Consideremos, em primeiro lugar, o caso dos $\underline{u_i}$ serem todos positivos.

Vê-se que $\underline{P_n}$ cresce constantemente; basta que seja inferior a um número fixo para que P exista. Ora

$$(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n) > 1+u_0+u_1+\cdots+u_n$$

Por outro lado, sendo x positivo,

$$e^x > 1+x,$$ de modo que

$$\cancel{P_n < e^{\sum_{i=0}^{n} u_i}} \qquad P_n < e^{\sum_{i=0}^{n} u_i}.$$

Assim

$$1+\sum_{i=0}^{n} u_i < P_n < e^{\sum_{i=0}^{n} u_i}.$$

A convergência ou a divergência da série $\sum u_i$ arrastará, então, a convergência ou a divergência de $\Pi(1+u_i)$

13) <u>Produtos infinitos* absolutamente convergentes</u>. O teorema respectivo é o seguinte: Ponhamos $|u_i| = U_i$. <u>O produto $\Pi(1+u_i)$ é convergente se o fôr a série $\sum U_i$ e é então absolutamente convergente porque é convergente o produto $\Pi(1+U_i)$.</u>

Com efeito ponhamos
$$\begin{cases} v_n = (1+u_0)\cdots(1+u_{n-1})\,u_n, \\ V_n = (1+U_0)\cdots(1+U_{n-1})\,U_n. \end{cases}$$

$\sum U_i$ é convergente. $\Pi(1+U_i)$ é convergente. $\sum V_n$ é convergente. $\sum v_i$ é absolutamente convergente e a sua soma representa P, como se viu. O nosso produto é absolutamente convergente.

<u>Num produto infinito absolutamente convergente pode modificar-se a ordem dos factores duma maneira arbitrária que o valor do produto não se altera.</u>

1º) Dado um produto infinito absolutamente convergente, dado ε, existe $N(\varepsilon)$, tal que sendo $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda > N(\varepsilon)$

$$|1-(1+u_\alpha)(1+u_\beta)(1+u_\gamma)\cdots(1+u_\lambda)| < \varepsilon$$

qualquer que seja o número de factores.

Com efeito: $|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda)-1| < (1+U_\alpha)(1+U_\beta)\cdots(1+U_\lambda)-1$; logo

$$|(1+u_\alpha)\cdots(1+u_\lambda)-1| < e^{U_\alpha+U_\beta+\cdots+U_\lambda}-1,$$

e como $\sum U_i$ é convergente, dado ε, existe $N(\varepsilon)$, tal que

$$e^{U_\alpha+U_\beta+\cdots+U_\lambda} < e^{\log(1+\varepsilon)},$$

quando $\alpha, \beta, \dots, \lambda > N(\varepsilon)$. Daqui se tira o desejado.

2.) Passemos ao teorema enunciado: sejam o produto

$$(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)\cdots = P$$

e o produto modificado

$$(1+u'_0)(1+u'_1)\cdots(1+u'_n)\cdots = P'$$

Se o primeiro é absolutamente convergente, o segundo é igualmente absolutamente convergente.

Se P_n é o produto dos $\underline{n+1}$ primeiros factores de P, podemos achar $m >$ ~~tal que~~ P'_m contém todos os factores de P_n. Então

$$\frac{P'_m}{P_n} = (1+u_\alpha)(1+u_\beta)\cdots(1+u_\lambda) \qquad (\alpha, \beta, \dots, \lambda > n).$$

Dado $\underline{\varepsilon}$, existe $M(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\frac{P'_m}{P_n} - 1\right| < \varepsilon .$$

Bem entendido que se escolhe $\underline{\varepsilon}$ em primeiro lugar, e $\underline{n}$ em segundo lugar. Quando $\underline{n}$ aumenta indefinidamente $P_n \to P$, $P'_m \to P'$, e $\lim \frac{P'_m}{P_n} = \frac{P'}{P} = 1$. Logo $P' = P$, q. e d.

13) Produtos infinitos absolutamente convergentes (Continuação)

Uma propriedade curiosa é a seguinte: Quando o produto infinito é absolutamente convergente, o seu valor não pode ser nulo, a não ser que um dos factores do produto seja nulo.

Com efeito, se nenhum dos factores é nulo, dado α, pode determinar-se $N(\alpha)$ tal que

$$\left|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})+\cdots+(1+u_{n+p}) - 1\right| < \alpha$$

$$n \geq N(\alpha), \text{ qualquer que seja } p.$$

O número α pode ser um número positivo qualquer, e, portanto, inferior à unidade. Então

$$1-\alpha < \prod_{i=n+1}^{n+p}(1+u_i) < 1+\alpha . \quad \text{E também}$$

$$\prod_{n+1}^{\infty}(1+u_i) > 1-\alpha .$$

Ora o produto infinito $\underline{P}$ é igual ao produto de $\underline{P_n}$ por uma quantidade superior a $(1-\alpha)$, pelo que não será nulo, se $\underline{P_n}$ o não for.

14) Produtos uniformemente convergentes

— Dado o produto infinito $\prod_{i=0}^{\infty}(1+u_i)$, suponhamos que os $\underline{u_i}$ dependem dum certo número de variáveis, cujo domínio de variação $\underline{D}$ é dado. Como o produto infinito se pode substituir pela série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, ou seja

$P_0 + (P_1 - P_0) + \cdots$, com $v_0 = P_0$, $v_1 = P_1 - P_0$, …, $v_n = P_n - P_{n-1}$, …, dir-se-há uniformemente convergente no domínio D se fôr uniformemente convergente em D a série $\sum v_i$. A definição estende-se ainda ao caso em que as variáveis independentes são imaginárias. Se os u_i são todos funções contínuas, então é bem sabido que a soma da série uniformemente convergente leva a uma função contínua (Os estudantes deverão aprender a demonstrar esta afirmação, que é constantemente usada em Análise. Veja-se, por exemplo, pp. 66, 67, 68, 69, 70 e 71 do tomo I do Curso de Análise de E. Goursat)

Teorema: O produto infinito $\prod_{i=0}^{\infty}(1+u_i)$ é uniformemente convergente, se o fôr a série $\sum U_i$.

Tudo está em provar que a série $\sum v_i$ é uniformemente convergente, se o fôr a série $\sum U_i$. Ora

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{n+p} = (P_{n+1}-P_n)+(P_{n+2}-P_{n+1})+\dots+(P_{n+p}-P_{n+p-1}) =$$

$$= P_{n+p}-P_n = P_n\left[(1+u_{n+1})\dots(1+u_{n+p})-1\right].$$

Mas

$$|P_n| < (1+U_0)(1+U_1)\dots(1+U_n) < e^{U_0+U_1+\dots+U_n}.$$

$$|(1+u_{n+1})\dots(1+u_{n+p})-1| < (1+U_{n+1})\dots(1+U_{n+p})-1 < e^{U_{n+1}+\dots+U_{n+p}}-1.$$

Assim

$$|v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{n+p}| < e^{U_0+U_1+\dots+U_n}\left(e^{U_{n+1}+\dots+U_{n+p}}-1\right).$$

Como $\sum U_i$ é uniformemente convergente no domínio D, representa uma função contínua nesse domínio, função que é inferior a um limite M, de sorte que

$$e^{U_0+U_1+\dots+U_n} < e^M,$$ qualquer que seja n, para todos os pontos do domínio D. Por outro lado, dado o número positivo α, tão pequeno quanto se queira, pode determinar-se $N(\alpha)$ tal que, quando $n \geq N(\alpha)$, $U_{n+1}+\dots+U_{n+p} < \alpha$, para todos os pontos de D, qualquer que seja p. Então

$$|v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{n+p}| < e^M(e^\alpha-1),$$

para todos os pontos de D, quando $n \geq N(\alpha)$, qualquer que seja p.

A desigualdade supra prova que $\sum v_n$ é uniformemente convergente.

15) Observações sôbre a convergência uniforme – Recordemos, ainda uma vez, esta noção. Lidemos com uma só variável, porque o método estende-se fàcilmente ao caso de muitas variáveis. Dada a sucessão

$$s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x), \dots, \qquad (1)$$

onde a variável x varia no domínio fechado $a \leq x \leq b$, diz-se que esta sucessão, supos

É convergente em cada ponto $\underline{x}$ do domínio, tende uniformemente para o limite $s(x)$, se, dado ε, tão pequeno quanto se queira e positivo, fôr possível determinar $N(\varepsilon)$, de tal modo que

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon, \qquad \text{quando } n \geq N(\varepsilon),$$

para <u>todos</u> os pontos do domínio fechado considerado.

Seja agora uma série, convergente quando $a \leq x \leq b$;

$$S(x) = u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \qquad (2)$$

O estudo da série reduz-se ao estudo da sucessão

$$s_0(x)=u_0(x),$$
$$s_1(x)=u_0(x)+u_1(x)$$
$$\overline{\quad}\;\overline{\quad}\;\overline{\quad}\;\overline{\quad}$$
$$s_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+\dots+u_n(x)$$
$$\overline{\quad}\;\overline{\quad}\;\overline{\quad}\;\overline{\quad}\,.$$

Assim, diz-se que (2) é uniformemente convergente se

$$|S(x)-s_n(x)| \leq \varepsilon$$
$n \geq N(\varepsilon)$, para todos os pontos do domínio.

Ora $S(x)-s_n(x)=s_{n+1}(x)+s_{n+2}(x)+\dots=R_n(x)$, é o que se chama o <u>resto</u> da série.

Logo a convergência uniforme é definida por

$$|R_n(x)|<\varepsilon \atop n \geq N(\varepsilon)$$), para todos os pontos do domínio. (3)

O que pretendemos principalmente recordar aqui é que a convergência uniforme de (2) pode ser definida ainda do modo seguinte:

$$|u_{n+1}(x)+\dots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon, \qquad (4)$$

quando $n \geq N(\varepsilon)$, qualquer que seja p, para todo o domínio $\underline{x}$ considerado.

A passagem de (3) para (4) é imediata. Vamos mostrar como, de (4), se tira (3). Se (4) se dá, fixemos o número $n \geq N(\varepsilon)$ e façamos tender p para ∞. Então $u_{n+1}(x)+\dots+u_{n+p}(x)$ tende para $R_n(x)$, não podendo pois o valor absoluto de $R_n(x)$ tornar-se superior a ε, qualquer que seja x, como se queria provar.

16) <u>Produtos infinitos duplos</u>. O produto infinito $\prod(1+u_{mn})$, onde os índices $\underline{m}$ e $\underline{n}$ tomam os valores inteiros desde zero a ∞, é absolutamente convergente, se fôr absolutamente convergente a série $\sum u_{mn}$. Então o valor do produto infinito é o mesmo qualquer que seja a maneira como se encontre o seu valor. Pode também, tal como no caso das séries, reduzir-se, duma infinidade de maneiras, a um produto infinito simples.

Como sempre, vale o teorema: Se a série $\sum U_{mn}$ fôr uniformemente convergente num certo domínio D, o produto infinito $\Pi(1+u_{mn})$ é uniformemente convergente no mesmo domínio e representa uma função contínua, dado que os u_{mn} sejam funções contínuas.

17) Determinante de ordem infinita:– Seja $\sum_{i,k} a_{ik}$ uma série dupla absolutamente convergente, na qual i e k tomam todos os valores inteiros de $-\infty$ a $+\infty$. Seja o determinante .

$$D_m=\left|\begin{array}{cccccc}
1+a_{-m,-m}\cdots a_{-m,-2} & a_{-m,-1} & a_{-m,0} & a_{-m,1} & a_{-m,2}\cdots a_{-m,m} \\
\hdashline
a_{-1,-m}\cdots a_{-1,-2} & 1+a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & a_{-1,2}\cdots a_{-1,m} \\
a_{0,-m}\cdots a_{0,-2} & a_{0,-1} & (1+a_{00}) & a_{01} & a_{02}\cdots a_{0m} \\
a_{1,-m}\cdots a_{1,-2} & a_{1,-1} & a_{10} & (1+a_{11}) & a_{12}\cdots a_{1m} \\
\hdashline
a_{m,-m}\cdots a_{m,-2} & a_{m,-1} & a_{m0} & a_{m1} & a_{m2}\cdots(1+a_{mm})
\end{array}\right|$$

Consideremos agora o produto $\Pi_m = \underset{(i,k=-m,\dots,+m)}{\Pi}\left(1+|a_{ik}|\right)$. Este produto é superior a $|D_m|$. Com efeito, um produto como o indicado contém, quando se reduz tudo a uma soma de parcelas, a unidade, os termos $|a_{ik}|$ somados um a um, as suas combinações dois a dois, as suas combinações três a três, etc., como o mostra o esquema

$$(1+a_{00})(1+a_{11})(1+a_{12})(1+a_{13}) = \begin{cases}(1+a_{00})+ \\ (a_{11}+a_{00}a_{11})+ \\ (a_{12}+a_{02}a_{12}+a_{11}a_{12}+a_{00}a_{11}a_{12}, \\ +\Big(a_{13}+a_{00}a_{13}+a_{11}a_{13}+a_{00}a_{11} \\ \quad +a_{12}a_{13}+a_{02}a_{12}a_{13}+a_{11}a_{12} \\ \quad +a_{00}a_{11}a_{12}a_{13}\Big).\end{cases}$$

Isto significa que nenhum termo de D_m deixa de figurar, como parcela, em Π_m, salvo a questão de sinal, que em Π_m é sempre o sinal +. Mas há termos em Π_m (parcelas) que não figuram em D_m para o que basta notar que no desenvolvimento de D_m nunca haver uma parcela que tenha dois a_{ik} da mesma linha ou da mesma coluna, o que não sucede em Π_m. Assim $|D_m| < \Pi_m$.

Estudemos, analogamente, as duas diferenças $D_{m+p}-D_m$ e $\Pi_{m+p}-\Pi_m$.

Tem-se $\Pi_{m+p}-\Pi_m = \Pi_m\Pi'-\Pi_m = \Pi_m(\Pi'-1)$,

onde Π' é o produto de termos $(1+|a_i x|)$ de Π_{m+p} que não figuram em Π_m. Vê-se, assim, que a diferença $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ é o produto de Π_m por uma expressão $\Pi'-1$ que é análoga a Π_m, salv que não contém a unidade.

Relativamente a $D_{m+p}-D_m$ pode verificar-se que, cada termo, figura em $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ salvo ~~que~~ questão de sinal, que em $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ é sempre o sinal +. Logo

$$|D_{m+p}-D_m| < \Pi_{m+p}-\Pi_m.$$

Como $\sum|a_i x|$ é convergente, o produto infinito $\prod(1+|a_i x|)$ é convergente, pelo que $\Pi_{m+p}-\Pi$ tenderá para zero. O mesmo sucede, depois, com $D_{m+p}-D_m$, pelo que o determinante D_m tende para um limite quando m aumenta indefinidamente.

Capítulo III

Séries inteiras ~~de~~ uma variável

O que vai dizer-se lida com variáveis reais. Mas a extensão a variáveis imaginárias é imediata substituindo o valor absoluto pelo módulo.

18) A região de convergência: Seja a série

$$A_0 + A_1X + A_2X^2 + \dots + A_nX^n + \dots, \qquad (1)$$

em que os A_i são todos positivos e em que se dão a X apenas valores positivos. Um número positi qualquer, colocado em (1), ou torna a série convergente ou divergente. Os números positivos vão ser divididos em duas classes Δ e D. Pertencerá a Δ todo o número positivo para o qual (1) é convergente e pertencerá a D todo o número positivo para o qual (1) é divergente. No geral, dada (1), há números destas duas classes. O seu número separador, necessariamente positivo, representar-se-há em R.

A existência dêsse número separador decalca-se nos três factos seguintes:

1.º – Há números de Δ e D;
2.º – Todo o número de Δ é inferior a todo o número de D;
3.º – Todo o número positivo pertence a uma das classes.

Se não houvesse números de D, então a série seria convergente para todo o valor de X; pôr-se-ia $R=\infty$; se não houvesse números Δ, a sé rie seria divergente para todos os valores positivos de X, salvo $X=0$, pelo que se poria $R=0$.

Seja agora a série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (2)$$

onde os a_i e x são números com sinais quaisquer. Ponhamos $|a_i| = A_i$, $|x| = X$.

Então a série (1) é a série dos valores absolutos dos termos de (2).

Se R fôr o raio de convergência de (1), vamos mostrar que é igualmente o raio de convergência de (2). Por outras palavras: vamos mostrar que (2) é divergente quando $|x| > R$, pois que (2) é absolutamente convergente quando $|x| < R$.

Com efeito, se (2) é convergente quando $x = x_0$, seja M um número tal que

$$|a_n x_0^n| = A_n |x_0|^n < M.$$

Então

$$A_n X^n = A_n |x_0|^n \frac{X^n}{|x_0|^n} < M \left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n.$$

Vê-se que (1) é convergente quando $X < |x_0|$ Assim, não pode ser $|x_0| > R$.

Deve dizer-se que, quando $x = -R$, ou $x = +R$, a série (2) pode ser absoluta, semiconvergente ou divergente.

Dada a série (2), suponhamos que se sabe ser

$$|a_n| |x_0|^n < M,$$

sendo M um número fixo. Então

$$A_n X^n = A_n |x_0|^n \left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n < M \frac{X}{|x_0|^n},$$

pelo que se fica sabendo que a série (2) é absolutamente convergente quando $|x| < |x$

19) <u>O maior dos limites</u> – Consideremos o maior dos limites de

$$A_1 X,\ \sqrt{A_2 X^2},\ \sqrt[3]{A_3 X^3},\ \dots .$$

Esse maior dos limites é ωX, sendo ω o maior dos limites de $A_1, A_2^{1/2}, \dots, A_n^{1/n}, \dots$

Mas (1) é convergente quando $\omega X < 1$, divergente quando $\omega X > 1$. Logo, convergente quando $X < \frac{1}{\omega}$, divergente quando $X > \frac{1}{\omega}$, pelo que $R = \frac{1}{\omega}$.

20) <u>Continuidade duma série inteira</u> – É claro que, dada a série (2),

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

convergente quando $|x| < R$, o valor absoluto dos seus termos, $A_n X^n$, é inferior a $A_n R'^n$, quando $X < R'$. Se $R' < R$, conclui-se que a série (2) é uniformemente convergente quando $|x|<R'$. Pode dizer-se que a série (2) é uniformemente convergente e representa uma função $f(x)$ contínua, de x, no intervalo aberto $(-R,+R)$.

Mas, quando a série (2) é convergente, para $x=R$ ou $x=-R$, a soma da série nesse ponto representa o limite de $f(x)$ quando x tende para ele (por valores, aliás, inferiores ou superiores, conforme se tratar de $+R$ ou de $-R$).

Sabemos que o limite duma sucessão uniformemente convergente num certo intervalo representa uma função contínua nesse intervalo; basta, por isso, demonstrar que, quando a série (2) é convergente para $x=R$ é uniformemente convergente no intervalo $(0,R)$.

Seja ε tão pequeno quanto se queira. Escolhamos n suficientemente grande para que, qualquer que seja p, se tenha

$$|a_{n+1}R^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2}+\dots+a_{n+p}R^{n+p}|<\varepsilon. \qquad (3)$$

Se x é positivo e tal que $x<R$, visto ser

$$a_n x^n = a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

e visto que $\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}, \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}, \dots, \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}$ são quantidades decrescentes, então como

$$a_{n+1}R^{n+1}, \quad a_{n+1}R^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2}, \dots, a_{n+1}R^{n+1}+\dots+a_{n+p}R^{n+p},$$

estão compreendidos entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$, a soma

$$a_{n+1}R^{n+1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}+\dots+a_{n+p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p},$$

está compreendida entre $-\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}$ e $+\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}$. Logo (Veja-se o verso desta página,

$$|a_{n+1}x^{n+1}+\dots+a_{n+p}x^{n+p}|<\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}<\varepsilon \qquad (4)$$

As desigualdades (3) e (4) provam que a série (2) é uniformemente convergente no intervalo $(0,R)$, como se queria provar.

21) <u>Derivadas sucessivas duma série inteira</u> - De

$$(2) \qquad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots,$$

que é convergente no intervalo $(-R,+R)$, tira-se, por derivação

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}+\dots, \qquad (3)$$

que é convergente no mesmo intervalo, como vamos ver.

Com efeito a série

$$A_1+2A_2X+\dots+nA_nX^{n-1}+\dots,$$ se $X<R$ e R' se escolhe tal que $X<R'<R$, vai-se comparar com

$$\frac{1}{R'}+\frac{2}{R'}\frac{X}{R'}+\frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2+\dots+\frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1}+\dots.$$

Esta última visto que a razão entre dois termos consecutivos é $\frac{n+1}{n}\left(\frac{X}{R'}\right)$ é uma série convergente. Se multiplicarmos os seus termos, respectivamente, por

$$A_1R',\ A_2R'^2,\dots,\ A_nR'^n,\dots,$$

passa-se a

$$A_1+2A_2X+\dots+nA_nX^{n-1}+\dots \qquad (4)$$

Mas como $A_1R'+A_2R'^2+\dots+A_nR'^n+\dots$ é convergente será

$$|A_nR'^n|<M,$$

sendo M um número fixo, de modo que a série (4) é convergente quando $X<R$, como se queria provar.

Passemos agora a demonstrar que (4) é divergente quando $X>R$. Com efeito se, quando $X>R$, (4) fosse convergente, então

$$A_1X+2A_2X^2+\dots+nA_nX^n+\dots$$

seria convergente, assim como $A_1X+A_2X^2+\dots+A_nX^n+\dots$, o que não pode ser.

Fica pois provada a igualdade (3) no intervalo aberto $(-R,+R)$.

E agora, é claro, vê-se que há derivadas de todas as ordens no mesmo intervalo aberto, as quais são dadas pelas séries derivadas.

Fazendo $x=0$, vem

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2!\,a_2,\dots,$$

de sorte que $a_0=f(0)$, $a_2=\frac{1}{2!}f''(0),\dots$,
$a_1=f'(0)$,

pelo que o nosso desenvolvimento tem a forma

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot2}f''(0)+\dots.$$

Por outras palavras: o desenvolvimento duma função em série inteira é unívoco.

22) Aplicação - É claro que o que se disse para derivações sucessivas da série (1) diz-se para integrações sucessivas. Uma série inteira pode ser integrada termo a termo. Obtem-se uma nova série, com um coeficiente arbitrário, a qual admite o mesmo intervalo de convergência que a série inteira inicialmente considerada.

Seja, por ex.,

$$S(x)=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots=\frac{1}{1+x}.$$

Esta série é convergente se $|x|<1$. Para $x=1$ é já divergente. Por integração vem

$$\int\frac{dx}{1+x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots=\log(1+x).$$

A constante de integração é nula como se vê dando a x o valor zero. Mas a série

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots \qquad (\alpha)$$

tem o mesmo intervalo de convergência que a anterior, apenas havendo que estudar o que se passa nos extremos do intervalo. Para $x=1$, a última série, conforme o teorema das séries alternadas, é ainda convergente. Como o primeiro membro é contínuo no ponto $x=1$, vê-se que o desenvolvimento (α) tem lugar no intervalo $-1<x\leq 1$.

23) <u>Primeira ideia de prolongamento analítico</u> - Seja

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$$

uma série para a qual o domínio de convergência é $(-R,+R)$. Se x_0 pertence ao domínio, suponhamos que $|x_0|+|h|<R$. Temos $|x_0+h|\leq|x_0|+|h|<R$, de modo que

$$f(x_0+h)=a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+\dots+a_n(x_0+h)^n+\dots,$$

ou

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} f(x_0+h)= a_0 &+ a_1x_0 + a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n+\dots\\ &+a_1h+2a_2x_0h+\dots+na_nhx_0^{n-1}+\dots\\ &\qquad+a_2h^2+\dots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_nh^2x_0^{n-2}+\dots\\ &\qquad\qquad+\ -\ -\ -\ - \end{aligned},$$

sendo uma série de dupla entrada. Esta escrita tem razão de ser porque a nossa série dupla é absolutamente convergente. De facto o quadro

$$\begin{aligned} A_0+A_1|x_0|&+A_2|x_0|^2+\dots+A_n|x_0|^n+\dots\\ &A_1|h|+2A_2|x_0||h|+\dots+nA_n|h||x_0|^{n-1}+\dots\\ &\qquad+A_2|h|^2+\dots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_n|h|^2|x_0|^{n-2}+\dots\\ &\qquad\qquad+\ -\ -\ -\ - \end{aligned}$$

é um quadro de termos positivos que, somado por colunas, leva a

$$A_0 + A_1\left(|x_0|+|h|\right) + A_2\left(|x_0|+|h|\right)^2 + \dots + A_n\left(|x_0|+|h|\right)^n + \dots,$$

e esta série é convergente, pois que $|x_0|+|h| < R$, por hipótese.

Façamos agora a soma por linhas do quadro (β). Vem

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots . \qquad (\gamma)$$

Este desenvolvimento, em série ordenada segundo as potências de $\underline{h}$, vale se

$$|x_0|+|h| < R,$$

e, portanto, vale quando $|h| < R - |x_0|$, isto é, vale quando

$$|x_0| - R < h < R - |x_0| .$$

Pode, entretanto, suceder que a série (γ) seja convergente num intervalo mais extenso.

Por exemplo: $(1+x)^m$, se $\underline{m}$ não é inteiro positivo, desenvolve-se assim:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \dots .$$

Este desenvolvimento tem lugar quando $-1 < x < +1$, como se sabe.

Se $\underline{x_0}$ pertence a êsse intervalo, é

$$(1+x)^m = (1+x_0+x-x_0)^m = \left\{(1+x_0)\left(1+\frac{x-x_0}{1+x_0}\right)\right\}^m = (1+x_0)^m(1+z)^m,$$

com $z = \frac{x-x_0}{1+x_0}$. Se desenvolvemos $(1+z)^m$, vem

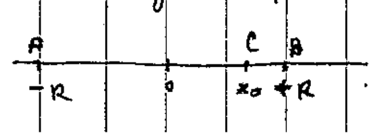
$$(1+x_0)^m\left(1 + mz + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} z^2 + \dots\right). \qquad (\delta)$$

Este desenvolvimento é válido quando $|z| < 1$ ou $|x-x_0| < 1+x_0$, o que mostra que o desenvolvimento é válido quando $x - x_0$ está compreendido entre $-1-x_0$ e $1+x_0$, ou quando $\underline{x}$ está compreendido entre -1 e $1+2x_0$. Se $x_0 > 0$, o novo intervalo de aplicação de $\underline{\delta}$ é maior que o anterior $(-1,+1)$. Neste caso (δ) escreve-se

$$(1+x_0)^m\left[1 + \frac{m}{1+x_0}(x-x_0) + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{(1+x_0)^2}(x-x_0)^2 + \dots\right]$$

Êste resultado, que dá $(1+x)^m$ no intervalo $(-1,+1)$, <u>prolonga analìticamente</u> $(1+x)^m$ fora do aludido intervalo.

Geomètricamente, deve compreender-se a idéia do prolongamento analítico do modo seguinte: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ tem lugar no segmento $\overline{AB}$ da figura. Se



$\underline{x_0}$ é um ponto dêsse segmento, o desenvolvimento de $f(x)$ em série de potências de tem lugar e vale, pelo menos, no segmento $\overline{CB}$ de comprimento $R - x_0$.(10) Mas pode valer fora do segmento $\overline{CB}$, para além de B.

24) <u>Funções dominantes</u> - Seja

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

e suponhamos que em

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \dots,$$

todos os $\underline{\alpha_i}$ são positivos. Se, para todo o $\underline{i}$, fôr $|a_i| \leq \alpha_i$, diz-se que $\varphi(x)$ é uma função dominante de $f(x)$ e escreve-se simbòlicamente $f(x) \ll \varphi(x)$.

Observemos o seguinte: Se $P(a_0, \dots, a_n)$ é um polinómio de coeficientes positivos dependendo dos $\underline{n+1}$ primeiros coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ de $f(x)$, é

$$|P(a_0 \dots a_n)| \leq P(\alpha_0, \dots \alpha_n),$$

como é evidente.

Assim se $\varphi(x) \gg f(x)$, é, igualmente $\varphi'(x) \gg f'(x), \dots,$ porque tem aplicação a observação anterior.

25) <u>Sôbre uma busca especial de funções dominantes</u> Seja

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

convergente no intervalo $(-R, +R)$. Se $0 < r < R$, seja

$$|a_n r^n| = A_n r^n \leq M.$$

Então

$$|a_n| = A_n \leq \frac{M}{r^n},$$

pelo que a série

$$M + M\frac{x}{r} + M\frac{x^2}{r^2} + \dots + M\frac{x^n}{r^n} + \dots = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}$$

é dominante de $f(x)$, quando $|x| \leq r$.

Quando $f(x)$ não tem termo constante, podemos tomar como função dominante a função

$$\frac{M}{1 - \frac{x}{r}} - M.$$

É claro que pode tomar-se para $\underline{r}$ um número qualquer inferior a $\underline{R}$, mas o número $\underline{M}$ diminui, em geral, com $\underline{r}$, não podendo, todavia, ser inferior a A_0, se $A_0 \neq 0$. No caso, em que $A_0 \neq 0$, existe sempre um número $\rho < R$ tal que a função $\dfrac{A_0}{1 - \frac{x}{\rho}}$ é dominante de $f(x)$.

Com efeito seja $\sum M \frac{x^n}{r^n}$ uma função dominante, com $M > A_0$.

Tem-se
$$|a_n \rho^n| = |a_n r^n| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < M \frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}.$$

Se se supõe $\rho < r\frac{A_0}{M}$, vem $|a_n\rho^n| < M\frac{A_0}{M}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} = A_0\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} < A_0$, pois que é também $\rho < r$. Logo

$$A_0 + A_0\frac{x}{\rho} + A_0\frac{x^2}{\rho^2}+\dots = \frac{A_0}{1-\frac{x}{\rho}},$$

é dominante de $f(x)$, como se queria provar.

Quando é $a_0=0$, pode sempre encontrar-se uma função dominante

$$\frac{\mu}{1-\frac{x}{\rho}} - \mu = \frac{\mu-\mu+\mu\frac{x}{\rho}}{1-\frac{x}{\rho}} = \frac{\mu x}{\rho - x},$$

para $f(x)$, sendo μ um número positivo arbitrário. Com efeito

$$\frac{\mu x}{\rho-x} = \mu\frac{x}{\rho}+\mu\frac{x^2}{\rho^2}+\dots,$$

carecendo-se que seja
$$\frac{\mu}{\rho^n} > A_n \quad \text{ou} \quad A_n\rho^n<\mu.$$

Qualquer que seja μ, se $M > A_n$, vem $M\rho^n < \mu$, como condição a satisfazer. Se $\rho<1$ é tal que $M\rho<\mu$, é igualmente $M\rho^n<\mu$ e $A_n\rho^n<\mu$, como se queria provar. (Entre μ e M não existe qualquer espécie de relação).

26) <u>Substituição duma série noutra série</u> – Seja

$$z = f(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n + \dots$$

convergente quando $|y|<R$. Trata-se de saber em que condições se pode pôr

$$y=\varphi(x) = b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+\dots,$$

na série anterior e ordenar segundo as potências de x. Supõe-se que o domínio de convergência de $\sum b_n x^n$ é $(-r,+r)$.

A substituição de y na primeira série leva ao quadro de dupla entrada

$$\begin{array}{llllll}
a_0 + a_1 b_0 & + a_2 b_0^2 & + \cdots & + a_n b_0^n & + \cdots \\
\quad + a_1 b_1 x & + 2a_2 b_0 b_1 x & + \cdots & + n a_n b_0^{n-1} b_1 x & + \cdots \\
\quad + a_1 b_2 x^2 & + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2)x^2 & + \cdots & + \cdot \text{---} & \\
\quad + \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} &
\end{array} \qquad (5)$$

Trata-se de saber se êste quadro pode ser absolutamente convergente.

A primeira linha exige que $|b_0| < R$. Esta condição é suficiente, isto é pode determinar-se x suficientemente pequeno em valor absoluto para que o quadro seja absolutamente convergente.

Tomemos, com efeito, para função dominante de $\varphi(x)$ a expressão $\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}}$, sendo $\underline{m}$ um número positivo tal que $m > |b_0|$, e onde $\rho < r$. Se nós supomos $|b_0| < R$, podemos imaginar que $\underline{m}$ é um número compreendido entre $|b_0|$ e R, isto é que

$$|b_0| < m < R.$$

Seja agora R' um número compreendido entre $\underline{m}$ e $\underline{R}$: $m < R' < R$. A série $[a_n y^n]$ admite a função dominante

$$\frac{M}{1-\frac{y}{R'}} = M + M\frac{y}{R'} + \cdots$$

Se nesta série se substitui y por $\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}} = m + m\frac{x}{\rho} + \cdots$ e se construir o quadro de dupla entrada análogo ao anterior vem

$$\begin{aligned} &M + M\left(\frac{m}{R'}\right) + \cdots + M\left(\frac{m}{R'}\right)^n + \cdots \\ &+ M\frac{m}{R'}\frac{x}{\rho} + \cdots + nM\left(\frac{m}{R'}\right)^n\frac{x}{\rho} + \cdots \\ &+ \quad - \quad \overline{} \end{aligned} \qquad (6)$$

cujos coeficientes são todos positivos e superiores ao valor absoluto dos coeficientes do quadro duplo anterior (5). A convergência absoluta de (6) exige $|x| < \rho$. Se isso sucede, a coluna de ordem $(n+1)$, quando se substitui x por $|x|$, tem por soma

$$\frac{M}{R'^n}\left(\frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}}\right)^n = M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n.$$

Em seguida, a convergência da série cujo termo geral é esta última quantidade exige que seja

$$\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)} < 1 \quad \text{ou} \quad m < R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right) \quad \text{ou}$$

$$|x| < \rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \qquad (7)$$

Esta condição arrasta igualmente a condição $|x| < \rho$, visto que se $m < R'$. Logo (7) dá um limite para a convergência absoluta do quadro (5). Os valores (7) tornam convergente a série $\varphi(x)$, sendo $\varphi(x) \ll \frac{m}{1-\frac{x}{\rho}}$ e também $|\varphi(x)| \ll \frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}} < R'$.

Nessas condições, a soma do quadro (5') pode fazer-se por colunas, vindo

$$a_0 + a_1\,\varphi(x) + a_2\,[\varphi(x)]^2 + \cdots + a_n\,[\varphi(x)]^n + \cdots = f\,[\varphi(x)].$$

Mas, se fazemos a soma do quadro por linhas, vem

$$f\,[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \qquad (8)$$

sendo

$$c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots + a_n b_0^n + \cdots$$
$$c_1 = a_1 b_1 + 2 a_2 b_1 b_0 + \cdots + n a_n b_0^{n-1} b_1 + \cdots$$
$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 (b_1^2 + 2 b_0 b_2) + \cdots$$

— —— — —— ——

O desenvolvimento (8) tem certamente lugar quando $|x| < \rho(1-\frac{m}{R'})$, mas pode dar-se o caso de ser válido num intervalo maior. É claro que sendo R' tão próximo de R quanto se queira, o desenvolvimento (8) tem lugar quando $|x| < \rho(1-\frac{m}{R})$. Quanto a $\underline{m}$ e $\underline{\rho}$, não pode dizer-se que ρ se pode substituir pelo número $\underline{r}$, pois que $\underline{m}$ varia com ρ.

Assim se a série $f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$ é convergente qualquer que seja y, pode supor-se $R = \infty$ e ρ tão vizinho de $\underline{r}$ quanto se queira. Assim (8), nesse caso, terá lugar quando $|x| < r$. Se fôr ainda $r = \infty$, o desenvolvimento (8) tem lugar qualquer que seja x.

Admitamos que a série $y = \varphi(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$ não tem termo conhecido. Então a condição $|b_0| < R$ é satisfeita, mas um raciocínio directo para o estudo da convergência de (8) leva a um intervalo de convergência superior ao definido pela desigualdade $|x| < \rho\,(1-\frac{m}{R'})$. Com efeito, uma função dominante de $\varphi(x)$ é

$$\frac{\mu x}{\rho - x}, \qquad \rho < r, \quad \text{com } \mu \text{ qualquer.}$$

Sendo

$$\frac{\mu x}{\rho - x} = \frac{\mu \frac{x}{\rho}}{1-\frac{x}{\rho}} = \mu \frac{x}{\rho} + \mu \frac{x^2}{\rho^2} + \cdots,$$

os quadros de dupla entrada a comparar são os seguintes:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_0 + & & & \\ & a_1 b_1 x & + & \\ + & a_1 b_2 x^2 & + \; a_2 b_1 x^2 & + \;— \\ + & \vdots & + \; \cdots & + \;— \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{lll} M + & & \\ + \frac{M}{R'} \mu \frac{x}{\rho} & & \\ + \frac{M}{R'} \mu \frac{x^2}{\rho^2} & + \frac{M}{R'^2} \mu^2 \frac{x^2}{\rho^2} & + \;— \\ + \; \vdots & + \; \cdots & \end{array}\right\}$$

O segundo quadro supondo $|x| < \rho$, somado por colunas, dá

$$\frac{M}{R'} \frac{\mu \frac{|x|}{\rho}}{1-\frac{|x|}{\rho}} + \frac{M}{R'^2} \frac{\mu^2 \frac{|x|^2}{\rho^2}}{\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^2} + \cdots + \frac{M}{R'^n} \frac{\mu^n \frac{|x|^n}{\rho^n}}{\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)^n} + \cdots.$$

A convergência desta série exige $\frac{\mu}{R'} \frac{|x|}{\rho} < 1 - \frac{|x|}{\rho}$, ou seja

$$\frac{|x|}{\rho}\left(1+\frac{\mu}{R'}\right)<1, \qquad \text{ou} \qquad |x|<\rho\,\frac{R'}{R'+\mu}.$$

Este intervalo é superior ao definido por $|x|<\rho\left(1-\frac{\mu}{R'}\right)$, pois êste é também aplicável no caso presente visto a sua dedução ser geral.

27) <u>Divisão de séries inteiras</u> - Seja primeiramente

$$f(x)=\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots}.$$

Pondo $y=b_1x+b_2x^2+\cdots$, vem

$$f(x)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\cdots$$

A substituição de y por $y=b_1x+b_2x^2+\cdots$ pode fazer-se, ordenando depois segundo as potências de x? Estamos no caso em que $b_0=0$, e portanto $|b_0|<1$ é verificável. A substituição é possível.

Seja agora $$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}$$

Supondo $b_0\neq0$, tem-se

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\frac{1}{b_0}\left(\frac{1}{1+\frac{b_1}{b_0}x+\frac{b_2}{b_0}x^2+\cdots}\right)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

A relação $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots)$, igualando os coeficientes das mesmas potências de x determina os coeficientes $c_0, c_1, \ldots$

Suponhamos agora $b_0=0$. Então, por exemplo,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x^k}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}=\frac{1}{x^k}\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\right),$$

ou

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{c_0}{x^k}+\frac{c_1}{x^{k-1}}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{x}+c_k+c_{k+1}x+\cdots :$$

28) <u>Observação</u> - É de vantagem fazer do modo seguinte o cálculo das potências sucessivas duma série:

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)^r=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots.$$

As derivadas logarítmicas dão

$$\frac{r}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}\left(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\right)=\frac{c_1+2c_2x+\cdots}{c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots},$$

donde

$$r(a_1+2a_2x+\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots)=(a_0+a_1x+\cdots)(c_1+2c_2x+\cdots).$$

Tira-se agora

$$p a_1 c_0 = a_0 c_1 ; \quad p (a_1 c_1 + 2 a_2 c_0) = 2 a_0 c_2 + a_1 c_1 ; \text{ etc.}$$

Os coeficientes $c_1, c_2, \ldots$ determinam-se sucessivamente, a partir de $c_0 = a_0^p$.

Capítulo IV

Séries inteiras de mais duma variável

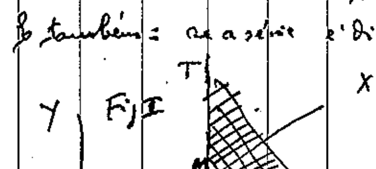
29) Região de convergência - Como no caso das séries duma única variável, a convergência duma série de duas variáveis, por exemplo, estuda-se estudando primeiramente a série dos valores absolutos dos termos $\sum A_{mn} x^m y^n$. (9)

Se a série é convergente no ponto (x_0, y_0), é convergente quando

$$x \leq x_0, \quad y \leq y_0$$

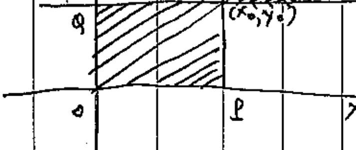
É também: se a série é divergente no ponto (x_0, y_0), é igualmente divergente se

$$x \geq x_0, \quad y \geq y_0.$$



Na figura junta, corresponde ao primeiro caso o rectângulo simplesmente tracejado, e, ao segundo o ângulo recto SMT, em parte duplamente tracejado.

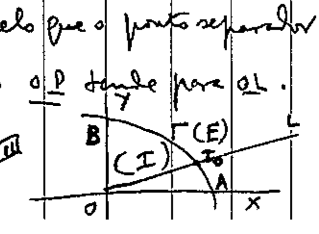
Posto isto, seja a semi-recta OL da figura e o ponto m variável sôbre ela. Quando m se afasta, a nossa série (9), convergente na origem O, vai-se conservando constantemente convergente até um ponto determinado M que é um ponto separador das regiões de convergência e de divergência sôbre a semi-recta OL. É claro que pode suceder que o ponto M seja a própria origem O. Então a série (9) é unicamente convergente na origem, sendo divergente num ponto qualquer do ângulo XOY. Inversamente, se o ponto M está no ∞, a convergência de (9) tem lugar em todo o ângulo XOY.



No caso geral o lugar do ponto M é uma curva, pois que a posição de M varia dum modo contínuo com o coeficiente angular λ, de OL. Com efeito se OP é uma semi-recta vizinha de OL, a série (9) é convergente em OS e divergente em RP, pelo que o ponto separador sôbre OP, está entre S e R e vem confundir-se com M, quando OP tende para OL.

Seja Γ o lugar do ponto M. A curva Γ divide o ângulo XOY em duas regiões (I) e (E), separadas por Γ. A série (9) é convergente em (I) e divergente em (E), podendo, sôbre Γ,

Fig III

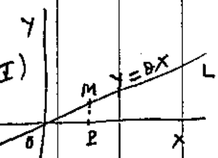


ser convergente ou divergente. Embora a curva Γ possa ter as formas mais variadas, deve ter-se em vista que, quando a abcissa dum ponto cresce a ordenada decresce (ou, pelo menos, não cresce) e quando a abcissa decresce a ordenada cresce (ou, pelo menos, não decresce).

Quando nos aproximamos de OX, a abcissa do ponto separador não pode decrescer (no geral cresce) e a ordenada, portanto, não pode crescer (no geral decresce). Então y decrescendo constantemente, mas sendo igual ou superior a zero, tende para um limite. Entretanto x pode tender para um limite ou aumentar, indefinidamente, de sorte que a curva Γ pode vir ter a um ponto de Ox) ou pode ter uma assíntota paralela ao eixo Ox (que pode ser o próprio eixo Ox). O mesmo se diz quando a semi-recta OL ~~tende~~ para o eixo Oy. Devemos ainda observar que, se há um ponto A, de Ox, pertencente a Γ, e se êste ponto é um ponto de convergência, pode a série (9) ser ainda convergente sôbre Ox, para além do ponto A. É claro, com efeito, que, se na figura III, I_0 é o ponto de $\underline{OL}$ sôbre Γ, pode, em I_0, a série ser convergente e nada se poderá afirmar, sem estudo directo, quanto ao comportamento da série sôbre uma paralela a um dos eixos, tirada por I_0.

30) <u>Exemplos</u> - A série $\sum n! X^n Y^n$, se pômos $Y = \theta X$ dá $\sum n!\, X^{2n} \theta^n$. Fixemos agora X. A razão de dois termos consecutivos é $(n+1) X^2 \theta$, superior à unidade a partir de $\underline{n}$ suficientemente grande. Então a nossa série é divergente num ponto M qualquer da semi-recta $\underline{OL}$ da fig IV, pelo que a série é divergente em todo o interior do ângulo XOY.

(Fig IV)



Seja, como segundo exemplo, a série $\sum A_{mn} X^m Y^n$ onde $A_{mm} = 1$ e $A_{mn} = 0$ $(m \neq n)$. Trata-se, em última análise, da série

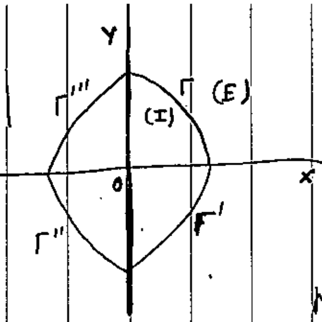
$$A_{00} + A_{11} XY + A_{22} X^2 Y^2 + \cdots + A_{nn} X^n Y^n + \cdots = 1 + XY + X^2 Y^2 + \cdots .$$

Vê-se que é convergente quando $XY < 1$ e divergente quando $XY \geq 1$. A curva Γ é aqui uma hipérbole cujas assíntotas são os eixos de coordenadas.

31) <u>Propriedades das séries inteiras</u> - Seja agora uma série com coeficientes positivos e negativos

$$F(x,y) = \sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n .$$

Porémos $|a_{mn}| = A_{mn}$, $|x| = X$, $|y| = Y$. A série dos valores absolutos $\sum A_{mn} X^m Y^n$ é convergente na região (I) e divergente na região (E) da figura (V).



Logo a série proposta é absolutamente convergente se o ponto (x, y) se encontra no interior da área limitada por Γ e mais 3 curvas Γ', Γ'', Γ''', desenhadas na figura por simetria de Γ.

A região exterior às quatro curvas Γ, Γ', Γ'', Γ''' será designada com D. Num ponto do exterior de D que não pertença aos eixos, a série proposta não é absolutamente convergente. E há, mesmo, mais. A série não é sequer semi-convergente, qualquer que seja a forma como se façam suceder os seus termos. Seja, com efeito, (x_0, y_0) um ponto do exterior de D. Digo que, qualquer que seja o número finito M, não pode ter lugar a desigualdade $|a_{mn} x_0^m y_0^n| < M$, para todos os $\underline{m}$ e $\underline{n}$.

Se tal desigualdade fôsse um facto, seria $|a_{mn}| = A_{mn} < \frac{M}{|x_0|^m |y_0|^n}$, de sorte que a série $\sum A_{mn} X^m Y^n$ seria comparável à série $\sum M \left(\frac{X}{|x_0|}\right)^m \left(\frac{Y}{|y_0|}\right)^n$. Ora esta série é fácil de estudar. Escrita sob a forma de quadro de dupla entrada

$$\begin{aligned}
&M + M\frac{Y}{|y_0|} + M\frac{Y^2}{|y_0|^2} + \cdots \\
&+ M\frac{X}{|x_0|} + M\frac{X}{|x_0|}\frac{Y}{|y_0|} + M\frac{X}{|x_0|}\frac{Y^2}{|y_0|^2} + \cdots \\
&+ M\frac{X^2}{|x_0|^2} + M\frac{X^2}{|x_0|^2}\frac{Y}{|y_0|} + M\frac{X^2}{|x_0|^2}\frac{Y^2}{|y_0|^2} + \cdots \\
&+ - \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---},
\end{aligned}$$

vê-se que êste quadro somado por colunas dá, se $X < |x_0|$

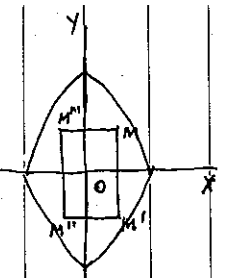
$$\frac{M}{1 - \frac{X}{|x_0|}} + \frac{Y}{|y_0|} \cdot \frac{M}{1 - \frac{X}{|x_0|}} + \frac{Y^2}{|y_0|^2} \frac{M}{1 - \frac{X}{|x_0|}} + \cdots ;$$

e, se $|Y| < y_0$, esta série simples dá

$$\frac{M}{1 - \frac{X}{|x_0|}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{Y}{|y_0|}}.$$

Nestas condições vê-se que a condição $|a_{mn} x_0^m y_0^n| < M$ arrasta a convergência de $\sum M \left(\frac{X}{|x_0|}\right)^m \left(\frac{Y}{|y_0|}\right)^n$ quando $X < |x_0|$, $Y < |y_0|$, e, consequentemente, a convergência de $\sum A_{mn} X^m Y^n$ quando $X < |x_0|$, $Y < |y_0|$, pelo que o ponto (x_0, y_0) não pode ser exterior à região limitada pelas quatro curvas Γ.

Sôbre as próprias curvas Γ pode haver convergência ou divergência, quer de $\sum a_{mn} x^m y^n$ quer de $\sum A_{mn} X^m Y^n$, esta última, bem entendido, considerada só para a correspondente curva Γ do ângulo XOY.

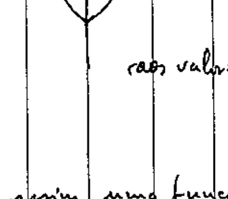


Seja agora $M(a,b)$ um ponto de D no 1º quadrante. Se M', M'', M''' são os pontos deduzidos de M por simetria, como se indica na figura, a série $\sum a_{mn} x^m y^n$ é uniformemente convergente no rectângulo $MM'M''M'''$, limitado pelas rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$, porque, no interior e sôbre os lados do rectângulo, a série

$\sum A_{mn} a^m b^n$ é convergente e os seus termos constantes são superiores aos valores absolutos dos termos correspondentes da série em questão. A soma

$$F(xy) = \sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n$$

é, assim, uma função contínua de (x, y) no rectângulo considerado. Logo $F(xy)$ é uma função contínua em todo o ponto de D, porque se $\underline{m}$ fôr o ponto a considerar existe sempre um rectângulo como o anterior ao qual $\underline{m}$ é interior.



Por derivação em ordem a $\underline{x}$ e a y encontram-se as séries

$$F_1(xy) = \sum_{m,n} m\, a_{mn} x^{m-1} y^n,$$

$$F_2(xy) = \sum_{m,n} n\, a_{mn} x^m y^{n-1}.$$

Vamos demonstrar que o domínio de convergência destas séries é o mesmo que o da série inicial. Tomemos, por exemplo, a série

$$\sum_{m,n} m\, A_{mn} X^{m-1} Y^n,$$

e vamos provar que a sua curva Γ é a da série proposta. Se esta última série é convergente é igualmente convergente a série $\sum A_{mn} X^{m-1} Y^n$ e também a série que resulta de multiplicar todos os termos desta por X, e, consequentemente, $\sum A_{mn} X^m Y$

Inversamente, suponhamos $\sum A_{mn} X_0^m Y_0^n$ convergente. Então

$$A_{mn} X_0^m Y_0^n < M$$

e

$$m A_{mn} X^{m-1} Y^n = m A_{mn} \left(\frac{X}{X_0}\right)^{m-1} \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n X_0^{m-1} Y_0^n =$$

$$= \frac{m A_{mn}}{X_0} \left(\frac{X}{X_0}\right)^{m-1} \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n X_0^m Y_0^n < \frac{M m}{X_0} \left(\frac{X}{X_0}\right)^{m-1} \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n.$$

Ora a última expressão é o termo geral da série dupla

$$\frac{Mm}{X_0} + \frac{M}{X_0}\frac{Y}{Y_0} + \frac{M}{X_0}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{M.2}{X_0}\frac{X}{X_0} + \frac{M.2}{X_0}\frac{X}{X_0}\frac{Y}{Y_0} + \frac{M.2}{X_0}\frac{X}{X_0}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 + \cdots$$
$$+ - - - - - - - -$$

(49)

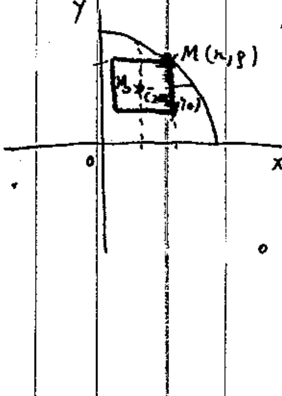
e associando os termos do mesmo grau em x e y (o que pode fazer-se, como se sabe), vem

$$F(x,y) = F(0,0) + \left(x\frac{\partial F}{\partial x_0} + y\frac{\partial F}{\partial y_0}\right) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial F}{\partial x_0} + y\frac{\partial F}{\partial y_0}\right)^{(2)} + \dots,$$

que é o desenvolvimento simbólico que seria fornecido pela fórmula de Taylor.

32) Prolongamento analítico - Do mesmo modo como no caso duma única variável, podemos tratar aqui esta questão. Escrevamos

$$F(x,y) = [illegible]\ F\left(x_0+(x-x_0),\ y_0+(y-y_0)\right),$$



sendo (x_0,y_0) um ponto da região de convergência D. A mesma substituição em $\sum a_{mn} x^m y^n$ leva a

$$\sum_{m,n} a_{mn}\left[x_0+(x-x_0)\right]^m \left[y_0+(y-y_0)\right]^n.$$

Se cada termo da série dupla se substitui pelos termos obtidos desenvolvendo as potências o termo [illegible]

$a_{10}\,x$ substitui-se por $a_{10}x_0 + a_{10}(x-x_0)$

$a_{01}\,y$ " " " $a_{01}y_0 + a_{01}(y-y_0)$

$a_{11}\,xy$ " " " $\begin{cases} a_{11}\left[x_0+(x-x_0)\right]\left[y_0+(y-y_0)\right] = \\ a_{11}x_0y_0 + a_{11}x_0(y-y_0) + a_{11}(x-x_0)y_0 + \\ \quad + a_{11}(x-x_0)(y-y_0) \end{cases}$

etc.

Aparece-nos, pois, um quadro de tripla entrada. Trata-se de saber se este quadro pode ser absolutamente convergente. O facto de ser (x_0,y_0) um ponto do interior da região de convergência é necessário à convergência absoluta do quadro de tripla entrada, pois podemos supor no mesmo plano a série dupla $\sum a_{mn} x_0^m y_0^n$. Em seguida imaginemos que $|x_0|+|x-x_0|$, $|y_0|+|y-y_0|$) se consideram numa região à volta de $(|x_0|,|y_0|)$ interior à região de convergência. Se (r,ρ) são as coordenadas dum ponto de Γ tais que $|x_0|<r$, $|y_0|<\rho$, vê-se que basta ser $|x_0|+|x-x_0|<r$, $|y_0|+|y-y_0|<\rho$. Nessas condições, escrevendo os valores absolutos de todos os termos do quadro triplo e efectuando a soma do mesmo quadro de modo a transformá-lo na série dupla $\sum |a_{mn}|\left[|x_0|+|x-x_0|\right]^m\left[|y_0|+|y-y_0|\right]^n$, visto que esta série é convergente, o quadro triplo é absolutamente convergente. Então a soma pode fazer-se de qualquer maneira. Podemos escrever o termo em $(x-x_0)$, o termo em $(y-y_0)$, o termo em $(x-x_0)^2$, em $(x-x_0)(y-y_0)$, em

$(y-y_0)^2$, etc., de modo a obter

$$F(xy) = F[x_0+(x-x_0), y_0+(y-y_0)] = b_{00} + b_{10}(x-x_0) + b_{01}(y-y_0) +$$
$$+ b_{20}[x-x_0]^2 + b_{11}(x-x_0)(y-y_0] + b_{02}(y-y_0)^2 + \cdots$$

No ponto (x_0, y_0) o desenvolvimento é aplicável. Vê-se que o coeficiente

$$b_{00} = a_{00} + a_{10} x_0 + a_{01} y_0 + a_{11} x_0 y_0 + \cdots = F(x_0, y_0),$$

e que

$$b_{10} = a_{10} + a_{11} y_0 + \cdots = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},$$

$$b_{01} = a_{01} + a_{11} x_0 + \cdots = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad \text{etc.},$$

De sorte que se tem

$$F(xy) = \sum_{m,n} \left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \frac{(x-x_0)^m (y-y_0)^n}{m!\, n!},$$

desenvolvimento que tem lugar quando $|x-x_0| < r - |x_0|$, $|y-y_0| < \rho - |y_0|$. Pode, porém, suceder que o intervalo de convergência da série dupla em $(x-x_0)$ e $(y-y_0)$ seja maior, o que prolongará analiticamente a função $F(x,y)$.

33) Extensão às séries de n variáveis -

Do mesmo modo que, no caso de duas variáveis, fazíamos variar x_0, y_0 duma maneira contínua, dentro duma área, de modo tal que a série era convergente quando

$$-x_0 < x < +x_0 \quad , \quad -y_0 < y < +y_0 ,$$

aqui podemos fazer variar de modo contínuo o ponto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ de tal modo que a série $\sum a_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ é convergente (absolutamente convergente) para cada prismatoide

$$-x_1^0 < x_1 < x_1^0, \quad -x_2^0 < x_2 < x_2^0, \dots, \quad -x_n^0 < x_n < x_n^0 .$$

O lugar do ponto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ é uma hipersuperfície no espaço a n dimensões dos $x_1, x_2, \dots, x_n$. A continuidade da série e a sua derivação têm o mesmo sentido que no caso de duas ou de três dimensões.

34) Funções dominantes -

34) **Funções dominantes** – Para o caso de muitas variáveis, a noção de função dominante duma série é análoga à que se deu no caso de uma variável. Se é

$$f(xyz) = \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

tem-se ainda

$$f(x,y,z) << \varphi(x,y,z) = \sum b_{mnp} x^m y^n z^p$$

se os coeficientes b_{mnp} são todos positivos e se $|a_{mnp}| \leq b_{mnp}$.

Consideremos a série de duas variáveis $\sum a_{mn} x^m y^n$, que suporemos convergente quando $|x| \leq r$, $|y| \leq \rho$. Então se $|a_{mn} r^m \rho^n| < M$, a função

$$\varphi(x,y) = \sum M \left(\frac{x}{r}\right)^m \left(\frac{y}{\rho}\right)^n = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)}$$

é uma função dominante de $\sum a_{mn} x^m y^n$. Se $\underline{x}$ e y se consideram suficientemente pequenos, a função

$$\psi(xy) = \frac{M}{1 - \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)}$$

é ainda uma função dominante. Com efeito tem-se, então,

$$\psi(xy) = M\left[1 + \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right) + \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)^2 + \cdots\right],$$

que é um desenvolvimento absolutamente convergente. O coeficiente de $x^m y^n$ provém do desenvolvimento $\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$, sendo o respectivo coeficiente, pelo menos, igual a M. Logo $\psi(xy)$ é, mesmo, dominante de $\varphi(xy)$.

Se considerarmos

$$f(xyz) = \sum a_{mnp} x^m y^n z^p$$

convergente quando $|x| \leq r$, $|y| \leq r'$, $|z| \leq r''$, e se $|a_{mnp} r^m r'^n r''^p| < M$, as funções

$$\varphi(xyz) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)\left(1 - \frac{z}{r''}\right)},$$

$$\psi(xyz) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left[1 - \left(\frac{y}{r'} + \frac{z}{r''}\right)\right]}, \quad \theta(xyz) = \frac{M}{\left(1 - \frac{y}{r'}\right)\left[1 - \left(\frac{x}{r} + \frac{z}{r''}\right)\right]}$$

etc. são funções dominantes de $f(xyz)$.

Quando na série proposta falta o termo conhecido, podemos diminuir à função dominante o valor M.

35) **Substituições de séries em séries** – Existe um teorema geral de substituição de séries em séries, que pode enunciar-se assim: Dada uma série

inteira das variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_q$, se cada variável y_i fôr uma série ordenada segundo as potências de $x_1, x_2, \ldots, x_l$, sem termo independente, a série inicial é igualmente uma série inteira dos x_i.

Demonstremos o teorema num caso simples. Seja

$$F(y z) = \sum a_{mn} y^m z^n,$$

e ponhamos

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$
$$z = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots .$$

A substituição, em F, dêstes valores de y e de z leva a uma quadro de tripla entrada que se trata de vêr se pode ser absolutamente convergente. Notemos, para isso, que êsse quadro tem coeficientes que resultam por somas e multiplicações operadas com os a_{mn}, b_n, c_m. Se, por consequência, formarmos o quadro análogo obtido substituindo as três séries por séries dominantes e se êste último quadro fôr absolutamente convergente, aquele quadro é igualmente absolutamente convergente.

Ora a função

$$\phi(y,z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{y}{R}\right)\left(1 - \frac{z}{R'}\right)} = \sum M \left(\frac{y}{R}\right)^m \left(\frac{z}{R'}\right)^n,$$

se $F(y,z)$ é convergente quando $(y| \geq R$, $|z| \geq R'$, é dominante de $f(y,z)$. Também

$$\frac{N}{1 - \frac{x}{r}} - N = \frac{N \frac{x}{r}}{1 - \frac{x}{r}}, \qquad \frac{N' \frac{x}{r'}}{1 - \frac{x}{r'}}$$

são dominantes de y e de z.

Substituindo, em ϕ, y e z por estas últimas séries, se supômos $|x| < r$, $|x| < r'$, o quadro triplo pode se somado e levar à série dupla

$$\sum M \left[\frac{N \frac{|x|}{r}}{R\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)}\right]^m \left[\frac{N' \left|\frac{x}{r'}\right|}{R'\left(1 - \frac{|x|}{r'}\right)}\right]^n .$$

Ora esta série dupla é convergente se

$$N \frac{|x|}{r} < R\left(1 - \frac{|x|}{r}\right), \qquad N' \frac{|x|}{r'} < R'\left(1 - \frac{|x|}{r'}\right),$$

o que dá

$$\frac{|x|}{r}(N + R) < R, \qquad \frac{|x|}{r'}(N' + R') < R', \quad \text{ou}$$

$$|x| < r \frac{R}{N + R}, \qquad |x| < r' \frac{R'}{N + R'},$$

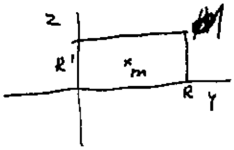
donde se tira um limite para a validade do desenvolvimento de $f(y z)$ em série ordenada segundo as potências de x.

36) Caso em que y e z têem termos constantes — Se é

$$F(y z) = \sum a_{mn} y^m z^n,$$

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$
$$z = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

suponhamos ainda F convergente quando $|y| \le R$, $|z| \le R'$. Se fôrem $|y_0|, |z_0|$ as coordenadas dum ponto m, escrevamos



$$F(y,z) = F[y_0 + (y-y_0), z_0 + (z-z_0)] =$$
$$= \sum \alpha_{mn} (y-y_0)^m (z-z_0)^n,$$

desenvolvimento que tem certamente lugar $|y_0| + |y-y_0| \le R$, $|z_0| + |z-z_0| \le R'$, ou seja quando $|y-y_0| \le R-|y_0|$, $|z-z_0| \le R'-|z_0|$. Ora neste desenvolvimento, se supomos poder identificar $|b_0|$ com $|y_0|$ e $|c_0|$ com $|z_0|$, isto é se supômos $|b_0| < R$, $|c_0| < R'$, podemos substituir $y - y_0 = y - b_0$ e $z - z_0 = z - c_0$ por

$$y - b_0 = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$
$$z - c_0 = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

conforme se viu no § anterior.

37) Funções implícitas Seja $F(x y) = 0$ uma equação da forma

$$a_{01}(x-x_0) + a_{10}(y-y_0) + a_{20}(x-x_0)^2 + \cdots = 0,$$

onde o primeiro membro é uma série inteira de $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, sem termo conhecido. Se o coeficiente de $y-y_0$ fôr diferente de zero, vamos provar que a raiz única y de equação proposta que se torna y_0 quando x se torna x_0 se pode desenvolver em série ordenada segundo as potências de $x-x_0$, segundo a igualdade

$$y = y_0 + \sum \alpha_n (x-x_0)^n.$$

Façamos a demonstração supondo $x_0 = y_0 = 0$, o que não influirá na generalidade. Então tem-se uma equação da forma

$$y = f(x y) = a_{10} x + a_{20} x^2 + a_{11} x y + a_{02} y^2 + \cdots.$$

Pretende-se satisfazer a esta equação escrevendo

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots.$$

Sob um ponto de vista formal a substituição da série y no segundo membro da equação deverá identificar-se com $y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$.

Resulta assim

$$c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = a_{10} x + a_{20} x^2 + a_{11} x (c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) + a_{02} (c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)^2 + \cdots ,$$

donde se tira

$$c_1 = a_{10} , \quad c_2 = a_{20} + a_{11} c_1 + a_{02} c_1^2 , \cdots .$$

Vê-se que cada c_m depende dos a_{ik} tais que $i + k \leqq n$ e, além disso, dos c_l tais que $l < m$. Pode, assim, supôr-se que os c_m são polinómios nos a_{ik} da forma

$$c_n = P_n (a_{10} , a_{20} , \cdots , a_{n0} , \cdots , a_{0n}) .$$

Basta agora provar que tais coeficientes $\underline{c_n}$, assim determinados, tornam convergente a série $\sum c_n x^n$.

A questão trata-se provando a convergência para um caso em que os coeficientes P_n são substituídos por outros positivos e superiores em valor absoluto. Consideremos, para isso, a equação

$$Y = \varphi (x Y) = b_{10} x + b_{20} x^2 + b_{11} x Y + b_{02} Y^2 + \cdots = \sum b_{mn} x^m Y^n ;$$

supondo $\varphi(x, Y)$ dominante de $f(x, y)$.

Trata-se de satisfazer à equação anterior pelo desenvolvimento

$$Y = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots .$$

Ora os coeficientes C_i são dominantes dos coeficientes correspondentes c_i, pois

$$C_n = P_n (b_{10} , b_{20} , \cdots , b_{n0} , \cdots , b_{0n}) ,$$

e as únicas operações sôbre os bb são multiplicações e adições e é $|a_{mn}| < b_{mn}$. A convergência da série $\sum c_n x^n$ ficará demonstrada, desta maneira, se se provar a convergência de $\sum C_n x^n$.

Tomemos $Y = \varphi(x, Y)$ sob a forma

$$Y = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)} - M - M \frac{Y}{\rho} ,$$

onde M, r, ρ têem significado bem conhecido.

Esta equação pode escrever-se

$$Y^2 - \frac{\rho^2 Y}{\rho + M} + \frac{M \rho^2}{\rho + M} \frac{x}{r - x} = 0 ;$$

que resolvida em ordem a Y, dá

§ 37) Continuação -

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho+m)} - \frac{\rho^2}{2(\rho+m)} \sqrt{1 - \frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\,\frac{x}{r-x}} .$$

Notando que é

$$\sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\,\frac{x}{r-x}} = \sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\cdot\frac{\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}}} = \left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{r} - \frac{4M(\rho+M}{\rho^2}\,\frac{x}{r}} =$$

$$=\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{1/2}, \quad \text{com} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}\left(\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}+1\right) = \left(\frac{\rho+2M}{\rho}\right)^2 \frac{1}{r},$$

vem

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho+m)}\left[1 - \left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{1/2}\right].$$

Como $\alpha = \left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^2 r < r$, vê-se que Y se desenvolve em série ordenada segundo as potências de x, no intervalo $(-\alpha, +\alpha)$. A série assim obtida é solução da equação

$$Y = \varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho},$$

dominando a série que formalmente satisfaz à equação proposta

$$y = f(xy) = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + \cdots .$$

Logo o desenvolvimento $y = \sum c_n x^n = \sum \ell_n x^n$ é convergente, como se queria provar.

Escrevendo a equação proposta sob a forma

$$F(xy) = y - f(xy) = 0,$$

e designando com $y = \ell(x)$ a raiz encontrada, que se anula com x, ponhamos em $F(xy)$ $y = \ell(x) + z$ e desenvolvamos em série ordenada segundo as potências de y e de z. Visto que, no desenvolvimento em x e z assim obtido, obtemos uma identidade, qualquer que seja x, se se põe $z = 0$, todos os termos conterão necessariamente z, vindo

$$F[x, \ell(x)+z] = z\,\varphi(x,z).$$

Fazendo agora $z = y - \ell(x)$ vem a identidade

$$F(x,y) = [y - \ell(x)]\; Q_1(x,y) = [y - \ell(x)]\,[1 + \alpha x + \beta y + \cdots],$$

onde deve observar-se que o termo constante de $Q_1(x,y)$ é a unidade.

Como diz Goursat a pg. 469 "esta decomposição de $F(x,y)$ num produto de dois factores é devida a Weierstrass. Ela põe em evidência a raiz $y = \ell(x)$; mostra, além disso, que não há outra raiz de $F(xy) = 0$ que se anule com x, visto que o segundo factor não tende para zero quando x e y tendem para zero".

§ 38 - Teorema geral para as funções implícitas

- Consideremos um sistema de p equações com p incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_p$, a determinar em função dum certo número de variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Por exemplo:

$$F_1(x_1 x_2 \cdots x_q;\ y_1 y_2 \cdots y_p) = 0,$$
$$F_2(x_1 x_2 \cdots x_q;\ y_1 y_2 \cdots y_p) = 0,$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$F_p(x_1 x_2 \cdots x_q;\ y_1 y_2 \cdots y_p) = 0.$$

Como anteriormente, admitimos que os primeiros são séries inteiras de todas as variáveis, que se anulam para $x_i = y_k = 0$. Trata-se de demonstrar que se o jacobiano $\frac{D(F_1 \cdots F_p)}{D(y_1 \cdots y_p)} \neq 0$, no ponto $x_i = y_k = 0$, existe um e um só sistema de soluções

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \cdots x_q),\ y_2 = \varphi_2(x_1 \cdots x_q),\ \ldots,\ y_p = \varphi_p(x_1 \cdots x_q),$$

que se anulam para $x_i = 0$ e que se desenvolvem em séries ordenadas segundo as potências dos x_i.

Consideremos um caso particular, do qual se tira o modo de proceder no caso geral. Seja

$$F_1 = au + bv + cx + dy + ez + \cdots = 0,$$
$$F_2 = a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \cdots = 0.$$

Trata-se aqui das incógnitas u, v e das variáveis independentes x, y, z.

Supõe-se $\left(\frac{D(F_1, F_2)}{D(u,v)}\right)_0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$. Então resolvendo as equações em ordem a $\underline{u}$ e $\underline{v}$ (em função de x, y, z, e das restantes potências de u e de v) vem

$$\Phi_1 = u - \sum a_{mnpqr}\, x^m y^n z^p u^q v^r = 0,$$
$$\Phi_2 = v - \sum b_{mnpqr}\, x^m y^n z^p u^q v^r = 0,$$

ou seja

$$u = \sum a_{mnpqr}\, x^m y^n z^p u^q v^r, \qquad (\theta)$$
$$v = \sum b_{mnpqr}\, x^m y^n z^p u^q v^r.$$

É claro que se satisfaz formalmente a estas equações escrevendo

$$u = \sum c_{ikl}\, x^i y^k z^l, \qquad v = \sum c'_{ikl}\, x^i y^k z^l. \qquad (\theta')$$

O ponto importante é que é possível determinar sucessivamente c_{ikl} e c'_{ikl} em função dos a_{mnpqr}, b_{mnpqr} e dos c_{ikl}, c'_{ikl} que são anteriores rao que se calculam. Por outras palavras: seja calcular um c_{ikl} para o qual $i+k+l$ tem um certo valor inteiro $\underline{A}$. O seu valor, como coeficiente que figura no primeiro membro, tem de se igualar ao coeficiente de $x^i y^k z^l$ do segundo membro. Ora um termo para o qual o índice de x seja superior a i, não pode considerar-se no segundo membro porque $\underline{u}$ e $\underline{v}$ figuram nos segundos membros por uma associação, pelo menos, de soma de expoentes igual a 2, e ainda porque não há termo constante nos segundos membros. Mas o coeficiente c_{ikl} pode depender de coeficientes com o mesmo $\underline{i}$ e o mesmo $\underline{k}$, por exemplo, mas então o $\underline{l}$ será menor. Em resumo: c_{ikl} depende dos c_{ikl} e c'_{ikl} para os quais a

soma dos índices é inferior a A. Quanto aos a_{mnpqr} que entram ⑷⑻
nos c_{ikl}.
e as b_{mnpqr} que entram nos c_{ikl} figuram por combinações de multiplicaç. e de adição, sendo, quando muito, $m+n+p+q+r = i+k+l$.

Substituamos os segundos membros de (θ) por séries dominantes. Os segundos membros de (θ') serão, depois, igualmente substituídos por séries dominantes. Então teremos as equações

$$\mathcal{U} = \frac{M}{\left(1-\frac{x+y+z}{r}\right)\left(1-\frac{\mathcal{U}+V}{\rho}\right)} - M - M\frac{\mathcal{U}}{\rho} - M\frac{V}{\rho}, \qquad (\theta'')$$

$$V = \frac{M}{\left(1-\frac{x+y+z}{r}\right)\left(1-\frac{\mathcal{U}+V}{\rho}\right)} - M - M\frac{\mathcal{U}}{\rho} - M\frac{V}{\rho},$$

se supômos

$$|a_{mnpqr}\, r^m r^n r^p \rho^q \rho^r| < M,$$

$$|b_{mnpqr}\, r^m r^n r^p \rho^q \rho^r| < M.$$

As equações (θ'') são satisfeitas pelos mesmos valores de $\underline{\mathcal{U}}$ e de $\underline{V}$. Fazendo $V = \mathcal{U}$ na primeira vem

$$\mathcal{U}\left(1-\frac{2\mathcal{U}}{\rho}\right) = \frac{M}{1-\frac{x+y+z}{r}} - M\left(1-\frac{4\mathcal{U}^2}{\rho^2}\right),$$

ou seja

$$\mathcal{U}^2\left(\frac{4M}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}\right) - \mathcal{U} + M\left(\frac{1}{1-\frac{x+y+z}{r}} - 1\right) = 0,$$

ou ainda

$$\mathcal{U}^2 - \frac{\rho^2\mathcal{U}}{2\rho+4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho+4M}\cdot\frac{x+y+z}{r-(x+y+z)} = 0.$$

Daqui se tira

$$\mathcal{U} = \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4(2\rho+4M)}\right)^2 - \frac{M\rho^2}{2\rho+4M}\,\frac{x+y+z}{r-(x+y+z)}},$$

mas a raiz que se anula quando $x = y = z = 0$ é a que corresponde ao sinal $-$ atrás do radical. Podemos escrever

$$\mathcal{U} = \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}\sqrt{1 - \frac{4(2\rho+4M)M}{\rho^2}\,\frac{\frac{x+y+z}{r}}{1-\frac{x+y+z}{r}}},$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}\sqrt{\left(1-\frac{x+y+z}{r}\right)^{-1}\left[1-\frac{x+y+z}{r} - \frac{4M(2\rho+4M)}{\rho^2}\,\frac{x+y+}{r},\right.}$$

$$= \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}\left(1-\frac{x+y+z}{r}\right)^{-1/2}\left[1-\frac{x+y+z}{\alpha}\right]^{1/2},$$

com $$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{4M(2\rho+4M)}{\rho^2}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{(\rho+4M)^2}{\rho}.$$

Ora a expressão obtida para $\mathcal{U}$ mostra que esta quantidade pode desenvolver-se em série ordenada segundo as potências de x, y, z.

Basta que $\left|\frac{x}{\alpha}\right| + \left|\frac{y}{\alpha}\right| + \left|\frac{z}{\alpha}\right| < 1$, com cada uma das parcelas inferior a $\frac{1}{3}$. O teorema fica, portanto, demonstrado para $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Designemos com $\underline{u_1}$ e $\underline{v_1}$ as soluções encontradas para $\underline{u}$ e $\underline{v}$, os quais se anulam quando x, y, z se anulam. Essas soluções identificam as equações

$$F(u,v) = u - \sum a_{mnpqr} x^m y^n z^r u^q v^r = 0,$$

$$\phi(u,v) = v - \sum b_{mnpqr} x^m y^n z^r u^q v^r = 0,$$

de sorte que, pondo nos primeiros membros $u = u_1 + u'$, $v = v_1 + v'$, e ordenando os resultados segundo as potências de x, y, z, u', v', se obtêem séries cujos termos deverão conter $\underline{v'}$ ou $\underline{u'}$, pelo menos, visto que elas se tornam identicamente nulas quando se põe $u' = v' = 0$.

Isto significa que as equações anteriores tomarão a forma

$$F(u_1+u', v_1+v') = u'f + v'\varphi = 0, \quad u'f_1 + v'\varphi_1 = 0 = \phi(u_1+u', v_1+v')$$

em que $f, \varphi, f_1, \varphi_1$ são séries ordenadas segundo as potências de x, y, z, u', v'.

Pondo aqui $u' = u - u_1$, $v' = v - v_1$ vem

$$F(u,v) = (u-u_1) f + (v-u_1)\varphi = 0,$$

$$\phi(u\,v) = (u-v_1) f_1 + (v-v_1)\varphi_1 = 0.$$

Vê-se imediatamente que os termos conhecidos de $\underline{f}$ e $\underline{\varphi_1}$ são a unidade e os termos conhecidos de $\underline{f_1}$ e de φ são nulos.

Sob a forma anterior ficam postos em evidência as raízes $\underline{u_1}$ e $\underline{v_1}$ das equações $F(u,v) = 0$ e $\phi(u,v) = 0$, dadas. E vê-se que não há outras soluções das mesmas equações que se anulem quando $x = y = z = 0$. Porque, se as houvesse, seria

$$\left.\begin{aligned} (u-u_1) f &= -(v-v_1)\varphi \\ (u-u_1) f_1 &= -(v-v_1)\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{f}{f_1} = \frac{\varphi}{\varphi_1}, \text{ ou } f\varphi_1 - f_1\varphi = 0, \text{ isto é,}$$

tais soluções, pois que não tornariam simultaneamente nulos $\underline{u-u_1}$ e $\underline{v-v_1}$, tornariam nulo o binómio $f\varphi_1 - f_1\varphi$. Tendo em vista que o termo conhecido de $f\varphi$ é a unidade e que o de $f_1\varphi$ é zero, essas soluções não poderão tornar-se nulas quando x, y, z se anulam.

39) Funções analíticas – Diz-se que uma função $F(x\,y\,z \dots)$ é uma função analítica de $x, y, z, \dots$ na vizinhança do ponto $x_0, y_0, z_0, \dots$ se puder desenvolver-se em série inteira de $x-x_0, y-y_0, z-z_0, \dots$ convergente quando os valores absolutos destas quantidades são suficientemente pequenos.

A diferenciação, a integração, a multiplicação, a divisão, certas substituições, etc., fazem passar de funções analíticas para outras funções analíticas. Pertencem a esta categoria as funções elementares conhecidas, seno, coseno, ..., polinómio, exponencial, etc.

Mas é na teoria da variável imaginária que se vê toda a importância da noção de função analítica.

40) Problema da inversão duma série - Seja a equação

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots ,$$

em cujo segundo membro figura uma série inteira de x. Se $a_1 \neq 0$ e se a série do segundo membro é convergente num intervalo $(-r, +r)$, escrevendo a equação supra sob a forma

$$x = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x^2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} x^n - \dots ,$$

vê-se que, tomando a variável $\underline{x}$ como incógnita, existe uma e uma só função $\underline{x}$ de y que tende para zero quando y tende para zero e que essa função se pode desenvolver em série ordenada segundo as potências de y. Pondo

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + \dots , \quad \text{vem}$$

$$b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\left(b_1^2 y^2 + 2 b_1 b_2 y^3 + \dots\right) - \frac{a_3}{a_1}\left(b_1^3 y^3 + \dots\right) - \dots ,$$

donde se tira

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1} b_1^2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = -\frac{a_2}{a_1} 2 b_1 b_2 - \frac{a_3}{a_1} b_1^3 =$$

$$= +\frac{a_2}{a_1} 2 \frac{1}{a_1} \frac{a_2}{a_1^3} - \frac{a_3}{a_1} \frac{1}{a_1^3} = \frac{2 a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5},$$

etc. O coeficiente b_n depende dos a_i até $\underline{a_n}$.

Capítulo V

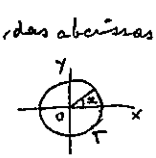
Séries de Fourier

41) Generalidades sôbre funções periódicas - Tanto na Análise pura como nas aplicações da Análise, desempenham as séries inteiras, que temos vindo estudando, bem como as séries cujos termos são funções trigonométricas, um papel muito importante. Nestas últimas séries há especialmente que considerar aquelas cuja soma é uma função periódica. As funções periódicas do tempo aparecem, por exemplo, na corrente alterna produzida por um dínamo, nas teorias ondulatórias da Acústica e da Óptica, etc.

Uma função periódica de período $2l$ é caracterizada pela relação

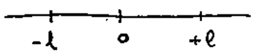
$$f(x+2l) = f(x).$$

Nesta relação subentende-se que a variável independente x é marcada sôbre o eixo das abcissas $\underline{ox}$. Muitas vezes porém, como na figura junta, interessa interpretar a variável $\underline{x}$ como um ângulo. Nesse caso se, dada uma volta no círculo Γ, a função $f(x)$ retoma o seu valor, o período da função é $\underline{2\pi}$, sendo



$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Dada uma função $f(x)$, absolutamente qualquer, no intervalo fechado $-l \leq x \leq +l$, esta função pode interpretar-se como uma função periódica, se se prolonga, de modo conveniente, fora do intervalo considerado. Basta pôr $f(x+2nl)=f(x)$, onde $\underline{n}$ é um número inteiro, positivo ou negativo. Entretanto deve observar-se que, nos pontos $\ldots,-(2K+1)l,\ldots,-5l,-3l,-l,+l,3l,5l,\ldots,(2K+1)l,\ldots$ a nossa função, assim prolongada, é descontínua, no geral. Um caso de excepção será, geralmente, aquele em que se admite que a função $f(x)$ toma o mesmo valor nos pontos $-l$ e $+l$, isto é, $f(l)=f(-l)$. Mas isto supõe, bem entendido, que a função dada no intervalo fechado $(-l,+l)$ é contínua nos pontos extremos.



Se a função $f(x)$ é contínua, com derivada, é claro que esta função derivada é igualmente periódica, com o mesmo período. Mas a derivada não é, necessàriamente, contínua nos pontos de abcissa $(2K+1)l$.

Como imagem física adequada, diremos que x (ou t) representa o tempo, de sorte que, atribuindo a $f(x)$ a representação dum fenómeno físico periódico, ou, por outras palavras, dizendo que $f(x)$ representa uma "<u>oscilação</u>", o período $2l=T$ diz-se "<u>duração da oscilação</u>".

Para uma função periódica integrável vale a relação

$$\int_{-l-a}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{-l}^{+l} f(x)\,dx, \qquad (1)$$

como vamos provar. Notemos, em primeiro lugar, que, geomètricamente, a integração no intervalo $(-l-a,\,l-a)$ equivale a uma integração num intervalo deduzido do intervalo $(-l,+l)$ por um deslocamento, para a esquerda, da quantidade $\underline{a}$ $(a>0)$.

Observemos que é $f(\xi-2l)=f(\xi)$. Então

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\alpha+2l}^{\beta+2l} f(\xi)\,d\xi = \int_{\alpha+l}^{\beta+2l} f(x)\,dx,$$

como, de resto, o dá imediatamente o significado geométrico do integral. Ora

$$\int_{-l-a}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{-l-a}^{-l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{l-a}^{l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{l-a} f(x)\,dx = \int_{-l}^{+l} f(x)\,dx.$$

As funções periódicas mais simples são $a \operatorname{sen} \omega x$, $a \cos \omega x$, ou $a \operatorname{sen} \omega(x-\xi)$, $a \cos \omega(x-\xi)$, onde $a \gtrless 0$, $\omega > 0$, ξ são constantes.

§ 41) Generalidades sôbre funções periódicas (Continuação) - Estas funções periódicas $a \operatorname{sen} \omega(x-\xi)$, $a \cos \omega(x-\xi)$ têem o período $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$. O inverso $\frac{1}{T} = \nu$ diz-se frequência. O período representa a duração duma oscilação; a frequência representa o número de oscilações em cada segundo. A quantidade ω diz-se pulsação. Estas designações aparecem na Técnica. Nós, aqui, chamaremos a T o período mas designaremos ω com o nome de frequência. ω representa o número de períodos ou de oscilações, não na unidade de tempo mas no tempo 2π. Quanto, pròpriamente, às funções sen ou cos dizemos que representam oscilações puras. a é a amplitude da oscilação, ou valor máximo que a função pode tomar. A quantidade $\omega(x-\xi)$ diz-se fase e o número $\omega\xi$ diz-se deslocamento da fase.

A oscilação pura

$$a \operatorname{sen} \omega(x-\xi) = a(\operatorname{sen}\omega x \cos\omega\xi - \cos\omega x \operatorname{sen}\omega\xi) = \alpha \operatorname{sen}\omega x - \beta\cos\omega x, \quad \left\{ \text{com } \begin{matrix} \alpha = a\cos\omega\xi \\ \beta = a\operatorname{sen}\omega\xi \end{matrix} \right.$$

e a oscilação pura

$$a \cos\omega(x-\xi) = a(\cos\omega x\cos\omega\xi + \operatorname{sen}\omega x \operatorname{sen}\omega\xi) = \alpha\cos\omega x + \beta\operatorname{sen}\omega x, \quad \left\{ \text{com } \begin{matrix} \alpha = a\cos\omega\xi \\ \beta = a\operatorname{sen}\omega\xi \end{matrix} \right.$$

são, como se vê, expressas por somas.

Inversamente, uma soma

$$\alpha\cos\omega x + \beta\operatorname{sen}\omega x$$

pode escrever-se sob a forma

$$a \cos\omega(x-\xi),$$

pondo $\alpha = a\cos\omega\xi$, $\beta = a\operatorname{sen}\omega\xi$, ou seja $a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, e $\operatorname{tg}\omega\xi = \frac{\alpha}{\beta}$.

A soma de ~~oscilações~~ $\alpha\cos\omega x$ e $\beta\operatorname{sen}\omega x$ com a mesma frequência dá uma oscilação dessa frequência (Segue-se a nota do verso).

42) Composição de oscilações puras - O problema da composição de oscilações puras está já resolvido quando as oscilações são da mesma frequência. Obtem-se uma oscilação pura com essa frequência. Apenas a amplitude e ~~a~~ deslocamento de fase terão de ser determinados em função das amplitudes e dos deslocamentos de fase das oscilações dadas. Aqui interessam-nos, por consequência os casos de composição em que os períodos ou frequências são diferentes.

Consideremos o caso mais simples, o da sobreposição de duas oscilações de frequências $\underline{\omega_1}$ e $\underline{\omega_2}$, respectivamente. Há, então, duas hipóteses fundamentais a distinguir: ω_1 e ω_2 são comensuráveis ou ω_1 e ω_2 são incomensuráveis.

Tratemos o primeiro caso. Seja, por exemplo, $\omega_2 = 2\omega_1$. Então $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2\omega_1} = \frac{T_1}{2}$. É claro que T_2 e T_1 são períodos da segunda oscilação, pois os valores da função, que se repetem quando o tempo aumenta de T_2, também se repetem quando $\underline{t}$ aumenta de $2T_2$. Uma oscilação com o período de metade de outra e a frequência igual ao dobro diz-se primeira oscilação harmónica dessa outra.

Suponhamos $\omega_3 = 3\omega_1$ uma terceira frequência. Então $T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{3\omega_1} = \frac{T_1}{3}$. A função $\operatorname{sen}\omega_3 x$ admite o período T_3 mas também admite o período $3T_3 = T_1$. Uma oscilação com o período igual à terça parte do de outra e a frequência igual ao triplo diz-se segunda oscilação harmónica dessa outra. Temos, igualmente, uma terceira, quarta, .., (n-1) oscilação harmónica, a que correspondem as frequências $\omega_4 = 4\omega_1$, $\omega_5 = 5\omega_1$, ..., $\omega_n = n\omega_1$. É claro que os desvios de fase podem ser quaisquer. Cada oscilação harmónica duma outra admite o período $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ dessa outra.

Dessa maneira se nós sobrepomos um número qualquer de oscilações que sejam harmónicas duma frequência ω_1 dada, existe uma oscilação resultante com o período $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, ou seja com a frequência ω_1. Mas não se diz que tal oscilação seja uma oscilação pura.

Se escrevemos

$$S(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu\omega x + b_\nu \operatorname{sen}\nu\omega x),$$

em que $\underline{\alpha}$ é uma constante, tiramos, pois, as seguintes conclusões: cada parcela da forma $a_\nu\cos\nu\omega x + b_\nu\operatorname{sen}\nu\omega x$ é uma soma de duas oscilações puras de frequência $\nu\omega$, e, portanto, uma oscilação pura dessa frequência; a soma $S(x)$, visto que a constante $\underline{\alpha}$ em nada altera as condições de periodicidade, é, pois, uma soma de oscilações puras de frequências $\omega, 2\omega, \ldots, n\omega$, isto é, é uma soma duma oscilação de frequência fundamental $\underline{\omega}$ e das oscilações harmónicas dessa frequência fundamental. O resultado será uma função periódica de frequência ω, e de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Em $S(x)$ figuram, dado ω, $2n+1$ constantes. Dispondo dessas constantes, podemos encontrar para a curva $y = S(x)$ formas bastante complicadas.

A designação de harmónicos (oscilações harmónicas) vai buscar-se à noção de "acôrdos" em Acústica. Dado um som fundamental, um "oitavo" corresponde ao dobro das oscilações e um quinto corresponde a 3/2 vezes o número de oscilações do oitavo. O primeiro harmónico corresponde ao "oitavo", o segundo harmónico é o "oitavo + quinto", etc. do som fundamental.

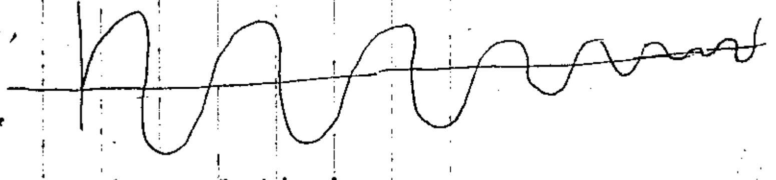
Duma maneira geral, quando duas oscilações têm frequências que estão entre si como $\frac{m}{n}$, em que $\underline{m}$ e $\underline{n}$ são inteiros, $\omega_2 = \frac{m}{n}\omega_1$ ou $n\omega_2 = m\omega_1$, vê-se que $m\omega_1$ ou $n\omega_2$ é um período do movimento composto. A soma de tais oscilações dá um movimento periódico, mas não uma oscilação pura, no geral.

"Um tipo fundamentalmente diferente de fenómeno é dado, porém, pela composição de duas oscilações com frequências incomensuráveis $\underline{\omega_1}$ e $\underline{\omega_2}$. Aqui o fenómeno originado pela sobreposição de oscilações puras não é periódico. Seja observado que as funções resultantes, porém, sempre ainda comportam um carácter aproximadamente periódico, isto é, quási periòdicamente, repetem os seus valores. Diz-se que são quási-periódicas. Tais funções foram recentemente particularmente aprofundadas".

A composição de oscilações puras leva ainda a um outro fenómeno, chamado "flutuações". Sejam ω_1 e ω_2 duas frequências muito grandes mas tais que $\omega_1 - \omega_2$ é pequeno $(\omega_1 > \omega_2 > 0)$ relativamente a $\underline{\omega_1}$ ou ω_2. A soma $y = \operatorname{sen}\omega_1 x + \operatorname{sen}\omega_2 x$ pode escrever-se

$$y = 2\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}x \operatorname{sen}\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}x.$$

Sob esta forma, representa um fenómeno que podemos conceber assim: Trata-se duma oscilação de período $2\pi \Big/ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$, ou de frequência $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, e de amplitude $2\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}x$, a qual é variável, como se vê. A variação da amplitude é, porém, muito lenta, nas hipóteses consideradas. O período correspondente, com efeito, é $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, muito grande em face do período $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$. Durante um grande número de períodos, nos quais y toma a forma sinusoidal ordinária, a amplitude quási se conserva, como dá uma ideia a figura junta.



As oscilações da amplitude dizem-se flutuações.

43) O emprêgo de imaginários

Das fórmulas

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

tira-se

$$\cos\omega(x-1) = \frac{e^{i\omega(x-1)} + e^{-i\omega(x-1)}}{2}, \quad \operatorname{sen}\omega(x-1) = \frac{e^{i\omega(x-1)} - e^{-i\omega(x-1)}}{2}.$$

Uma expressão

$$a\,e^{i\omega(x-1)}, \quad a\,e^{-i\omega(x+1)},$$

onde $\underline{a}$, ω, 1 são reais, em muitas questões físicas, diz-se que representa uma oscilação pura; mas subentende-se, então, que se trata da parte real ou do coeficiente de $\underline{i}$ da referida expressão.

Consideremos, por exemplo, a função periódica

$$S(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x);$$

donde se tira

$$S(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2} + b_\nu \frac{e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}}{2i} \right) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu x} \left(\frac{a_\nu}{2} + \frac{b_\nu}{2i} \right) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} e^{-i\nu x} \left(\frac{a_\nu}{2} - \frac{b_\nu}{2i} \right),$$

ou seja

$$S(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \alpha_\nu e^{i\nu x}; \quad \left\{ \text{com} \quad \begin{array}{l} \alpha_\nu = \dfrac{ia_\nu + b_\nu}{2i} \\ \alpha_{-\nu} = \dfrac{ia_\nu - b_\nu}{2i} \end{array} \right. \quad \alpha_0 = \alpha.$$

Escrevendo $\alpha_{-\nu} = \frac{+a_\nu + ib_\nu}{2}$, $\alpha_\nu = \frac{a_\nu - ib_\nu}{2}$, vê-se que α_ν e $\alpha_{-\nu}$ são imaginários conjugados. Inversamente, uma soma

$$S(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \alpha_\nu e^{i\nu x}, \quad \text{com } \alpha_\nu \text{ e } \alpha_{-\nu} \text{ imaginários conjug.}$$

só representa um movimento periódico real.

44) Dedução duma fórmula de trigonometria

– É conhecida a fórmula

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}.$$

A sua dedução é fácil recorrendo à representação imaginária. Vem

$$\sigma_n(\alpha) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \alpha_\nu e^{i\nu\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-n}^{+n} e^{i\nu\alpha}. \qquad \text{pois} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_\nu = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \\ \alpha_{-\nu} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

Logo é

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-in\alpha} + e^{-i(n-1)\alpha} + \dots + e^{i(n-1)\alpha} + e^{in\alpha} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-in\alpha}}{e^{+i\alpha} - 1} =$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha}}{2\left(e^{+\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}\right)} = \frac{2i \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2}\alpha)}{2 \cdot 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2}\alpha)}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}},$$ como se queria provar.

45) Interpolação trigonométrica

– Postas as questões preliminares anteriores, o problema que vamos agora resolver é de sentido inverso. Até aqui, eram dados, digamos, os movimentos componentes, e tratava-se de achar o movimento resultante. Agora, supõe-se dada uma função periódica de período $2l$, ou de frequência $\omega = \frac{2\pi}{2l} = \frac{\pi}{l}$, e trata-se de encontrar a oscilação pura de período $2l$ ou ~~freq~~ $\omega = \frac{\pi}{l}$, assim como os harmónicos de frequência $\frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \dots$, tais que, por composição, reproduzam a função dada.

§45) Interpolação trigonométrica (Continuação) Uma tal representação [illegible] [illegible] ou decomposição é, em geral, aproximada. Depois, por uma passagem ao limite, tenta-se penar à representação exacta.

Para se fixarem ideias, tomaremos, no geral, de futuro, o intervalo $(-\pi, +\pi)$, em vez do intervalo $(-l, +l)$. Assim, a função periódica, posta para a questão da interpolação, será dada definindo os seus valores no intervalo $-\pi < x < +\pi$, que é um intervalo aberto. A mudança de variável $y = \frac{l}{\pi} x$ fará passar da função $f(y)$ para uma função $\varphi(x)$, tomando esta última no intervalo $(-\pi, +\pi)$ os valores que $f(y)$ toma no intervalo $(-l, +l)$.

Pôr-nos-hemos, agora, a questão precisa seguinte: Dada a função periódica $f(x)$, de período 2π, pelos seus valores no intervalo $(-\pi < x < +\pi)$, procuremos que

$$S_n(x) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

onde $\underline{n}$ é dado, represente uma aproximação de $f(x)$.

Neste caso, a função de período 2π, ou de frequência 1, deve exprimir-se como soma aproximada de oscilações puras de frequências $1, 2, \dots, n$.

Em $S_n(x)$ dispômos de $2n+1$ constantes. Para conseguir a nossa aproximação devemos, por consequência, poder preencher $2n+1$ condições. Duma maneira evidente, essas $2n+1$ condições podem ser as seguintes: a função $S_n(x)$ toma em $2n+1$ pontos do intervalo considerado os mesmos valores que a função dada $f(x)$. A simetria garante-nos que a solução deverá apresentar-se duma maneira mais simples se os $\overset{2n+1}{}$ pontos do intervalo forem equidistantes, pelo que procederemos da ~~forma~~ que vai ver-se. Um dos pontos será o ponto zero; em seguida tomam-se $\underline{n}$ pontos à esquerda de $\underline{O}$ (origem) e $\underline{n}$ pontos à direita, todos à distância $\frac{2\pi}{2n+1} = \lambda$. Obteremos, assim as abcissas

$$-n\lambda, -(n-1)\lambda, \dots, -2\lambda, -\lambda, 0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda, n\lambda.$$

Como $n\lambda = n \frac{2\pi}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\pi$, vê-se que o ponto π não é ponto da sucessão supra. O mesmo se diz do ponto $-\pi$. Na verdade o ponto de abcissa $\underline{n\lambda}$ será I e o de abcissa $-n\lambda$ será I'. A distância I A é $\pi - \frac{2n}{2n+1}\pi = \frac{2n+1-2n}{2n+1}\pi = \frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}\lambda$. De facto, os $2n+1$ pontos interiores com os dois pontos extremos constituem, ao todo, $2n+3$ pontos limitando $2n+2$ intervalos. Poremos

$$x_{-n} = -n\lambda, \; x_{-(n-1)} = -(n-1)\lambda, \; \dots, \; x_\nu = \nu\lambda, \; \dots, \; x_n = n\lambda.$$

Os valores dados da função $f(x)$ são

$$f(x_{-n})=f_{-n},\ f(x_{-(n-1)})=f_{-(n-1)},\ \dots,\ f_\varkappa,\ \dots,\ f_n.$$

Com a utilização dos imaginários, trata-se de encontrar

$$S_n(x)=\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu e^{i\nu x},$$

ou melhor: trata-se de encontrar os números complexos α_ν $(\alpha_{-n}, \alpha_{-(n-1)}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, para o que dispomos das equações $S_n(x_\varkappa)=f(x_\varkappa)=f_\varkappa$, isto é:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu e^{-i\nu\lambda n}=f_{-n},\\
\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu e^{-i\nu\lambda(n-1)}=f_{-(n-1)},\\
\text{— — — — — —}\\
\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu e^{i\nu\lambda\varkappa}=f_\varkappa,\\
\text{— — — — — —}\\
\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu e^{i\nu\lambda n}=f_n.
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\to S_n(-\lambda n)=f(-\lambda n)=f_{-n}=S_n(x_{-n}),\\
\to S_n[-\lambda(n-1)]=f[-\lambda(n-1)]=f_{-(n-1)}=S_n(x_{-(n-1)}),\\
\text{— — — — — —}\\
\to S_n(\lambda\varkappa)=f(\lambda\varkappa)=f_\varkappa=S_n(x_\varkappa),\\
\text{— — — — — —}\\
\to S_n(\lambda n)=f(\lambda n)=f_n=S_n(x_n).
\end{array}$$

Trata-se agora de resolver êste sistema de $2n+1$ equações a $2n+1$ incógnitas. Procedamos do modo seguinte: Seja μ um dos números $-n, -(n-1), \dots, (n-1), n$; multipliquemos a primeira equação por $e^{i\mu\lambda n}$, a segunda por $e^{i\mu\lambda(n-1)}$, …, a última por $e^{-i\mu\lambda n}$, e adicionemos os resultados. Vem

$$\sum_{\varkappa=-n}^{+n}\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu e^{i\varkappa\lambda(\nu-\mu)}=\sum_{\varkappa=-n}^{+n}f_\varkappa e^{-i\lambda\varkappa\mu},$$

ou seja

$$\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu\sum_{\varkappa=-n}^{+n}e^{i\varkappa\lambda(\nu-\mu)}=\sum_{\nu=-n}^{+n}\alpha_\nu\left(e^{-in\lambda(\nu-\mu)}+e^{-i(n-1)\lambda(\nu-\mu)}+\dots+e^{in\lambda(\nu-\mu)}\right)=$$

$$=\sum_{\varkappa=-n}^{+n}f_\varkappa e^{-i\lambda\varkappa\mu}.$$

A soma dentro do parêntesis do penúltimo membro é tratada diferentemente, conforme $\mu\neq\nu$ ou $\mu=\nu$. Quando $\mu\neq\nu$, todas as parcelas são iguais à unidade e vem $\alpha_\mu\cdot(2n+1)$; mas, quando $\mu\neq\nu$, a soma vale

$$\frac{e^{i(n+1)\lambda(\nu-\mu)} - e^{-in\lambda(\nu-\mu)}}{e^{in\lambda(\nu-\mu)} - 1} = \frac{e^{i(2n+1)\lambda(\nu-\mu)} - 1}{e^{2in\lambda(\nu-\mu)} - e^{in\lambda(\nu-\mu)}} =$$

$$= \frac{e^{i.2\pi(\nu-\mu)} - 1}{\cdots} = 0 .$$

Desta maneira tem-se

$$\alpha_\mu(2n+1) = \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \, e^{-i\lambda\kappa\mu}, \quad \text{ou}$$

$$\alpha_\mu = \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \, e^{-i\lambda\kappa\mu} .$$

O problema da <u>interpolação</u>, ou da determinação de $S_n(x)$, encontra-se resolvido, sendo

$$S_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=-n}^{+n} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \, e^{i\nu(x-\lambda\kappa)} .$$

Como se anota a páginas 359 do livro de Cálculo (tomo I) de <u>Courant</u>, "o que nas nossas fórmulas supra, antes de mais nada, se nota, é a sua simetria, que nós, ainda uma vez mais pomos em evidência: A fim de que as equações

$$f_\kappa = \sum_{\nu=-n}^{+n} \alpha_\nu \, e^{i\nu\kappa\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$$

para $\kappa = -n, \ldots, 0, \ldots, n$ tenham lugar, necessitam as grandezas α_ν ser dadas pelas equações

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \, e^{-i\kappa\nu\lambda},$$

e inversamente." Esta simetria pode ainda tornar-se mais perfeita pondo $\alpha_\nu = \frac{c_\nu}{\sqrt{2n+1}}$. <u>Então as equações</u>

$$\boxed{f_\kappa = \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{c_\nu}{\sqrt{2n+1}} \, e^{i\nu\kappa\lambda},}$$

<u>são satisfeitas por</u>

$$\boxed{c_\nu = \sum_{\kappa=-n}^{+n} \frac{f_\kappa}{\sqrt{2n+1}} \, e^{-i\kappa\nu\lambda}.}$$

Ordinariamente, contudo, escrevem-se os resultados anteriores sob forma real, dado que com funções reais se trata. Então tem-se

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \alpha_\nu e^{i\nu x} = \alpha_0 + (\alpha_1 e^{ix} + \alpha_{-1} e^{-ix}) + \cdots + (\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}) =$$

$$= \alpha_0 + \left[\alpha_1 (\cos x + i \operatorname{sen} x) + \alpha_{-1} (\cos x - i \operatorname{sen} x) \right] + \cdots + \left[\alpha_n (\cos nx + i \operatorname{sen} nx) + \alpha_{-n} (\cos nx - i \operatorname{sen} nx) \right],$$

ou seja

$$S_n(x) = \alpha_0 + [(\alpha_1 + \alpha_{-1})\cos x + i(\alpha_1 - \alpha_{-1})\operatorname{sen} x] + \dots +$$
$$+ [(\alpha_n + \alpha_{-n})\cos nx + i(\alpha_n - \alpha_{-n})\operatorname{sen} nx] .$$

Escrevemos

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

pondo

$$a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu}, \quad b_\nu = i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}) .$$

Sob forma real, o nosso problema da interpolação, pode pois pôr-se assim: Dada a função periódica, (de período 2π,) $f(x)$, que toma os valores $f_{-n}, f_{-(n-1)}, \dots f_n$ nos pontos $-n\lambda$, $-(n-1)\lambda, \dots, n\lambda$, a soma de oscilações puras que se aproxima de $f(x)$, pois toma nos citados pontos $\kappa\lambda$ os citados valores f_κ, é a seguinte

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

com

$$a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu} = \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \left(e^{-i\kappa\nu\lambda} + e^{i\kappa\nu\lambda}\right) = \frac{2}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \cos \nu\kappa\lambda ,$$

$$b_\nu = i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}) = \frac{i}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \left(e^{-i\kappa\nu\lambda} - e^{i\kappa\nu\lambda}\right) = \frac{2}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa \operatorname{sen} \nu\kappa\lambda .$$

É claro que se pode chegar directamente a êste resultado, sem passar por intermédio dos imaginários.

46) <u>Passagem à série de Fourier</u> — Vamos tratar, aqui a questão de deixar aumentar, indefinidamente o número de pontos x_κ em que $S_n(x)$ toma os mesmos valores que $f(x)$. Seremos formalmente levados à série de Fourier, cuja demonstração rigorosa será feita mais adiante. Façamos os raciocínios sem utilizar imaginários.

Se $\underline{n}$ aumenta, indefinidamente, visto que λ desempenha o papel de Δx, vem, no limite, notando que é $\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$ ou $\frac{2}{2n+1} = \frac{\lambda}{\pi}$,

$$a_\nu = \lim \frac{2}{2n+1} \Big[f(-\lambda n) \cos \text{[illegible]}(-n\lambda) + f(\text{[illegible]}\lambda(n-1)) \cos \nu(-(n-1)\lambda) + \dots$$
$$+ f(\lambda n) \cos \nu(n\lambda) \Big] =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos \nu x \, dx ,$$

e, analogamente

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx .$$

O problema de interpolação periódica permite-nos, pois, passar à representação duma função $f(x)$, contínua, por exemplo (e dizemos contínua porque, nesse caso, a interpretação dada às somas que levam a a_ν e b_ν sob a forma de integral é legítima), quando essa função é dada no intervalo $(-\pi < x < \pi)$. É

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

com

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos \nu t \, dt, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \operatorname{sen} \nu t \, dt.$$

A série supra é a série de Fourier associada à função $f(x)$, mas, bem entendido, torna-se necessária uma demonstração rigorosa que nos leve a concluir que a série representa $f(x)$ em cada ponto. Como veremos, sempre que $f(x)$ e a sua primeira derivada são funções contínuas no intervalo $(-\pi, +\pi)$, salvo um número limitado de pontos de descontinuidade, o teorema tem lugar. Contràriamente, pois, ao que sucede na teoria das séries inteiras, a existência de descontinuidades não invalida que a série represente a função em intervalos separados pelas mesmas descontinuidades. Para compreendermos bem, notemos que uma função representada por uma série inteira fica essa série determinada quando se dão num intervalo, por mais pequeno que seja, os valores da função. Determinam-se então, com efeito, as derivadas sucessivas e os coeficientes são os valores dessas derivadas num ponto. Aqui não sucede assim: os coeficientes da série de Fourier relativa à função $f(x)$ dependem dos valores da função em <u>todo</u> o intervalo $(-\pi, +\pi)$ em que é dada a mesma função.

A passagem ao limite quando se emprega a forma imaginária levará a

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu e^{i\nu x},$$

com

$$\alpha_\nu = \lim \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f_\kappa e^{-i\nu\lambda x} = \lim \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa=-n}^{+n} f(\kappa\lambda)\lambda e^{-i\nu\lambda\kappa} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Relativamente ao cálculo dos coeficientes por meio de integrais, convém fazer as seguintes observações. Suponhamos que a ~~fun~~ função proposta $f(x)$, periódica, de período 2π, dada no intervalo aberto $(-\pi, +\pi)$, é prolongada, pois, fora dêsse intervalo [a função não carece ser definida nos pontos $-\pi$ e $+\pi$ pròpriamente ditos, porque tais pontos são pontos de descontinuidade da função periódica originada, não podendo a soma da série nesses pontos dar simultâneamente os valores $f(-\pi)$ e $f(+\pi)$]), é uma função par. Então é, evidentemente,

$$b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,\nu t\,dt = 0, \quad a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos\nu t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos\nu t\,dt,$$

de sorte que a série de Fourier conterá unicamente cosenos (série de cosenos).

Se $f(x)$ fôr uma função impar, a série de Fourier será uma série de senos. Se a função $f(x)$ só é dada no intervalo $0<x<\pi$, pode ser prolongada no intervalo $-\pi<x<0$ como função par ou como função impar. Isto significa que a função $f(x)$ dada no intervalo $0<x<\pi$ pode ser representada nesse intervalo por uma série de senos ou por uma série de cosenos.

47) Demonstração rigorosa da série de Fourier - Seja $f(x)$ a função dada. Formemos, para essa função, os chamados coeficientes de Fourier:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos\nu t\,dt, \qquad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,\nu t\,dt.$$

Isto é possível desde que a função $f(x)$ seja integrável no intervalo $(-\pi,+\pi)$, como sucede se fôr contínua nesse intervalo ou se fôr limitada e tiver um número finito de pontos de descontinuidade. Encontrados os coeficientes, formemos a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu x).$$

Para fazermos a demonstração desejada vamos fazer algumas hipóteses. A nossa função $f(x)$ supõe-se prolongada, fora do intervalo $(-\pi \leq x \leq +\pi)$, de forma periódica. Supõe-se que ela é não apenas "contínua pedaço por pedaço", mas "contínua e regular pedaço por pedaço", isto é, tanto a função como a sua derivada primeira são "contínuas pedaço por pedaço", ou, ainda, por outras palavras: a função e a sua derivada primeira são contínuas salvo num número limitado de pontos do intervalo, podendo tais pontos ser os extremos do intervalo. Estas condições são designadas também por condições de Dirichlet. A última hipótese que fazemos sôbre $f(x)$ é a seguinte: nos pontos em que $f(x)$ é descontínua, toma-se para valor de $f(x)$ a expressão

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Então tem lugar o teorema seguinte: nas condições das hipóteses, a série de Fourier correspondente à função $f(x)$ é convergente em cada ponto e representa a função $f(x)$.

Para fazermos a demonstração, consideremos a soma parcial

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x).$$

Tendo em vista os valores de $\underline{a_\nu}$ e de $\underline{b_\nu}$, podemos escrever

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos \nu t \cos \nu x\,dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \operatorname{sen} \nu t \operatorname{sen} \nu x\,dt,$$

ou seja

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \nu t \cos \nu x + \operatorname{sen} \nu t \operatorname{sen} \nu x)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu (t-x)\right\} dt.$$

A fórmula demonstrada no § 44, que dá uma soma de cosenos de arcos em progressão aritmética, permite escrever

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Fazendo aqui a transformação $t - x = \tau$, vem

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(\pi+x)}^{\pi-x} f(x+\tau)\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}}\,d\tau.$$

O integrando é uma função periódica de período 2π, de sorte que o valor do integral pode obter-se deslocando o intervalo de integração de $+x$, para a direita. Vem, assim,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+\tau)\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}}\,d\tau.$$

Para tratarmos êste integral e vêr qual é o seu limite quando $\underline{n}$ tende para o infinito, vamos demonstrar dois lemas.

Lema 1.º – Seja $s(x)$ uma função "contínua pedaço por pedaço" no intervalo fechado $(a \leq x \leq b)$. Então o integral $J = \int_a^b s(t) \operatorname{sen} \lambda t\,dt$ tende para zero quando λ aumenta indefinidamente.

Como há um número limitado de descontinuidades, podemos supôr a função contínua em todo o intervalo (a, b), pois, não o sendo, podemos tratar cada intervalo parcial em que o é. Quanto aos valores da função nos extremos de cada intervalo parcial (que em nada alteram o valor do integral se se modificam), podemos supor que são valores limites do tipo $f(x-0)$, $f(x+0)$.

Se $\underline{\lambda}$ é positivo, a função $\underline{\operatorname{sen} \lambda t}$ muda de sinal percorrido que seja o

-tervalo $\frac{\pi}{\lambda} = h$, de sorte que, se λ se supõe suficientemente grande, como $s(t)$ é uma função contínua, os valores do integral $\int s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt$ em dois intervalos vizinhos é pouco diferente de zero. Pondo em J, $t = \tau + h$, vem

$$J = -\int_{a-h}^{b-h} s(\tau + h) \operatorname{sen} \lambda \tau \, d\tau = -\int_{a-h}^{b-h} s(t+h) \operatorname{sen} \lambda t \, dt.$$

Por soma com a expressão anterior de J, tem-se

$$2J = -\int_{a-h}^{a} s(t+h) \operatorname{sen} \lambda t \, dt \text{ [illegible] } \int_{a}^{b-h} s(t+h) \operatorname{sen} \lambda t \, dt + \int_{a}^{b-h} s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt +$$

$$+ \int_{b-h}^{b} s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt =$$

$$= -\int_{a-h}^{a} s(t+h) \operatorname{sen} \lambda t \, dt + \int_{a}^{b-h} [s(t) - s(t+h)] \operatorname{sen} \lambda t \, dt + \int_{b-h}^{b} s(t) \operatorname{sen} \lambda t \, dt.$$

Seja $\underline{M}$ um limite superior do valor absoluto de $s(x)$ no intervalo considerado. Então, sendo $|s(x)| \leq M$, tem-se

$$2|J| \leq 2Mh + \int_{a}^{b-h} |s(t) - s(t+h)| \, dt.$$

Seja $\underline{\varepsilon}$ um número positivo dado. Escolhamos $\underline{\lambda}$ suficientemente grande para que, no intervalo $a \leq t \leq b-h$, seja $|s(t) - s(t+h)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$; então

$$2|J| \leq 2Mh + \varepsilon \frac{b-h-a}{b-a}.$$

Se λ é ainda suficientemente grande para que $Mh = \frac{M\pi}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$, tem-se

$$|J| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, como se queria provar, $\lim_{\lambda \to \infty} J = 0$, visto que $\underline{\varepsilon}$ se pode escolher tão pequeno quanto se queira.

<u>Lema 2º</u> <u>Seja $\underline{a} > 0$ um número positivo qualquer. O integral $\int_0^a \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} dt$, quando λ aumenta indefinidamente, tende para $\frac{\pi}{2}$.</u>

Se fazemos no integral a mudança de variável $\tau = \lambda t$, vem

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} dt = \int_0^{a\lambda} \lambda \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} \frac{d\tau}{\lambda} = \int_0^{a\lambda} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} d\tau.$$

Ora se $\underline{a}$ é fixo e positivo, quando $\underline{\lambda}$ aumenta indefinidamente, o integral do último ~~2º~~ membro converge para $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} d\tau$. Assim se reconhece que o integral proposto tende para um limite e que êsse limite não depende de $\underline{a}$.

Que, de facto, $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau} d\tau$, conhecido sob o nome de <u>integral de Dirichlet</u> converge, podemos vêr do modo seguinte:

Ponhamos
$$D_{AB}=\int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Então
$$D_{AB}=\int_A^{A+\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx+\int_{A+\pi}^{B+\pi}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt-\int_B^{B+\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=$$
$$=\int_A^{A+\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx-\int_B^{B+\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx-\int_A^B\frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx,$$

pelo que
$$2D_{AB}=\int_A^{A+\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx-\int_B^{B+\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx+\pi\int_A^B\frac{\operatorname{sen} x}{x(x+\pi)}\,dx.$$

Se supômos $B>A$, reconhece-se que
$$2\,|D_{AB}|<\frac{2\pi}{A}+\pi\int_A^B\frac{dx}{x^2}.$$

Quando $\underline{A}$ e $\underline{B}$ aumentam indefinidamente o segundo membro desta desigualdade tende para zero. Ora ~~de~~ condição necessária e suficiente para que $\int_0^A \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}d\tau$ tende para um limite, quando A aumenta indefinidamente, que $\int_A^B \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}d\tau = D_{AB}$ tenda para zero quando A e B aumentam indefinidamente, independentemente um do outro.

Provado, assim, que o integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}d\tau$ existe, vamos provar, duma maneira precisa, que o seu valor é $\frac{\pi}{2}$.

Notemos, para isso, que o lema 1.º dá, se $a<2\pi$,
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^a \operatorname{sen}\lambda t\cdot\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right)dt=0.$$

De facto, o factor $\frac{1}{t}-\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ no ponto zero não deixa de ser contínuo. Temos, nesse ponto,
$$\frac{1}{t}-\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}-t}{2t\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{t}{2}}{t\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\cos\frac{t}{2}}=\frac{-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{4}t\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=$$
$$=0.$$

Se pomos, no integral anterior, $a=\pi$, vem
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Se pomos aqui $\lambda=n+\frac{1}{2}$ e fazemos tender $\underline{n}$, por valores inteiros, para ∞, temos de estudar o integral
$$\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos\nu t\right)dt=\frac{\pi}{2}$$

Fica, pois, provado que
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$
E como o limite não depende do índice superior, fica provado que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t} = \frac{\pi}{2} = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Estamos agora em condições de provar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = f(x).$$

Ponhamos $s(t) = \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$. No intervalo $0 \leq t \leq \pi$, se x é fixo, esta função $s(t)$ é contínua pedaço por pedaço. Sem dúvida que isso sucede, em virtude das hipóteses sôbre $f(x)$, no intervalo aberto $0 < t \leq \pi$. No ponto $t = 0$, tem-se

$$\lim_{0<t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = \lim \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}.$$

Ora o primeiro membro destas igualdades existe, por hipótese. Logo existe o último.

Assim

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi s(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x+0)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\lambda t\,dt,$$

quando $\lambda = n+\frac{1}{2}$ aumenta indefinidamente, tende para zero. Assim

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}dt = \lim \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \lim\frac{f(x+0)}{\pi}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{f(x+0)}{\pi} =$$

$$= \frac{f(x+0)}{2}.$$

Demonstra-se analogamente, ou pode-se ver pela mudança de variável $t = -\tau$ no integral anterior, que é

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{f(x-0)}{2}.$$

Por adição com o resultado anterior, tem-se

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = f(x),$$

como se queria provar.

Feita esta demonstração, vamos analisar melhor a convergência da série de Fourier.

48) Investigação mais exacta da convergência – Na vizinhança dos pontos em que a função $f(x)$ é descontínua, a série de Fourier, que converge até aos pontos de descontinuidade, converge, mas não uniformemente. De facto, se a convergência fôsse uniforme a soma da série (cujos termos são funções contínuas) seria uma função contínua. Mas vale o seguinte importante teorema: a convergência da série de Fourier deduzida, nas condições anteriores, duma função $f(x)$, é uniforme em todo o intervalo fechado que não contenha ponto de descontinuidade de $f(x)$.

Para fazermos a demonstração, partimos duma desigualdade fundamental à qual satisfazem os coeficientes de Fourier duma função $f(x)$, bastando supôr para esta função que ela é contínua "pedaço por pedaço", sem nada se dizer da sua derivada. Essa desigualdade, chamada da Desigualdade de Bessel, é a seguinte:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx \geqq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2+b_\nu^2), \qquad (1)$$

qualquer que seja n. Com efeito, tem-se

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \operatorname{sen}\nu x) \right\}^2 dx \geqq 0. \qquad (2)$$

Se tivermos as relações de ortogonalidade das funções trigonométricas

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n, \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

o desenvolvimento do primeiro membro da desigualdade (2) dá

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\, dx + \frac{a_0^2}{4}\cdot 2\pi + \sum_{\nu=1}^{n} \pi(a_\nu^2+b_\nu^2) - a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} \pi(a_\nu^2+b_\nu^2) \geqq 0,$$

ou seja

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\, dx - \sum_{\nu=1}^{n} \pi(a_\nu^2+b_\nu^2) - \frac{\pi}{2} a_0^2 \geqq 0,$$

donde se tira imediatamente a desigualdade de Bessel (1).

Na demonstração usaremos ainda uma outra relação, mas de natureza algébrica, conhecida sob o nome de desigualdade de Schwarz. É a seguinte: se fôrem $u_1, u_2, \dots, u_n$ e $v_1, v_2, \dots, v_n$ dois sistemas de números reais quaisquer, vale

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2, \qquad (3)$$

tendo a igualdade lugar apenas quando os números v_ν são proporcionais aos números u_ν. Com efeito tem-se

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \cdot \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu^2 - \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \geqq 0, \qquad (4)$$

valendo o sinal = apenas quando cada um dos binómios $a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu$ é nulo, ou seja quando os a_ν são proporcionais aos b_ν. A desigualdade (3) fica, pois, demonstrada, como consequência de (4). Relativamente a esta última, vê-se, na verdade, que se tem a igualdade

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu\right)^2 = \sum_{\mu,\nu} a_\nu^2 b_\mu^2 + \sum_{\mu,\nu} a_\mu^2 b_\nu^2 - 2\sum_{\mu,\nu} a_\nu a_\mu b_\nu b_\mu =$$

$$= \sum_\mu b_\mu^2 \cdot \sum_\nu a_\nu^2 + \sum_\mu a_\mu^2 \cdot \sum_\nu b_\nu^2 - 2\sum_\mu a_\mu b_\mu \cdot \sum_\nu a_\nu b_\nu ,$$

da qual (4) é consequência imediata.

Se a função $f(x)$ do teorema a demonstrar (com derivada contínua pedaço por pedaço) se supõe contínua em todos os pontos, o teorema enuncia-se que a convergência é uniforme em todo o intervalo fechado. Consideremos então, na verdade, ao lado de $f(x)$, a função $g(x) = f'(x)$, e procuremos os coeficientes de Fourier, $\underline{c_\nu}$ e $\underline{d_\nu}$, desta função $g(x)$. É

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\right)_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{\pi}\left(f(+\pi) - f(-\pi)\right) = 0,$$

pois que a função periódica $f(x)$ se supõe contínua.

Quanto a $\underline{c_\nu}$, tem-se

$$c_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\cos\nu x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos\nu x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos\nu x\right)_{-\pi}^{+\pi} + \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\nu x\,dx =$$

$$= \nu b_\nu ,$$

verificando-se analogamente que é

$$d_\nu = -\nu a_\nu .$$

Aplicando a desigualdade de Bessel à função $g(x)$, tem-se

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g^2(x)\,dx \geq \sum_{\nu=1}^{n}\left(c_\nu^2 + d_\nu^2\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2\left(a_\nu^2 + b_\nu^2\right).$$

Seja agora $m > n$. Tem-se

$$\sum_{\nu=n+1}^{m}\left|a_\nu\cos\nu x + b_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu x\right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{m}\left(|a_\nu| + |b_\nu|\right) = \sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu}\left(\nu|a_\nu| + \nu|b_\nu|\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu^2}} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^2\left(a_\nu^2 + b_\nu^2 + 2|a_\nu||b_\nu|\right)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu^2}} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^2\left(2a_\nu^2 + 2b_\nu^2\right)} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu^2}} .$$

Como a série $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ é convergente e o último membro das desigualdades anteriores é independente de $\underline{x}$, vê-se que, dado $\underline{\varepsilon}$, podemos escolher $\underline{n}$ suficientemente grande para que, sendo $m > n$, seja o referido último membro inferior a $\underline{\varepsilon}$, de sorte que $\sum_{\nu=n+1}^{m}\left|a_\nu\cos\nu x + b_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu x\right| < \varepsilon$, qualquer que seja x, para os referidos valores de $\underline{m}$ e de $\underline{n}$, o que prova a convergência uniforme.

A demonstração anterior cessa de aplicar-se quando a função $f(x)$

<u>§ 48 (Continuação)</u> - tem descontinuidades. Nêsse caso, com efeito, não são válidas as relações entre os coeficientes $\underline{c_\nu}$ e $\underline{d_\nu}$ e os coeficientes $\underline{a_\nu}$ e $\underline{b_\nu}$.

A demonstração do teorema enunciado faz-se por partes. Demonstra-se, primeiramente, para uma função especial $\psi(x)$. Seja $\psi(x) = x$ no intervalo aberto $-\pi < x < +\pi$, e continuada periòdicamente fora dêsse intervalo. A série de Fourier correspondente, converge nos pontos $-\pi$ e $+\pi$, pontos nos quais toma o valor $\frac{-\pi+\pi}{2} = 0$, não havendo, pois, necessidade de considerar $\psi(x) = x$ no intervalo fechado, visto que os extremos seriam descontínuos, e os valores de $\psi(x)$ seriam, como se disse, impostos à função.

Para $\psi(x)$ é

$$\psi(x) = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots\right). \qquad (A)$$

Como anteriormente se disse, esta série não pode convergir uniformemente no intervalo fechado $(-\pi, +\pi)$. Mas se fôr $0 < l < \pi$, vamos mostrar que converge uniformemente no intervalo fechado $(-l, +l)$.

Seguindo sempre (como se tem feito e se fará nêste estudo das séries de Fourier) o livro de <u>Courant</u> (Differential- und Integralrechnung, I, pgs. 376 e seguintes), introduziremos, para a demonstração, uma imagem artificial. A função $\cos\frac{x}{2}$, no intervalo fechado $(-l, +l)$, é sempre superior a $\cos\frac{l}{2} = \kappa$. Ora, para a série supra, tem-se (supondo $m > n$)

$$|\, S_m(x) - S_n(x) \,| = 2 \left| \frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n+2)x}{n+2} + \cdots \pm \frac{\operatorname{sen} mx}{m} \right|.$$

Mas é

$$\cos\frac{x}{2}\left[S_m(x) - S_n(x)\right] = 2\cos\frac{x}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{n+1} - \cdots \pm \frac{\operatorname{sen} mx}{m}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{n+2} + \cdots \pm \frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{m}$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{n+2} + \cdots \pm \frac{\operatorname{sen}\left(m-\frac{1}{2}\right)x}{m} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1} \pm \frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{m} + \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{(n+2)(n+3)} + \cdots \mp \frac{\operatorname{sen}\left(m-\frac{1}{2}\right)x}{(m-1)\,m},$$

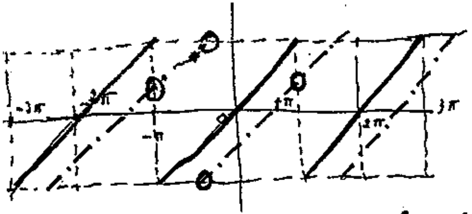
e, por conseqüência,

$$|\, S_m(x) - S_n(x) \,| = \frac{\left|\cos\frac{x}{2}\right| \, |\, S_m(x) - S_n(x) \,|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)\,m}\right],$$

visto que, no intervalo fechado $(-l, +l)$ é $\left|\cos\frac{x}{2}\right| \geq \kappa$.

Visto que a série $\sum\limits_{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ é convergente, podemos, dado ε tão pequeno quanto se queira, encontrar $\underline{N}$ suficientemente grande, para que $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $\underline{x}$ do intervalo considerado, desde que $m > n > N$.

Mas isto significa que a série (A) é uniformemente convergente no intervalo considerado, fechado, $(-l,+l)$, como se queria provar, para êste caso particular.



Posto isto, notemos que a função $\psi(x)$ considerada se encontra representada na figura por linhas cheias. A função representada a traço e ponto, se a distância entre duas paralelas (a traço cheio e a traço e ponto) fôr ζ, é a função $x-\zeta$, pois esta função anula-se, na verdade, no ponto $x=\zeta$ e toma nos pontos $\pi+\zeta$ e $-\pi+\zeta$ os mesmos valores que x toma nos pontos $-\pi$ e $+\pi$. No intervalo de extensão igual a 2π, que vai de $-\pi+\zeta$ a $\pi+\zeta$, conhecemos a função $\psi(x-\zeta)=x-\zeta$. Esta função imagina-se, depois, prolongada analiticamente de forma periódica. Em particular, no intervalo $(-\pi,+\pi)$, vê-se, na figura, qual a parte do gráfico que representa a função. Os pontos $(-\pi,+\pi)$ são pontos de continuidade, sendo os pontos de descontinuidade os pontos $-\pi+\zeta$ e $\pi+\zeta$, e, duma maneira geral, os pontos $(2k+1)\pi+\zeta$, em que k é um número inteiro qualquer, positivo ou negativo.

É evidente que a função $\psi(x-\zeta)$ é representada pela série

$$\psi(x-\zeta)=2\left(\frac{\operatorname{sen}(x-\zeta)}{1}-\frac{\operatorname{sen}2(x-\zeta)}{2}+\frac{\operatorname{sen}3(x-\zeta)}{3}-\dots\right),$$

mas não deve esquecer-se que nos pontos de descontinuidade o valor dado pela série é igual a zero, devendo ser êsse o valor que se atribuirá a $\psi(x)$. Em particular, no intervalo $(-\pi, +\pi)$, no qual $\psi(x-\zeta)$ é representada pelos pedaços de recta compreendida entre os sinais ⊙, o ponto em que $\psi(x-\zeta)$ é igual a zero é o ponto $(-\pi+\zeta)$, sendo $\psi(x-\zeta)=+\pi$ no ponto $(-\pi+\zeta-0)$, e $\psi(x-\zeta)=-\pi$ no ponto $(-\pi+\zeta+0)$, isto é, sendo

$$\psi(-\pi+\zeta-\zeta)=\frac{\psi(-\pi+\zeta-0-\zeta)+\psi(-\pi+\zeta+0-\zeta)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

Seja agora $f(x)$ uma função qualquer contínua "pedaço por pedaço" no intervalo $(-\pi\leq x\leq+\pi)$, no qual admite derivada primeira contínua "pedaço por pedaço". Se a função $f(x)$ admite, no referido intervalo, como pontos de descontinuidade os pontos $\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_m$, e se a função sofre neles os saltos $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_m$, quando nos deslocamos da esquerda para a direita, então a função

$$f(x) - \frac{\delta_1}{2\pi}\psi(x-\pi-\xi_1) - \frac{\delta_2}{2\pi}\psi(x-\pi-\xi_2) - \cdots - \frac{\delta_m}{2\pi}\psi(x-\pi-\xi_m),$$

é uma função contínua que se desenvolve, por consequência (dão-se as restantes condições de Dirichlet), em série de Fourier uniformemente convergente em todo o intervalo. Pondo, depois

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{2\pi}\psi(x-\pi-\xi_i) + \text{série de Fourier encontrada},$$

vem a série correspondente a $f(x)$ uniformemente convergente em todo o intervalo que não contenha os ξ_i, pois assim o exigem as funções $\psi(x-\pi-\xi_i)$.

O estudo das séries de Fourier foi levado já muito por deante. As condições impostas são condições suficientes, mas não necessárias. Assim, podem encontrar-se séries de Fourier representando funções com outros tipos de descontinuidade. Observemos também que a simples continuidade da função não basta para o desenvolvimento em série de Fourier, como se reconhece sabendo que há funções contínuas que originam séries de Fourier que não convergem em qualquer intervalo, por mais pequeno que seja.

49) A aproximação média por polinómios trigonométricos. — Os diferentes métodos de representação duma função, quando tal representação é obtida pelo emprêgo de séries (inteiras, ou de Fourier, ou outras), têem um significado comum. Significa que se dispõe dum processo segundo o qual, pelo emprêgo dum número finito de operações, é possível encontrar, em cada ponto, uma quantidade que se aproxima do valor da função nêsse ponto tanto quanto nós quizermos. E, se a série é uniformemente convergente, é possível, mesmo, dada a quantidade ε, encontrar uma expressão que substitui em todos os pontos a referida função, diferindo desta de menos de ε.

Trata-se, assim, na verdade, de métodos de aproximação de funções. Os problema da interpolação parabólica ou da interpolação periódica são diferentes, pois, então, a expressão aproximada que se encontra toma, num número finito de pontos, os mesmos valores que a função dada, enquanto, nos outros pontos, não está em qualquer relação de grandeza com a referida função.

Propomo-nos aqui estudar mais em detalhe a aproximação duma função pela sua série de Fourier. Para isso, propomo-nos o problema seguinte: de entre todos os polinómios trigonométricos de grau n

$$s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

trata-se de encontrar aquele para o qual a expressão

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{f(x)-s_n(x)\}^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{ f^2(x) - \alpha_0 f(x) - 2\sum_{\nu=1}^{n} f(x)(\alpha_\nu \cos\nu x+\beta_\nu \operatorname{sen}\nu x) + \left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu \operatorname{sen}\nu x)\right)^2\right\}dx,$$

tem o valor mínimo. O valor da expressão Δ, que se refere à expressão [illegible] $s_n(x)$ no seu conjunto e não ao valor de $s_n(x)$ num ponto determinado, diz-se "erro médio quadrático". Desta maneira, o problema pode enunciar-se dizendo que se procura encontrar a melhor "aproximação em média" da função $f(x)$. E esta designação justifica-se pelo facto de que é o integral "no conjunto" que se torna mínimo, não se excluindo, porém, que não haja grandes desvios do polinómio $s_n(x)$ relativamente à função $f(x)$, em pontos em número finito (e até infinito em determinadas circunstâncias), do intervalo $(-\pi,+\pi)$. Ora

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx - \alpha_0\pi a_0 - 2\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu a_\nu+\beta_\nu b_\nu) + \frac{\pi\alpha_0^2}{2}+\pi\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx + \pi\left[\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{\nu=1}^{n}\left((\alpha_\nu-a_\nu)^2+(\beta_\nu-b_\nu)^2\right)\right] - \pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\right]\right\}$$

Se tivermos em vista que a_0, a_ν, b_ν são números fixos, independentes dos α_ν, β_ν, a procurar, vê-se que o mínimo de Δ tem lugar quando

$$\alpha_0 = a_0\,, \quad \alpha_\nu = a_\nu, \quad \beta_\nu = b_\nu.$$

Conclui-se assim que, dada uma função $f(x)$ qualquer integrável, de quadrado integrável, o polinómio trigonométrico

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu \operatorname{sen}\nu x),$$

onde os $\underline{a_\nu, b_\nu}$ são os coeficientes de Fourier relativos à função proposta $f(x)$, é o polinómio que fornece a melhor aproximação média de $f(x)$, no intervalo $(-\pi,+\pi)$.

O valor do "erro médio quadrático correspondente" é

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\right)\right\}$$

É importante observar que, desejando-se aumentar o grau de aproximação em média, por modificação de $\underline{n}$ (que se aumentará), os coeficientes a_ν, b_ν, já anteriormente encontrados, são mantidos, havendo unicamente que determinar os coeficientes que, de novo, comparecem.

Do facto de ser $\Delta \geq 0$, conclui-se, como já se viu anteriormente, com um número mínimo de hipóteses quanto à função $f(x)$, a desigualdade de <u>Bessel</u>

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2), \text{ e também } \frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx.$$

Passemos, porém, ao caso mais restrito, no qual a função $f(x)$ se supõe susceptível de desenvolvimento em série de Fourier, com convergência uniforme. Então o valor de Δ ~~[illegible]~~ tende para zero, quando n aumenta indefinidamente, como resulta de tender uniformemente para zero o integrando $\{f(x)-S_n(x)\}^2$, que figura em Δ.

Então, quando n aumenta indefinidamente, a diferença

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx - \left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\right\},$$

entre a quantidade fixa representada pelo integral e a quantidade que depende de n, tende para zero. Isto significa que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx.$$

Tem-se, assim, para as funções susceptíveis de desenvolvimento de Fourier,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx. \qquad (\theta)$$

Esta igualdade fica, pois, demonstrada para funções contínuas "pedaço por pedaço" no intervalo $(-\pi, +\pi)$, desde que tenham derivada contínua "pedaço por pedaço", no mesmo intervalo.

A importante relação anterior (θ) será objecto de estudo mais profundo, dentro em breve. Veremos como pode estender-se a funções contínuas "pedaço por pedaço", sem ser necessário fazer hipóteses quanto à derivada. Diz-se "<u>relação característica de base</u>" das funções trigonométricas.

A esta relação característica de base pode dar-se ainda uma forma mais geral. Sejam, com efeito, $f(x)$, $\varphi(x)$ duas funções susceptíveis de desenvolvimento em série de Fourier uniformemente convergente, e designemos com (a_ν, b_ν) e (α_ν, β_ν) os respectivos coeficientes. Então a função $f(x)+\varphi(x)$ tem também um desenvolvimento de Fourier, pelo que será

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f(x)+\varphi(x)\right]^2 dx = \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(a_\nu+\alpha_\nu)^2+(b_\nu+\beta_\nu)^2\right],$$

vindo também

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^2(x)\,dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2).$$

Das três relações tira-se

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu\alpha_\nu + b_\nu\beta_\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

É esta a "relação característica de base", sob forma generalizada, para as funções trigonométricas.

Capítulo VI

Desenvolvimentos em séries de funções dadas

50) Generalidades - Até aqui tratámos de séries inteiras e de séries de funções trigonométricas (senos e cosenos). Agora vamos colocar-nos num ponto de vista muito mais geral. Nos termos das séries figurarão funções escolhidas (de forma arbitrária), ou, melhor, funções que apenas obedecerão a condições muito gerais.

O problema ataca-se por um processo semelhante ao usado em cálculo vectorial. Num certo domínio G, ou domínio fundamental, são dadas as funções escolhidas que constituirão o "sistema base". Trata-se de, dada uma função qualquer, representar esta função por meio duma combinação linear das funções escolhidas.

Tanto as funções base como as funções a desenvolver serão supostas contínuas "pedaço por pedaço". E, embora comecemos por desenvolver os cálculos com uma única variável, será fácil ver como os mesmos poderão estender-se aos casos em que o número de variáveis independentes é qualquer. Em todos os casos é fácil ver o que se entende por função contínua "pedaço por pedaço". Em todos os pontos de descontinuidade (os quais, no caso de duas variáveis x e y, por ex., estarão sobre curvas que dividirão o domínio fundamental num número finito de domínios parciais), se supõe haver limite para as funções que se consideram, quando dos mesmos nos aproximamos vindo do interior do domínio.

51) Sistemas de funções ortogonais - Dadas duas funções f(x) e g(x) no domínio fundamental, diz-se produto interior das duas funções e representa-se com (f, g)

o integral
$$(f,g)=\int f(x)g(x)dx.$$

A desigualdade de Schwarz para as duas funções é
$$\left(\int f\cdot g\,dx\right)^2=(f,g)^2\leqq(f,f)(g,g).$$
Demonstra-se, por exemplo, vendo que (onde λ é um parâmetro constante)
$$\int(\lambda f+g)^2dx=\lambda^2(f,f)+2\lambda(f,g)+(g,g)\geqq 0;$$
O discriminante da forma quadrática em λ deve ser negativo ou nulo, isto é tem-se
$$(f,g)^2-(f,f)(g,g)\leqq 0.$$
Se as funções f e g não são simultaneamente nulas, o sinal $=$ na expressão $\int(\lambda f+g)^2dx\geqq$ só pode ter lugar se fôr $\lambda f+g=0$, isto é, se as duas funções forem proporcionais.

Duas funções dizem-se ortogonais se o seu produto interior é nulo. A expressão
$$Nf=(f,f)=\int f^2(x)\,dx$$
diz-se norma da função. Quando a norma é igual à unidade a função diz-se normalizada.

Dado um sistema de funções $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, em número finito ou infinito, diz-se que êste sistema é um sistema ortogonal de funções normalizadas se todas as funções $\varphi_i(x)$ são normalizadas e se, quando $i\neq j$, fôr $(\varphi_i,\varphi_j)=0$.

Se o domínio de integração é o intervalo $0\leqq x\leqq 2\pi$, ou o intervalo $(-\pi,+\pi)$, ou, duma maneira geral, um intervalo qualquer de extensão 2π, as funções
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\dots$$
$$\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}},\dots$$
constituem um sistema ortogonal normalizado, como sabemos. Quando se escreve, como também se viu, o desenvolvimento de Fourier sob a forma
$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\alpha_\nu e^{i\nu x},\qquad \text{com } \alpha_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)e^{-i\nu t}dt,$$
as funções
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}},\dots \qquad (1)$$
$$\frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}},\dots$$
diz-se que constituem, igualmente, um sistema de funções ortogonais normalizadas (no intervalo $-\pi\leqq x\leqq+\pi$). A noção anterior, com efeito, estende-se às funções complexas de variável real. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções complexas de variável real, representaremos com $\bar f(x)$ e $\bar g(x)$ as funções complexas conjugadas correspondentes. Então, o produto

interior é representado por $(f, \bar{g})$ e é dado por

$$(f, \bar{g}) = \int f(x)\bar{g}(x)\,dx.$$

A ortogonalidade exige $(f, \bar{g}) = 0$ e a normalização $(f, \bar{f}) = 1$.

Nessas condições, verifiquemos que as funções (1) são ortogonais e normalizadas. Tem-se, por ex., supondo $\mu \neq \nu$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-i\mu x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\mu x}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\mu x} e^{-i\nu x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i(\mu-\nu)x}}{i(\mu-\nu)}\right)_{-\pi}^{+\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i(\mu-\nu)}\left(\begin{array}{l}\cos\pi(\mu-\nu) + i\,\mathrm{sen}\,\pi(\mu-\nu) - \cos(\mu-\nu)\pi + \\ + i\,\mathrm{sen}(\mu-\nu)\pi\end{array}\right) = 0,$$

como se precisa.

Um sistema de $\underline{r}$ funções $f_1, f_2, \dots, f_r$, diz-se de <u>funções</u> linearmente <u>independentes</u>, se a relação $\sum_{i=1}^{r} c_i f_i = 0$ exigir $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$. (Como exemplo de tais funções, consideremos $\underline{r}$ funções normalizadas ortogonais $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ e suponhamos

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_r\varphi_r = 0.$$

Então multiplicando por φ_1 e integrando no domínio fundamental, vem

$$c_1\int\varphi_1\varphi_1\,dx + c_2\int\varphi_2\varphi_1\,dx + \dots = 0, \text{ donde } c_1 = 0.$$

Do mesmo modo se demonstra que $c_2 = c_3 = \dots = c_r = 0$.

52) Construção de sistemas ortogonais

— Sejam as funções $u_1, u_2, \dots$ dadas no domínio fundamental. Suponhamo-las em número finito ou infinito, mas linearmente independentes. No caso de serem em número infinito, isso significa que um grupo de $\underline{r}$ funções, qualquer que seja $\underline{r}$, e quaisquer que sejam as funções escolhidas, é de funções linearmente independentes.

Nestas condições, é fácil extrair do sistema dos $\underline{u_i}$ um conjunto de funções $\underline{v_i}$ ortogonais e normalizadas, funções lineares dos $\underline{u_i}$.

Comecemos por tomar $v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{Nu_1}}$; $\underline{v_1}$ está, de facto, normalizada; em seguida, tomemos

$$v_2' = c_1 v_1 + c_2 u_2,$$

e determinemos $\underline{c_1}$ e $\underline{c_2}$ por forma que $(v_2', v_1) = 0$. Quaisquer que sejam $\underline{c_1}$ e $\underline{c_2}$, não pode ser $c_1 v_1 + c_2 u_2 \equiv 0$. Então sendo

$$(v_2', v_1) = c_1(v_1, v_1) + c_2(u_2, v_1) = c_1 + c_2(u_2, v_1),$$

a exigência

$$c_1 + c_2(u_2, v_1) = 0$$

pode satisfazer-se com uma solução nula para $\underline{c_1}$ e $\underline{c_2}$. Encontrada assim

$v_2' \neq 0$, a função $v_2 = \frac{v_2'}{\sqrt{N v_2'}}$ é igualmente ortogonal a v_1 e fica normalizada.

O processo continua-se. Põe-se

$$v_3' = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 u_3 ,$$

e determinam-se os coeficientes c_1, c_2, c_3 (não todos nulos), por forma que seja

$$(v_3', v_1) = c_1 + c_2 (v_2, v_1) + c_3 (u_3, v_1) = 0 = c_1 + c_3 (u_3, v_1) ,$$

$$(v_3', v_2) = c_1 (v_1, v_2) + c_2 + c_3 (u_3, v_2) = 0 = c_2 + c_3 (u_3, v_2) .$$

Em seguida normaliza-se v_3', pondo

$$v_3 = \frac{v_3'}{\sqrt{N v_3'}} , \text{ etc.}$$

O processo indicado dá, por exemplo,

$$v_1' = c_1 u_1 , \quad v_1 = \frac{v_1'}{\sqrt{N v_1'}} , \qquad (c_1 = 1)$$

$$v_2' = c_2 \left(u_2 - (u_2, v_1) v_1 \right) , \quad v_2 = \frac{v_2'}{\sqrt{N v_2'}} , \qquad (c_2 = 1)$$

$$v_3' = c_3 \left(u_3 - (u_3, v_2) v_2 - (u_3, v_1) v_1 \right) , \; v_3 = \frac{v_3'}{\sqrt{N v_3'}} \qquad (c_3 = 1)$$

— — — — —

$$v_{n+1}' = u_{n+1} - \sum_{h=1}^{n} (u_{n+1}, v_h) v_h , \qquad v_{n+1} = \frac{v_{n+1}'}{\sqrt{N v_{n+1}'}} .$$

53) Generalização das desigualdade de Bessel, relação característica de base e aproximação em média

Dado o sistema normal e ortogonal $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, análogo ao sistema constituído pelas funções trigonométricas "base de Fourier", os números

$$c_\nu = (f, \varphi_\nu) = \int f(x) \varphi_\nu(x) \, dx$$

são os coeficientes do desenvolvimento de $f(x)$ ou as componentes de $f(x)$ segundo o sistema normal dos φ_i. A desigualdade de Bessel demonstra-se como anteriormente. Parte-se do integral

$$\int \Big(f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu \Big)^2 dx \geq 0 .$$

Tendo em vista as relações de ortogonalidade, vem

$$\int f^2(x) dx - 2 \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int f \varphi_\nu \, dx + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \geq 0 ,$$

ou seja

$$N f = \int f^2(x) dx \geq \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 ,$$

que é a desigualdade de Bessel procurada e é extensão da encontrada no § 48. Fazendo tender n para infinito, vê-se que a série $\sum c_\nu^2$ é convergente e que vale

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \leq \int f^2(x) dx .$$

Tratando-se de funções complexas de variável real, tem-se

$$\int |f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu|^2 dx = \int (f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu)(\bar f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} \bar c_\nu \bar\varphi_\nu)\,dx \geq 0,$$

ou seja

$$\int f\bar f\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} \bar c_\nu \int f\bar\varphi_\nu\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int \varphi_\nu \bar f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 \geq 0,$$

donde se tira

$$Nf - \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 \geq 0,$$

ou seja, como anteriormente,

$$Nf \geq \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2, \qquad Nf \geq \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \bar c_\nu .$$

Pode-se, como no caso dos polinómios trigonométricos, pôr a questão de encontrar os coeficientes γ_ν de tal sorte que $\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu$ difira em *média* da menor quantidade possível de $f(x)$, isto é, procurar tornar mínima a expressão do êrro médio quadrático

$$\Delta = \int (f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu)^2 dx.$$

Ora sendo

$$\Delta = \int f^2(x)dx + \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu^2 - 2\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu c_\nu = \int f^2 dx + \sum_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu - c_\nu)^2 - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2,$$

vê-se, pelo facto de serem constantes os c_ν, que o mínimo de Δ é dado precisamente quando $\gamma_\nu = c_\nu$. Assim a melhor aproximação em média de $f(x)$ é dada por

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu .$$

No caso das funções trigonométricas, viu-se que a expressão correspondente à anterior gosava da propriedade importante de tornar o integral $\int (f(x)-\Sigma c_\nu \varphi_\nu)^2 dx$ tão pequeno quanto se quizesse. Esse facto permitiu-nos chegar à relação

$$\frac{1}{\pi}\int f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2), \qquad (\alpha)$$

que designámos como relação característica de base para as funções trigonométricas. Da mesma maneira aqui, se dado o sistema $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ fôr possível, dada uma função $f(x)$ qualquer, determinar $\underline{N}$ suficientemente grande para que, quando $n \geq N$,

$$\int (f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu)^2 dx < \varepsilon, \qquad (\beta)$$

diz-se que as funções φ_i constituem uma "*base*" ou um "*sistema completo*." Temos, então, a condição necessária

$$(f,f) = Nf = \int f^2(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2. \qquad (\gamma)$$

Devemos observar que se a desigualdade (β) tem lugar para um valor de $\underline{n} = n_0$ tem lugar para os valores de $\underline{n}$ superiores a n_0. A condição (γ) é característica de base, isto é, é uma condição suficiente para que tenha lugar (β).

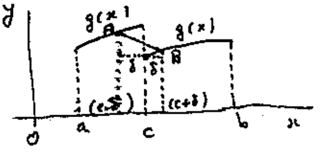
Ora a igualdade (γ) é a generalização de (α) desejada.

A relação (γ) pode, de resto, escrever-se sob a forma mais geral

$$(f,g) = \int f(x)g(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu d_\nu ,$$

onde os $\underline{d_\nu}$ são os coeficientes ou componentes relativos a $g(x)$.

A nossa relação (γ) se fôr válida para todas as funções contínuas no domínio fundamental é igualmente válida para todas as funções contínuas "pedaço por pedaço", como vamos vêr. Dada, com efeito, uma função $g(x)$ contínua "pedaço por pedaço", procuremos uma função contínua $f(x)$ tal que o integral $\int (f-g)^2 dx$ estendido ao domínio fundamental seja inferior a um número $\underline{\varepsilon}$ escolhido arbitràriamente. Se, por exemplo, o domínio fundamental é o intervalo (a,b) e se



$g(x)$ é descontínua no ponto $\underline{c}$, tomemos para função $f(x)$ uma função que é idêntica a $g(x)$ no intervalo considerado (a,b) salvo no intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ em que é substituída pelo segmento de recta $\overline{AB}$, como se indica na figura. Então

vem $\Delta = \int (f(x)-g(x))^2 dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} (f(x)-g(x))^2 dx$. Mas sendo $M \geq |g(x)|$ em todo o intervalo (a,b) é $|f(x)-g(x)| \leq 2M$, e, portanto $\Delta \leq 4M^2 \cdot 2\delta = 8M^2\delta$. Se houvesse $\underline{n}$ pontos de descontinuidade encontrar-se-ia $\Delta \leq 8M^2\delta n$. Basta, pois, escolher $\underline{\delta}$ suficientemente pequeno para que se tenha $8M^2\delta n < \varepsilon$, para ser satisfeita a condição indicada da aproximação de $g(x)$ pela função contínua $f(x)$.

Posto isto tem-se, continuando a designar com $\underline{c_\nu}$ os coeficientes relativos a $f(x)$,

$$M' = \int (g - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu)^2 dx = \int [(g-f) + (f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu)]^2 dx =$$

$$= N(g-f) + N(f - \sum_{1}^{n} c_\nu \varphi_\nu) + 2\,(g-f,\, f - \sum c_\nu \varphi_\nu),$$

e, portanto,

$$M' \leq N(g-f) + N(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu) + 2\sqrt{N(g-f) \cdot N(f - \sum c_\nu \varphi_\nu)}\,.$$

Mas sabemos que, designando com $\underline{a_\nu}$ as componentes de $g(x)$, é

$$M = \int (g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu)^2 dx \leq M' ;$$

logo

$M = \int (g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu)^2 dx$ pode tornar-se tão pequeno quanto se queira,

de sorte que $(g,g) = \int g^2 dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 ,$

como se queria provar.

57) Observação – No caso das funções trigonométricas vale a relação característica da base ou seja $\lim_{n\to\infty} \int (f - \sum_{1}^{n} c_\nu \varphi_\nu)^2 dx = 0$ e vale também o desen-nos casos da [illegible] vale a rel. caract. de base ou $\lim_{n\to\infty}\int(f-\sum^n c_\nu\varphi_\nu)^2dx=0$ vale também

volvimento $f(x)=\sum_1^\infty c_\nu\varphi_\nu$.

A demonstração repousa sôbre o facto de se tratar dum caso particular. Demonstrámos também que o desenvolvimento era uniformemente convergente em todo o intervalo que não conti-vesse pontos de descontinuidade. Para fazer essa demonstração houve a necessidade de invocar que a função $f(x)$ tinha derivada contínua "pedaço por pedaço".

Aqui diremos: Quando se sabe que o desenvolvimento $\sum_1^\infty c_\nu\varphi_\nu$ é uniformemente convergente, a série representa a função em cada intervalo em que essa convergência uniforme tem lugar. Com efeito, designemos com $F(x)$ a soma da série num tal intervalo. Tem-se, se (α,β) é um tal intervalo pertencente ao domínio fundamental,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta\Big[(f-F)+(F-\sum_1^n c_\nu\varphi_\nu)\Big]^2dx=0=\lim_{n\to\infty}\Big[\int(f-F)^2dx+\int(F-\sum_1^n c_\nu\varphi_\nu)^2dx+$$

$$+2\int(f-F)(F-\sum c_\nu\varphi_\nu)dx\Big]=$$

$$=\int(f-F)^2dx.$$ Ora a função contínua $f-F$ tem de ser identicamente nula no intervalo (α,β).

O caracter de base das funções φ_i indica que têem de ser considerados todos as funções φ_i e não pode faltar uma delas. Se faltasse a função φ_ϑ, por exemplo, não poderia valter a ter-se $\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^2=\int f^2(x)dx$. Com efeito φ_ϑ tem todas as componentes nulas, salvo a de ordem ϑ, c_ϑ. Então não poderia ser $\int\varphi_\vartheta^2dx=\sum_{\mu=1}^\infty{}' c_\mu^2$, se faltasse o ~~termo~~ correspondente a $\mu=\vartheta$.

O reconhecimento dos casos em que o sistema $\underline{\varphi_i}$ permite, pela série $\sum c_\nu\varphi_\nu$, representar a função $f(x)$ é uma questão importante que não podemos tratar aqui, a não ser em casos particulares. O que nós afirmamos é que a ~~série~~ $\sum_1^n c_\nu\varphi_\nu$ "<u>converge em média</u>" para a função $f(x)$.

5°) **<u>Determinação duma função pelas suas componentes c_ν</u>** – Embora não saibamos, dado um sistema completo φ_i, em que condições, para cada função $f(x)$ contínua "pedaço por pedaço", a soma $\sum c_\nu\varphi_\nu$ representa $f(x)$, podemos porém demonstrar que as componentes $\underline{c_\nu}$ são suficientes para caracterizar $f(x)$, no sentido seguinte: <u>se duas funções têem os mesmos c_ν são idênticas</u>. De facto a diferença $f-g$ entre as duas funções tem as componentes identicamente nulas, e, como os φ_i constituem um sistema completo, é $\int(f-g)^2dx=0$. Daqui se tira que, em cada ponto do domínio fundamental, é $f(x)=g(x)$.

56) Generalização da ideia de sistema completo - Dado um sistema de funções, necessàriamente em número infinito, diz-se que um tal sistema é completo, se, dada a quantidade positiva ε, tão pequena quanto se queira, fôr possível encontrar um valor de n suficientemente grande para que $\int (f-\sum_1^N c_\nu \varphi_\nu)^2 dx < \varepsilon$, onde $f(x)$ é uma função qual quer, φ_ν é a função ν do sistema e c_ν é uma constante apropriada. Então vê-se que, dado ε, a mesma desigualdade tem lugar quando $n \geq N$, para o que basta considerar valores nulos para as constantes c_ν, a partir de $\nu = N$.

O sistema ortogonal e normalizado que se extrai do sistema proposto, mediante o processo de ortogonalização já indicado, é, necessàriamente, um sistema completo.

57) As transformações ortogonais para variáveis em número infinito - Dado o sistema completo φ_ν, uma função qualquer $f(x)$ tem a norma

$$Nf = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 .$$

As quantidades c_ν podem interpretar-se como componentes de $f(x)$ na base dos φ_ν, como atraz se disse. $f(x)$ pode supôr-se "um vector", de sorte que a igualdade anterior dá o quadrado do comprimento do vector.

Se tomarmos outro sistema completo ψ_μ (ou outro sistema de coordenadas), trata-se de obter as novas coordenadas d_ν em função dos c_ν. Os respectivos coeficientes dependerão dos dois sistemas de coordenadas φ_ν e ψ_ν.

Teremos

$$(\varphi_i, \psi_j) = a_{ij} \qquad (j=1,2,\dots)$$

para componentes de φ_i no novo sistema. Por outro lado é

$$(f, \varphi_i) = c_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} d_k , \qquad (\alpha)$$

como se vê tendo em conta que o sistema ψ_ν é completo. As relações anteriores são as relações procuradas. As componentes a_{ik}, ou, melhor, os coeficientes a_{ik} verificam as seguintes relações de ortogonalidade

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \sum_k a_{ik} a_{jk} .$$

Inversamente, podemos referir tudo aos φ_ν. Assim será

$$(\psi_i, \varphi_j) = (\varphi_j, \psi_i) = a_{ji} ,$$

$$(f, \psi_i) = \sum_j a_{ji} c_j = d_i , \qquad (\beta)$$

$$(\psi_j, \psi_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} a_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Estes resultados, combinados com os anteriores, generalizam ao espaço hilberteano, referindo-os às bases φ_0 ou ψ_0, as conhecidas relações de ortogonalidade que têem lugar no espaço a n dimensões. A transformação (α), ou a transformação (β), diz-se uma transformação ortogonal dum número infinito de variáveis.

58) Transformações unitárias para variáveis em número infinito – Os resultados do § anterior estendem-se ao caso de bases formadas com funções complexas de variável real. Chega-se, dessa maneira, às transformações unitárias dum número infinito de variáveis.

59) Extensão a diferentes variáveis independentes – Se, por exemplo, se trata dum domínio fundamental G, a duas dimensões, todo situado a distância finita, diz-se produto interior das duas funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ a expressão

$$(f,g) = \iint_G f(xy)\, g(xy)\, dG.$$

Com esta definição estendem-se os resultados dados para uma variável.

60) Caso de domínio fundamental infinito – Se o domínio fundamental, qualquer que seja o número de variáveis independentes, se estende ao infinito, então ainda os diferentes resultados podem estender-se se as diferentes funções em causa são integráveis no domínio correspondente e os respectivos quadrados são ainda integráveis, (os integrais existem).

61) Caso em que as funções se tornam infinitas – Se as funções em causa tiverem pontos em que se tornam infinitas, no interior do ~~domínio~~ fundamental, a generalização faz-se ainda, mediante a hipótese da integrabilidade das funções e dos seus quadrados.

62) Formação de sistemas completos no caso de duas variáveis – Quando se conhecem ∞ sistemas completos duma variável indepen

dante,

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \dots \qquad (a \leq s \leq b)$$

$$\psi_{1i}(t),\ \psi_{2i}(t),\ \dots \qquad (c \leq t \leq d) \qquad (i = 1, 2 \dots)$$

as funções

$$\omega_{ik}(s\,t) = \varphi_i(s)\,\psi_{ki}(t)$$

constituem um sistema completo no rectângulo $a \leq s \leq b$, $c \leq t \leq d$, como vamos vêr.

Tem-se

$$\iint f^2(s\,t)\,ds\,dt = \int dt \int f^2(s,t)\,ds = \int dt \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int f(s\,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds \right)^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int dt \left(\int f(s\,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds \right)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \int dt \left[\psi_{\mu\nu}(t) \cdot \int f(s\,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds \right] \right\}^2 =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left[\iint f(s\,t)\,\varphi_\nu(s)\,\psi_{\mu\nu}(t)\,ds\,dt \right]^2,$$

que traduz, precisamente, o facto assinalado quanto às funções $\underline{\omega_{ik}}$.

Mas a validade da demonstração exige que a integração das séries se possa fazer, o que exige que as mesmas sejam uniformemente convergentes. Duma maneira precisa, ao escrevermos $\int f^2(s\,t)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\int f(s\,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds \right]^2$ e ao integrarmos termo a termo a série do 2.º membro em ordem a $\underline{t}$, só é válida tal operação se a série fôr uniformemente convergente. Ora isso sucede em todo o domínio fechado da variável $\underline{t}$ para o qual $f(s,t)$ é uma função contínua, em virtude do seguinte teorema de Dini: Se, num domínio fechado G, uma série de termos positivos que são funções contínuas $f_\nu(t)$ representa uma função contínua $S(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t)$, a convergência da série é necessàriamente uniforme. Com efeito, seja $S_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)$, e $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$. Se a convergência não fôsse uniforme, existiria um número $\underline{\alpha}$ e uma sucessão de números $n_1, n_2, \dots$ tendendo para infinito, assim como uma sucessão de valores $t_1, t_2, \dots$ do domínio G, tais que $R_{n_i}(t_i) \geq \alpha$. Então será $S_{n_i}(t_i) = S(t_i) - R_n(t_i) \leq S(t_i) - \alpha$. Ora os números $t_1, t_2, \dots$ têem um ou mais pontos limites, de sorte que podemos supôr apenas valores t_i da variável que tendam para um limite determinado $\underline{t}$. Seja agora $\underline{N}$ um número fixo escolhido; quando $n_i \geq N$, é (visto que se trata de funções positivas) $S_{n_i}(t_i) \geq S_N(t_i)$, e, portanto, $S_N(t_i) \leq S(t_i) - \alpha$. Quando $\underline{t_i}$ tende para o limite determinado $\underline{t}$, acima referido, $S(t_i)$, que é uma função contínua, tende para $S(t)$. No limite é $S_N(t) \leq S(t) - \alpha$, o que não pode ter lugar visto que $\underline{N}$ se pode escolher arbitràriamente independentemente de α.

63) O princípio de acumulação para as funções — A analogia que temos invocado entre as funções e vectores, dizendo que $f(x)$ é um "vector" de "componentes" $\underline{c_\nu}$ no "sistema base" $\underline{\varphi_\nu}$, cessa quando se trata de conjuntos infinitos de funções.

(63)

§ 63) **Continuação** - Consideremos, por exemplo, uma infinidade de vectores v de norma $Nv = |v|^2$ limitada; Valem os três teoremas seguintes:

1º - é possível escolher uma sucessão, na infinidade considerada, de tal sorte que os vectores dessa sucessão ~~[illegible]~~ tenham normas tendendo para uma norma determinada), ou de tal modo que os vectores dessa sucessão tendam para um vector determinado;

2º - dada uma sucessão $v_1, v_2, v_3, \dots$ de vectores, tal que $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} N(v_n - v_m) = 0$, existe um vector v tal que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$;

3º - quando, para a sucessão de vectores considerada, é $\lim\limits_{n\to\infty} Nv_n = 0$, é também $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

O primeiro teorema é consequência da existência de "pontos" limites no conjunto dos números Nv; o segundo resulte de que sendo

$$N(v_n - v_m) = (x_1^n - x_1^m)^2 + (x_2^n - x_2^m)^2 + \dots + (x_p^n - x_p^m)^2,$$

cada diferença $x_i^n - x_i^m$ tende para zero; e o terceiro resulta de que cada coordenada de v_n tende para zero.

O teoremas anteriores deixam de ser válidos no espaço funcional ou espaço de Hilbert atrás referido e que vimos estudando.

Assim, dada uma infinidade de funções contínuas $f(x)$, de norma limitada Nf, pode suceder que, quando $\underline{n}$ aumente indefinidamente, seja $\lim\limits_{n\to\infty} Nf_n = 0$, sem, todavia, ser $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$. Se tomarmos, por exemplo, como domínio fundamental o domínio $-1 \leq x \leq +1$, e, como funções $f_n(x)$, as funções

$$\begin{cases} f_n(x) = 1 - n^2x^2, & \text{se } x^2 \leq \frac{1}{n^2}, \\ f_n(x) = 0, & \text{se } x^2 \geq \frac{1}{n^2}, \end{cases}$$

vê-se que se trata de funções contínuas cuja norma tende para zero, qualquer que seja a maneira como $\underline{n}$ tende para infinito. De facto

$$Nf_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{+\frac{1}{n}} (1 + n^4x^4 - 2n^2x^2)\,dx = \left(x + n^4\frac{x^5}{5} - 2n^2\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} + n^4\frac{1}{5n^5} - 2n^2\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n} + n^4\frac{1}{5n^5} - 2n^2\frac{1}{3n^3}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{5n} - \frac{4}{3n}\right) = \frac{30 + 6 - 20}{15n} = \frac{16}{15}\cdot\frac{1}{n}.$$

Qualquer que seja o modo como $\underline{n}$ tende para o infinito, é, pois,

$$\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0,$$

enquanto que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

sendo, pois, $F(x)$ uma função descontínua e não a função identicamente nula.

Trata-se, agora, de vêr em que condições os teoremas acima enunciados para os vectores têem lugar no espaço funcional.

67) **Continuação** - Nessa ordem de ideias, de entre a totalidade das funções contínuas admissíveis, tomaremos apenas as que forem igualmente contínuas. Antes de definirmos propriamente o que se entende por funções igualmente contínuas, precisemos o sentido de nossa afirmação. Trata-se, por exemplo, de demonstrar o seguinte princípio de acumulação para as funções: dado um domínio fundamental G e um conjunto infinito de funções contínuas nesse domínio, se essas funções forem (uniformemente) limitadas (e, portanto, no caso dum domínio todo situado a distância finita, de norma limitada) e igualmente contínuas, é possível extrair da infinidade das funções uma sucessão numerável delas, $q_1(x), q_2(x), \dots$ convergindo uniformemente para uma função contínua.

Posto, desta maneira, no fio da questão, passemos à definição do igual continuidade. Dizem-se funções igualmente contínuas aquelas para as quais tem lugar o seguinte: dada a quantidade positiva ε, por mais pequena que seja, é possível fazer-lhe corresponder um número $\delta(\varepsilon)$, de tal modo que $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$, quando $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, qualquer que seja a função $f(x)$, e sendo x_1 e x_2 dois pontos quaisquer do domínio fundamental.

Exemplo de funções igualmente contínuas é-nos dado pelas funções contínuas com derivada integrável no intervalo (a, b), para as quais $\int_a^b f'^2(x)dx \leq M$, sendo M um número fixo. É o que resulta da aplicação da desigualdade de Schwarz $(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g)$ aplicada à relação $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} 1.f'(x)\,dx$.

Posto isto, passemos à demonstração do princípio de acumulação para as funções igualmente contínuas. Consideremos uma infinidade numerável de pontos de G: $x_1, x_2, \dots$, de tal sorte que cada intervalo parcial contido em G contenha uma infinidade desses pontos. Pode-se obter uma tal infinidade dividindo o intervalo fundamental (a, b) ao meio, em seguida cada intervalo parcial novamente ao meio, e assim sucessivamente. Tomemos o ponto x_1. Nesse ponto as funções tomam valores $q_1(x_1), q_2(x_1), \dots$, podendo escolher-se de entre elas a infinidade numerável $a_1(x), a_2(x), \dots$ tal que, no ponto x_1, tendam para um limite determinado. Desta nova infinidade $a_1(x), \dots$ extrai-se uma outra infinidade $b_1(x), b_2(x)$, tal que, no ponto x_2, tendam para um limite determinado. E assim sucessivamente. Dos sucessivos conjuntos de funções

$$a_1(x), a_2(x), \dots$$
$$b_1(x), b_2(x), \dots$$
$$c_1(x), c_2(x), c_3(x), \dots$$

tiremos o conjunto formado pelas funções que se encontram na diagonal:

$$q_1(x) = a_1(x), \quad q_2(x) = b_2(x), \quad q_3(x) = c_3(x), \dots .$$

Digo agora que esta última infinidade de funções satisfaz ao desejado. Tomemos um número $\varepsilon > 0$ arbitràriamente pequeno. As funções em questão são tais que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \qquad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$$

sendo $\delta(\varepsilon)$ um número correspondente a ε, por hipótese. Seja M suficientemente grande para que os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_M$, obtidos pelo processo atraz indicado, satisfaçam à seguinte condição: dado um ponto x qualquer do intervalo (a, b) existe um ponto, dos M pontos, por ex. x_h, para o qual $|x - x_h| < \delta(\varepsilon)$. Como a sucessão $q_1(x), q_2(x), \ldots$ é convergente em cada ponto x_h $(h = 1, 2, \ldots, M)$, existe um número $N(\varepsilon)$, tal que, quando $m > N(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$

$$|q_m(x_h) - q_n(x_h)| < \varepsilon,$$

para os M pontos x_h. Se fôr x um ponto qualquer, é, para um certo h,

$$|q_m(x_h) - q_m(x)| < \varepsilon, \qquad |q_n(x_h) - q_n(x)| < \varepsilon.$$

Então

$$q_n(x) - q_m(x) = q_n(x) - q_n(x_h) + q_n(x_h) - q_m(x_h) + q_m(x_h) - q_m(x),$$

de sorte que

$$|q_n(x) - q_m(x)| < 3\varepsilon,$$

se $m, n > N(\varepsilon)$. Êste resultado demonstra que $q_1(x), q_2(x), \ldots$ converge uniformemente no intervalo considerado, e a função limite é, necessàriamente, uma função contínua.

O mesmo processo de demonstração leva a concluir que, se uma infinidade numerável de funções igualmente contínuas converge para uma função dada, a convergência é necessàriamente uniforme.

Ao lado do princípio de acumulação, que acaba de ser demonstrado, figuram agora os dois teoremas seguintes, análogos aos que se enunciaram atraz para os conjuntos de vectores.

1.º – Se $f_1(x), f_2(x), \ldots$ são funções igualmente contínuas tais que $\lim_{n\to\infty} N f_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, uniformemente;

2.º – Se é $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} N(f_m - f_n) = 0$, então existe uma função contínua $f(x)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, uniformemente, se $N f_n$ é limitada.

Demonstremos o primeiro teorema. Suponhamos que, num ponto x_0, poderia não ser $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$. Então existe um número α tal que para ele se podem determinar valores de n tão grandes quanto se queira verificando a relação $f_n^2(x_0) > 2\alpha^2$. Como as funções $f_n(x)$ são igualmente contínuas, existe um intervalo de grandeza δ, contendo o ponto x_0, tal que, para as funções para as quais é $f_n^2(x_0) > 2\alpha^2$, é também, nesse intervalo $f_n^2(x) > \alpha^2$. Então será, necessàriamente, $N f_n^2(x) > \delta\alpha^2$, o que é contra a hipótese.

Quanto ao teorema segundo, façamos algumas observações.

§ 63 (Continuação) – Em primeiro lugar, trata-se de funções contínuas num intervalo fechado, e, portanto, de funções limitadas. Se supomos as normas $\underline{N f_n}$ uniformemente limitadas, também serão as funções f_n? Na verdade sucede assim para as funções igualmente contínuas.

Em resumo: dado um conjunto de funções igualmente contínuas e de normas limitadas uniformemente (o que é o mesmo que dizer que as funções do conjunto são uniformemente limitadas), têem lugar os 3 teoremas enunciados para os vectores, enunciados que tanto podem supôr que os vectores são limitados uniformemente (de módulos limitados) como que os vectores são de normas uniformemente limitadas.

64) Regularidade dum conjunto de funções igualmente contínuas

– Seja $\underline{r}$ um número inteiro e positivo, e sejam $c_1, c_2, \dots, c_r$ números reais quaisquer de valor absoluto inferior à unidade (ou a um número fixo); então, dada uma infinidade de funções igualmente contínuas, a cada valor dado à quantidade positiva $\underline{\varepsilon}$, é possível fazer corresponder um número $\delta(\varepsilon)$, tal que, para todas as funções $f_1, f_2, \dots, f_r$ para as quais é $N(c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_rf_r) < \varepsilon$ é também

$$|c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_rf_r| < \delta$$

onde $\underline{\delta}$ é um número que depende de $\underline{\varepsilon}$ e que tende para zero com $\underline{\varepsilon}$.

Êste teorema deve ser compreendido supondo que $c_1, c_2, \dots, c_r$ não são números arbitrários fixos, mas números arbitrários que se escolhem como se queira, apenas com o valor absoluto inferior ao número fixado para limite. A demonstração repousa sôbre o facto de continuar a constituir uma infinidade de funções igualmente contínuas a infinidade que se obtem juntando à infinidade dada a infinidade $c_1f_1+\dots+c_rf_r$, onde os $\underline{f_i}$ e os $\underline{c_i}$ são escolhidos nos campos que lhes foram prescritos. (Demonstração no verso).

65) Consequência do princípio de acumulação.

Sejam

$$p_{11}(x),\ p_{12}(x), \dots, p_{1r}(x)$$
$$p_{21}(x),\ p_{22}(x), \dots, p_{2r}(x)$$
$$- - - - - - -$$

sistemas de $\underline{r}$ funções. O número de sistemas supõe-se infinito e a totalidade das funções supõe-se uniformemente limitada e de funções igualmente contínuas. Vamos então provar que é possível extrair dos sistemas de funções em número infinito propostos, sistemas $p_{n_i,k}(x)$, com $\underline{n_i}$ tendendo para o infinito e $k=1,2,\dots,r$ tais que $\lim_{n_i\to\infty} p_{n_i,k}(x) = p_k(x)$,

constituindo estes últimos funções limites $p_1(x), \dots, p_n(x)$ funções contínuas para os quais os sistemas $p_{n_{i,k}}(x)$ convergem uniformemente.

Com efeito, escolhamos na primeira coluna $p_{11}(x), p_{21}(x), \dots$ funções tendendo uniformemente para um limite $p_1(x)$; em seguida consideremos apenas as linhas determinadas pelas funções assim escolhidas; depois, na segunda coluna, escolhamos, de novo, funções convergindo uniformemente para um limite $p_2(x)$; e assim sucessivamente. O teorema fica demonstrado.

66) <u>Medida da independência de r funções</u>. Dadas as r funções $f_1, f_2, f_3, \dots, f_r$ construamos a forma quadrática de r variáveis $t_1, t_2, \dots, t_r$:

$$K(t,t) = N(t_1f_1+t_2f_2+\dots+t_nf_n) = \int (t_1f_1+t_2f_2+\dots+t_rf_r)^2 dx = \sum_{i,k=1}^{n} (f_i,f_k)\, t_i t_k .$$

Designemos com $\underline{m}$ o número característico mínimo desta forma quadrática. Essa quantidade $\underline{m}$ representa o <u>mínimo</u> da função $K(t,t)$ no campo $\sum_{i=1}^{n} t_i^2$, mínimo que existe e é acessível como se sabe. Esse mínimo $\underline{m}$ dá a <u>medida de independência</u> das funções $f_1, \dots, f_r$ consideradas. Se, com efeito, as funções não fôrem independentes, existe um sistema de valores $\underline{\lambda_i}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Quando se dá aos t_i os valores $\underline{\lambda_i}$ o mínimo $\underline{m}$ é nulo. Se as funções $\underline{f_i}$ são linearmente independentes, $\underline{m}$ é, necessàriamente, diferente de zero, o que justifica que se possa tomar $\underline{m}$ como medida de independência das funções. Quando se estuda a redução duma forma quadrática a uma soma de quadrados, sabe-se que tem de ser resolvida a equação característica

$$\begin{vmatrix} (f_1,f_1)-\varkappa & (f_1,f_2) & \cdots & (f_1,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2)-\varkappa & \cdots & (f_2,f_n) \\ \hline (f_n,f_1) & (f_n,f_2) & \cdots & (f_n,f_n)-\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

As raízes desta equação são os números característicos da forma quadrática, entre os quais o número $\underline{m}$ acima referido. O produto das raízes é precisamente igual ao determinante de <u>Gram</u>

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (f_1,f_1) & \cdots & (f_1,f_n) \\ \hline (f_n,f_1) & \cdots & (f_n,f_n) \end{vmatrix}.$$

Assim, é necessário e basta para que o número $\underline{m}$ acima referido para $K(t,t)$ seja nulo, que seja nulo o determinante Γ de <u>Gram</u>.

Suponhamos agora que Γ é diferente de zero. Tem-se, designando com $\underline{M}$ o maior número característico de $K(t,t)$:

$$m^r \leq \Gamma \leq m M^{n-1},$$

o que dá outra maneira de vêr que $\Gamma = 0$, se $m = 0$, e que, sendo $\Gamma = 0$, $\underline{m}$ é também nulo.

Não esqueçamos, pois, que é condição necessária e suficiente para que as r funções $f_1, \dots, f_r$ sejam linearmente dependentes, que seja nulo o respectivo determinante de Gram.

Sejam agora $f_1, f_2, \dots, f_r$, r funções linearmente independentes e ponhamos $\phi = \sum_{i=1}^{r} u_i f_i$. Determinemos os u_i de modo que ϕ esteja normalizada; então vamos demonstrar que o valor absoluto dos coeficientes u_i é necessàriamente ~~inferior~~ igual ou inferior a $\frac{1}{\sqrt{m}}$, onde m é a medida de independência das r funções. Ponhamos, com efeito, $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum u_i^2}}$. Então

$$\int\Big(\sum_{i=1}^{r} v_i f_i\Big)^2 dx = \frac{Nf}{\sum u_i^2} \geq m,$$

em face da definição de m. E, como $Nf = 1$, vem $\frac{1}{m} \geq \sum u_i^2$, como se queria provar.

Por consequência: Dadas r funções com uma medida de independência $m > \mu > 0$, procedamos à ortogonalização dessas funções, o que levará a combinações lineares das mesmas; as diferentes combinações $\sum u_i f_i$ assim obtidas estão nas condições anteriores, pelo que $|u_i| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$ e, portanto, $|u_i| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

67) **O teorema de aproximação de Weierstrass** – O exemplo mais simples dum sistema completo de funções é dado pelas potências inteiras

$$1, x, x^2, x^3, \dots .$$

Para se demonstrar que se trata dum sistema completo, tem de provar-se que, dada uma função contínua qualquer, a todo o valor de ε se pode fazer corresponder um número $N(\varepsilon)$ tal que a norma da diferença entre a função e uma combinação linear das potências se pode tornar inferior a ε. Nós, aqui, vamos provar mais: vamos ver que toda a função contínua se deixa aproximar uniformemente por polinómios, condição que, como se vê e se sabe, arrasta imediatamente a anterior.

Seja o intervalo $a \leq x \leq b$, que supomos interior ao intervalo $(0, 1)$. Vamos demonstrar que o desenvolvimento duma função $f(x)$ em série uniformemente convergente de polinómios tem lugar no intervalo fechado considerado. Se o intervalo (a, b) não fôsse interior ao intervalo $(0, 1)$, uma mudança linear de variável levaria a êsse resultado. Por isso, nós suporemos que se tem

$$0 < \alpha < a < b < \beta < 1,$$

sendo α e β dois números escolhidos como as desigualdades indicam.

A função $f(x)$ é dada no intervalo fechado (a, b); supô-la-hemos prolongada analìticamente fora dêsse intervalo de modo que se defina no intervalo fechado (α, β), onde será contínua. Feito isso, consideremos o integral

$$J_n = \int_0^1 (1-v^2)^n dv .$$

Vale a igualdade (pondo $v = \operatorname{sen}\theta$)

$$J_n = \int_0^1 (1-v^2)^n dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen}^2\theta)^n \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta . \cos\theta\, d\theta .$$

Uma integração por partes dá

$$J_n = \left(\operatorname{sen}\theta \cos^{2n}\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta . 2n \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta) \cos^{2n-1}\theta\, d\theta =$$

$$= 2n J_{n-1} - 2n J_n ,$$

e, portanto,

$$(2n+1) J_n = 2n J_{n-1} . \quad \text{Daqui se tira sucessivamente}$$

$$(2n-1) J_{n-1} = (2n-2) J_{n-2}$$

$$- - - - - - - - -$$

$$3 J_2 = 2 J_1 = 2 \int_0^1 (1-v^2) dv = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{3} .$$

Logo é

$$J_n = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} . \frac{2}{3} .$$

Vê-se, assim, que J_n tende para zero quando n aumenta indefinidamente.

Consideremos agora o integral

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n dv ,$$

onde δ é um número fixo qualquer, compreendido entre zero e um. Vamos provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0 .$$

Temos, com efeito,

$$J_n = \int_0^1 (1-v)^n (1+v)^n dv > \int_0^1 (1-v)^n dv = \left(\frac{(1-v)^{n+1}}{n+1}\right)_1^0 = \frac{1}{n+1} ,$$

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n dv < (1-\delta^2)^n \int_\delta^1 dv = (1-\delta^2)^n (1-\delta) < (1-\delta^2)^n ,$$

$$\frac{J_n^*}{J_n} < \frac{(1-\delta^2)^n}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)(1-\delta^2)^n$$

A regra de l'Hôpital mostra agora que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)(1-\delta^2)^n = \lim \frac{n+1}{e^{-n\log(1-\delta^2)}} = \lim \frac{-1}{e^{-n\log(1-\delta^2)} \log(1-\delta^2)} =$$

$$= -\frac{1}{\log(1-\delta^2)} \lim (1-\delta^2)^n = 0 ,$$

como se queria mostrar.

Tomemos agora as expressões

$$P_n(x) = \frac{\int_\alpha^\beta f(u)\left[1-(u-x)^2\right]^n du}{\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^n du}, \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

onde a variável $\underline{x}$ se supõe pertencer ao intervalo fechado (a,b), e onde não devemos esquecer que figura uma função $f(u)$ contínua no intervalo fechado (α,β). A expressão $P_n(x)$ é um polinómio do grau $\underline{2n}$ em x, pretendendo-se provar que são os polinómios $P_n(x)$ os polinómios que aproximam uniformemente a função $f(x)$ no referido intervalo (a,b). Ora tem-se, pondo $u=v+x$,

$$I = \int_\alpha^\beta f(u)\left[1-(u-x)^2\right]^n du = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)\left[1-v^2\right]^n dv,$$

onde $\underline{x}$ é um ponto do intervalo em questão. Então $\alpha-x$ é negativo, enquanto que $\beta-x$ é positivo. Seja δ um número positivo tal que $0<\delta<1$, mas tal também que $\overset{\delta \text{ e } -\delta}{\text{fiquem}}$ entre $\alpha-x$ e $\beta-x$, qualquer que seja $\underline{x}$ do intervalo (a,b). Vê-se que deve ser $-\delta>\alpha-a$, $\delta<\beta-b$, ou seja

$$\begin{matrix} 0<\delta<a-\alpha \\ 0<\delta<\beta-b \end{matrix}, \quad 0<\delta<1;$$

Com estas condições não é incompatível uma determinação de $\underline{\delta}$ ~~de~~ modo que seja positivo e tão pequeno quanto se queira.

Ponhamos

$$I = \int_{\alpha-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{\delta}^{\beta-x} = I_1 + I_2 + I_3,$$

e estudemos os integrais I_1, I_2, I_3. Tem-se

$$|I_1| < M\int_{-1}^{+\delta}(1-v^2)^n dv = M J_n^*,$$

se M é um limite superior de $|f(u)|$ no intervalo (α,β). Na verdade $\alpha-x \geqslant -1$ qualquer que seja $\underline{x}$ do intervalo (a,b) pois $\alpha > x-1$.

Quanto a I_2 tem-se

$$I_2 = f(x)\int_{-\delta}^{+\delta}(1-v^2)^n dv + \int_{-\delta}^{+\delta}\left[f(v+x)-f(x)\right](1-v^2)^n dv =$$

$$= f(x)\left[\int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{\delta}\right] + \int_{-\delta}^{+\delta}\left[f(v+x)-f(x)\right](1-v^2)^n dv.$$

Seja $\underline{\varepsilon}>0$ um número dado, arbitràriamente pequeno. Façamos-lhe corresponder $1>\delta(\varepsilon)>0$ suficientemente pequeno para que $|f(v+x)-f(x)|<\varepsilon$, quando $|v|<\delta$. Então

§ 67) Continuação

$$\int_{-\delta}^{+\delta}[f(v+x)-f(x)](1-v^2)^n dv \le \varepsilon\int_{-\delta}^{+\delta}(1-v^2)^n dv < \varepsilon\int_{-1}^{+1}(1-v^2)^n dv = 2\varepsilon J_n .$$

Assim $I_2 = f(x)\,(J_n - J_n^*) + \Delta$, com $|\Delta| < 2\varepsilon J_n$.

E' igualmente $|I_3| < M\int_{\delta}^{1}(1-v^2)^n dv = M J_n^*$.

Ora sendo $\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^n du = 2J_n$, vem

$$P_n(x)\cdot 2J_n = I_1 + I_2 + I_3 = 2f(x)\left(J_n - J_n^*\right) + \cdots,$$

$$\left|\,[P_n(x) - f(x)]\cdot 2J_n\right| \le 2MJ_n^* + 2\varepsilon J_n + 2MJ_n^*,$$

e, portanto,

$$|P_n(x)-f(x)| \le M\frac{J_n^*}{J_n} + \frac{M J_n^*}{J_n} + \varepsilon \le 2M\frac{J_n^*}{J_n} + \varepsilon .$$

Escolhendo n suficientemente grande, visto que $\lim_{n\to\infty}\frac{J_n^*}{J_n} = 0$, chega-se a

$$|P_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

qualquer que seja x do intervalo fechado (a, b), como se queria provar.

§ 68) Extensão dos resultados às funções de muitas variáveis — Demonstra-se, da mesma maneira, que uma função contínua $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ no domínio definido por $a_i \le x_i \le b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ é aproximada uniformemente pelos polinómios

$$P_n(x_1 x_2 \cdots x_m) = \frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_m}^{\beta_m} f(u_1 \cdots u_m)\left[1-(u_1-x_1)^2\right]^n \cdots \left[1-(u_m-x_m)^2\right]^n du_1 \cdots du_m}{\left(\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^n du\right)^m},$$

onde os α_i, β_i verificam as desigualdades

$$0 < \alpha_i < a_i < b_i < \beta_i < 1 .$$

§ 69) Aproximação simultânea das derivadas — Vamos mostrar que se a função contínua $f(x_1 x_2 \cdots x_m)$ tem derivadas contínuas até à ordem k, inclusive, as derivