$$f(au) = \frac{m}{n} f(u) = a\,f(u)$$

3.° caso: a *é um número irracional* > 0. Seja $w = au$, $u' = f(u)$, $w' = f(w)$. Então w' é colinear com u' (porquê) e existe portanto um número a' tal que $w' = a'u'$.



Sejam agora r, s dois números racionais quaisquer tais que (2) $r < a < s$.

Então $r|u| < a|u| < s|u|$ ou seja $r|u| < |w| < s|u|$ Daqui se deduz

$$r|u'| < |w'| < s|u'|$$

ou seja $r|u'| < a'|u'| < s|u'|$, donde

$$r < a' < s$$

Daqui e de (2) resulta que $|a - a'| < s - r$. Como $s - r$ pode ser tão pequeno quanto se queira, tem-se necessariamente $a = a'$ e portanto $f(au) = a\,f(u)$.

4.° caso: a *é negativo.* Então $au = |a|(-u)$ e, como $|a| > 0$, estamos num dos casos anteriores. Portanto

$$f(au) = f[\,|a|(-u)] = |a|\,f(-u)$$

donde, atendendo a (2):

$$f(au) = -|a|\;f(u) = af(u)$$

Assim, em qualquer dos casos, verifica-se a condição (2) da definição anterior de aplicação linear.

Logo f (ou seja Φ_o) *é uma aplicação linear do espaço vectorial* $\mathcal{V}$ *sobre si mesmo.*

b) Seja agora Φ uma afinidade dum plano α sobre um plano β (podendo ser $\alpha = \beta$). Demonstra-se como anteriormente que Φ determina uma aplicação linear Φ_o (biunívoca) de $\mathcal{V}_\alpha$ sobre $\mathcal{V}_\beta$.

7. **Determinação de todas as possíveis afinidades entre dois planos ou do espaço.** Vamos começar por estudar o seguinte

PROBLEMA. *São dados:* 1) *dois planos* α, β *(distintos ou coincidentes);* 2) *três pontos* A, B, C *não colineares de* α; 3) *três pontos* A′, B′, C′ *não colineares de* β. *Determinar uma afinidade* Φ *de* α *sobre* β *que transforme* A *em* A′, B *em* B′ *e* C *em* C′.

Recordemos (ver Cap. 1, n.° 16) que, para todo o ponto P de α existe um par (x, y) de números reais tais que

$$P = A + x\ (B - A) + y\ (C - A)$$

Então, se Φ é uma afinidade de α sobre β, virá

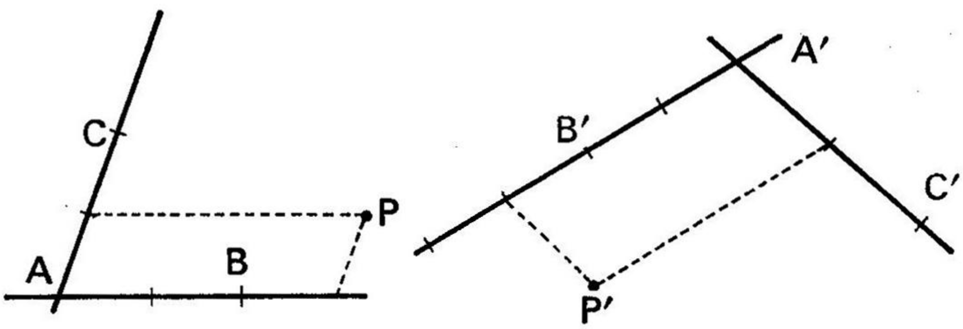
$$\begin{aligned}\Phi(P) &= \Phi(A) + \Phi_0[x(B - A) + y(C - A)] \\ &= \Phi(A) + x\,\Phi_0(B - A) + y\,\Phi_0(C - A)\end{aligned}$$

em que Φ_0 é aplicação linear definida para Φ.

Logo, *se existe* uma afinidade Φ que transforma A em A′, B em B′ e C em C′, *só pode ser* a que é dada pela fórmula

(1) $P' = A' + x(B' - A') + y(C' - A')$, sendo $P' = \Phi(P)$.

(Por exemplo, na figura seguinte, tem-se $x = 3/2$, $y = 1/2$)



Vamos agora ver que a fórmula (1) define realmente uma afinidade $P \rightarrowtail P'$ de α sobre β, que transforma A em A′, B em B′ e C em C′.

Em primeiro lugar, Φ é bijectiva. Com efeito, Φ resulta das aplicações bijectivas $P \rightarrowtail (x, y)$ e $(x, y) \rightarrowtail P'$ respectivamente de α sobre $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^2$ sobre β.

Em segundo lugar, é fácil ver que $\Phi(A) = A'$ $(x = y = 0)$, $\Phi(B) = B'(x = 1,\ y = 0)$, $\Phi(C) = C'$ $(x = 0,\ y = 1)$.

Resta provar que Φ *transforma segmentos de recta em segmentos de recta.* Sejam M, N dois pontos quaisquer de α e M′, N′ os seus transformados por Φ. Então

$$P \in \overline{MN} \Leftrightarrow \exists\, t\colon P = M + t(M - N) \wedge 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Ora

$$\Phi(P) = \Phi(M) + t\, \Phi_0(M - N) \qquad \text{(porquê?)}$$

ou seja

$$P' = M' + t(M' - N')$$

Portanto

$$P = M + t(M - N) \Leftrightarrow P' = M' + t(M' - N'), \text{ donde}$$
$$P \in \overline{MN} \Leftrightarrow P' \in \overline{M'N'}$$

o que significa que $\Phi(\overline{MN}) = \overline{M'N'}$,

q.e.d.

Assim, como se vê, o problema é *sempre possível* e *determinado,* isto é:

TEOREMA 1. *Dados dois planos α, β e dois ternos de pontos não colineares*

$$(A, B, C) \quad , \quad (A', B', C')$$

respectivamente em α e em β, existe sempre uma e uma só afinidade que transforma (A, B, C) *em* (A′, B′, C′). *Essa afinidade é a aplicação Φ que faz corresponder a cada ponto* P *de α o ponto* P′ *de β cujas coordenadas no referencial* (A′, B′, C′) *são idênticas às coordenadas de* P *no referencial* (A, B, C), isto é:

$$P = A + x(B - A) + y(C - A) \Rightarrow P' = A' + x(B' - A') + y(C' - A')$$

É bem fácil estender este teorema ao caso de afinidades espaciais:

TEOREMA 2. *Dados em $\mathcal{E}$ dois quaternos ordenados de pontos não complanares*

$$(A, B, C, D) \ , \ (A', B', C', D')$$

existe sempre uma e uma só afinidade espacial que transforma (A, B, C, D) em (A′, B′, C′, D′). *Essa afinidade é a aplicação Φ que faz corresponder a cada ponto*

$$P = A + x(B - A) + y(C - A) + z(D - A)$$

o ponto

$$P' = A' + x(B' - A') + y(C' - A') + z(D' - A')$$

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor.

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. É evidente que, sendo f uma aplicação qualquer de um conjunto D num conjunto E, chamamos *transformado de um par ordenado* (a, b) por f (sendo $a, b \in D$) o par ordenado (f(a), f(b)). E analogamente para ternos ordenados, quaternos ordenados, etc. — dum modo geral para sequências quaisquer. Nesta ordem de ideias, sendo *n* um número natural qualquer e R um subconjunto de D^n (relação n-ária), chamaremos *transformada de* R *por* f e representaremos por f(R), o conjunto dos transformados de todos os elementos de R por f.

Até aqui temos chamado *figuras geométricas* apenas aos conjuntos de pontos. Mais geralmente, podemos chamar figuras geométricas a sequências, a conjuntos de sequências de pontos, a conjuntos de conjuntos de pontos ou de sequências de pontos, etc., etc. Por exemplo, uma recta orientada (ou um segmento orientado), será uma figura geométrica, pois pode ser considerada como um conjunto de pares ordenados (a relação de ordem definida na recta). Analogamente, um vector será uma figura geométrica, pois pode ser considerado como um conjunto de segmentos orientados.

Aos conjuntos de pontos chamaremos *lugares geométricos* (ou simplesmente *lugares*), para os distinguir das outras figuras geométricas. Assim, por exemplo, o conjunto das geratrizes de uma superfície cónica (conjunto de tipo 2) será uma figura geométrica, mas não um lugar geométrico — ao passo que a superfície cónica será o lugar geométrico correspondente, isto é, *a reunião de todos os conjuntos de pontos constituída pelas geratrizes.*

EXERCÍCIO. Marque a azul no papel dois ternos ordenados de pontos (A, B, C) e (A′, B′, C′) tais que

$$|AB| = 3 \text{ cm} \quad , \quad |AC| = 4{,}5 \text{ cm} \quad , \quad AB \perp AC$$

$$|A'B'| = 6 \text{ cm} \quad , \quad |A'C'| = 9 \text{ cm} \quad , \quad A'B' \perp A'C'$$

Represente a tracejado e a preto as rectas AB, AC, A′B′, A′C′ e construa (também a tracejado e a preto) dois quadriculados constituídos pelas referidas rectas e outras paralelas a estas, dispostas entre si às distâncias mínimas de 0,5 cm e de 1 cm, respectivamente. Os quadriculados devem ter respectivamente a dimensão 5 cm × 5 cm e 10 cm × 10 cm. Posto isto, desenhe a azul uma figura simples (imitando um mapa) que cubra grande parte do 1.º quadriculado, e desenhe em seguida a vermelho (aproximadamente) a imagem dessa figura pela afinidade que transforma (A, B, C) em (A′ B′, C′). Que relação verifica entre as duas figuras?

Feito isto, marque num outro papel (a azul) um terceiro terno ordenado (A″, B″, C″) tal que

$$|A''B''| = 4 \text{ cm} \quad , \quad |A''C''| = 8 \text{ cm} \quad , \quad |A\hat{B}C| = 60^\circ$$

e desenhe a vermelho a imagem da primeira figura, pela afinidade que transforma (A, B, C) em (A″, B″, C″). Que relação verifica entre estas duas figuras? (*Observação:* Para melhor distinguir as rectas auxiliares a tracejado, use algarismos escritos à margem, para as rectas com uma das direcções, e letras a, b,... para as rectas com a outra direcção, pondo além disso plicas nos algarismos e letras correspondentes, relativas à 2.ª e à 3.ª figuras.)

8. **Determinação de todas as possíveis semelhanças, isometrias e deslocamentos, entre dois planos ou do espaço.** Para melhor compreensão do que vai seguir-se, é aconselhável começar por resolver o exercício anterior.

Posto isto, considerem-se dois ternos ordenados de pontos não colineares, (A, B, C) e (A′, B′, C′), respectivamente em dois planos α e β (podendo ser $\alpha = \beta$). Pergunta-se:

A que condição devem obedecer estes dois ternos, para que a afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo seja uma semelhança?

Uma condição necessária é evidentemente a seguinte:

Os dois ternos devem ser semelhantes.

Esta condição pode ser traduzida simbolicamente, de três modos diversos, equivalentes entre si:

$$(1) \qquad \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

$$(2) \qquad A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C' \wedge C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B'$$

$$(3) \qquad C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B' \wedge \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Pergunta-se agora:

É esta condição suficiente para que a afinidade Φ seja uma semelhança?

Vamos ver que sim. Suponhamos verificada esta condição e consideremos dois pontos de α:

$$P = A + x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \quad , \quad Q = A + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC},$$

assim como os seus transformados por Φ:

$$P' = A' + x \cdot \overrightarrow{A'B'} + y \cdot \overrightarrow{A'C'} \quad , \quad Q' = A' + u \cdot \overrightarrow{A'B'} + v \cdot \overrightarrow{A'C'}$$

Trata-se de provar o seguinte:

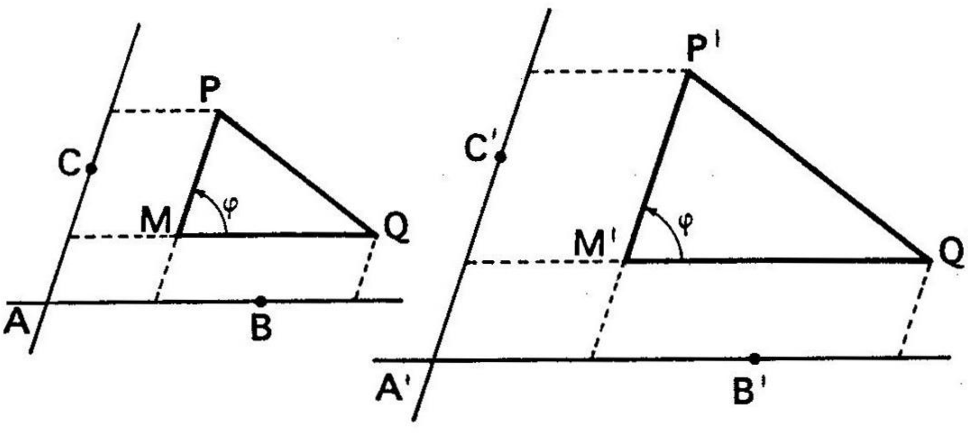
$$(1) \qquad \frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Se $v = y$, tem-se evidentemente

$$Q - P = (u - x)\overrightarrow{AB} \quad , \quad Q' - P' = (u - x)\overrightarrow{A'B'}$$

e portanto $|PQ| = |u - x| \cdot |AB|$, $|P'Q'| = |u - x| \cdot |A'B'|$, donde se conclui (1). Analogamente, se $x = u$.

Seja agora $x < u \wedge y > v$. Então, as rectas que passam respectivamente por P e Q e são paralelas a AC e AB encon-



tram-se num ponto M, e tem-se, evidentemente:

$$M = A + x \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC}$$

donde

$$P - M = (y - v)\overrightarrow{AC} \quad , \quad Q - M = (u - x)\overrightarrow{AB}$$

e analogamente

$$P' - M' = (y - v)\overrightarrow{A'C'} \quad , \quad Q' - M' = (u - x)\overrightarrow{A'B'}$$

Daqui se deduz, por um lado:

$$\frac{|M'P'|}{|MP|} = \frac{|M'Q'|}{|MQ|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Por outro lado, como $y - v > 0$ e $u - x > 0$, vê-se que os ângulos $\hat{M}QP$ e $\hat{A}BC$ têm os lados *paralelos e orientados no mesmo sentido,* sendo portanto equipolentes, e que o mesmo sucede com os ângulos $\hat{M}'Q'P'$ e $\hat{A}'B'C'$. Logo os ângulos convexos $P\hat{M}Q$ e $P'\hat{M}'Q'$ são iguais e assim, por semelhança de triângulos, verifica-se (1), isto é:

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

Se $x > u \wedge y < v$, basta trocar os papéis de P e Q.

Se $x > u \wedge y > v$ ou $x < u \wedge y < v$, a demonstração é análoga, com a diferença de que os ângulos $\hat{M}QP$ e $\hat{A}BC$ são suplementares.

E como não resta nenhuma outra hipótese a considerar, fica provado o seguinte:

TEOREMA 1. *Dados dois ternos ordenados de pontos não colineares* (A, B, C) *e* (A', B', C'), *respectivamente em dois* *planos α e β, a afinidade que transforma o primeiro no segundo é uma semelhança, sse os dois ternos são semelhantes.*

Deste teorema se deduz imediatamente, como corolário, uma condição necessária e suficiente para que a afinidade considerada seja uma isometria: *é que os dois ternos ordenados de pontos sejam isométricos, isto é, que*

$$|A'B'| \doteq |AB| \quad , \quad |A'C'| \doteq |AC| \quad , \quad |B'C'| \doteq |BC|$$

Se, além disso, os dois planos coincidem (isto é, se $\alpha = \beta$), uma condição necessária e suficiente para que a afinidade seja um deslocamento é que *os dois ternos ordenados de pontos sejam positivamente isométricos,* isto é, *que* $|A'B'| \doteq |AB|$, $|A'C'| \doteq |AC|$ *e os ângulos orientados* $\hat{A}BC$ *e* $\hat{A}'B'C'$ *sejam equipolentes.*

O teorema 1 estende-se facilmente a $\mathcal{E}$:

TEOREMA 2. *Dados dois quaternos ordenados de pontos não complanares* (A, B, C, D) *e* (A', B', C', D'), *a afinidade que transforma o primeiro no segundo é uma semelhança, sse os dois quaternos são semelhantes, isto é, sse*

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|B'D'|}{|BD|} = \frac{|C'D'|}{|CD|}$$

Quanto a isometrias e deslocamentos, as considerações são análogas às que fizemos no caso dos planos.

EXERCÍCIOS. Atendendo aos teoremas anteriores e às conclusões a que conduzem os exercícios do n.° 3, prove os seguintes factos:

I. Todo o deslocamento do plano é uma rotação ou uma translação.

II. Um deslocamento do plano é uma translação, sse não deixa fixo nenhum ponto ou deixa fixos todos os pontos do plano.

III. Uma semelhança negativa do plano que deixe fixos dois pontos distintos A, B só pode ser a simetria em relação a AB.

IV. Um deslocamento do plano que deixe fixos dois pontos distintos só pode ser a aplicação identidade.

V. Todo o deslocamento do espaço pode ser obtido como produto de uma rotação por uma translação, que pode ser sempre escolhida com direcção paralela ao eixo de rotação.

VI. Uma semelhança negativa do espaço que deixe fixos três pontos A, B, C não colineares só pode ser a simetria em relação ao plano ABC.

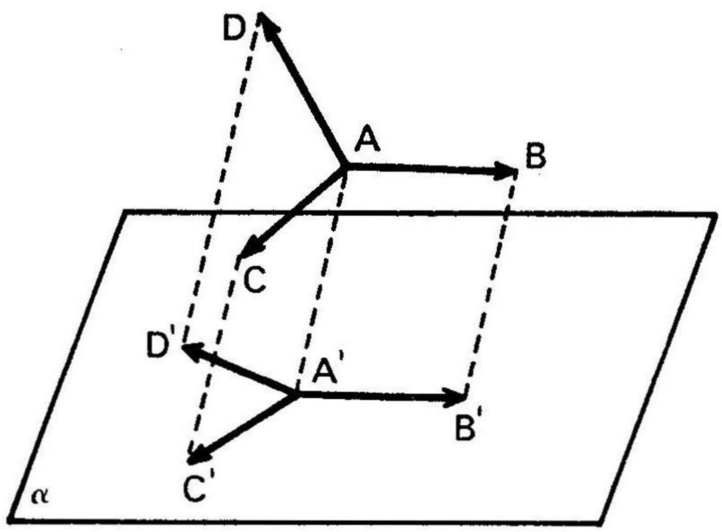
VII. Um deslocamento do espaço que deixe fixos três pontos A, B, C não colineares só pode ser a aplicação identidade.

VIII. Um deslocamento do espaço que deixe fixo um ponto A é uma rotação em torno de um eixo que passa por A.

IX. O produto de duas reflexões do plano é uma rotação ou uma translação. Reciprocamente, toda a rotação ou translação do plano pode ser obtida como produto de duas reflexões.

X. Idem para o espaço.

9. **Aplicações afins*.** Tornemos ao exemplo anterior da projecção Φ dos pontos do espaço $\mathcal{E}$ sobre um plano α paralelamente a uma recta d (não paralela a α). Vimos que Φ é uma aplicação de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}$ (mas não sobre $\mathcal{E}$), que transforma segmentos de recta em segmentos de recta, mas que transforma as rectas paralelas a d em pontos. Dissemos que se trata de uma *afinidade degenerada.*



Sejam A, B, C, D quatro pontos de $\mathscr{E}$ não complanares e A', B', C', D' respectivamente as suas projecções sobre α paralelamente a d. É evidente que A', B', C', D' são complanares, embora não colineares (porquê?) e, a cada ponto

$$P = A + x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} + z \cdot \overrightarrow{AD}$$

de $\mathscr{E}$, corresponderá o ponto

$$P' = A' + x \cdot \overrightarrow{A'B'} + y \cdot \overrightarrow{A'C'} + z \cdot \overrightarrow{A'D'}$$

de α (e portanto de $\mathscr{E}$).

Dum modo geral, chamaremos *aplicação afim* do espaço $\mathscr{E}$ em si mesmo toda a aplicação da forma

$$P = O + x\vec{e} + y\vec{f} + z\vec{g} \rightsquigarrow P' = O' + x\vec{e}\,' + y\vec{f}\,' + z\vec{g}\,',$$

em que O e O' são pontos arbitrários de $\mathscr{E}$, $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ *vectores não complanares de* $\mathscr{E}$ (elementos de $\mathscr{V}$) e $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ *vectores arbitrários de* $\mathscr{E}$.

Em particular, se $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ são não complanares, a aplicação Φ é bijectiva e portanto uma *transformação afim* (ou *afinidade*).

Mas, se $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ são complanares, a aplicação Φ já não é bijectiva e diz-se uma *afinidade degenerada.* Nesta hipótese, ainda há a distinguir dois casos:

1.º. *Os vectores* $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ *não são colineares* (embora sejam complanares). Neste caso, o contradomínio de Φ é um plano, como no exemplo anterior.

2.º. *Os vectores* $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ *são colineares.* Neste caso, o contradomínio de Φ é uma recta. Exemplo: a projecção de $\mathscr{E}$ sobre um plano α, seguida da projecção de α sobre uma recta $r \subset \alpha$.

É claro que a definição anterior se estende ao caso de planos ou rectas. Por exemplo:

Dadas duas rectas r, s (distintas ou coincidentes) chama-se *aplicação afim de* r *em* s toda a aplicação Φ da forma

$$P = O + x\vec{e} \rightarrow P' = O' + x\vec{e}'$$

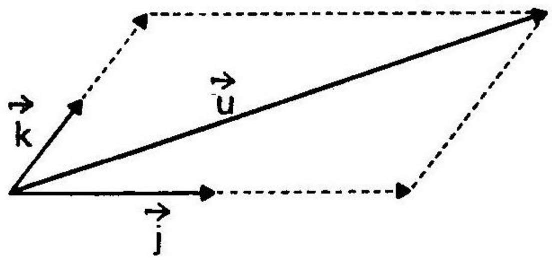
em que O e O′ são pontos arbitrários respectivamente de *r* e *s*, $\vec{e}$ um *vector não nulo de* r e $\vec{e}'$ *um vector qualquer de* s. Se $\vec{e}' = \vec{0}$, é claro que o contradomínio de Φ se reduz ao ponto O′. Se $\vec{e}' \neq 0$, Φ é bijectiva e podemos chamar-lhe uma *transformação afim* (ou *afinidade*). Mas facilmente se vê que, neste caso, Φ é uma semelhança de *r* sobre *s*. Assim:

No caso unidimensional (aplicações entre rectas) não há distinção entre afinidades e semelhanças.

CAPÍTULO IV

REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA DE APLICAÇÕES LINEARES E TRANSFORMAÇÕES AFINS

1. **Aplicações lineares e matrizes.** Consideremos o conjunto $\mathcal{V}_\alpha$ dos vectores de um plano α. Já sabemos que $\mathcal{V}_\alpha$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\vec{j}$, $\vec{k}$ dois vectores não colineares de $\mathcal{V}_\alpha$.



Então, como vimos, a fórmula

$$(1) \qquad \vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k}$$

estabelece uma correspondência bijectiva $\vec{u} \curvearrowright (x, y)$ entre os vectores $\vec{u} \in \mathcal{V}_\alpha$ e os pares $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Posto isto, seja F uma aplicação linear do espaço vectorial $\mathcal{V}_\alpha$ *em si mesmo*, isto é, uma aplicação de $\mathcal{V}_\alpha$ em $\mathcal{V}_\alpha$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}) \\ F(a\vec{u}) = a\,F(\vec{u}) \end{array}\right\} \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_\alpha;\ a \in \mathbb{R}$$

Então, aplicando F a ambos os membros de (1), vem

$$F(\vec{u}) = x\,F(\vec{j}) + y\,F(\vec{k}) \quad , \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$$

ou seja, pondo $F(\vec{u}) = \vec{u}'$, $F(\vec{j}) = \vec{j}'$, $F(\vec{k}) = \vec{k}'$:

$$(2) \qquad \vec{u}' = x\,\vec{j}' + y\,\vec{k}'$$

Reciprocamente, sendo j′, k′ *dois vectores arbitrários de* $\mathcal{V}_\beta$, a aplicação F que faz corresponder a cada vector $\vec{u}$ dado por (1) o vector $\vec{u}'$ dado por (2) é linear. Com efeito, se considerarmos dois vectores

$$\vec{u}_1 = x_1\vec{j} + y_1\vec{k} \quad , \quad \vec{u}_2 = x_2\vec{j} + y_2\vec{k}$$

tem-se

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2)\vec{j} + (y_1 + y_2)\vec{k}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} F(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) &= (x_1 + x_2)\vec{j}' + (y_1 + y_2)\vec{k}' \\ &= (x_1\vec{j}' + y_1\vec{k}') + (x_2\vec{j}' + y_2\vec{k}') \\ &= F(\vec{u}_1) + F(\vec{u}_2) \end{aligned}$$

Analogamente se prova que $F(a\,\vec{u}) = a\,F(\vec{u})$, $\forall\, a \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathcal{V}_\alpha$.

Suponhamos agora dadas as componentes dos vectores $\vec{j}', \vec{k}'$ na base $(\vec{j}, \vec{k})$. Seja:

$$\vec{j}' = a\,\vec{j} + b\,\vec{k} \quad , \quad \vec{k}' = c\,\vec{j} + d\,\vec{k},$$

ou, abreviadamente,

$$j' \hookrightarrow (a, b) \quad , \quad k' \hookrightarrow (c, d)$$

Procuremos então as componentes do vector

$$\vec{u}' = x\,\vec{j}' + y\,\vec{k}' = F(\vec{u})$$

na base $(\vec{j}, \vec{k})$, Tem-se:

$$(3) \qquad \vec{u}' = x(a\,\vec{j} + b\,\vec{k}) + y(c\,\vec{j} + d\,\vec{k})$$

$$= (ax + cy)\vec{j} + (bx + dy)\vec{k}$$

Por conseguinte, se designarmos por x', y' ordenadamente as componentes de $\vec{u}'$ na base $(\vec{j}, \vec{k})$, isto é, se pusermos

$$\vec{u}' = x'\vec{j} + y'\vec{k}$$

virá, por comparação com (3),

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \qquad \text{(porquê?)}$$

Assim, dar a aplicação linear $F: \vec{u} \rightsquigarrow \vec{u}'$ de $\mathcal{V}_\alpha$ em $\mathcal{V}_\alpha$

equivale a dar a aplicação $(x, y) \rightsquigarrow (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, definida pelo sistema (4).

Por sua vez, dar este sistema de equações equivale a dar o quadro dos seus coeficientes, assim indicado

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Chama-se *matriz quadrada de ordem* 2 todo o quadro deste tipo.

Os pares ordenados (a, c) e (b, d) são as *linhas* da matriz: respectivamente a *1.ª linha* e a *2.ª linha.*

Os pares ordenados (a, b) e (c, d) são as *colunas* da matriz: respectivamente a *1.ª coluna* e a *2.ª coluna — representativas dos vectores* $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

Reciprocamente, sendo a, b, c, d números reais arbitrariamente dados, a matriz (4) define uma aplicação linear F de $\mathcal{V}_\alpha$ em $\mathcal{V}_{\alpha'}$ por intermédio do sistema (5), sendo

$$\vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k} = F(\vec{j}) \quad , \quad \vec{k}' = c\vec{j} + d\vec{k} = F(\vec{k})$$

Em conclusão:

TEOREMA 1. *Adoptada uma base* $(\vec{j}, \vec{k})$ *em* $\mathcal{V}_{\alpha'}$, *o sistema* (4) *estabelece uma correspondência bijectiva*

$$F \rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

entre as aplicações lineares F *de* $\mathcal{V}_\alpha$ *em* $\mathcal{V}_\alpha$ *e as matrizes quadradas de ordem* 2 *de números reais. Neste caso* F *é a aplicação que transforma os vectores* $\vec{j}$, $\vec{k}$ *respectivamente nos vectores*

$$\vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k} \quad , \quad \vec{k}' = c\vec{j} + d\vec{k}$$

Estas considerações podem generalizar-se ao espaço vectorial $\mathcal{V}$, constituído pelos vectores do espaço pontual $\mathcal{E}$.

Chama-se *matriz quadrada de ordem* 3 todo o quadro do tipo

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

com 3 *linhas* (a, a', a''), (b, b', b'') e (c, c', c''), respectivamente 1.ª, 2.ª e 3.ª linhas, e três *colunas* (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), respectivamente 1.ª, 2.ª e 3.ª colunas. Os símbolos a, b, c, a',... podem designar entes das mais diversas naturezas *(elementos da matriz)*. No estudo que vamos fazer, interessam-

-nos apenas matrizes reais, isto é, *matrizes cujos elementos são números reais.*

Posto isto, sejam $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$ três vectores não complanares de $\mathcal{V}$. Como sabemos, a fórmula

$$(6) \qquad \vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{m}$$

estabelece uma correspondência bijectiva $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y, z)$ entre os elementos $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ e os elementos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Posto isto, seja F uma aplicação linear de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$ e ponhamos $\vec{u}' = F(\vec{u})$, $\vec{j}' = F(\vec{j})$, $\vec{k}' = F(\vec{k})$, $\vec{m}' = F(\vec{m})$. Então, raciocinando como no caso do plano, vê-se que

$$(7) \qquad \vec{u}' = x\vec{j}' + y\vec{k}' + z\vec{m}'$$

Reciprocamente, sendo $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, $\vec{m}'$ três vectores de $\mathcal{V}$ *dados arbitrariamente,* a aplicação F, que faz corresponder a cada vector dado por (6) o vector $\vec{u}'$ dado por (7), é linear.

Seja agora

$$(8) \qquad \begin{cases} \vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k} + c\vec{m} \\ \vec{k}' = a'\vec{j} + b'\vec{k} + c'\vec{m} \\ \vec{m}' = a''\vec{j} + b''\vec{k} + c''\vec{m} \end{cases}$$

e

$$\vec{u}' = x'\vec{j} + y'\vec{k} + z'\vec{m}$$

Então, é fácil ver, como no caso anterior, que

$$(9) \qquad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$$

E chega-se agora ao seguinte

TEOREMA 2. *Adoptada uma base* (j, k, m) *em* $\mathcal{V}$, *o sistema* (9) *estabelece uma correspondência bijectiva*

$$F \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

entre as aplicações lineares F *de* $\mathcal{V}$ *em* $\mathcal{V}$ *e as matrizes quadradas reais de ordem* 3. *Neste caso* F *é a aplicação linear de* $\mathcal{V}$ *em* $\mathcal{V}$ *que transforma os vectores de base* $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$ *respectivamente nos vectores* $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, $\vec{m}'$ *dados por* (8).

EXERCÍCIOS:

I. Sendo $(\vec{j}, \vec{k})$ uma base ortogonal no plano, designe por $\vec{j}'$ o vector representativo do número complexo $3 + 4i$ e seja $\vec{k}' = i\,\vec{j}'$. Posto isto, determine a matriz da aplicação linear que transforma $(\vec{j}, \vec{k})$ em $(\vec{j}', \vec{k}')$ e a matriz da aplicação inversa.

II. Dada uma base (j, k, m) de $\mathcal{V}$ e os vectores

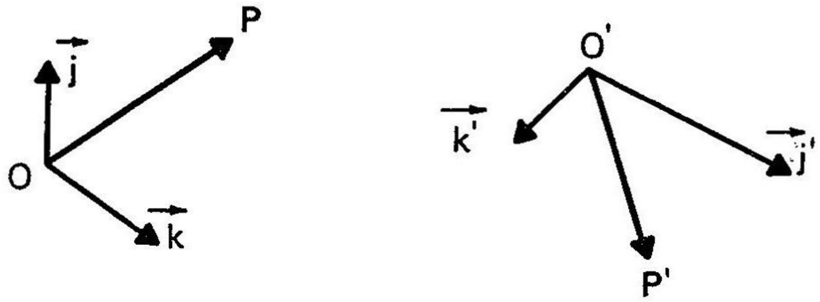
$$\vec{u} \rightsquigarrow (0,\ 1,\ -2) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (-1,\ 0,\ 1) \quad , \quad \vec{w} \rightsquigarrow (2,\ -1,\ 1)$$

determine as componentes dos transformados de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ pela aplicação linear F de matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 9/2 & -6 \\ 1 & -3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Que relação verifica entre os vectores obtidos? Qual é então o contradomínio de F?

2. **Representação analítica das afinidades de um plano ou do espaço.** Consideremos *num mesmo plano* π dois referenciais cartesianos $(O, \vec{j}, \vec{k})$, $(O', \vec{j}', \vec{k}')$. Portanto O e O′ são dois pontos quaisquer do plano, $(\vec{j}\,,\ \vec{k})$ e $(\vec{j}'\,,\ \vec{k}')$ dois pares quaisquer de vectores não colineares (bases de $\mathcal{V}_\pi$).



Segundo o estabelecido no Captíulo III, n.º 7 (pág. 111), existe uma e uma só afinidade Φ do plano que transforma $(O, \vec{e}, \vec{f})$ em $(O', \vec{e}', \vec{f}')$ (1). Seja P um ponto qualquer do plano. Então

$$\Phi(P) = \Phi(O) + \Phi_o\,(P - O) \qquad \text{ou seja}$$

$$(1) \qquad P' = O' + \Phi_o(\overrightarrow{OP}) \qquad \text{ou ainda}$$

$$(2) \qquad \overrightarrow{O'P'} = \Phi_o(\overrightarrow{OP})$$

em que $P' = \Phi(P)$ e Φ_o é a aplicação linear definida por Φ em $\mathcal{V}_\pi$. Suponhamos agora que se tem, no 1.º referencial:

$$O' \rightsquigarrow (p, q) \quad , \quad \vec{j}' \rightsquigarrow (a, b) \quad , \quad \vec{k}' \rightsquigarrow (c, d)$$

$$P \rightsquigarrow (x, y) \quad , \quad P' = \Phi(P) \rightsquigarrow (x', y')$$

---

(1) É claro que, em vez dos ternos $(O, \vec{j}, \vec{k})$, $(O', \vec{j}', \vec{k}')$, podemos considerar dois ternos de pontos (O, A, B), (O′, A′, B′), tais que $\overrightarrow{OA} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{k}$, $\overrightarrow{O'A'} = \vec{j}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{k}'$.

Então, pelo que se viu no número anterior, a fórmula

$$\overrightarrow{O'P'} = \Phi\,(\overrightarrow{OP})$$

equivale ao sistema de equações

$$(3) \qquad \begin{cases} x' - p = ax + cy \\ y' - q = bx + dy \end{cases}$$

ou seja

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

Será esta pois a representação analítica da transformação Φ considerada. Como se vê, esta é definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{representativa de } \Phi_0$$

e pelo par ordenado (p, q), representativo do vector $\overrightarrow{OO'}$ (que define uma translação de O para O′).

Assim, a afinidade Φ aparece decomposta numa afinidade que deixa fixo o ponto O e na translação que leva O para O′. A primeira pode ser identificada com a aplicação linear Φ_0 visto que, uma vez escolhida a origem O, cada ponto P do plano pode ser identificado com o seu vector de posição $\overrightarrow{OP}$.

Estas considerações estendem-se imediatamente ao espaço $\mathcal{E}$. Consideremos dois referenciais:

$$(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}) \text{ e } (O', \vec{j}', \vec{k}', \vec{m}')$$

Então a afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo é definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + p \\ y' = bx + b'y + b''z + q \\ z' = cx + c'y + c''z + r \end{cases}$$

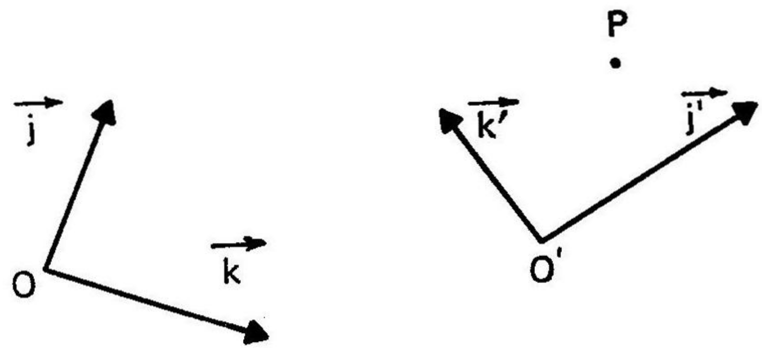
em que se tem, relativamente ao 1.º referencial:

$$(a,\ b,\ c) \curvearrowright \vec{j}' \quad , \quad (a',\ b',\ c') \curvearrowright \vec{k}' \quad , \quad (a'',\ b'',\ c'') \curvearrowright \vec{m}'$$

$$(x,\ y,\ z) \curvearrowright P \quad , \quad (x',\ y',\ z') \curvearrowright P' = \Phi(P)$$

O problema da representação analítica das afinidades equivale de certo modo, como vamos ver, ao PROBLEMA DA MUDANÇA DE COORDENADAS, quando se passa de um referencial para outro.

Comecemos pelo caso do plano:



Dadas no plano as coordenadas x, y *dum ponto* P *num referencial* $(O,\ \vec{j},\ \vec{k})$, *determinar as coordenadas* x', y' *do mesmo ponto num outro referencial* $(O',\ \vec{j}',\ \vec{k}')$.

Então

$$P = O + x\vec{j} + y\vec{k} \tag{5}$$

Procuram-se x', y' tais que

$$P = O' + x'\vec{j}' + y'\vec{k}' \tag{6}$$

Seja $\vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k}$, $k' = c\vec{j} + d\vec{k}$, $O' = O + p\vec{j} + q\vec{k}$
Então (6) equivale a

$$P = O + (ax' + cy' + p)\vec{j} + (bx' + dy' + q)\vec{k},$$

donde, por comparação com (5):

$$(7) \qquad \begin{cases} x = ax' + cy' + p \\ y = bx' + dy' + q \end{cases}$$

Assim, como se vê, as equações que dão a mudança de coordenadas têm a mesma forma das equações (4), mas com as variáveis trocadas. No problema anterior tratava-se de coordenadas de dois pontos P e P′ no primeiro referencial. Agora trata-se de coordenadas de *um mesmo ponto* P em dois referenciais diferentes. Mas note-se ainda:

Para determinar as novas coordenadas x′, y′ *a partir das primitivas* x, y, *há que resolver o sistema* (7) *em relação a* x′, y′.

Analogamente para o espaço $\mathcal{E}$.

Um problema inteiramente análogo é o da mudança de base num espaço vectorial.

EXERCÍCIOS:

I. Considere a afinidade Φ dada no plano pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y - 1 \\ y' = 4x + 3y + 1 \end{cases}$$

relativamente a um referencial ortonormal. Posto isto:

a) Determine os transformados por Φ dos pontos

$$A \rightarrow (0, 0) \quad , \quad B \rightarrow (1, 0) \quad , \quad C \rightarrow (1/2, 1)$$

b) Desenhe o triângulo [ABC] e o seu transformado por Φ. Que espécie de afinidade é Φ?

c) Dada a recta r de equação $x + 2y = 1$, ache uma equação da recta $r' = \Phi(r)$. (*Sugestão:* convém resolver o sistema anterior em relação a x, y.)

d) Represente analiticamente Φ^{-1}.

II. Determine as transformadas das figuras de equação $x^2 - y^2 = r^2$ (com $r \in \mathbb{R}$) pelas afinidades da forma [1]

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx + ay \end{cases} \quad , \qquad \text{com } a^2 - b^2 = 1$$

III. Dada a equação

$$m^2x^2 - n^2y^2 = 1$$

num referencial ortonormal, achar a equação correspondente num referencial em que os novos eixos coincidam com as assímptotas da hipérbole representada por aquela equação. (*Sugestão:* no novo referencial as equações das assímptotas deverão ser $x' = 0$, $y' = 0$, enquanto no primeiro são $mx + ny = 0$, $mx - ny = 0$).

3. **Produto interno de dois vectores.** Para poder decidir se uma afinidade representada analiticamente é uma isometria ou uma semelhança, o processo mais elegante e mais cómodo baseia-se na noção de *produto interno de dois vectores.*

Consideremos, por exemplo, num plano dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e seja

$$\vec{u} \rightsquigarrow (x, y) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (x', y')$$

relativamente a um referencial ortonormal do plano. Posto isto, procuremos *relacionar o quadrado do módulo da soma* $\vec{u} + \vec{v}$ *com os módulos de* $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como

$$\vec{u} + \vec{v} \rightsquigarrow (x + x', y + y'),$$

---

[1] Este exemplo tem especial interesse por estar intimamente relacionado com a teoria da relatividade.

tem-se

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$$
$$= (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) + 2(xx' + yy')$$

e portanto

(1) $$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2(xx' + yy')$$

donde

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$$

O 2.º membro mostra que o valor da expressão $xx' + yy'$ não depende da base adoptada (desde que esta seja ortonormal!), mas apenas dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Esse valor (número real) é chamado *produto interno de* $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$ e representado por qualquer das notações $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\vec{u}|\vec{v}$ (ler '$\vec{u}$ interno $\vec{v}$').

Ter-se-á pois, *por definição:*

(2) $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$$

Em particular, se $\vec{u} = \vec{v}$, vem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(4|\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}|^2) = |\vec{u}|^2,$$

o que induz a escrever, mais simplesmente,

$$\vec{u}^2 \text{ em vez de } |\vec{u}|^2$$

Assim, a fórmula (1) assume o aspecto sugestivo:

$$(3) \qquad \boxed{(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}}$$

Como se vê, a *expressão cartesiana do produto interno* num referencial ortonormal do plano é

$$(4) \qquad \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

Analogamente se vê que no espaço é

$$(5) \qquad \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'} \;,$$

supondo $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y, z)$ e $\vec{v} \rightsquigarrow (x', y', z')$ num referencial ortonormal.

Desta expressão cartesiana (ou da definição adoptada), imediatamente se inferem as seguintes

PROPRIEDADES DO PRODUTO INTERNO

I. *Comutatividade:* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}, \ \forall \vec{u}\cdot\vec{v} \in \mathcal{V}$

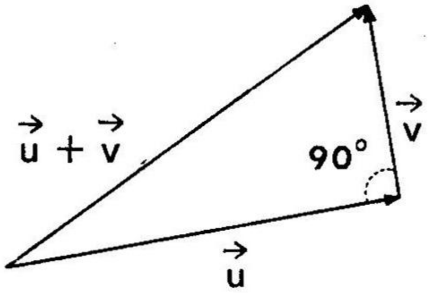
II. *Distributividade:* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}, \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$

III. *Homogeneidade:* $(a\vec{u})\cdot\vec{v} = a(\vec{u}\cdot\vec{u}), \ \forall \vec{u}, \ \vec{v} \in \mathcal{V}, \ a \in \mathbb{R}$

IV. $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 \quad , \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

V. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v}$

Esta última propriedade, muito importante (PROPRIEDADE DO ANULAMENTO DO PRODUTO INTERNO), deduz-se facilmente da fórmula (3), quer no caso em que um pelo menos dos vectores é nulo, *quer no caso em que são ambos não nulos e perpendiculares entre si* ($\vec{u} \perp \vec{v}$).



Com efeito, neste caso, a definição de soma $\vec{u} + \vec{v}$ e o TEOREMA DE PITÁGORAS dão imediatamente

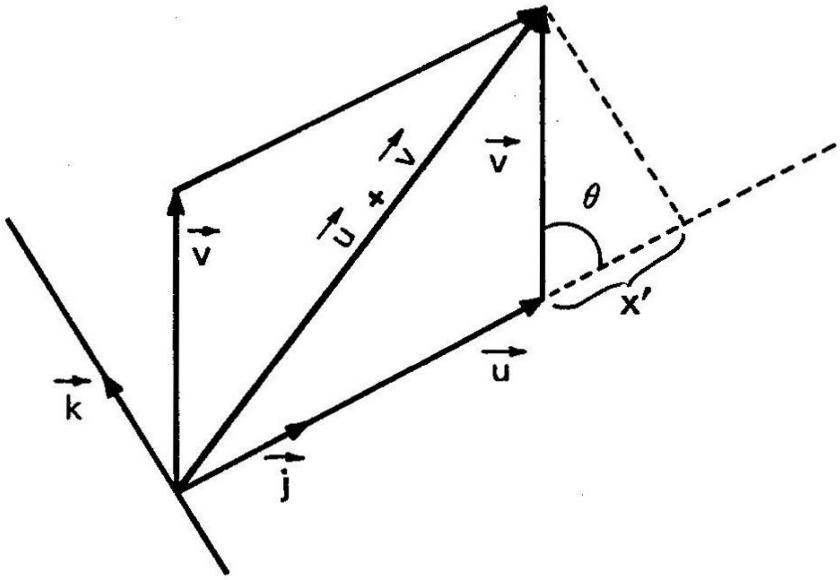
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2, \text{ donde } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. Em matemática moderna, é costume chamar 'operação interna' (ou 'lei de composição interna') num conjunto A, a toda a operação binária Φ que faz corresponder, a cada par ordenado (a, b) de elementos de A (a que se possa aplicar) um elemento a Φ b, *também de* A. Ora, segundo esta definição, a operação de produto interno *não é uma operação interna*, pois faz corresponder a cada par ($\vec{u}$, $\vec{v}$) de *vectores* — normalmente elementos de $\mathcal{V}$ — um *escalar* (isto é, um número real) e *não um vector*. Como, no entanto, a tradição já tinha consagrado a designação 'produto interno' para este caso, continua a ser usada essa designação, embora não seja coerente com a terminologia moderna da álgebra geral.

Muitas vezes, em vez de 'produto interno' diz-se *'produto escalar'*, atendendo a que o resultado da operação é um escalar.

4. **Nova definição geométrica de produto interno.** Procuremos agora um significado geométrico da noção de produto interno, que faça intervir o ângulo dos vectores dados. Para isso, consideremos um plano π em que os dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ possam

ser representados e adoptemos aí uma base ortonormal $(\vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{u}$ seja colinear com $\vec{j}$ e do mesmo sentido (se $\vec{u} \neq \vec{0}$).



Então, se pusermos

$$\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = x'\vec{j} + y'\vec{k},$$

terá de ser $y = 0$ e $x \geqslant 0$ (porquê?). Logo

$$(1) \qquad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \\ x = |\vec{u}| \end{cases}$$

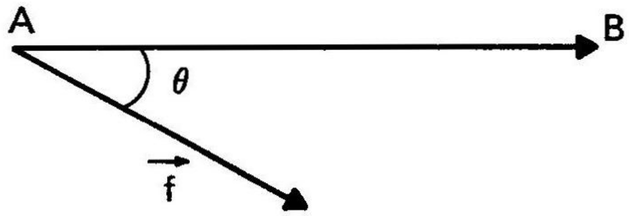
Para determinar x' designemos por θ o ângulo dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, isto é, o ângulo convexo formado por duas semi-rectas quaisquer com as direcções e sentidos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (se um dos vectores é nulo, considera-se θ arbitrário). Então θ é também o ângulo que $\vec{v}$ forma com o vector $\vec{j}$ e portanto

$$x' = |\vec{v}| \cos \theta$$

donde, por substituição em (1):

$$(2) \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos (\vec{u}, \vec{v})}$$

onde $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \theta$. Esta fórmula é a que se adopta habitualmente para definir 'produto interno' (em vez da fórmula (2) do número anterior) e aplica-se em inúmeras questões de física.



Por exemplo, quando se tem uma força aplicada a um objecto material, diz-se que a força *produz trabalho*, sempre que se desloca o seu ponto de aplicação. Ora, se o deslocamento é rectilíneo e a força se mantém *constante em direcção, sentido e intensidade*, o trabalho produzido pela força é, por definição, a grandeza escalar dada pela fórmula

$$(3) \qquad w = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = |\vec{f}| \cdot |AB| \cdot \cos \theta$$

sendo $\vec{f}$ o vector correspondente à força, $\overrightarrow{AB}$ o vector correspondente ao deslocamento e θ o ângulo dos dois vectores. A medida do trabalho, w, depende evidentemente do sistema de unidades adoptado: por exemplo, se a força é expressa em quilogramas e o deslocamento em metros, o trabalho vem expresso em *quilogrâmetros* (trabalho produzido por um quilograma-força, cujo ponto de aplicação se desloca um metro na direcção e no sentido da força).

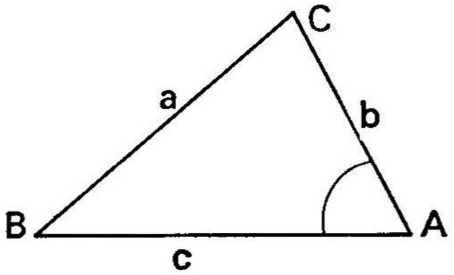
Ao aplicar a fórmula (3) três casos se podem dar:

1) $\vec{f} \neq \vec{0} \wedge \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \wedge 0 \leqslant \theta < 90°$. Então $w > 0$: *trabalho positivo* (ou *potente*).

2) $\vec{f} \neq \vec{0} \wedge \overrightarrow{AB} \neq 0 \wedge 90° < \theta \leqslant 180°$. Então $w < 0$: *trabalho negativo* (ou *resistente*).

3) $\vec{f} = \vec{0} \vee \overrightarrow{AB} = \vec{0} \vee \theta = 90°$. Então $w = 0$: *trabalho nulo.*

O significado geométrico do produto interno segundo a fórmula (3) tem ainda uma aplicação importante em trigonometria:



Consideremos um triângulo qualquer [ABC] e designemos, como é hábito, a medida de cada um dos seus lados, pela letra minúscula correspondente à letra maiúscula que designa o vértice oposto, e cada ângulo interno do triângulo pela mesma letra que designa o vértice ([1]). Então, aplicando a fórmula (3) do número anterior, virá, por exemplo:

$$(4) \qquad \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Mas $\overrightarrow{BC}^2 = a^2 \quad , \quad \overrightarrow{BA}^2 = b^2 \quad , \quad \overrightarrow{AC}^2 = c^2$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \qquad \text{(porquê?)} \\ &= -\,bc \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= -\,bc \cos A \end{aligned}$$

e assim, por substituição em (4):

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A}$$

Como se vê, esta fórmula *generaliza o teorema de Pitágoras* (correspondente ao caso A = 90°) e pode ser traduzida do seguinte modo, em linguagem comum:

([1]) Trata-se, é claro, de um **abuso cómodo de escrita**, que se pode usar quando não haja perigo de confusão.

TEOREMA DO CO-SENO (ou TEOREMA DE CARNOT). *Em qualquer triângulo, o quadrado de cada um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto desses dois lados pelo co-seno do ângulo oposto ao primeiro.*

Um outro teorema importante de trigonometria é o TEOREMA DOS SENOS, que o aluno encontrará exposto e demonstrado no seu *Compêndio de Trigonometria* (tem interesse ver a demonstração deste teorema).

É nestes dois teoremas, bem como nas fórmulas trigonométricas deduzidas atrás (Capítulo II), que se baseia a *resolução de triângulos obliquângulos.* As respectivas fórmulas resolutivas, adaptadas a cálculo logarítmico, encontram-se não só no referido *Compêndio,* como ainda nas próprias tábuas de logaritmos mais conhecidas. *Basta pois ter uma ideia de como se utilizam essas fórmulas, cujo interesse principal reside nas aplicações à Topografia.*

5. **Aplicações do produto interno em geometria analítica.** Da fórmula (2) do número anterior (definição clássica de produto interno) deduz-se:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vectores *não nulos.* Suponhamos que se tem $\vec{u} \hookrightarrow (x, y)$, $\vec{v} \hookrightarrow (x', y')$, relativamente a um *referencial ortonormal* no plano. Então o co-seno do ângulo θ de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é dado pela fórmula:

$$(1) \quad \cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Em particular tem-se

$$(2) \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow xx' + yy' = 0$$

É claro que, se um pelo menos dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ for nulo, também será $xx'+yy'=0$. *Por comodidade de linguagem, diz-se ainda neste caso que os vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *são perpendiculares (ou ortogonais). Portanto a fórmula* (2) *exprime a condição necessária e suficiente de ortogonalidade de dois vectores, quando se adopta um referencial ortonormal do plano.*

Analogamente, no espaço, o ângulo θ de dois vectores não nulos é dado pela fórmula

$$(3) \qquad \cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

e, em particular, tem-se a *condição de ortogonalidade*

$$(4) \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

que é válida mesmo no caso em que um, pelo menos, dos vectores é nulo, segundo a convenção anterior.

Estas fórmulas (que podem sem dificuldade ser generalizadas ao caso de referenciais cartesianos não ortonormais) prestam-se comodamente a muitas aplicações em geometria analítica:

I. Suponhamos, por exemplo, que são dados no plano três pontos distintos, pelas suas coordenadas (num referencial ortonormal):

$$A \rightarrow (x_0, y_0) \quad , \quad B \rightarrow (x_1, y_1) \quad , \quad C \rightarrow (x_2, y_2)$$

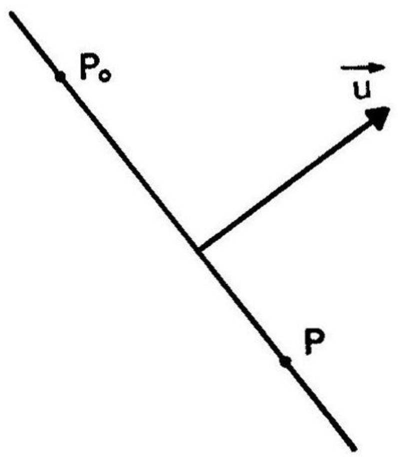
Então, a amplitude θ do ângulo $B\hat{A}C$ será dada pela fórmula

$$\cos\theta = \frac{(x_1-x_0)\ (x_2-x_0) + (y_1-y_0)\ (y_2-y_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2}}$$

Analogamente para o espaço, aplicando a fórmula (3).

II. Consideremos agora o problema:

Conduzir por um ponto $P_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$ *uma recta perpendicular a um vector não nulo* $\vec{u} \rightsquigarrow (a, b)$.



Seja $P \rightsquigarrow (x, y)$ um ponto qualquer de recta.
Então o vector $\overrightarrow{P_0P}$ é perpendicular a $\vec{u}$ (ou é nulo). Tem-se pois sempre

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \vec{0}$$

o que, segundo (2), se traduz analiticamente por

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Será pois esta uma equação da recta pedida.
Reciprocamente:
Dada uma recta qualquer de equação

$$(5) \qquad ax + by + c = 0,$$

os coeficientes a, b, *respectivamente de* x *e* y, *são as componentes de um vector não nulo perpendicular à recta.*

Com efeito, o vector (a, b) não é nulo (porquê?) e, se (x_0, y_0) for um determinado ponto da recta, já sabemos que a equação (5) é equivalente à seguinte:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Ora isto mostra que, sendo (x, y) um ponto de r distinto de (x_0, y_0), o vector $(x-x_0, y-y_0)$ é perpendicular ao vector (a, b) e portanto este é perpendicular a r.

Como é sabido, chama-se *ângulo de duas rectas do plano* à menor das amplitudes dos ângulos em que as rectas dividem o plano (se são concorrentes) ou o ângulo nulo (se são paralelas). Nestas condições, o ângulo θ de duas rectas *r, s,* de equações

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

será igual ao ângulo dos vectores (a, b) e (a', b'), normais às rectas, ou igual ao *suplementar* desse ângulo. Tem-se, pois, em qualquer dos casos:

$$\cos\theta = \left| \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}} \right|$$

Esta fórmula dá, portanto, o *ângulo θ das duas rectas definidas pelas equações anteriores.*

Em particular, será

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow aa' + bb' = 0}$$

Recordemos que, por outro lado, se tem

$$r \mathbin{//} s \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

Isto também pode escrever-se:

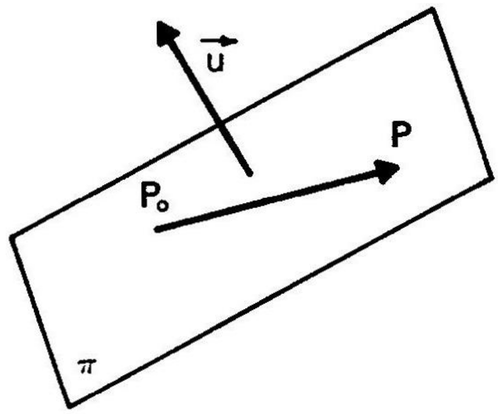
$$r \,//\, s \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

no caso em que $a' \neq 0 \wedge b' \neq 0$. E poderemos usar esta fórmula, mesmo no caso em que um dos denominadores é nulo, *convencionando que, nesse caso, o numerador correspondente também terá de ser nulo* (1).

III. Estes resultados são facilmente generalizáveis ao espaço. Assim:

O plano que passa por um dado ponto (x_o, y_o, z_o) *e é perpendicular a um dado vector* (a, b, c) *não nulo, é definido pela equação:*

$$a(x-x_o) + b(y-y_o) + c(z-z_o) = 0$$



Reciprocamente, dada a equação de um plano qualquer

$$ax + by + cz + d = 0$$

esta pode sempre escrever-se sob a forma

$$a(x-x_o) + b(y-y_o) + c(z-z_o) = 0,$$

(1) É claro que se trata aqui apenas de uma **regra prática.** Quando são nulos os dois termos duma fracção, esta reduz-se a um símbolo de indeterminação e, portanto, não verifica em rigor a igualdade indicada.

sendo (x_0, y_0, z_0) *um ponto qualquer do plano. Portanto os coeficientes* a, b, c *são as componentes de um vector* $\vec{u}$ *não nulo normal ao plano.*

Isto permite, por exemplo, achar o *ângulo* θ de dois pla*nos* π, μ de equações

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Com efeito, θ será um ângulo do 1.° quadrante, igual ao ângulo dos vectores (a, b, c), (a′, b′, c′) ou *suplementar* desse. Tem-se pois:

$$\cos\theta = \left| \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \right|$$

Em particular, tem-se a CONDIÇÃO DE PERPENDICULARIDADE:

$$\boxed{\pi \perp \mu \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0}$$

Por outro lado, já sabemos que se tem a CONDIÇÃO DE PARALELISMO:

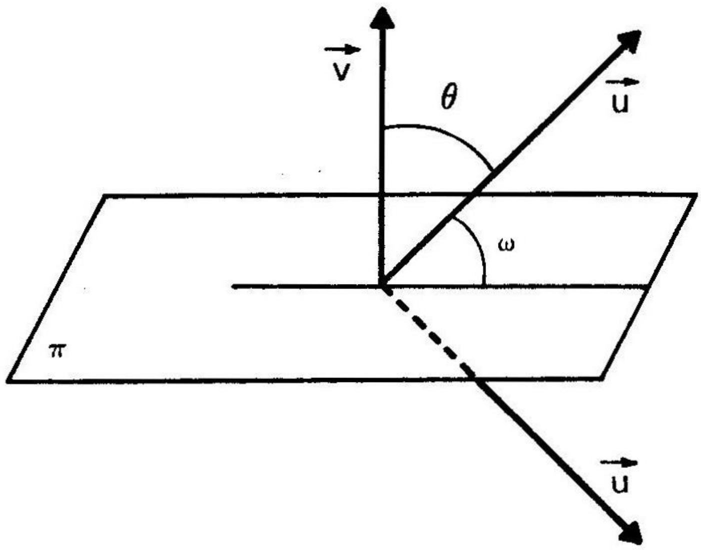
$$\boxed{\pi // \mu \Longleftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}},$$

em que se mantém a convenção anterior: *quando um dos denominadores for nulo, o numerador correspondente terá de ser também nulo.*

IV. Suponhamos agora dados *um plano* π de equação

$$ax + by + cz + d = 0$$

e um vector não nulo $\vec{u} \rightsquigarrow (a', b', c')$.



Então, se designarmos por ω o ângulo de $\vec{u}$ com π e por θ o ângulo de $\vec{u}$ com o vector $\vec{v} \rightsquigarrow (a, b, c)$, normal ao plano, será

$$\omega = 90° - \theta \quad \text{ou} \quad \omega = \theta - 90°$$

Em qualquer dos casos:

$$\text{sen}\ \omega = |\cos\ \theta|$$

Portanto o ângulo do vector $\vec{u}$ com o plano π é dado pela fórmula

$$(6) \qquad \text{sen}\ \theta = \left| \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \right|$$

Em particular, tem-se:

$$(7) \qquad \begin{cases} \vec{u} \,//\, \pi \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \\ \vec{u} \perp \pi \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \end{cases}$$

A fórmula (6) permite achar o ângulo de uma recta AB com o plano π. Com efeito, sendo A e B pontos distintos, o ângulo da recta AB com o plano π é igual ao ângulo do vector $\overrightarrow{AB}$ ou do vector $\overrightarrow{BA}$ com π. Portanto, se tivermos

$$A \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad B \rightarrow (x_1, y_1, z_1),$$

bastará, na fórmula (6), tomar

$$a' = x_1 - x_0 \quad , \quad b' = y_1 - y_0 \quad , \quad c' = z_1 - z_0$$

Analogamente para as condições (7) de paralelismo e perpendicularidade.

V. Dum modo geral, a recta que passa por dois pontos distintos $A \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ e $B \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$, é definida pela *equação vectorial*

$$P = A + t(B - A),$$

onde t é um *parâmetro,* variável em $\mathbb{R}$. Esta equação traduz-se analiticamente pelo *sistema de equações paramétricas da recta:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

Eliminando t e pondo $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, $c = z - z_0$,

vem

$$(8) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} ,$$

que são *equações cartesianas da recta que passa pelos pontos* A e B (ou que passa pelo ponto A e tem a direcção do vector $\overrightarrow{AB}$). Note-se que a fórmula (8) fornece *no máximo* duas equações independentes.

Reciprocamente, é sempre possível reduzir à forma (8) um sistema de equações de uma recta no espaço. Seja por exemplo o sistema

$$(9) \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$$

Resolvendo ambas as equações em ordem a *x*, vem

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y+1}{2} \\ x = -3z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y+1}{2} \\ x = \dfrac{z - 2/3}{-1/3} \end{cases}$$

Portanto, o sistema é equivalente à *dupla equação:*

$$x = \frac{y+1}{2} = \frac{z - 2/3}{-1/3}$$

A recta representada passa pois pelo ponto (0, − 1, 2/3) *e tem a direcção do vector* (1, 2, − 1/3).

Seja, agora, o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$$

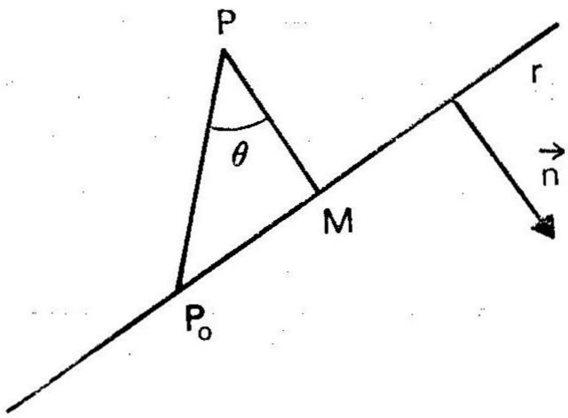
Este pode ser considerado equivalente à dupla equação

$$x = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{0} \; ,$$

pois que, segundo a convenção anterior, o último denominador obriga a ser $z + 5 = 0$. Trata-se, pois, da recta que passa pelo ponto (0, — 3, — 5) e tem a direcção do vector (1, 2, 0) (recta de nível).

VI. Como última aplicação do produto interno, vamos deduzir uma fórmula que dá, no plano, a *distância de um ponto* $P \rightarrowtail (x_1, y_1)$ *a uma recta* r *de equação*

$$(10) \qquad ax + by + c = 0$$



Seja M o *ponto de* r *mais próximo de* P e seja $P_0 \rightarrowtail (x_0, y_0)$ um ponto arbitrário de r. Então a distância procurada será $|PM|$ e a equação (10) será equivalente a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (c = -ax_0 - by_0)$$

Ora

$$(11) \qquad |PM| = |P_0P| \cos \theta,$$

onde θ é a amplitude do ângulo $P_0\hat{P}M$, que é igual ao ângulo do vector $\overrightarrow{P_0P}$ com o vector $\vec{n} \rightarrowtail (a, b)$ ou ao suplementar desse ângulo. Será pois

$$\cos \theta = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{|P_0P| \cdot |\vec{n}|}$$

donde, por substituição em (11) e notando que $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$|PM| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Finalmente, lembrando que $-ax_0 - by_0 = c$, obtemos a fórmula que dá a distância δ procurada:

$$\boxed{\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Analogamente se vê que a *distância de um ponto* $P \rightarrowtail (x_1, y_1, z_1)$ *do espaço a um plano de equação* $ax + by + cz + d = 0$ *é dada pela fórmula*

$$\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Com as fórmulas anteriores podem resolver-se comodamente diversos tipos de problemas de geometria analítica, no plano ou no espaço, relativos a rectas e a planos.

6. **Representação analítica das isometrias e das semelhanças.** Comecemos pelo caso bidimensional. Consideremos *num mesmo plano* dois referenciais

$$(O, \vec{j}, \vec{k}) \quad , \quad (O', \vec{j}' \ \vec{k}')$$

Já sabemos que existe uma e uma só afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo e que é definida analiticamente pelo sistema de equações:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

onde $(a, b) \rightarrowtail \vec{j}'$, $(c, d) \rightarrowtail \vec{k}'$, $(p, q) \rightarrowtail O'$, $(x, y) \rightarrowtail P$ e $(x', y') \rightarrowtail P'$ (no primeiro referencial), sendo P um ponto qualquer do plano e $P' = \Phi(P)$.

Mas, para que Φ seja uma isometria, é necessário (e suficiente) que o segundo referencial seja isométrico ao primeiro, isto é, que

$$|\vec{j}'| = |\vec{j}| \quad , \quad |\vec{k}'| = |\vec{k}| \quad , \quad \cos(\vec{j}', \vec{k}') = \cos(\vec{j}, \vec{k})$$

ou seja, em termos de 'produto interno':

$$(2) \qquad \vec{j}'^2 = \vec{j}^2 \quad , \quad \vec{k}'^2 = \vec{k}^2 \quad , \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = \vec{j} \cdot \vec{k}$$

Em particular, se o primeiro é ortonormal, o segundo também o deve ser, isto é, as condições (2) *reduzem-se a*

$$(3) \qquad \vec{j}'^2 = \vec{k}'^2 = 1 \quad , \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0$$

Por sua vez, estas traduzem-se analiticamente pelas seguintes:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \quad , \quad ac + bd = 0$$

Assim, na matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

devem ser iguais a 1 *as somas dos quadrados dos elementos em cada coluna e igual a zero a soma dos produtos dos termos homólogos das duas colunas* (veremos depois que o mesmo facto se verifica para as linhas).

Seria natural exprimir este facto dizendo que a matriz é *ortonormal*, mas estalebeceu-se infelizmente o hábito de dizer, neste caso, que a matriz é *ortogonal* e não iremos aqui contra o uso. Também se pode indicar o mesmo facto dizendo que a matriz é *unitária*, o que já é mais coerente.

Em conclusão:

TEOREMA 1. *Condição necessária e suficiente para que a afinidade Φ representada pelo sistema* (1), *em referencial ortonormal, seja uma isometria, é que a matriz do sistema seja ortogonal (ou unitária).*

Analisemos, agora, mais de perto o significado geométrico das matrizes ortogonais de 2.ª ordem. Para isso comecemos por observar o seguinte:

LEMA. *Em referencial ortonormal, cada componente de um vector $\vec{u}$ é o produto interno de $\vec{u}$ pelo vector de base relativo a essa componente.*

Seja com efeito $\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k}$. Então virá

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = x\vec{j}^2 + y(\vec{k} \cdot \vec{j}) \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = x \qquad \text{(porquê?)}$$

Analogamente se vê que $\vec{u} \cdot \vec{k} = y$.

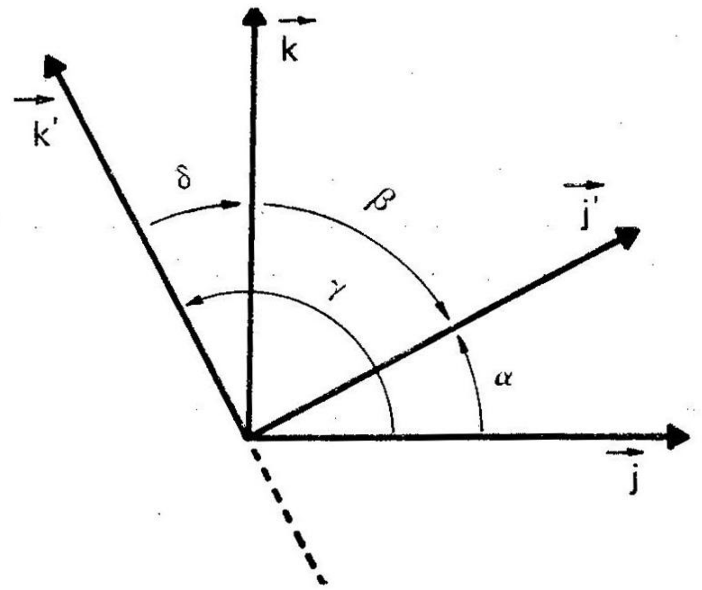
Em particular:

Se $\vec{u}$ é unitário, cada componente de $\vec{u}$ é o co-seno do ângulo de $\vec{u}$ com o vector de base relativo a essa componente (chamado 'co-seno director' de $\vec{u}$).

Com efeito, se $\vec{u}$ é unitário, tem-se

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = |\vec{u}|\ |\vec{j}| \cos(\vec{j}, \vec{u}) = \cos(\vec{j}, \vec{u})$$

e analogamente para $\vec{u} \cdot \vec{k}$.



Posto isto, consideremos novamente a matriz

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

e suponhamos que esta é ortogonal (sendo ortonormal o primeiro referencial). Então, designando por α, β, γ, δ, respectivamente, os ângulos de $\vec{j}'$ com $\vec{j}$ e com $\vec{k}$, e de $\vec{k}'$ com $\vec{j}$ e com $\vec{k}$, tem-se:

$$a = \cos\alpha \quad , \quad b = \cos\beta \quad , \quad c = \cos\gamma \quad , \quad d = \cos\delta$$

Por outro lado é fácil ver que

$$\beta = 90^\circ - \alpha \quad , \quad \delta = \gamma - 90^\circ$$

donde $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\delta = \operatorname{sen}\gamma$.

Posto isto, dois casos se podem dar:

1.° caso: os dois referenciais são positivamente isométricos (caso da figura). Então $\gamma = 90^\circ + \alpha$ e portanto

$$\cos\gamma = -\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \operatorname{sen}\gamma = \cos\alpha$$

Assim

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Portanto, neste caso, a isometria Φ, definida *por* (1), *é um deslocamento, composto da rotação* Φ_0 *de amplitude* α *em torno de* O *e da translação* $\overrightarrow{OO'}$.

2.° *caso: os dois referenciais são negativamente isométricos.* Neste caso tem-se, como é fácil ver,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Vê-se então que Φ é uma isometria negativa, composta de um deslocamento (como o anterior) e de uma simetria.

Vejamos, agora, *como se determina a transformação inversa da afinidade* Φ, *definida pelo sistema:*

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

Este é o equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} ax + cy = x' - p \\ bx + dy = y' - q \end{cases},$$

o qual, resolvido em relação a x, y conduz a um sistema equivalente, da forma:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a'(x' - p) + c'(y' - q) \\ y = b'(x' - p) + d'(y' - q) \end{cases}$$

Resta pois determinar os coeficientes a', b', c', d', pois que os termos independentes são $-a'p - c'q$, $-b'p - d'q$. Mas é claro que a', b' são agora as componentes do vector $\vec{j}$ na base (j', k'), enquanto c', d' são as componentes do vector $\vec{k}$ na referida base. *Ora, sendo* Φ *uma isometria e sendo os referenciais ortonormais, estas componentes estão automaticamente determinadas.* Com efeito, tem-se:

$$\cos(\vec{j}, \vec{j}') = \cos(\vec{j}', \vec{j}) = a \quad , \quad \cos(\vec{j}, \vec{k}') = \cos(\vec{k}', \vec{j}) = c$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{j}') = \cos(\vec{j}', \vec{k}) = b \quad , \quad \cos(\vec{k}, \vec{k}') = \cos(\vec{k}', \vec{k}) = d$$

	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{j}'$	a	c
$\vec{k}'$	b	d

A situação está evidenciada no quadro da página anterior, em que, nas colunas, se indicam as componentes de $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ no 1.º referencial e, nas linhas, as componentes de $\vec{j}$, $\vec{k}$ no 2.º referencial. Em conclusão, tem-se na referida hipótese:

$$\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

isto é: a matriz do sistema (5) resulta da matriz do sistema (4), trocando alternadamente linhas com colunas. Exprime-se este facto dizendo que a 2.ª matriz é a *transposta* da 1.ª (e vice-versa). Por conseguinte:

TEOREMA 2. *Quando se adoptam referenciais ortonormais, a matriz da transformação inversa, Φ^{-1}, de uma isometria Φ, é a transposta da matriz de Φ.*

Em particular, verifica-se o facto já enunciado:

COROLÁRIO. *A transposta de uma matriz ortogonal ainda é uma matriz ortogonal.*

Assim, no caso anterior, ter-se-á:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \quad , \quad ab + cd = 0,$$

como consequência das relações análogas entre colunas.

Note-se que estas considerações se aplicam, na sua essência, ao problema equivalente de *mudança de coordenadas*. Já vimos como o sistema

$$\begin{cases} x = ax' + cy' + p \\ y = bx' + dy' + q \end{cases}$$

permite passar das coordenadas x, y de um ponto P no referencial $(O, \vec{j}, \vec{k})$ para as coordenadas x′, y′ do *mesmo ponto* no referencial $(O', \vec{j}', \vec{k}')$. *Se ambos os referenciais são ortonormais,* o problema simplifica-se, visto que a matriz do sistema é ortogonal: a matriz do sistema inverso é simplesmente a transposta da primeira.

Passemos, agora, ao caso das *transformações de semelhança.* Como vimos atrás, a afinidade Φ que transforma o referencial $(O, \vec{j}, \vec{k})$ no referencial $(O', \vec{j}', \vec{k}')$ é uma semelhança, sse o 2.° referencial é semelhante ao primeiro. Ora, se este é ortonormal, o segundo será semelhante ao primeiro, sse verificar as condições

$$\vec{j}'^2 = \vec{k}'^2 = r^2 \quad , \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0 \; ,$$

(sendo *r* a *razão de semelhança*) ou o que é equivalente:

$$\left(\frac{1}{r}\vec{j}'\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\vec{k}'\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{1}{r}\vec{j}'\right) \cdot \left(\frac{1}{r}\vec{k}'\right) = 0$$

Mas isto equivale a dizer que a matriz

$$\begin{bmatrix} a/r & c/r \\ b/r & d/r \end{bmatrix}$$

é ortogonal (ou unitária). Chama-se *produto de uma matriz* A *por um número* r, e representa-se por r A, a matriz que resulta de A multiplicando cada um dos seus elementos por r. Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} a/r & c/r \\ b/r & d/r \end{bmatrix}$$

e concluir:

TEOREMA 3. *Condição necessária e suficiente para que uma afinidade* Φ *seja uma semelhança de razão* r *é que a sua matriz seja igual ao produto de* r *por uma matriz unitária.*

Em particular, se Φ é uma semelhança positiva, ter-se-á, pelo que vimos atrás,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

sendo α o ângulo de $\vec{j}'$ com $\vec{j}$. Neste caso, segundo o exposto no Capítulo II, a semelhança Φ_o pode ser identificada com o número complexo

$$r\,E(\alpha) = r\ (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Finalmente, as considerações anteriores podem ser estendidas sem dificuldade ao caso tridimensional. Consideremos dois referenciais cartesianos

$$(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}) \quad , \quad (O', \vec{j}', \vec{k}', \vec{m}')$$

e a afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo. Então, se tivermos, relativamente ao 1.° referencial,

$$\vec{j}' \rightsquigarrow (a, b, c) \quad , \quad \vec{k}' \rightsquigarrow (a', b', c'),$$

$$\vec{m}' \rightsquigarrow (a'', b'', c'') \quad , \quad O' \rightsquigarrow (p, q, s)$$

a aplicação Φ transforma cada ponto $P \rightsquigarrow (x, y, z)$ no ponto $P' \rightsquigarrow (x', y', z')$ tal que

$$(6) \qquad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + p \\ y' = bx + b'y + b''z + q \\ z' = cx + c'y + c''z + s \end{cases}$$

A matriz deste sistema

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

diz-se *ortogonal* (ou *unitária*), sse

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

e

$$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

Como no caso bidimensional, conclui-se o seguinte:

TEOREMA 4. *Se o 1.° referencial é ortonormal, então Φ é uma isometria, sse o 2.° referencial também for ortonormal, o que equivale a dizer que a matriz de Φ é ortogonal. Então a aplicação inversa, Φ^{-1}, é definida, em relação ao 2.° referencial, pelo sistema*

$$(7) \qquad \begin{cases} x = a\,(x' - p) + b\,(y' - q) + c\,(z' - s) \\ y = a'(x' - p) + b'(y' - q) + c'(z' - s) \\ z = a''(x' - p) + b''(y' - q) + c''(z' - s) \end{cases}$$

sendo a sua matriz a transposta da matriz de Φ.

É claro que este teorema se aplica, *mutatis mutandis,* ao problema da mudança de coordenadas.

Por outro lado:

TEOREMA 5. *Na mesma hipótese, Φ é uma semelhança de razão* r, *sse a sua matriz é igual ao produto de* r *por uma matriz unitária.*

Resta ver como, no caso tridimensional, se consegue averiguar analiticamente se uma dada isometria ou semelhança é positiva ou negativa. Para isso está naturalmente indicado o *conceito de determinante,* de que vamos tratar, em estreita ligação com o de *produto externo de dois vectores.*

7. **Produto externo de dois vectores do plano*.** Suponhamos adoptado no plano um sentido positivo de rotação, por exemplo o sentido anti-horário. Posto isto, chama-se *produto*

externo de dois vectores $\vec{u}, \vec{v}$ do plano, e representa-se por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ler '$\vec{u}$ externo $\vec{v}$') o número real assim definido

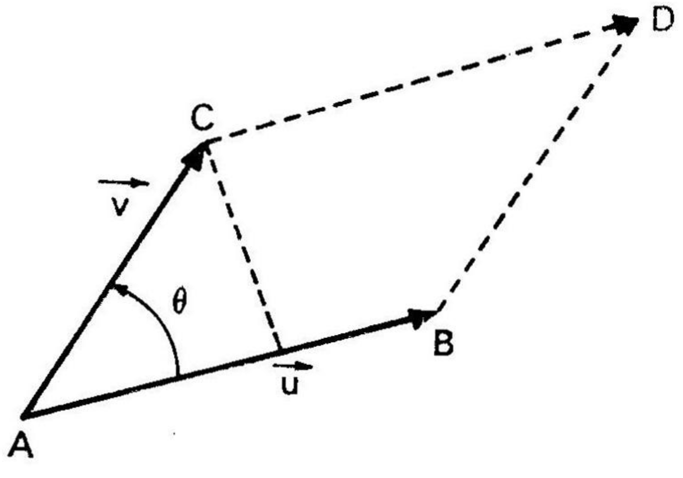
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \text{ sen } (\vec{u}, \vec{v})$$

Aqui, sen $(\vec{u}, \vec{v})$ representa, naturalmente, o seno do ângulo orientado de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ — portanto positivo ou negativo, conforme este ângulo tiver o sentido positivo (anti-horário) ou o negativo.

Para interpretar geometricamente a definição anterior, convém distinguir dois casos:

1.° caso: *os vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ *são colineares.* Então sen $\theta = 0$ e portanto $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

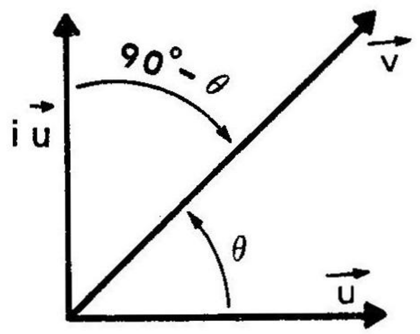
2.° caso: *os vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ *não são colineares.*



Tomemos então três pontos A, B, C tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e seja $D = B + \vec{v} = C + \vec{u}$. Então $|\vec{u}|$ é medida de um dos lados do paralelogramo [ABCD] e $|\vec{v}|\,|\text{sen } \theta|$ é a medida da altura do paralelogramo relativamente a esse lado. Por conseguinte:

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ *é a medida da área do paralelogramo,* com o sinal + ou − conforme o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é positivo ou negativo (positivo no caso da figura, adoptando o sentido anti-horário).

Convém desde já notar que a noção de produto externo pode ser dada a partir da de produto interno, utilizando números imaginários.



Tem-se, com efeito

$$(i\vec{u}) \cdot \vec{v} = |i\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos (i\vec{u}, \vec{v})$$

e como $|i\vec{u}| = |\vec{u}|$, $\cos (i\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{sen} (\vec{u}, \vec{v})$, tem-se

1) $$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = (i\vec{u}) \cdot \vec{v}}$$

Posto isto, é bem fácil estabelecer as seguintes propriedades do produto externo, em que, para comodidade de escrita, se omitem as setas sobre as letras:

PROPRIEDADES DO PRODUTO EXTERNO

I. $u \wedge v = -\, v \wedge u$, $\forall u, v \in \mathcal{V}_\pi$

II. $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$, $\forall u, v, w \in \mathcal{V}_\pi$

III. $u \wedge (av) = a(u \wedge v)$, $\forall u, v \in \mathcal{V}_\pi$; $a \in \mathbb{R}$

IV. $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *são colineares*

V. $j \wedge k = 1$, se (j, k) *é uma base ortonormal* (1).

(1) Quando nada se diz em contrário, subentende-se que a base adoptada tem o sentido positivo, neste caso o sentido anti-horário ou sinistrorso (isto é, k deve estar à esquerda de j).

As propriedades I, III, IV e V são consequência imediata da definição. Quanto à propriedade II, resulta imediatamente de (1) e da propriedade correspondente para o produto interno.

Como se vê, *o produto externo, ao contrário do produto interno, não é comutativo (ou simétrico).* Exprime-se a propriedade I, dizendo que o produto externo é *anti-simétrico.*

De I e II deduz-se imediatamente que o produto externo não só é *distributivo à esquerda* (o que se indica em II), como também é *distributivo à direita.* Por sua vez, de I e III, deduz-se que também:

III'. $(au) \wedge v = a(u \wedge v) \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\pi ; \; a \in \mathbb{R}$

A conjunção da distributividade (bilateral) com as propriedades III e III' exprime-se dizendo que o produto externo $u \wedge v$ é *bilinear* (isto é, linear à direita e à esquerda) [1].

Suponhamos agora fixado no plano uma base ortonormal (j, k) *e seja*

$$u = aj + bk \quad , \quad v = cj + dk$$

Procuremos a expressão analítica de $u \wedge v$. Tem-se

$$(aj + bk) \wedge (cj + dk) = aj \wedge (cj + dk) + bk \wedge (cj + dk)$$

$$= ac \cdot j \wedge j + ad \cdot j \wedge k + bc \cdot k \wedge j + bd \cdot k \wedge k \qquad \text{(porquê?)}$$

Mas $j \wedge j = k \wedge k = 0 \quad , \quad j \wedge k = -k \wedge j = 1$ (porquê?)

Logo

$$\boxed{u \wedge v = ad - bc}$$

Ao mesmo tempo, vê-se que a operação de produto externo fica completamente determinada pela conjunção das suas propriedades I-V.

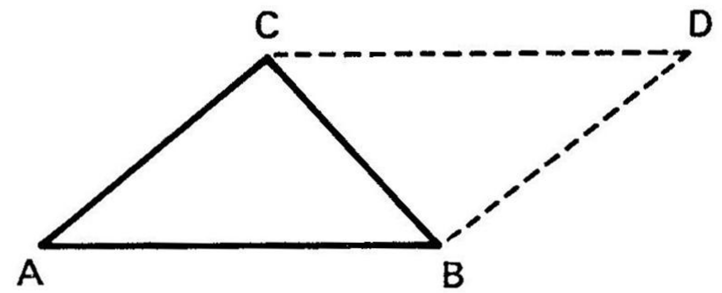
---

(1) Note-se que o produto interno também é **bilinear.** Mas enquanto este é **simétrico,** o produto externo é **anti-simétrico.**

O produto externo $u \wedge v$ (no plano) também é chamado *determinante dos vectores* u, v, por esta ordem, e escreve-se

$$u \wedge v = \det(u, v) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \text{ (na base adoptada)}$$

Uma primeira aplicação do produto externo encontra-se no cálculo de áreas de figuras poligonais do plano.



Por exemplo, se tivermos, relativamente a um referencial ortonormal,

$$A \rightsquigarrow (x_0, y_0) \quad , \quad B \rightsquigarrow (x_1, y_1) \quad , \quad C \rightsquigarrow (x_2, y_2)$$

sendo A, B, C não colineares, *a área do triângulo* [ABC] *será metade do módulo de* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Como

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix},$$

segue-se que a área do triângulo é

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1 - x_0)\ (y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)\ (y_1 - y_0) \right|$$

Uma outra aplicação refere-se ao estudo da isometria Φ definida por um sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

transformando o referencial ortonormal (O, j, k) num referencial ortonormal (O′, j′, k′). É claro que:

O segundo referencial é positivamente isométrico ao primeiro, sse j′ $\wedge$ k′ > 0 *relativamente ao 1.° referencial, isto é, sse*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} > 0$$

Será, pois, esta uma condição necessária e suficiente para que Φ *seja um deslocamento.* Aliás temos neste caso (e só neste):

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Diz-se que este é o *determinante do sistema* (2), ou o *determinante da respectiva matriz* (ou ainda, o *determinante de* Φ *no 1.° referencial*).

Analogamente se reconhece se uma dada semelhança (ou mesmo uma afinidade qualquer) é positiva ou negativa.

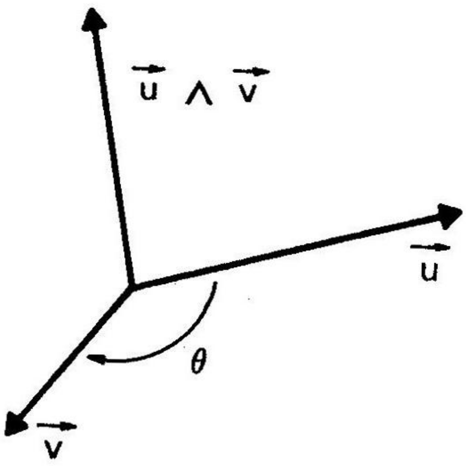
8. **Produto externo de dois vectores do espaço.** Suponhamos fixado no espaço $\mathcal{E}$ *um sentido positivo para triedros* — normalmente o sentido horário ou dextrorso (ver pág. 93) [1]. Posto isto, chama-se *produto externo* de dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, e representa-se por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, o vector $\vec{p}$ que verifica as seguintes condições:

1) $$|\vec{p}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$$

2) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ não são colineares, $\vec{p}$ é *perpendicular* a ambos os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e o seu sentido é tal que o terno $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{p})$ tem

[1] O contrário do que sucede no plano, em que o sentido adoptado é normalmente o sinistrorso.

o *sentido positivo*, isto é, $\vec{v}$ fica à direita de $\vec{u}$ em relação a $\vec{p}$ (se o sentido adoptado for, como é habitualmente, o sentido horário ou dextrorso).



Na prática, pode usar-se neste caso a seguinte regra intuitiva:

Se, na mão esquerda, o dedo médio representa $\vec{u}$ *e o polegar o vector* $\vec{v}$, *então o indicador dá o sentido de* $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Como se vê, o produto externo de dois vectores do espaço é um vector do espaço e não um número. Por isso o produto externo de dois vectores do espaço é também chamado *produto vectorial*. Trata-se pois de uma *operação interna em* $\mathcal{V}$, ao contrário do que sugere a designação (já atrás apontámos o desacordo entre a terminologia tradicional e a moderna).

As PROPRIEDADES FORMAIS DO PRODUTO EXTERNO NO ESPAÇO são idênticas às do conceito correspondente no plano, excepto a última (omitimos as setas para simplificar):

I. $u \wedge v = - v \wedge u \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$

II. $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w \quad , \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}$

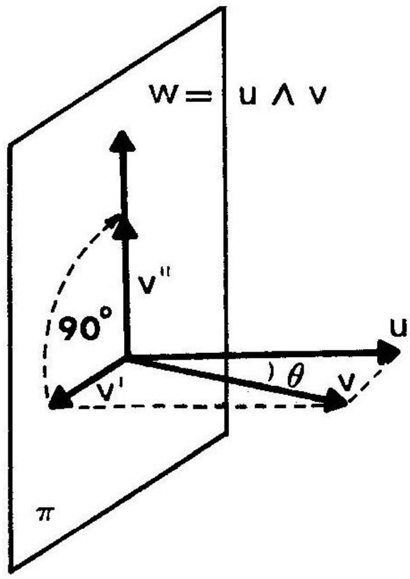
III. $u \wedge (av) = a(u \wedge v) \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}; \; a \in \mathbb{R}$

IV. $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow$ u *é colinear com* v

V. $j \wedge k = m \quad , \quad k \wedge m = j \quad , \quad j \wedge m = -k \quad$, se (j, k, m) *é uma base ortonormal* (¹).

(¹) Quando nada se diz em contrário, subentende-se que o sentido da base é positivo (normalmente dextrorso).

Todas estas propriedades são consequência imediata da definição, excepto a segunda. Quanto a esta, comecemos por notar que a conjunção das propriedades II e III equivale a dizer que *a aplicação* $v \rightsquigarrow u \wedge v$ *é linear, para todo o* u e $\mathcal{V}$. Daqui e de I deduz-se imediatamente que *a aplicação* $u \rightsquigarrow u \wedge v$ *também é linear.* E a conjunção destes dois factos exprime-se dizendo que o produto externo $u \wedge v$ é *bilinear.*



Seja então *u* um vector qualquer do espaço. Para demonstrar que a aplicação $v \rightsquigarrow u \wedge v$ é linear, consideremos um plano π perpendicular a u e seja:

v′ a projecção ortogonal do vector *v* sobre o plano π;

v″ o vector de π que se obtém dando a *v′* uma rotação de 90° no sentido positivo (dextrorso, na figura) em relação ao vector *u*;

w o produto de $|u|$ por v″.

Facilmente se reconhece então que:

1) $|v'| = |v|\,|\text{sen}\ \theta|$, sendo θ o ângulo $\widehat{uv}$;

2) $|w| = |u|\,|v|\,|\text{sen}\ \theta|$;

3) o terno (u, v, w) tem o sentido positivo.

Logo $w = u \wedge v$.

Por outro lado, é fácil ver também que cada uma das aplicações $v \rightsquigarrow v'$ (projecção ortogonal sobre π), $v' \rightsquigarrow v''$ (rotação de 90° no plano π, no sentido positivo em relação a *u*) e $v'' \rightarrow w$ (multiplicação por $|u|$) são todas três lineares. Logo, a aplicação composta destas,

$$v \rightarrow w = u \wedge v,$$

também é linear, como se pretendia demonstrar.

Posto isto, suponhamos fixada no espaço uma base ortonormal (j, k, m) *e seja*

$$u = aj + bk + cm \quad , \quad v = a'j + b'k + c'm$$

Procuremos a expressão cartesiana de $u \wedge v$. Visto que o *produto externo é bilinear*, virá então:

$$(aj + bk + cm) \wedge (a'j + b'k + c'm) =$$
$$= ab' \cdot j \wedge k + ac' \cdot j \wedge m + a'b \cdot k \wedge j + bc' \cdot k \wedge m + a'c \cdot m \wedge j +$$
$$+ b'c \cdot m \wedge k,$$

visto que $j \wedge j = k \wedge k = m \wedge m = 0$.

Por outro lado, como

$j \wedge k = m \quad , \quad j \wedge m = -k \quad , \quad k \wedge j = -m \quad , \quad k \wedge m = j \quad ,$
$m \wedge j = k \quad , \quad m \wedge k = -j$ (porquê?), virá finalmente

$$\boxed{u \wedge v = (bc' - b'c)j - (ac' - a'c)k + (ab' - a'b)m}$$

ou seja, usando determinantes:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} m$$

Como mnemónica, convém notar que estes determinantes se deduzem da *matriz rectangular*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix},$$

suprimindo, respectivamente, as colunas 1, 2 e 3.

A noção de produto externo no espaço tem numerosas aplicações em física. Mas encontra, igualmente, várias aplicações interessantes em matemática pura, nomeadamente em geometria analítica.

Por exemplo, se tivermos, num referencial ortonormal,

$$A \rightarrowtail (x_0, y_0, z_0) \ , \ B \rightarrowtail (x_1, y_1, z_1) \ , \ C \rightarrowtail (x_2, y_2, z_2),$$

sendo A, B, C não colineares, a área do triângulo [ABC] será metade do módulo de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Ora, as componentes deste produto externo são

$$X = \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$Y = - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$Z = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

e a área do triângulo será pois,

$$\frac{1}{2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Analogamente se determinam as áreas de paralelogramos e de outras figuras poligonais.

Outros exemplos de aplicação:

I. *Por um ponto dado* (x_0, y_0, z_0), *conduzir uma recta perpendicular a duas rectas dadas:*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad , \quad \frac{x - x_2}{a'} = \frac{y - y_2}{b'} = \frac{z - z_2}{c'}$$

Visto que as rectas têm a direcção dos vectores $\vec{u} \rightarrowtail (a, b, c)$, $\vec{v} \rightarrowtail (a', b', c')$, a recta pedida deverá ter a direcção do vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Logo, esta recta será representada analiticamente pelas equações:

$$\frac{x-x_0}{bc'-b'c} = \frac{y-y_0}{a'c-ac'} = \frac{z-z_0}{ab'-a'b}$$

II. *Por um ponto dado* (x_0, y_0, z_0) *conduzir um plano perpendicular a dois planos dados:*

$$ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad a'x + b'y + c'z + d = 0.$$

É fácil ver que o plano pedido tem por equação

$$(bc'-b'c)\ (x-x_0) + (a'c-a'c)\ (y-y_0) + (bc'-b'c)\ (z-z_0) = 0$$

Analogamente se resolvem os seguintes problemas:

III. *Por um ponto, conduzir uma recta perpendicular a uma recta dada e paralela a um plano dado.*

IV. *Por um ponto, conduzir um plano perpendicular a um plano dado e paralelo a uma recta dada.*

V. *Determinar analiticamente o plano que passa por três pontos dados.*

NOTA SOBRE AS PROPRIEDADES DO PRODUTO EXTERNO NO ESPAÇO. Como vimos, para cada par (u, v) de elementos de $\mathcal{V}$ existe sempre um e um só elemento de $\mathcal{V}$, que se chama produto externo de u por v e se representa por $u \wedge v$. Logo o par $(\mathcal{V}, \wedge)$ é um grupóide. Pergunta-se:

1) Será este grupóide comutativo?

2) Será associativo?

3) Terá elemento neutro?

Facilmente se reconhece que as respostas a estas três perguntas são negativas. Para reconhecer, por exemplo, que a operação $\wedge$ não é associativa, basta notar que, sendo (j, k, m) uma base ortonormal, se tem

$$(j \wedge k) \wedge k = -j \quad , \quad j \wedge (k \wedge k) = 0$$

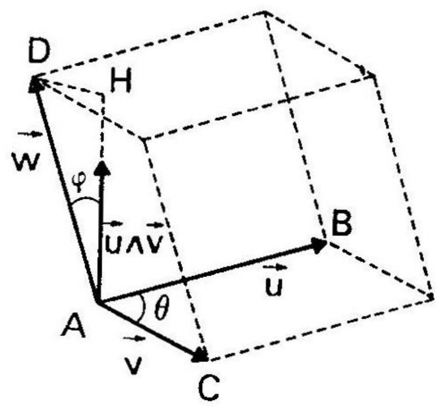
Vimos também que o produto externo é distributivo e mesmo bilinear. Mas o terno $(\mathcal{V}, +, \wedge)$ não é um anel. Porquê?

9. **Produto misto*.** Chama-se *produto misto de três vectores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (ou *determinante de* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) e representa-se por $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ o número $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Tem-se pois, por definição:

$$(1) \qquad \boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}}$$

É fácil encontrar o significado geométrico do produto misto, quando $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ não são complanares.



Consideremos quatro pontos A, B, C, D, tais que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v} \quad , \quad \overrightarrow{AD} = \vec{w}$$

e seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que admite $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ como arestas. Então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dá-nos a área da face de $\mathcal{P}$ que admite $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ como lados. Por sua vez, a altura de $\mathcal{P}$ relativa a esta face (representada na figura por $\overline{AH}$) é igual a $|\vec{w}| \cos \varphi$, sendo φ o ângulo de $\vec{w}$ com $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Logo o volume de $\mathcal{P}$ é dado por

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \varphi = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Quanto ao sinal do produto misto, será + ou −, conforme o terno $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ for positivo ou negativo.

Para obter a representação analítica do produto misto, consideremos uma base ortonormal (j, k) e seja

$$\vec{u} \rightsquigarrow (a, b, c) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (a', b', c') \quad , \quad \vec{w} \rightsquigarrow (a'', b'', c'')$$

Então é fácil ver atendendo a (1), que

$$(2) \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (bc' - b'c')\, a'' - (ac' - a'c)\, b'' + (ab' - a'b)c'',$$

o que também se escreve abreviadamente do seguinte modo:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

Esta última expressão é chamada *determinante de 3.ª ordem* (com 3 linhas e 3 colunas). A fórmula (2) dá o *desenvolvimento do determinante segundo os elementos da 3.ª coluna.*

Da definição e do significado geométrico deduzem-se as seguintes

PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO:

I. *O produto misto é linear em relação a cada um dos factores.*

Por exemplo:

$$\det(u_1 + u_2, v, w) = \det(u_1, v, w) + \det(u_2, v, w)$$

$$\det(au, v, w) = a \det(u, v, w) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

II. *O produto misto é anti-simétrico, isto é, toma o valor simétrico quando se trocam entre si dois quaisquer dos factores.*

Por exemplo:

$$\det(v, u, w) = -\det(u, v, w)$$

III. $\det(j, k, m) = 1$

As propriedades I e II exprimem-se dizendo que o produto misto é uma *forma trilinear anti-simétrica.*

Da propriedade II (ou da própria definição de 'produto misto') resulta que o *produto misto é nulo,* se dois dos factores são iguais.

Por exemplo:

$$u = v \Rightarrow \det(u, v, w) = 0$$

É claro que as propriedades anteriores podem ser traduzidas em *termos de colunas,* para determinantes.

Por exemplo:

Trocando entre si duas colunas de um determinante, este toma o valor simétrico.

Se duas colunas de um determinante são iguais, o determinante é nulo.

Etc.

Por outro lado, é fácil ver que:

O valor de um determinante não muda quando se trocam ordenadamente as suas linhas com as suas colunas, isto é:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Com efeito, desenvolvendo um e outro segundo os elementos da 3.ª coluna, obtém-se:

$$\begin{aligned} &(bc' - b'c)a'' - (ac' - a'c)b'' + (ab' - a'b)c'' = \\ = &(a'b'' - a''b')c - (ab'' - a''b)c' + (ab' - a'b)c'' = \\ = &ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ac'b'' - a'bc'' \end{aligned}$$

Este facto permite traduzir as propriedades anteriores em *termos de linhas, para determinantes.*

Chama-se *menor complementar* de um elemento qualquer de um determinante ao determinante que dele se obtém suprimindo a linha e a coluna que cruzam nesse elemento. E chama-se *complemento algébrico* dum elemento dum determinante ao seu menor complementar multiplicado por $(-1)^{r+s}$, em que r e s são os números de ordem da linha e da coluna a que pertence esse elemento.

Das propriedades anteriores resulta que:

O valor de um determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos complementos algébricos.

Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$= - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

A noção de produto misto tem várias aplicações. Vamos indicar as principais, em geometria analítica.

Em primeiro lugar, o produto misto permite calcular facilmente o volume de um paralelipípedo (segundo o significado geométrico atrás indicado), bem como de outros domínios poliédricos.

Por outro lado, o produto misto permite saber se uma isometria Φ definida por um sistema

$$\begin{cases} x = ax + a'y + a''z + p \\ y = bx + b'y + b''z + q \\ z = cx + c'y + c''z + r \end{cases}$$

é positiva ou negativa. Supondo que Φ transforma um referencial ortonormal (O, j, k, m) num referencial ortonormal (O', j', k', m'), é claro que:

O segundo referencial é positivamente isométrico ao primeiro, sse $\det(j', k', m') > 0$ *relativamente ao 1.º referencial isto é, sse*

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} > 0$$

Aliás é fácil ver, atendendo à propriedade III (aplicável agora à 2.ª base) que o valor do determinante neste caso é precisamente 1.

Analogamente se reconhece se uma dada semelhança (ou mais geralmente uma afinidade) é positiva ou negativa.

10. **Número de dimensões de um espaço vectorial*.** A noção geral de espaço vectorial — que já foi atrás definida — tem uma grande importância em matemática moderna e nas suas aplicações, nomeadamente à física, à engenharia, à estatística e à economia (por exemplo, na programação linear).

Seja V um espaço vectorial qualquer sobre um corpo K e suponhamos que existe uma sequência

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

de *n* vectores de V, que verifica as seguintes condições:

1) todo o vector *u* de V se pode exprimir como *combinação linear* dos primeiros, isto é, existem *n* elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

2) os vectores $u_1, \ldots u_n$ são *linearmente independentes*, isto é, são todos não nulos e nenhum deles se pode exprimir como combinação linear dos restantes ([1]).

Diz-se então que a sequência $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ é uma *base* do espaço V e prova-se que *qualquer outra base de* V *tem o mesmo número de elementos.* Esse número *n* é chamado o *número de dimensões* (ou simplesmente a *dimensão*) do espaço vectorial V.

Por exemplo, o conjunto $\mathcal{V}_r$ dos vectores duma recta r é um espaço vectorial (real) com *uma dimensão,* o conjunto $\mathcal{V}_\pi$ dos vectores dum plano π é um espaço vectorial com *duas dimensões,* o conjunto $\mathcal{V}$ dos vectores do espaço ordinário é um espaço vectorial com *três dimensões* (reais).

Outros exemplos:

O cojunto $\mathbb{R}^n$ de todas as sequências de *n* números reais, com as definições de 'soma' e de 'produto por escalares' introduzidas nas páginas 54 e 55, é um espaço vectorial (real) com *n* dimensões, qualquer que seja o número natural *n.* Por exemplo, uma das bases do espaço $\mathbb{R}^4$ é constituída pelos vectores

$$e_1 = (1, 0, 0, 0) \ , \ e_2 = (0, 1, 0, 0) \ , \ e_3 = (0, 0, 1, 0) \ , \ e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

---

(1) Se $n = 1$, a sequência reduz-se ao vector u_1 e diz-se **linearmente independente,** sse $u_1 \neq 0$.

Com efeito, estes vectores são linearmente independentes, como facilmente se verifica, e tem-se

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \quad , \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Analogamente se reconhece que o conjunto $\mathbb{C}^n$ de todas as sequências de *n* números complexos é um espaço vectorial (complexo) com *n* dimensões.

Por sua vez, o conjunto de todos os polinómios com x

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

relativos a um corpo K qualquer e de *grau* $\leqslant n-1$ (isto é, podendo ser $a_1 \neq 0$ ou $a_1 = 0$) é um espaço vectorial sobre K com n *dimensões* e facilmente se vê que uma das suas bases é precisamente a sequência de *n* polinómios

$$x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^2, x, 1$$

Convenciona-se ainda dizer que um espaço vectorial V sobre um corpo K tem *zero dimensões* (ou *dimensão nula*) sse V se reduz ao vector nulo, 0, isto é, sse $V = \{0\}$.

Quando V não tem dimensão nula e não existe uma sequência (finita) de vectores que verifique as condições 1), 2) atrás indicadas, diz-se que V tem uma *infinidade de dimensões* (ou *dimensão infinita*). Mas, mesmo neste caso, existe uma definição que generaliza as anteriores e que atribui a cada espaço vectorial V, um determinado número cardinal infinito ν, chamado o *número de dimensões de* V.

Por exemplo, o conjunto dos *polinómios em* x *de coeficientes reais e de todos os graus possíveis* é, como se vê facilmente, um espaço vectorial real de dimensão infinita, E, segundo a referida definição (que não vale a pena reproduzir aqui), o seu número de dimensões é o cardinal $\aleph_0$. Uma base deste espaço é precisamente a *sucessão* de polinómios

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

Por sua vez, o conjunto $\mathbb{R}^{\infty}$, constituído por todas as sucessões

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de números reais (aplicações de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$) é também um espaço vectorial de dimensão infinita; mas, segundo a referida definição, o número de dimensões de $\mathbb{R}^{\infty}$ é a potência do *contínuo* — e não a do *numerável*. Mas já tem dimensão $\aleph_0$ o subespaço de $\mathbb{R}^{\infty}$ constituído pelas *sucessões de números reais que se anulam todos a partir de certa ordem (ordem esta variável de sucessão para sucessão)*. Aliás, é fácil ver que este último espaço é *isomorfo* ao espaço dos polinómios em x reais de todos os graus (isto é, existe uma aplicação *linear biunívoca* de um dos espaços sobre o outro).

Considerações análogas para o espaço $\mathbb{C}^{\infty}$.

Finalmente, note-se que o conjunto $\mathcal{F}_I$ de *todas as funções reais definidas num intervalo* I *da recta* é também um espaço vectorial real de dimensão infinita (relativamente às noções usuais de 'soma de duas funções' e de 'produto de uma função por um número real'). O número de dimensões de $\mathcal{F}_I$ é a potência do contínuo — e o mesmo sucede com o subespaço de $\mathcal{F}_I$ constituído por *todas as funções reais contínuas em* I. (Por que razão este conjunto é um subespaço vectorial de $\mathcal{F}_I$? Leia a nota final deste número.)

Deve-se registar por último o seguinte facto:

As considerações relativas a espaços vectoriais de dimensões infinitas intervêm hoje cada vez mais nas aplicações da matemática à física (nomeadamente à física do átomo), bem como a outros domínios.

NOTA. Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K. Diz-se que um subconjunto U de V é um *subespaço vectorial de* V, quando constitui ainda um espaço vectorial sobre K, relativamente às operações de 'soma' e de 'produtos por escalares' do espaço V, *restringidas* a elementos de U. Em particular, U será, neste caso, *submódulo de* V. Facilmente se reconhece o seguinte *teorema:*

Um subconjunto U *de* V *é um subespaço vectorial de* V, *sse verifica as duas condições seguintes:*

$$1)\quad u,\, v \in U \Rightarrow u + v \in U$$

$$2)\quad \alpha \in K \wedge u \subset U \Rightarrow \alpha u \in U$$

11. **Noção geral de espaço afim.** Seja K um corpo qualquer (na prática, K é geralmente o corpo real ou o corpo complexo). Chama-se *espaço afim sobre* K todo o conjunto E, constituído por elementos a, b,... de natureza qualquer (a que se convenciona chamar *'pontos'*) ao qual está associado um espaço vectorial V sobre K, de modo a serem verificadas as seguintes condições:

A1. A cada par ordenado (a, b) de elementos de E (pontos) corresponde um e um só elemento *u* de V (vector) que designaremos por $\overrightarrow{ab}$.

A2. $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$, $\forall a, b \in E$

A3. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$, $\forall a, b, c \in E$

A4. Dados um ponto *a* em E e um vector *u* em V, existe um e um só ponto *b* em E, tal que

$$\overrightarrow{ab} = u$$

O ponto b que verifica esta condição é chamado *'soma de a com* u', e escreve-se

$$b = a + u$$

Na mesma hipótese se diz que o vector *u* (ou seja o vector $\overrightarrow{ab}$) é a diferença entre b e a, escrevendo-se então:

$$u = b - a$$

O número de dimensões do espaço vectorial V também é chamado número de dimensões do *espaço afim* E, a que V está associado.

Desde logo se reconhece que o espaço $\mathcal{E}$ usual é um *espaço afim (real) com três dimensões,* visto que lhe está associado, de harmonia com as condições A1-A4, o espaço vectorial real $\mathcal{V}$, que tem 3 dimensões. Analogamente: um plano é um espaço afim real bidimensional; uma recta é um espaço afim unidimensional; um conjunto reduzido a um ponto é um espaço afim com *zero dimensões* (correspondendo-lhe o espaço $\{0\}$).

Note-se que faz sentido falar de 'soma de dois vectores', mas não de 'soma de dois pontos' (apenas de 'diferença de dois pontos').

O conjunto de todos os possíveis *instantes* (ou *épocas*) relativos a um dado lugar, o conjunto de todos os possíveis potenciais eléctricos num dado ponto, etc. são *espaços afins reais de dimensão* 1. Com efeito, as diferenças entre dois instantes são elementos de um espaço vectorial com uma dimensão (o espaço dos *tempos decorridos* entre os instantes considerados); mas os instantes não são propriamente vectores, pois não faz sentido falar da 'soma de dois instantes': estes são apenas *pontos* de um espaço afim (e analogamente para potenciais) ([1]).

A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA apresenta-nos um exemplo interessantíssimo de espaço afim real com 4 dimensões: o *espaço-tempo de Minkowski.* Cada *ponto* deste espaço é um *acontecimento elementar,* cujas coordenadas x, y, z, t, definem, respectivamente, a posição (x, y, z) e o instante t em que se verifica o acontecimento, *relativamente a um dado referencial de espaço e tempo* (constituído por exemplo por um ponto e três vectores não complanares, fixos em relação a um dado sólido ou sistema rígido, e por um *relógio,* fixo no mesmo sistema, que pode ser por exemplo a Terra, uma carruagem, uma nave espacial, etc.). Aliás, na teoria da relatividade, espaço e tempo são

---

([1]) Note-se que o **espaço afim dos instantes** está naturalmente **orientado,** no sentido do passado para o futuro; e que, por isso, os tempos são mais do que vectores: são **grandezas relativas.**

propriedades *relativas* dos acontecimentos, e não inteiramente *discerníveis* entre si.

Note-se também desde já o seguinte facto:

Todo o espaço vectorial V *pode ser considerado como espaço afim, desde que se faça corresponder a cada par ordenado* (u, v) *de elementos* u, v *de* V *o vector* $v-u$ *de* V, *que poderíamos também designar por* $\overrightarrow{uv}$. *Com efeito, facilmente se reconhece que, deste modo, são verificadas as condições* A1 — A4, *estando* V *simultaneamente no papel de* E *e de* V. *Nesta ordem de ideias, os elementos de* V *podem ser chamados 'pontos' em vez de 'vectores'.*

Por exemplo, os elementos de $\mathbb{R}^n$ (sequências de *n* números reais) podem ser chamados 'vectores' ou 'pontos', conforme estivermos a considerar $\mathbb{R}^n$ como espaço vectorial ou como espaço afim.

Mas note-se que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira, como mostram os exemplos precedentes.

Um facto análogo se verifica na distinção entre 'grandeza' e 'número real'.

Todo o número real é uma grandeza, mas há grandezas de muitas espécies (p. ex. os comprimentos, os volumes, as massas, os tempos, etc.) que não podem ser considerados *naturalmente* como números reais (porquê?).

12. **Noções de recta, plano, conjunto convexo, etc. num espaço afim qualquer*.** Consideremos um espaço afim E sobre um corpo K e seja V o espaço vectorial que lhe está associado. Diz-se que um subconjunto D de E *é um subespaço afim de* E, sse o conjunto de todos os vectores $\overrightarrow{ab}$ definidos por pontos a, b de D é um subespaço vectorial U de V.

Por outros termos, o conjunto D é um subespaço afim de E, sse existe um subespaço vectorial U de V tal que:

1) $$a, b \in D \Rightarrow b - a \in U$$

2) $$a \in D \wedge u \in U \Rightarrow a + u \in D$$

É claro que, neste caso (e só neste), o conjunto D constitui um espaço afim, relativamente à aplicação $(a, b) \rightarrow \vec{ab}$ restringida a pares de pontos de D (por isso mesmo se lhe chama o subespaço afim de E). O espaço vectorial que lhe está associado é o subespaço U de V.

Entre os subespaços afins de E figuram sempre os de *dimensão nula*, isto é, os que se reduzem a pontos. Chamam-se *rectas* e *planos* de E os subespaços afins de E de dimensões 1 e 2 respectivamente (quando existam). Mas note-se que, se a dimensão de E é superior a 2, existem subespaços afins de E de dimensão $\geqslant 3$, que não são portanto rectas nem planos. Em particular, se E tem dimensão finita, *n*, chamam-se *hiperplanos* de E os subespaços afins de E de dimensão $n-1$ [1].

Das condições A1—A4 (consideradas como *axiomas*) deduzem-se as seguintes proposições (neste caso *teoremas*):

Dados dois pontos distintos a, b *de* E *existe sempre uma recta de* E, *e uma só, a que pertencem os pontos* a, b. *Essa recta é definida pela equação paramétrica*

$$p = a + t(b-a) \quad , \quad \textit{sendo } t \textit{ variável em } K$$

Dados três pontos a, b, c *de* E *não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma recta), existe sempre um plano de* E, *e um só, a que pertencem* a, b, c. *Esse plano é definido pela equação paramétrica*

$$p = a + t(b-a) + u(c-a) \quad , \quad \text{com } t, u \in K$$

E ainda se pode definir a relação de paralelismo entre duas rectas, entre dois planos, entre um plano e uma recta, ou, mais geralmente, entre dois subespaços afins quaisquer de E, e generalizar a este caso as habituais proposições de paralelismo.

Suponhamos, a partir de agora, que K *é o corpo real.*

---

[1] A noção de hiperplano pode ser estendida a espaços de dimensão infinita.

Chama-se *segmento de recta de extremos* a, b, e representa-se por $\overline{ab}$, o conjunto dos pontos p de E tais que

$$p = a + t(b - a),$$

sendo t um número real do intervalo [0,1].

Posto isto, diz-se que um subconjunto M de E é *convexo*, sse verifica a condição:

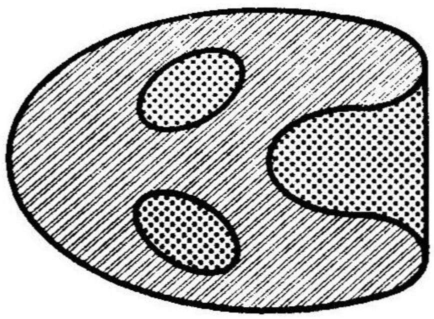
$$a, b \in M \Rightarrow \overline{ab} \subset M$$

Desde logo se reconhece que *todo o subespaço afim de* E *é um conjunto convexo.*

Também é fácil ver o seguinte:

A intersecção de conjuntos convexos, em número finito ou infinito, é sempre um conjunto convexo. (Já o mesmo não sucede com a reunião!)

Seja então A um subconjunto qualquer de E (convexo ou não). Existe pelo menos um conjunto convexo que contém A: o próprio espaço E. Designemos por $\hat{A}$ a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm A. Segundo a proposição anterior, $\hat{A}$ é um conjunto convexo: precisamente *o conjunto convexo mínimo que contém* A. Pois bem, diz-se que $\hat{A}$ é o *invólucro convexo de* A.



Na figura junta indica-se, a tracejado, um conjunto de pontos do plano que não é convexo; para obter o invólucro convexo, é necessário juntar-lhe o conjunto que se indica a ponteado (fronteira incluída).

É claro que, num espaço afim E, real ou complexo, podemos definir *semi-recta, semiplano, ângulo convexo, triângulo, polígono convexo, poliedro convexo,* etc., tal como no espaço usual. Por exemplo, sendo *a, b, c* três pontos não colineares de E, o invólucro convexo do conjunto $\{a, b, c\}$ é o triângulo de vértices *a, b, c;* sendo *a, b, c, d* quatro pontos não complanares, o invólucro convexo de $\{a, b, c, d\}$ é o tetraedro de vértices *a, b, c, d,* etc. ([1]).

Já no 6.º ano foi salientada a importância do conceito de conjunto convexo em PROGRAMAÇÃO LINEAR.

NOTAS:

I. A noção de conjunto convexo estende-se, de modo análogo, a espaços afins complexos.

II. Pode-se definir 'espaço afim real', tomando como primitivas as noções de 'recta' e de 'situado entre' (ou, o que é equivalente, a de 'segmento de recta') e adoptando um sistema de axiomas, semelhantes aos axiomas da geometria elementar que envolvem apenas essas noções. Neste caso, a noção de 'vector' poderá ser definida exactamente como fizemos no caso elementar, a partir da relação de equipolência entre segmentos orientados. A diferença essencial em relação ao caso elementar refere-se ao número de dimensões, que pode agora ser qualquer. Um conjunto D de pontos de E é um **subespaço afim de** E, sse, quaisquer que sejam os pontos a, b de D, sendo $a \neq b$, a recta ab está contida em D.

13. **Noções gerais de espaço métrico euclidiano e de espaço métrico*.** Seja V um espaço vectorial real com *n* dimensões. Diz-se que V é um *espaço métrico euclidiano (vectorial),* sse, a cada par ordenado (u, v) de vectores de V, está associado um número real, que se chama *produto interno de* u *por* v e se

---

([1]) Aqui 'triângulo' designa portanto um conjunto convexo e não a reunião de 3 segmentos de recta. Analogamente para o 'tetraedro'.

representa por $u \cdot v$ (ler 'u *interno* v'), de acordo com as seguintes condições:

E1. $u \cdot v = v \cdot u \quad , \quad \forall u, v \in V$
E2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad , \quad \forall u, v, w \in V$
E3. $(au) \cdot v = a(u \cdot v) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R};\ u, v \in V$
E4. $u \cdot u \geqslant 0 \quad , \quad \forall u \in V$
E5. $u \cdot u = 0 \Rightarrow u = 0$

Portanto $u \cdot v$ é uma função *real dos vectores* u, v. Segundo E1, esta função é *simétrica* (ou *comutativa*). De E1 e E2 resulta ainda que tal função é *bilinear.* Ora todos estes factos (função real simétrica e bilinear) exprimem-se dizendo que $u \cdot v$ é uma *forma bilinear simétrica (real).*

A conjunção das propriedades E4 e E5 com as primeiras exprime-se dizendo que a forma bilinear $u \cdot v$ é *definida positiva* ([1]).

Posto isto, podemos definir *módulo de um vector* u do espaço métrico euclidiano V, mediante a fórmula

$$(1) \qquad |u| = \sqrt{u \cdot u}$$

em que $|u|$ designa o 'módulo de u' (também chamado 'norma de u'). De E4 e E5 deduz-se desde logo:

N1. $\quad |u| \geqslant 0 \quad , \quad \forall u \in V$
N2. $\quad |u| = 0 \Rightarrow u = 0$

Por outro lado, convencionando escrever u^2 como abreviatura de $u \cdot u$, tira-se de E1 e E2:

$$(2) \qquad (u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2\, u \cdot v$$

([1]) Se fosse sempre $u \cdot u \leqslant 0$, e, além disso, fosse verificada a condição $u \cdot u = 0 \Rightarrow u = 0$, diríamos que a forma era **definida negativa.** Se fosse umas vezes $u \cdot u > 0$, outras $u \cdot u < 0$ e outras $u \cdot u = 0$, diríamos que a forma era **indefinida.** Se fosse **sempre** $u \cdot u \geqslant 0$ ou **sempre** $u \cdot u \leqslant 0$, podendo ser $u \cdot u = 0$ com $u \neq 0$, diríamos que a forma era **semidefinida,** respectivamente **positiva ou negativa.**

Além disso, demonstra-se que

$$(3) \qquad |u \cdot v| \leqslant |u|\,|v| \quad , \quad \forall\, u, v \in V$$

Esta fórmula importante (chamada *desigualdade de Cauchy-Schwarz*) permite definir *ângulo θ de dois vectores* u, v de V, mediante a fórmula

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

Diz-se que u é *ortogonal* a v, e escreve-se $u \perp v$, sse $\theta = \pi/2$ ou um, pelo menos, dos vectores u, v é nulo.

Por sua vez, de (2) e (3) deduz-se facilmente

$$\text{N3.} \qquad |u + v| \leqslant |u| + |v| \quad , \quad \forall\, u, v \in V$$

Finalmente, de E3 resulta:

$$\text{N4.} \qquad |\alpha u| \leqslant |\alpha|\,|u| \quad , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ u \in V$$

Chama-se *base ortonormal* de V toda a base de V constituída por vectores *unitários* (isto é, de módulo 1) e ortogonais entre si.

Por exemplo, no espaço $\mathbb{R}^4$, uma das definições de *produto interno de dois vectores*

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

é a dada pela fórmula

$$x \cdot y = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 + x_4\, y_4$$

Então o módulo de x será

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

e *uma das bases ortonormais de* $\mathbb{R}^4$ será constituída pela sequência de vectores

$$(1, 0, 0, 0) \quad , \quad (0, 1, 0, 0) \quad , \quad (0, 0, 1, 0) \quad , \quad (0, 0, 0, 1)$$

Analogamente para $\mathbb{R}^5$, para $\mathbb{R}^6$, etc.

Seja agora E *um espaço afim real com* n *dimensões.* Diz-se que E é um *espaço métrico euclidiano (pontual)*, sse o espaço vectorial V que lhe está associado é um espaço métrico euclidiano (vectorial) [1]. Nestas condições, chama-se distância de dois pontos a, b de E, e representa-se por $\delta(a, b)$, o módulo do vector $\overrightarrow{ab}$, isto é, em fórmula

$$\delta(a, b) = |b - a| \quad , \quad \forall\, a, b \in E$$

Das propriedades N1 — N4 dos módulos e da função anterior deduzem-se as seguintes propriedades da função *'distância'*:

M1. $\delta(a, b) \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, a, b \in E$

M2. $\delta(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$

M3. $\delta(a, b) = \delta(b, a) \quad , \quad \forall\, a, b \in E$

M4. $\delta(a, b) \leqslant \delta(a, c) + \delta(c, b) \quad , \quad \forall\, a, b, c \in E$

Esta última fórmula é chamada *desigualdade triangular*, por estar relacionada com uma conhecida propriedade dos triângulos.

Mais geralmente ainda:

Diz-se que um conjunto S, constituído por elementos a, b... de natureza qualquer, é um *espaço métrico*, sse, a cada par (a, b) de elementos de S, é associado um número real $\delta(a, b)$ (*distância entre* a *e* b), de modo que sejam verificadas as condições M1 — M4.

Convém desde já notar que um espaço métrico não é necessariamente euclidiano. Por exemplo, seja S uma superfície esférica e convencionemos chamar *distância entre dois pontos* a *e* b de S o menor dos comprimentos dos arcos de círculo máximo de

---

[1] Em particular, segundo uma observação do n.º 11, todo o **espaço métrico euclidiano vectorial** pode ser considerado como **espaço métrico euclidiano pontual**. Mas a recíproca não é verdadeira.

extremos a, b. Então é bem fácil que S é um espaço métrico, mas não um espaço métrico euclidiano (não é sequer um espaço afim).

Num espaço métrico euclidiano, podemos definir *medida de um ângulo convexo* bâc, como sendo igual à do ângulo dos vectores $\vec{ab}$ e $\vec{ac}$. Se a medida de bâc é $\pi/2$ (em radianos), o ângulo bâc diz-se *recto* e as rectas ab, ac dizem-se *perpendiculares entre si*. Daqui decorrem imediatamente as noções de triângulo rectângulo, de quadrado, etc. exactamente como no caso elementar.

O teorema de Pitágoras e, mais geralmente, o teorema de Carnot, são válidos em qualquer espaço métrico euclidiano. E o mesmo para qualquer outro teorema da geometria euclidiana elementar em que não intervenha o facto de o espaço $\mathcal{E}$ ter três dimensões.

Note-se que as noções de circunferência, de círculo, de cónica, de esfera, etc., etc. se generalizam a qualquer espaço métrico euclidiano, onde aliás nos aparecem novas noções (por exemplo a de hipercubo, a de hiperesfera, etc., etc.) e portanto novos teoremas.

Dados dois espaços métricos S, S' e um número real $r > 0$, chama-se *semelhança de razão* r entre S e S' toda a aplicação biunívoca f de S sobre S', tal que

$$\delta(f(a), f(b)) = r\, \delta(a, b) \quad , \quad \forall a, b \in S$$

Chamam-se *isometrias* as semelhanças de razão 1.

Em particular, se S e S' são espaços métricos euclidianos de dimensão superior a 1, prova-se que toda a semelhança entre S e S' é uma *afinidade*, isto é, uma aplicação biunívoca de S sobre S' que transforma segmentos de recta em segmentos de recta (e, por isso, rectas em rectas, planos em planos, subespaços afins de S em subespaços afins de S', conjuntos convexos em conjuntos convexos, etc.). Se S e S' são espaços euclidianos unidimensionais (portanto isomorfos às rectas de $\mathcal{E}$), não há distinções entre semelhanças e afinidades.

NOTAS:

I. Geralmente, por comodidade, diz-se apenas 'espaço euclidiano' em vez de 'espaço métrico euclidiano', embora haja uma distinção a fazer entre os dois conceitos (aliás de pouca importância na prática). Por exemplo, o espaço usual $\mathcal{E}$ é um *espaço euclidiano* (é mesmo o *protótipo dos espaços euclidianos*) mas não é um *espaço métrico*, por não estar nele definida, naturalmente, a noção de distância como *número*. Com efeito, não faz sentido dizer, por exemplo, que a distância entre dois pontos do espaço é 3 – a não ser que se tenha fixado previamente uma unidade de comprimento, cuja escolha é, como se sabe, arbitrária. No entanto, como se vê, o espaço $\mathcal{E}$ torna-se um *espaço métrico*, e portanto um *espaço métrico euclidiano*, desde que se adopte uma unidade de comprimento.

II. A noção do 'produto interno de dois vectores' pode ser estendida a um espaço vectorial V, *real* ou *complexo*, com qualquer número de dimensões (finito ou infinito).

Se V é um espaço vectorial complexo, as únicas modificações a fazer na definição anterior são as seguintes:

1) O produto interno $u \cdot v$ é uma função *complexa* dos vectores $u \cdot v$.

2) Em vez de E1 tem-se a condição:

$$u \cdot v = \overline{v \cdot u} \quad , \quad \forall\, u, v \in V,$$

em que $\overline{v \cdot u}$ representa o conjugado do número complexo $v \cdot u$ (se $u \cdot v$ é real, tem-se $\overline{v \cdot u} = v \cdot u = u \cdot v$).

Nestes termos, deduz-se de E3:

$$u \cdot (av) = \bar{a}(u \cdot v) \quad , \quad \forall\, a \in \mathbb{C};\ u, v \in V$$

e já não podemos dizer que a função $u \cdot v$ é bilinear (é no entanto distributiva, à direita e à esqeurda). Diz-se agora que $u \cdot v$ é uma *forma hermítica definida positiva* e o espaço V diz-se *hermítico* (é ainda um espaço métrico). Em particular, se V é um espaço hermítico real e tem um número finito de dimensões, então V é euclidiano.

Entre os espaços hermíticos com uma infinidade de dimensões, reais ou complexas, merecem especial menção os ESPAÇOS DE HILBERT, que desempenham um papel fundamental em *mecânica quântica* e, de modo geral, em toda a *física do átomo.*

III. No ESPAÇO–TEMPO DE MINKOWSKI, que designaremos aqui por $\mathcal{M}$, define-se uma noção de produto interno que não é uma forma definida positiva, mas sim indefinida, como vamos ver.

Suponhamos dado um referencial *de espaço* $(\vec{O}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m})$, ortonormal, fixo num sistema rígido S, por exemplo a Terra, e um relógio fixo no mesmo sistema. Fica assim definido um *referencial de espaço e tempo* $(\vec{O}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}, \vec{e})$ em S. Segundo a TEORIA DA RELATIVIDADE, a distância entre dois pontos materiais, assim como o tempo decorrido entre dois acontecimentos, *dependem do sistema* S (e até da posição do relógio em S). *Distância* e *tempo decorrido* são pois *propriedades relativas* (e não *propriedades absolutas*), pois que variam com o sistema S em que são medidos (não são por exemplo os mesmos na Terra ou em Marte), supondo, é claro, que se adoptam *as mesmas unidades de comprimento e de tempo.*

Seja agora $\vec{u}$ um *vector do espaço—tempo,* isto é, um elemento do espaço vectorial associado a $\mathcal{M}$. Dar um tal vector equivale a dar os 4 números reais x, y, z, t, que são, por exemplo, as *componentes* do vector no referencial de espaço e tempo fixado em S. Ter-se-á então

$$\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{m} + t\vec{e}$$

Posto isto, consideremos a função de $\vec{u}$ dada pela expressão:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2,$$

em que *c* é a medida da velocidade da luz no vazio, relativamente ao sistema de unidades adoptado (aproximadamente 300 000, se a unidade de comprimento é o quilómetro e a unidade de tempo é o segundo). Ora, em RELATIVIDADE RESTRITA, o valor desta expressão é *invariante,* isto é, não muda quando se passa de S para outro sistema S′, *animado de movimento de translação rectilíneo e uniforme em relação a* S. Isto sugere que se chame *quadrado do módulo de* $\vec{u}$ e se represente por $|\vec{u}|^2$ (ou simplesmente por $\vec{u}^2$) o valor de (1). Nesta ordem de ideias, é natural definir *produto interno* de dois vectores de espaço—tempo

$$\vec{u} \rightsquigarrow (x,\ y,\ z,\ t) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (x',\ y',\ z',\ t')$$

mediante a fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' - c^2tt'$$

Facilmente se vê que, neste caso, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é uma *forma bilinear simétrica (real). Mas esta forma não é definida positiva.* Com efeito, por exemplo:

quando $\vec{u} = \vec{j}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 = 1 > 0$;
quando $\vec{u} = \vec{e}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} = -c^2 < 0$;
quando $\vec{u} = c\,\vec{j} + \vec{e}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} = c^2 - c^2 = 0$.

A forma é pois *indefinida:* há vectores $\vec{u}$ tais que $\vec{u}^2 > 0$, vectores $\vec{u}$ tais que $\vec{u}^2 < 0$ e vectores $\vec{u}$ não nulos tais que $\vec{u}^2 = 0$.

Por conseguinte, $\mathcal{M}$ não é um espaço métrico euclidiano: diz-se que é um *espaço pseudo-métrico euclidiano* ou um espaço *pseudo-euclidiano.*

Sejam agora α e β dois acontecimentos definidos por dois pontos de $\mathcal{M}$, respectivamente $A \rightsquigarrow (x, y, z, t)$ e $B \rightsquigarrow (x', y', z', t')$ no referencial adoptado; isto é:

$$A = O + x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{m} + t\vec{e} \quad , \quad B = O + x'\vec{j} + y'\vec{k} + z'\vec{m} + t'\vec{e}$$

Já sabemos que a *distância* entre os dois pontos propriamente ditos (x, y, z) e (x', y', z'), bem como o tempo decorrido entre os instantes t e t', dependem geralmente do sistema S e, portanto, do referencial de espaço—tempo adoptado. Mas, em RELATIVIDADE RESTRITA, é invariante o módulo do vector B—A, ou seja

$$|B-A| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-c^2\ (t-t')^2}$$

A este número é natural chamar *distância relativista* entre os pontos A e B (ou entre os acontecimentos α e β) ([1]). Mas, pelos exemplos anteriores, desde já se vê que a distância relativista entre dois acontecimentos pode ser *real* (positiva), *imaginária* ou *nula* (mesmo que os acontecimentos sejam distintos). Isto basta para ver que o espaço-tempo $\mathcal{M}$, com tal noção de 'distância', não é um *espaço métrico*, segundo a definição anterior.

Deve ainda notar-se que muitos autores chamam *quadrado de um vector* $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y, z, t)$ ao valor da expressão $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, e não ao da expressão $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, simétrica da primeira. É claro que isto altera a definição de 'distância relativista', mas é indiferente uma ou a outra definição, para caracterizar a geometria do espaço pseudo-euclidiano $\mathcal{M}$. Primeiro que tudo, deve notar-se que o grupo das *isometrias* de $\mathcal{M}$ é o mesmo com qualquer das definições (chamando 'isometria' a toda a aplicação biunívoca de $\mathcal{M}$ sobre si mesmo que conserva as distâncias).

Entre as isometrias de $\mathcal{M}$ têm especial importância as *transformações de Lorentz,* que formam um subgrupo do anterior *(grupo de Lorentz).* Concretamente, interpretadas como mudanças de coordenadas de espaço e tempo, as transformações de Lorentz são as mudanças que permitem passar das coordenadas relativas a um referencial de espaço—tempo fixo num sistema rígido S, para as coordenadas relativas a um referencial fixo num sistema S', animado do movimento de translação rectilíneo e uniforme em relação a S (em dinâmica relativista, exige-se que os sistemas

---

([1]) Os físicos chamam-lhe habitualmente **intervalo** entre α e β.

considerados sejam de *inércia*, isto é, que 'não rodem em relação ao conjunto das estrelas'). Nestas mudanças, o tempo pode converter-se parcialmente em espaço e vice-versa.

O grupo de Lorentz está na base de toda a física relativista.

O físico LORENTZ chegou às transformações que têm o seu nome, procurando interpretar o resultado negativo das experiências de MICHELSON e MORLEY, que, juntamente com outros factos, conduziam a esta conclusão, aparentemente absurda:

A luz (e mais geralmente todas as ondas electromagnéticas) propaga-se no vazio com a mesma velocidade em relação a todos os corpos, apesar de estes estarem em movimento uns em relação aos outros.

Consideremos, por exemplo, um raio luminoso e uma partícula atómica que se move na mesma direcção e em sentido contrário ao da luz, com a velocidade de 100 000 km/s em relação à Terra (no vazio). Então a velocidade da luz em relação à partícula deveria ser, ao que parece,

$$300\,000 + 100\,000 = 400\,000 \quad (\text{km/s})$$

Mas não: *a velocidade da luz em relação à partícula é sempre a mesma* (300 000 km/s), *qualquer que seja a velocidade da partícula bem como a sua direcção e sentido (em relação à Terra ou a qualquer outro sistema de referência).*

Isto mostrou que era preciso abandonar os conceitos tradicionais, ilusórios, de *espaço absoluto* e de *tempo absoluto*, e, em particular, a *fórmula clássica de composição de velocidades:*

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v},$$

quando alguma destas se aproxima da velocidade da luz.

O grupo de Lorentz define, precisamente, a geometria do espaço – tempo, que não só explica a *invariância da velocidade da luz relativamente aos diferentes referenciais*, como ainda, mais geralmente, *permite fundar uma nova mecânica, compatível com as leis do electromagnetismo* (ao contrário do que sucede com a mecânica clássica). A nova mecânica, fundada por EINSTEIN, conduz a conclusões revolucionárias, como por exemplo a LEI DA EQUIVALÊNCIA ENTRE A MASSA E A ENERGIA, que está na base *da produção da energia nuclear.* Segundo esta lei, deixa de haver uma distinção nítida entre matéria e energia:

1 g *de matéria equivale a cerca de* 25 000 000 kwh.

CAPÍTULO V

ÁLGEBRAS DE APLICAÇÕES LINEARES E ÁLGEBRAS DE MATRIZES

O assunto de que vamos tratar é da máxima importância em matemática moderna. As suas aplicações à física, à química, à engenharia, à estatística, à economia, etc., são cada vez mais frequentes.

1. **Produto de duas aplicações lineares. Isomorfismos vectoriais.** Começaremos por provar o seguinte facto:

O produto de duas aplicações lineares é sempre uma aplicação linear.

Mais precisamente, vamos provar o seguinte:

TEOREMA 1. *Sejam* U, V, W *três espaços vectoriais sobre um mesmo corpo* K. *Se* f *é uma aplicação linear de* V *em* W *e* g *uma aplicação linear de* U *em* V, *então* fg (*'aplicação composta' ou 'produto' de* f *por* g) *é uma aplicação linear de* U *em* W.

Demonstração [1]:

Suponhamos verificada a hipótese e sejam u, v dois vectores quaisquer de U. Então será

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \qquad \text{(porquê?)}$$

---

[1] A técnica desta demonstração, bem como de outras que se seguem, é muito semelhante às que foram usadas, no 6.º ano, para as demonstrações de teoremas sobre isomorfismos.

donde

$$(1) \qquad f(g(u+v)) = f(g(u)+g(v))$$

$$= f(g(u)) + f(g(v)) \qquad \text{(porquê?,}$$

Mas

$f(g(u+v)) = (fg)(u+v)$, $f(g(u)) = (fg)(u)$, $f(g(v)) = (fg)(v)$ (porquê?) e, portanto, de (1) vem

$$(2) \qquad (fg)(u+v) = (fg)(u) + (fg)(v)$$

Seja agora α um elemento qualquer de K (escalar) e *u* um vector qualquer de U. Então

$$g(\alpha\ u) = \alpha\, g(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$f(g(\alpha\ u)) = f(\alpha\, g(u)) = \alpha\ f(g(u)) \qquad \text{(porquê?)}$$

donde finalmente

$$(3) \qquad (fg)(\alpha\ u) = \alpha (fg)(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

Ora a conjunção de (2) e (3) significa, precisamente, que fg é uma aplicação linear (de U em W).

Vamos agora provar o seguinte:

A inversa de uma aplicação linear biunívoca ainda é uma aplicação linear.

Mais precisamente:

TEOREMA 2. *Sejam* U *e* V *dois espaços vectoriais, sobre um mesmo corpo* K. *Se* f *é uma aplicação linear biunívoca de* U *sobre* V, *então* f^{-1} *é uma aplicação linear (biunívoca) de* V *sobre* U.

Demonstração:

Seja f uma aplicação linear biunívoca de U sobre V. Então f^{-1} é uma aplicação biunívoca de V sobre U. Queremos provar que f^{-1} também é linear.

Sejam u, v dois elementos quaisquer de V e ponhamos $u' = f^{-1}(u)$, $v' = f^{-1}(v)$. Então

$$u = f(u') \quad , \quad v = f(v') \quad , \quad u + v = f(u') + f(v')$$

e portanto

$$u + v = f(u' + v') \qquad \text{(porquê?)}$$

Ora daqui deduz-se

$$f^{-1}(u + v) = u' + v'$$

ou seja

$$(1) \qquad f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$$

Seja agora α um elemento qualquer de K. Então

$$u = f(u') \quad , \quad \alpha u = \alpha f(u')$$

e portanto

$$\alpha u = f(\alpha u'),$$

donde

$$f^{-1}(\alpha u) = \alpha u'$$

ou seja

$$(2) \qquad f^{-1}(\alpha u) = \alpha f^{-1}(u)$$

A conjunção de (1) e (2) significa, precisamente, que f^{-1} é linear.

DEFINIÇÃO. *Sendo* U *e* V *dois espaços vectoriais sobre um corpo* K, *chama-se* isomorfismo *de* U *sobre* V *toda a aplicação linear biunívoca de* U *sobre* V. *Diz-se que* U *é* isomorfo *a* V, *sse existe pelo menos um isomorfismo de* U *sobre* V.

Tudo o que foi dito no vol. I, 2.º tomo, para isomorfismos entre grupóides, entre anéis, etc., estende-se agora, *mutatis mutandis*, a espaços vectoriais.

Em particular, chama-se *automorfismo dum espaço vectorial* U toda a aplicação linear biunívoca de U sobre si mesmo. Dos teoremas 1 e 2 resulta o seguinte

COROLÁRIO: *Os automorfismos de um espaço vectorial* U *formam um grupo multiplicativo.*

EXEMPLOS:

I. O conjunto $\mathcal{F}$ de todas as funções φ na forma

$$\varphi(x) \equiv a \cos x + b \operatorname{sen} x \quad , \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R},$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, relativamente às operações usuais de 'soma de duas funções' e de 'produto de uma função por um número real'. Suponhamos agora fixada num plano π uma base $(\vec{j}, \vec{k})$. Então, se fizermos corresponder, a cada vector $\vec{u} = a\vec{j} + b\vec{k}$ do plano π, precisamente a função $\varphi(x) \equiv a \cos x + b \operatorname{sen} x$, fica definida uma aplicação linear biunívoca $\vec{u} \rightarrow \varphi$ de $\mathcal{V}_\pi$ sobre $\mathcal{F}$ (prove por analogia com Capítulo IV, n.º 1). Logo estes dois espaços vectoriais são isomorfos.

Por outro lado, se fizermos corresponder a cada função $\varphi(x) \equiv a \cos x + b \operatorname{sen} x$, a função $\Psi(x) \equiv - b \cos x + a \operatorname{sen} x$, ficará definido um automorfismo $\varphi \rightarrow \Psi$ do espaço $\mathcal{F}$.

II. O conjunto $\mathcal{P}_3$ de todos os polinómios em x reais

$$ax^2 + bx + c$$

de grau $\leqslant 2$ ($a \neq 0$ ou $a = 0$) é um espaço vectorial real, relativamente às operações usuais de 'soma' e de 'produto por um número real'. Prove que $\mathcal{P}_3$ é isomorfo ao espaço $\mathcal{V}$ dos vectores do espaço ordinário.

NOTA. Dados dois espaços afins E, F sobre um mesmo corpo, chama-se *aplicação afim de* E em F toda a aplicação f de E em F que determina uma aplicação linear, f_o, do espaço vectorial associado a E no espaço vectorial associado a F, segundo a fórmula

$$f_o(\overrightarrow{ab}) = f(b) - f(a) \quad , \quad \forall a, b \in E$$

É fácil ver que o produto de duas aplicações afins também é uma aplicação afim e que a inversa de uma aplicação afim biunívoca também é uma aplicação afim. Os conceitos de isomorfismo, automorfismo, etc. estendem-se de modo trivial aos espaços afins.

2. **Soma de duas aplicações lineares.** Sejam U e V dois espaços vectoriais sobre um mesmo corpo K. O facto de estar definida uma noção de 'soma de dois vectores' em V (assim como em U) permite-nos definir 'soma de duas aplicações lineares de U em V':

DEFINIÇÃO. *Dadas duas aplicações lineares* f, g *de* U *em* V, *chama-se soma de* f *com* g, *e representa-se por* $f + g$, *a aplicação* h *de* U *em* V *assim definida*

$$h(u) = f(u) + g(u) \quad , \quad \forall u \in U$$

Ter-se-á, pois, *por definição:*

$$(2) \qquad (f + g)(u) = f(u) + g(u) \quad , \quad \forall u \in U$$

TEOREMA 1. *A soma de duas aplicações lineares também é uma aplicação linear.*

Demonstração:

Sejam f, g duas aplicações lineares de U em V e ponhamos h = f + g. Queremos provar que a aplicação h é linear.

Sejam u, v dois elementos quaisquer de U. Então

$$h(u+v) = f(u+v) + g(u+v) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= [f(u) + f(v)] + [g(u) + g(v)] \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$h(u+v) = [f(u) + g(u)] + [f(v) + g(v)] \quad \text{e portanto}$$

$$\text{(2)} \qquad h(u+v) = h(u) + h(v) \qquad \text{(porquê?)}$$

Seja agora α um escalar qualquer. Então

$$h(\alpha u) = f(\alpha u) + g(\alpha u) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= \alpha f(u) + \alpha g(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= \alpha [f(u) + g(u)] \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$\text{(3)} \qquad h(\alpha u) = \alpha h(u)$$

De (2) e (3) conclui-se o que se pretendia.

Posto isto, designemos por L o *conjunto de todas as aplicações lineares de* U *em* V. Vamos demonstrar o seguinte:

TEOREMA 2. *O conjunto* L *é um grupo comutativo a respeito da adição (portanto um módulo).*

Demonstração:

Da definição (1) resulta imediatamente que a adição é universal e unívoca em L. Portanto (L, +) é um *grupóide*. Provemos que este é comutativo.

Sejam f, g dois elementos quaisquer de L (aplicações lineares de U em V) e seja *u* um elemento *arbitrário* de U. Então:

$$f(u) + g(u) = g(u) + f(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

e, como *u* é arbitrário, tem-se

$$f(u) + g(u) = g(u) + f(u) \quad , \quad \forall\, u \in U,$$

donde

$$(f + g)(u) = (g + f)(u) \quad , \quad \forall\, u \in U,$$

e portanto

$$f + g = g + f \qquad \text{(porquê?)}$$

Analogamente se prova que o grupóide (L, +) é associativo e portanto um semigrupo.

Além disso (L, +) tem elemento neutro, que é a *aplicação nula*, ou seja, a aplicação f definida por

$$f(u) = 0 \quad , \quad \forall u \in U$$

(faz corresponder a todo o vector u de U o vector nulo de V). Podemos designá-la ainda pelo símbolo 0.

Finalmente, qualquer que seja $f \in L$, a aplicação φ tal que

$$\varphi(u) = -f(u) \quad , \quad \forall u \in U,$$

é simétrica de f, isto é, tem-se $\varphi + f = 0$, como facilmente se reconhece, e podemos então escrever $\varphi = -f$.

E assim fica provado tudo o que se pretendia.

NOTA. Sendo E e F dois espaços afins sobre o mesmo corpo (por exemplo, E = $\mathcal{E}$ e F = $\mathcal{E}$ ou E = $\mathcal{E}$ e F um plano π) não se pode definir em geral 'soma de duas aplicações afins de E em F', precisamente porque não faz sentido, em geral, falar de 'soma de dois pontos de F'.

3. **Produto de uma aplicação linear por um escalar.** Consideremos novamente dois espaços vectoriais U e V sobre um corpo K.

DEFINIÇÃO. *Sejam dados um escalar* α *(isto é, um elemento de* K*) e uma aplicação linear* f *de* U *em* V. *Chama-se produto de* α *por* f*, e representa-se por* α f*, a aplicação* h *de* U em V *assim definida*

$$h(u) = \alpha f(u) \quad , \quad \forall u \in U,$$

Será pois, *por definição:*

$$(\alpha f)(u) = \alpha f(u) \quad , \quad \forall u \in U$$

TEOREMA 1. *Se* f *é uma aplicação linear de* U *em* V, *o produto de um escalar* α *qualquer por* f *ainda é uma aplicação linear de* U *em* V.

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor, como exercício.

Continuemos a designar por L o conjunto de todas as aplicações lineares de U em V. Já vimos que L é um módulo. Mas podemos dizer mais do que isso:

TEOREMA 2. *O conjunto* L *é um espaço vectorial sobre* K *(relativamente às operações definidas de 'soma' e de 'produto por um escalar').*

É claro que para demonstrar este teorema resta só provar as seguintes propriedades:

1. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g \quad , \quad \forall\, \alpha \in K;\ f, g \in L$

2. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \quad , \quad \forall\ \alpha,\ \beta \in K;\ f \in L$

3. $\alpha(\beta f) = (\alpha \beta) f \quad , \quad \forall\ \alpha \beta \in K;\ f \in L$

4. $1 \cdot f = f \quad , \quad \forall\ f \in L$

Todas essas demonstrações são muito simples e podem ficar ao cuidado do leitor.

4. **Anel das aplicações lineares de um espaço vectorial em si mesmo.** Temos até aqui designado por L o conjunto das aplicações lineares de U em V, sendo U e V espaços vectoriais sobre um mesmo corpo K, *distintos ou coincidentes.* Daqui por diante vamos supor U = V. *Assim,* L *designará o conjunto das aplicações lineares do espaço vectorial* U *em si mesmo.*

Segundo o que vimos no n.° 2 está definida em L uma adição. Por outro lado, segundo o estabelecido no n.° 1, também está definida em L uma multiplicação, que é a composição de aplicações no sentido usual. Em virtude do teorema 1 do n.° 1, o produto de dois elementos de L — isto é, de duas aplicações lineares de U em U — ainda é um elemento de L (neste caso tem-se U = V = W). Surge agora a pergunta:

Será $(L, +, \cdot)$ *um anel?*

Ora já vimos que:

1) $(L, +)$ *é um módulo.*

Por outro lado, é fácil ver que:

2) $(L, \cdot)$ *é um semigrupo.*

Com efeito, já ficou provado que $(L, \cdot)$ é um grupóide (em virtude do teorema 1 do n.° 1). Além disso, a multiplicação é associativa, por se tratar da composição de aplicações no sentido usual. Logo $(L, \cdot)$ é de facto um semigrupo.

Resta provar que:

3) *A multiplicação é distributiva a respeito da adição em* L.

Começaremos por provar a *distributividade à direita*. Sejam f, g, h elementos arbitrários de L e *u* um elemento arbitrário de U. Então

$$
\begin{aligned}
[f(g+h)](u) &= f[(g+h)u] && \text{(porquê?)}\\
&= f[g(u)+h(u)] && \text{(porquê?) (1)}\\
&= f(g(u)) + f(h(u)) && \text{(porquê?) (2)}\\
&= (fg)(u) + (fh)(u) && \text{(porquê?)}\\
&= (fg+fh)(u) && \text{(porquê?) (3)}
\end{aligned}
$$

Por conseguinte

$$[f(g+h)](u) = (fg+fh)(u) \quad , \quad \forall\, u \in U,$$

o que significa que

$$f(g+h) = fg + fh \qquad \text{(porquê?)}$$

Fica assim provada *a distributividade à direita:*

$$\boxed{f(g+h) = fg + fh \quad , \quad \forall\, f, g, h \in L}$$

(1) Por definição de 'soma de aplicações lineares'.
(2) Porque f é uma aplicação linear.
(3) Por definição de 'soma de aplicações lineares'.

Demonstremos agora a *distributividade à esquerda.* Sejam ainda f, g, h elementos arbitrários de L e u em elemento arbitrário de U. Então

$$\begin{aligned}[(f+g)h]\ (u) &= (f+g)(h(u)) && \text{(porquê?)}\\ &= f(h(u)) + g(h(u)) && \text{(porquê?) (1)}\\ &= (fh)(u) + (gh)(u) && \text{(porquê?)}\\ &= (fh+gh)(u) && \text{(porquê?)}\end{aligned}$$

Por conseguinte

$$[(f+g)h]\ (u) = (fh+gh)(u) \quad , \quad \forall\, u \in U$$

Fica assim provada a *distributividade à esquerda:*

$$\boxed{(f+g)h = fh + gh \quad , \quad \forall\, f, g, h \in L}$$

e portanto 3), o que acaba de provar que (L, + , •) *é de facto um anel.*

Convém, desde já, notar o seguinte:

O operador identidade, I, *é obviamente uma aplicação linear do espaço* U *em si mesmo e portanto elemento unidade do anel* L.

Assim, em conclusão:

TEOREMA. *O conjunto* L *das aplicações lineares de um espaço vectorial em si mesmo é um anel, relativamente às operações de soma e produto de aplicações lineares atrás definidas. Este anel tem elemento unidade que é a aplicação* I.

Veremos mais adiante que o *anel* L *não é comutativo, excepto no caso trivial em que o espaço* U *tem dimensão* 1.

Pode ainda perguntar-se:

Será L *um anel de divisão, tal como, por exemplo, o anel dos quaterniões?*

---

(1) Por definição de 'soma de aplicações lineares'.

Como é sabido (vol. I, 2.º tomo, pág. 93, n.º 7) dizer que L é um anel de divisão equivale a dizer que toda a aplicação linear *não nula* de U em U é bijectiva. *Ora isto só é verdade, se* U *for unidimensional.*

Note-se finalmente que *o grupo dos automorfismos de* U (*aplicação linear biunívoca de* U *sobre* U) *não é um anel, mesmo que lhe juntemos a aplicação nula – a não ser que o espaço* U *seja unidimensional.*

5. **Conceito de álgebra.** Seja ainda U um espaço vectorial sobre um corpo K e seja L o conjunto das aplicações lineares de U em si mesmo. Acabámos de ver que L é um anel relativamente às operações + e · definidas. Mas já no n.º 3 tínhamos visto que L *também é um espaço vectorial sobre* K. Assim, em resumo:

1) L *é um espaço vectorial sobre* K *(a respeito das operações de 'soma de duas aplicações lineares' e de 'produto de um escalar por uma aplicação linear').*

2) L *é um anel (a respeito das operações de 'soma' e de 'produto de duas aplicações lineares').*

3) *As operações de 'produto de duas aplicações lineares' e de 'produto de um escalar por uma aplicação linear' têm as seguintes* PROPRIEDADES DE ENLACE:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha f)g = \alpha(fg)\\ f(\alpha g) = \alpha(fg)\end{array}\right\} \forall\, \alpha \in K;\ f,\ g \in U$$

Ora exprime-se a conjunção de todos estes factos, dizendo que L *é uma álgebra sobre* K. Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que um conjunto* $\mathcal{A}$ *de elementos* a, b,... *de natureza qualquer é uma álgebra sobre um corpo* K *(ou um sistema hipercomplexo sobre* K*), sse são verificadas as seguintes condições:*

A1. *Estão definidas operações de 'soma de dois elementos de* $\mathcal{A}$*' e de 'produto de um elemento de* K *por um elemento de* $\mathcal{A}$*',* a respeito dos quais $\mathcal{A}$ *é um espaço vectorial sobre* K.

A2. É além disso definida uma operação de *'produto de dois elementos de $\mathcal{A}$'*, de tal modo que $\mathcal{A}$ *é um anel a respeito da adição e da multiplicação definidas.*

A3. As operações de *'produto de dois elementos de* $\mathcal{A}$*'* e de *'produto de um elemento de* K *por um elemento de* $\mathcal{A}$*'* satisfazem às seguintes CONDIÇÕES DE ENLACE [1]:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda a)b = \lambda(ab)\\ a(\lambda b) = \lambda(ab)\end{array}\right\} \quad \forall\, \lambda \in K;\ a,\ b \in \mathcal{A}$$

Assim, em particular:

TEOREMA. *O conjunto* L *das aplicações lineares do espaço* U *em si mesmo é uma álgebra sobre* K, *munida de elemento unidade.*

Podem dar-se inúmeros outros exemplos importantes de álgebras. Assim, o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é, em particular, uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$); o conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões de Hamilton é uma álgebra não comutativa sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$); etc.

Note-se que, no espaço vectorial $\mathcal{V}$, com a operação do produto externo definida no n.º 8 do Capítulo IV (pág. 163), *só falta uma propriedade,* para que $\mathcal{V}$ seja uma álgebra sobre $\mathbb{R}$: a associatividade do produto.

EXERCÍCIOS:

I. Diga se é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$, a respeito das operações usuais:

a) *o conjunto* $\mathcal{P}_3$ *de todos os polinómios em* x *reais de grau inferior a* 3;

b) *o conjunto* $\mathcal{P}_\infty$ *dos polinómios em* x *reais de todos os graus;*

c) *o conjunto dos polinómios em* x *reais de todos os graus que se anulam para* $x = 0$.

---

[1] Também poderíamos chamar-lhes 'propriedades associativas das duas multiplicações entre si'.

Indique quais das álgebras consideradas são comutativas e quais têm elemento unidade.

II. Sendo U um espaço vectorial sobre um corpo K e sendo L a álgebra das aplicações lineares de U em U, considere a aplicação

$$\alpha \rightarrow \alpha \, \mathrm{I} \qquad \text{de K em L}$$

Mostre que esta aplicação: 1) é biunívoca; 2) respeita as operações de 'soma' e 'produto'.

Podemos assim *identificar o corpo* K *a uma subálgebra* L * *de* L, *escrevendo* $\alpha = \alpha \, \mathrm{I}$, $\forall \, \alpha \in$ K. Em que caso é L * = L?

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. O termo 'álgebra' tem sido usado com diversas acepções, o que por vezes pode dar lugar a equívocos. Primeiro que tudo, aparece-nos a *Álgebra,* como ramo da matemática que tem evoluído ao longo dos séculos e que, em nossos dias, é definida como sendo o estudo das *estruturas algébricas* (grupóides, semigrupos, grupos, quase-grupos, anéis, corpos, álgebras de Boole, espaços vectoriais, álgebras, etc.). Por outro lado, também se usa algumas vezes o termo 'álgebra' com significado de 'estrutura algébrica' (sinónimo de 'sistema algébrico' e 'espaço algébrico'). Mas, em sentido restrito, o termo 'álgebra' tem hoje, habitualmente, o significado que foi atrás definido (sinónimo de 'sistema hipercomplexo'). E é cada vez mais importante o estudo das *álgebras,* nesta acepção.

Mas é preciso notar que as *álgebras de Boole* não são álgebras segundo esta definição. Basta lembrar que as álgebras de Boole não são anéis, nem sequer módulos, como se viu no Capítulo VI, vol. I, 2.° tomo.

6. **Soma de duas matrizes quadradas.** Neste número e nos seguintes vamos ocupar-nos exclusivamente de matrizes quadradas de 2.ª *ordem* com elementos reais. Mas as nossas conclusões estendem-se facilmente a matrizes quadradas de *qualquer ordem* e com *elementos num corpo* K *qualquer.*

Consideremos uma matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Seja π um plano qualquer ([1]) e suponhamos fixada em $\mathcal{V}_\pi$ uma base $(\vec{j}, \vec{k})$. Então, como sabemos, a matriz A define uma aplicação linear f do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo, dada pelo sistema:

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

A aplicação f faz precisamente corresponder a cada vector $u \rightarrow (x, y)$ o vector $\vec{u}' \rightarrow (x', y')$.

Consideremos agora outra matriz

$$B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, \text{ com } a', b', c', d' \in \mathbb{R}$$

Então B define uma aplicação linear g do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo, dada pelo sistema

$$\begin{cases} x'' = a'x + c'y \\ y'' = b'x + d'z \end{cases}$$

e que faz corresponder a cada vector $\vec{u} \rightarrow (x, y)$ o vector $\vec{u}'' \rightarrow (x'', y'')$.

([1]) Estamos a referir-nos a planos do espaço usual $\mathcal{E}$. Mas π pode ser **qualquer espaço afim real com 2 dimensões** (Capítulo IV, n.º 11). Por sua vez, no lugar de $\mathcal{V}_\pi$ podemos considerar **qualquer espaço vectorial real com 2 dimensões** (Capítulo IV, n.º 10). Com efeito, todos esses espaços afins, ou os respectivos espaços vectoriais são **isomorfos entre si.** Como protótipo de espaço vectorial (ou afim) real de dimensão 2, podemos tomar o espaço $\mathbb{R}^2$.

Ora a aplicação f + g faz corresponder ao vector $\vec{u} \rightarrow (x, y)$ o vector

$$\vec{u}' + \vec{u}'' \rightarrow (x' + x'', y' + y'')$$

e é, portanto, dada pelo sistema

$$\begin{cases} x' + x'' = (a + a')x + (c + c')y \\ y' + y'' = (b + b')x + (d + d')y \end{cases}$$

Deste modo, a matriz que representa f + g será

$$\begin{bmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$

Será, pois, natural chamar a esta matriz a *soma das matrizes* A e B, e designá-las por A + B. Teremos, pois, por definição:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$

Mas já vimos no Capítulo IV, n.º 1 (teorema 1, págs. 126-127) que a correspondência $f \rightarrow A$, entre as aplicações lineares f e as matrizes A que as representam, é bijectiva. Daqui e da definição de soma de matrizes conclui-se que:

O conjunto das matrizes quadradas reais de ordem 2 é um módulo, isomorfo ao módulo das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo.

Representaremos o conjunto dessas matrizes por $\mathcal{M}_2$ e o conjunto destas aplicações lineares por $\mathcal{L}_2$.

Note-se que, em particular, a *matriz nula* é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de elementos todos nulos; e que a *simétrica da matriz* A é a matriz

$$-A = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}$$

7. Produto de um escalar por uma matriz. Suponhamos que se mantêm todas as convenções e as hipóteses anteriores. Como se disse, f é a aplicação linear definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \qquad (\text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Seja agora *r* um número real qualquer. Então rf, produto do escalar *r* pela aplicação linear $f \in \mathcal{L}_2$ (ver n.º 3, pág. 200), é a aplicação que faz corresponder a cada vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$ o vector $rf(\vec{u}) = r\vec{u}' \rightsquigarrow (rx', ry')$ dado pelo sistema

$$\begin{cases} rx' = (ra)x + (rc)y \\ ry' = (rb)x + (rd)y \end{cases}$$

Deste modo, a matriz que representa a aplicação rf será

$$\begin{bmatrix} ra & rc \\ rb & rd \end{bmatrix}$$

É, portanto, natural chamar a esta matriz *produto de* r *por* A e designá-la por rA. Assim, *por definição:*

$$r\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rc \\ rb & rd \end{bmatrix}$$

Por outro lado, atendendo mais uma vez a que a correspondência $f \rightsquigarrow A$ é bijectiva e à conclusão do número anterior, conclui-se:

O conjunto $\mathcal{M}_2$, das matrizes quadradas reais de ordem 2, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, *isomorfo ao espaço vectorial $\mathcal{L}_2$, das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo.*

8. Produto de duas matrizes. Consideremos novamente duas matrizes quadradas reais de 2.ª ordem

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$

e suponhamos fixado, num plano π, uma base $(\vec{j}, \vec{k})$. Então A representa a aplicação linear f (de $\mathcal{V}_\pi$ em $\mathcal{V}_\pi$) que faz corresponder, a cada vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$, o vector $\vec{u}' \rightsquigarrow (x', y')$ dado por

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

Por sua vez, a matriz B representa a aplicação linear g (de $\mathcal{V}_\pi$ em $\mathcal{V}_\pi$) que faz corresponder ao vector $\vec{u}' \rightsquigarrow (x', y')$ o vector $\vec{u}'' \rightsquigarrow (x'', y'')$ dado por

$$(2) \qquad \begin{cases} x'' = a'x' + c'y' \\ y'' = b'x' + d'y' \end{cases}$$

Ora a aplicação gf transforma directamente o vector $\vec{u}$ no vector $\vec{u}''$. É portanto dado pelo sistema que se obtém, substituindo x', y' em (2) pelas respectivas expressões dadas por (1):

$$\begin{cases} x'' = a'(ax + cy) + c'(bx + dy) \\ y'' = b'(ax + cy) + d'(bx + dy) \end{cases}$$

ou seja

$$(3) \qquad \begin{cases} x'' = (a'a + c'b)x + (a'c + c'd)y \\ y'' = (b'a + d'b)x + (b'c + d'd)y \end{cases}$$

Como se vê, a aplicação gf (produto de g por f) é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{bmatrix}$$

É portanto natural chamar a esta matriz *produto de* B *por* A e representá-la por BA. Assim, por definição:

$$\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{bmatrix}$$

Como se vê, o produto de B por A é obtido por meio da seguinte

REGRA: *O elemento de* BA *situado na linha* r *e na coluna* s *é a soma dos produtos que se obtêm, multiplicando ordenamente os elementos da linha* r *em* B *pelos elementos da coluna* s *em* A.

Esta técnica de cálculo é abreviadamente designada pela expressão *'multiplicar linhas por colunas'*.

Analogamente será

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$$

Por exemplo, o produto da linha (b, d) de A pela coluna (a', b') de B dá o elemento ba' + db' da linha 2 e da coluna 1 de AB.

Mas convém, desde já, notar que *não se tem necessariamente*

$$AB = BA$$

Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte: *a multiplicação de matrizes quadradas reais de ordem* 2 *não é comutativa.*

Diz-se que duas matrizes A e B são *permutáveis* sse AB=BA (e analogamente para as respectivas aplicações lineares).

Finalmente, atendendo mais uma vez a que a correspondência $f \rightsquigarrow A$ é bijectiva, conclui-se:

O conjunto $\mathcal{M}_2$ *das matrizes quadradas reais de 2.ª ordem é uma álgebra (não comutativa): isomorfa à álgebra* $\mathcal{L}_2$ *das aplicações lineares do espaço* $\mathcal{V}_\pi$ *em si mesmo.*

Em particular, o elemento unidade desta álgebra — a aplicação I — é dada pelo sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases},$$

ao qual corresponde a matriz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É natural chamar-lhe *matriz unidade,* visto ser o elemento unidade da álgebra $\mathcal{M}_2$:

$$AE = EA \quad , \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_2$$

Chama-se *matriz escalar* toda a matriz da forma

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = rE,$$

em que *r* é um número real qualquer ([1]). De acordo com o que se pede para provar no exercício II do n.º 5, a aplicação

$$r \rightsquigarrow rE \text{ de } \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{M}_2$$

é biunívoca e respeita às operações de 'soma' e de 'produto'; além disso, faz corresponder ao número 1 (elemento unidade do *corpo* $\mathbb{R}$) a *matriz* E (elemento unidade da *álgebra* $\mathcal{M}_2$). Por conseguinte:

As matrizes escalares formam uma subálgebra de $\mathcal{M}_2$ *que é isomorfa ao corpo* $\mathbb{R}$ *e que podemos identificar a este corpo, escrevendo*

$$rE = r \quad , \quad \forall\, r \in \mathbb{R}$$

Nesta ordem de ideias, será lícito escrever também

$$\mathbb{R} \subset \mathcal{M}_2$$

Convém notar que a aplicação linear correspondente à matriz rE é precisamente a *multiplicação por* r, isto é, a aplicação $\vec{u} \rightsquigarrow r\vec{u}$ do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo, definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = rx \\ y' = ry \end{cases} \iff \begin{cases} x' = rx + 0y \\ y' = 0x + ry \end{cases}$$

A este corresponde efectivamente, como se vê, a matriz escalar rE, que se identifica ao escalar *r*.

EXERCÍCIO. Mostre que, sendo *a* e *b* números reais, a aplicação

$$a + bi \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{C} \text{ em } \mathcal{M}_2$$

([1]) Tal como se disse logo no início do n.º 6, todas estas considerações se estendem a matrizes quadradas de **qualquer ordem** e com **elementos num corpo** K **qualquer.**

é um isomorfismo do corpo $\mathbb{C}$ sobre uma subálgebra $\mathbb{C}^*$ de $\mathcal{M}_2$, transformando o número 1 na matriz unidade.

Depois disto, note que

$$(1)\quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vimos, a matriz unidade, E, pode ser identificada ao número 1. Por sua vez, a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

representa a aplicação linear definida pelo sistema: $x' = -y'$, $y' = x$. Ora esta aplicação linear é a *rotação de* 90° *no sentido positivo,* representada pelo número i. Assim, o facto demonstrado e a fórmula (1) permitem-nos fazer a *identificação*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a + bi$$

Podemos então escrever

$$\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_2$$

Note-se, porém, que existe uma infinidade de outras subálgebras de $\mathcal{M}_2$, que são *corpos isomorfos a* $\mathbb{C}$. A que indicámos aqui é precisamente constituda pelas matrizes que representam *semelhanças positivas do plano.*

9. **Inversão de matrizes.** Continuaremos a designar por $\mathcal{L}_2$ o conjunto das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo ([1]). Vimos que $\mathcal{L}_2$ é uma álgebra isomorfa à álgebra $\mathcal{M}_2$ das matrizes quadradas reais de ordem 2. Um elemento f de $\mathcal{L}_2$ é *regular,* sse tem inverso no anel $\mathcal{L}_2$, ou (o que é equivalente) sse f é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{V}_\pi$ sobre si mesmo.

([1]) Convém rever a nota do n.º 6 a propósito de $\mathcal{V}_\pi$.

Na mesma hipótese se diz que a matriz A correspondente a f é *regular.* Portanto a matriz A é regular, sse existe uma matriz X tal que

$$(1) \qquad AX = XA = 1,$$

em que '1' designa a matriz unidade (também designada por 'E'). Mas, se existe pelo menos uma matriz X que verifica (1), só existe uma (porquê?) e essa matriz é designada por A^{-1}.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (\text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Então A representa a aplicação linear f definida pelo sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

que transforma cada vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$ no vector $\vec{u}' \rightsquigarrow (x'\ y')$. A aplicação inversa, *se existe,* transforma o vector $\vec{u}' \rightsquigarrow (x', y')$ no vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$. Como obter então o sistema de equações que define essa aplicação inversa? (Pense, antes de ler o que vem a seguir.)

É claro que se trata simplesmente de resolver o sistema (2) em relação às variáveis x, y, como funções de x', y'. Já sabemos que:

Quaisquer que sejam $x', y' \in \mathbb{R}$, *o sistema (2) de equações em* x, y *é possível e determinado, sse* $ad - bc \neq 0$. *Neste caso tem-se*

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ \\ y' = bx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{dx' - cy'}{ad - bc} \\ \\ y = \dfrac{ay' - bx'}{ad - bc} \end{cases}$$

Por conseguinte, nesta hipótese (e só nesta), tem-se

$$\forall \vec{u}' \in \mathcal{V}_\pi \quad , \quad \exists^1 \vec{u} \in \mathcal{V}_\pi : \ \vec{u}' = f(\vec{u})$$

o que significa que f é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{V}_\pi$ sobre si mesmo. A aplicação inversa (também linear) é definida, segundo (3), pelo sistema:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{d}{ad - bx} x' - \dfrac{c}{ad - bc} y' \\[2ex] y = -\dfrac{b}{ad - bc} x' + \dfrac{a}{ad - bc} y' \end{cases}$$

Por outro lado, se ad — bc = 0, é fácil ver, pelo estudo feito no 6.° ano, que o sistema de equações (2) em x, y é umas vezes *impossível* e outras vezes *indeterminado,* conforme os valores de x′, y′. *Portanto* f *não é elemento regular de* $\mathcal{L}_2$, *se* ad — bc = 0.

Também já sabemos que se escreve, por convenção,

$$ad - bc = \det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Então, no caso em que ad — bc ≠ 0, o sistema (4) assume o aspecto

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{\det A} x' - \dfrac{c}{\det A} y' \\[2ex] y = -\dfrac{b}{\det A} x' + \dfrac{a}{\det A} y' \end{cases}$$

A matriz correspondente será portanto

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det A} & -\dfrac{c}{\det A} \\[2ex] -\dfrac{b}{\det A} & \dfrac{a}{\det A} \end{bmatrix}$$

Mas esta é a matriz inversa de A (porquê?).

Por conseguinte:

TEOREMA. *A matriz* A *é regular, sse det* A $\neq$ 0. *Nesta hipótese, tem-se*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \tag{5}$$

EXERCÍCIO. Verificar directamente que a matriz (3) é a inversa de A, multiplicando-a à esquerda e à direita por A (supondo det A $\neq$ 0).

NOTAS

I. A matriz

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

é chamada a *adjunta de* A (matriz cujo produto por A é det A . E).

II. O conceito de 'determinante' pode ser generalizado a matrizes quadradas de ordem qualquer e com elementos em qualquer corpo. Bastará saber que se mantêm — com forma inteiramente análoga às que foram indicadas para determinantes de 3.ª ordem (Capítulo IV, n.° 8, págs. 161-167) — a noção de *'complemento algébrico'* e a regra do desenvolvimento dum determinante segundo os elementos de uma fila qualquer. Deste modo, por exemplo, o cálculo de um determinante de 4.ª ordem pode ser reduzido ao cálculo de determinantes de 3.ª ordem (há no entanto processos mais simples para o cálculo dos determinantes).

Posto isto, chama-se *adjunta de uma matriz* A, e designa-se por adj A, a matriz que se obtém, substituindo cada elemento de A pelo seu complemento algébrico e transpondo depois a matriz obtida (isto é, trocando nesta, ordenadamente, as linhas com as colunas).

Ora o teorema anterior, que demonstramos para *matrizes quadradas reais de 2.ª ordem,* estende-se a matrizes quadradas *de qualquer ordem e com elementos num corpo* K *qualquer,* bastando substituir a fórmula (4), pela fórmula mais geral

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

III. A fórmula anterior, para inversão de matrizes quadradas, tem *grande interesse teórico, mas diminuto interesse prático,* quando se trata de aplicá-la directamente à inversão de uma matriz quadrada de *ordem muito elevada.* Neste caso, os métodos habituais para resolução de sistemas de equações lineares (método da substituição, método da redução, etc.) deixam de ser aplicáveis e têm de ser substituídos *por métodos de aproximações sucessivas* (ou *métodos de iteração*). Aliás, estes mesmos métodos só podem ser geralmente aplicados *mediante computadores electrónicos,* que invertem matrizes quadradas com grande aproximação — permitindo por vezes calcular os elementos da matriz inversa com 12 algarismos decimais exactos.

A inversão de matrizes de ordem elevada é um problema que se põe com frequência a computadores (por exemplo em questões de programação linear). A potência de um computador costuma ser avaliada, precisamente, pela rapidez com que inverte uma matriz de ordem elevada.

Antes de existirem os computadores electrónicos, era geralmente impossível inverter, por exemplo, uma matriz quadrada de ordem 100. Basta lembrar que uma tal matriz tem 100^2 ($=10\,000$) elementos e que o cálculo de cada um desses elementos é por si só laboriosíssimo.

10. **Matrizes singulares.** Recordemos as noções de 'elemento singular' e 'divisor de zero', num anel A qualquer:

Diz-se que um elemento *a* de A é *singular* sse *a* não é regular. Diz-se que *a* é *divisor de zero,* sse $a \neq 0$ e existe $b \neq 0$ tal que $ab = 0 \vee ba = 0$.

Vimos que *todo o divisor de zero é um elemento singular* (cf. 1.° vol., 2.° tomo, teorema 1, pág. 92). Mas a recíproca não é verdadeira, mesmo se nos limitarmos a elementos singulares não nulos:

Consideremos por exemplo o conjunto $\mathscr{C}$ de todas as funções reais definidas e contínuas em $\mathbb{R}$. Então $\mathscr{C}$ é um anel (comutativo) relativamente às operações usuais de 'soma' e 'produto'. Ora a função x, por exemplo, é um elemento singular deste anel (porquê?) [1]; mas este elemento de $\mathscr{C}$ não é um divisor de zero. Com efeito, seja f uma função tal que

$$f \in \mathscr{C} \wedge xf(x) \equiv 0$$

Então $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (porquê?). Assim, $f(x) = 0$ para todo o $x \neq 0$ e, como f é contínua em $\mathbb{R}$, também $f(0) = 0$ (porquê?). Logo $f = 0$, o que prova que a função $x \leadsto x$ não é um divisor de zero (embora seja um elemento singular de $\mathscr{C}$).

No entanto prova-se o seguinte:

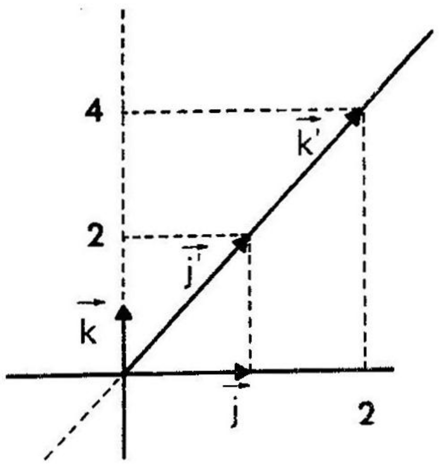
No anel $\mathscr{M}_2$ (e, mais geralmente, em qualquer anel de matrizes), todo o elemento singular não nulo é divisor de zero.

Não demonstraremos este teorema. Limitar-nos-emos a dar um exemplo, que contém a ideia da demonstração. Consideremos a matriz singular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\det A = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0),$$

que representa a aplicação linear f definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$$



(1) A função real $1/x$ não é definida em $\mathbb{R}$.

Ora esta aplicação transforma os vectores de base $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente nos vectores $\vec{j'} \rightsquigarrow (1, 2)$, $\vec{k'} \rightsquigarrow (2, 4)$ que *são colineares*

$$\vec{k'} = 2\vec{j'}$$

(por isso mesmo a matriz A é singular). Então f transforma cada vector $\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k}$ no vector

$$\vec{u'} = x\vec{j'} + y\vec{k'} = (x + 2y)\vec{j'}$$

Portanto f transforma todo o vector $\vec{u} \in \mathcal{V}_\pi$ num vector $\vec{u'}$ *colinear* com $\vec{j'}$ (o contradomínio de f não é pois $\mathcal{V}_\pi$; qual é então?).

Consideremos agora a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

que representa a aplicação linear definida pelo sistema

$$\begin{cases} x'' = 2x - y \\ y'' = -4x + 2y \end{cases}$$

Esta transforma o vector $\vec{j'} \rightsquigarrow (1, 2)$ no vector nulo: *foi escolhida precisamente com essa finalidade.* É portanto fácil ver *a priori* que

$$BA = 0 \quad , \quad \text{embora seja } A \neq 0 \text{ e } B \neq 0$$

Isto aliás pode ser confirmado efectuando o cálculo. Note-se entretanto que

$$AB \neq 0 \quad , \quad \text{apesar de ser } BA = 0.$$

Mas, seja como for, ficou provado que a matriz A é um divisor de zero, de acordo com a definição geral de 'divisor de zero', atrás recordada.

Analogamente, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

tem-se, como é fácil verificar

$$AB = 0, \text{ com } A \neq 0 \text{ e } B \neq 0, \text{ mas } BA \neq 0$$

Como se vê, as álgebras de aplicações lineares ou de matrizes, além das aplicações práticas importantíssimas que oferecem, constituem um manancial de exemplos sugestivos e variados, aptos a ilustrar a teoria geral das estruturas algébricas.

Fica ao mesmo tempo confirmado o interesse da teoria abstracta das estruturas algébricas, que permite uma extraordinária economia de pensamento. Este grande poder de síntese é um dos caracteres essenciais dos métodos axiomáticos da matemática moderna, que se tornaram indispensáveis, precisamente, para se poder hoje dominar a imensa variedade de teorias, muitas delas isomorfas entre si, que começaram a surgir desde o século passado.

Em poder de condensação, a matemática moderna está para a matemática de há 10 anos, como esta se apresentava em relação à matemática de PEDRO NUNES.

O *Livro de Álgebra* de Pedro Nunes, que, no seu género, foi um das obras mais notáveis da Europa, era um volumoso tratado, supra-sumo da ciência algébrica desse tempo, que não ía contudo além da equação do 2.° grau ([1]). Mas o facto de não se ter introduzido ainda o método simbólico da álgebra, bem como a relutância do Autor em aceitar a existência dos números

---

([1]) Pouco depois deram-se as descobertas dos grandes algebristas italianos relativas às equações do 3.º e do 4.º graus. Pedro Nunes refere-se a este facto num aditamento ao tratado.

relativos, e ainda a ausência de uma teoria simples dos números irracionais, obriga-o a expor em numerosas páginas, de leitura difícil, a teoria da equação do 2.º grau — que se pode hoje apresentar, com perfeito rigor, e sem dificuldade, em breves páginas, a alunos do ensino secundário.

EXERCÍCIO. Sendo f, g duas aplicações lineares dum espaço vectorial U em si mesmo, indique uma condição necessária e suficiente para que seja fg = 0. [Obs.: chama-se *núcleo de* f o conjunto dos vectores *u* de *U* tais que f(u) = 0].

Índice

Págs.

Capítulo I. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO VECTORIAL

1. Relação 'situado entre' 9
2. Relações de ordem 12
3. Conjuntos ordenados. Isomorfismos 14
4. Relações de ordem lata 15
5. Relações de ordem parcial 16
6. Relação 'situado entre' associada a uma relação de ordem . 18
7. Relações de ordem subordinadas à relação 'situado entre' numa recta 19
8. Projecções paralelas. Extensão do conceito de sentido . . 20
9. Conceito de vector 25
10. Soma de um ponto com um vector 28
11. Soma de dois vectores 30
12. Translações 38
13. Produto de um número real por um vector 41
14. Homotetias 45
15. Vectores colineares e vectores complanares 48
16. Referenciais cartesianos em forma vectorial 55

Capítulo II. NÚMEROS COMPLEXOS EM FORMA TRIGONOMÉTRICA

1. Representação geométrica dos números complexos 59
2. Representação trigonométrica dos números complexos . . . 61
3. Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos 66
4. Divisão de números complexos na forma trigonométrica . . 71
5. Potências de números complexos na forma trigonométrica . . 72
6. Radiciação no corpo complexo 72

Págs.

7. Fórmulas trigonométricas de adição de ângulos 75
8. Múltiplos de ângulos e potências de senos e co-senos . . . 77
9. Fórmulas de transformação logarítmica. Derivadas das funções circulares 79

Capítulo III. TRANSFORMAÇÕES AFINS E APLICAÇÕES LINEARES

1. Transformações de semelhança e isometrias 81
2. Rotações do plano e do espaço 85
3. Reflexões. Deslocamentos e isometrias negativas 91
4. Transformações afins 96
5. Efeito das transformações afins sobre rectas paralelas e sobre vectores 101
6. Aplicações lineares 104
7. Determinação de todas as possíveis afinidades entre dois planos ou do espaço 111
8. Determinação de todas as possíveis semelhanças, isometrias e deslocamentos, entre dois planos ou do espaço 115
9. Aplicações afins * 119

Capítulo IV. REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA DE APLICAÇÕES LINEARES E TRANSFORMAÇÕES AFINS

1. Aplicações lineares e matrizes 123
2. Representação analítica das afinidades de um plano ou do espaço 129
3. Produto interno de dois vectores 133
4. Nova definição geométrica de produto interno 136
5. Aplicações do produto interno em geometria analítica . . . 140
6. Representação analítica das isometrias e das semelhanças . . 150
7. Produto externo de dois vectores do plano * 158
8. Produto externo de dois vectores do espaço 163
9. Produto misto * 169
10. Número de dimensões de um espaço vectorial * 173
11. Noção geral de espaço afim 177
12. Noções de recta, plano, conjunto convexo, etc. num espaço afim qualquer * 179
13. Noções gerais de espaço métrico euclidiano e de espaço métrico * 182

Págs.

Capítulo V. ÁLGEBRAS DE APLICAÇÕES LINEARES E ÁLGEBRAS DE MATRIZES

1. Produto de duas aplicações lineares. Isomorfismos vectoriais 193
2. Soma de duas aplicações lineares 197
3. Produto de uma aplicação linear por um escalar 200
4. Anel das aplicações lineares de um espaço vectorial em si mesmo 201
5. Conceito de álgebra 204
6. Soma de duas matrizes quadradas 206
7. Produto de um escalar por uma matriz 209
8. Produto de duas matrizes 210
9. Inversão de matrizes 214
10. Matrizes singulares 218

Composto e impresso na
Imprensa Portuguesa — Porto
e concluiu-se
em Outubro de 1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA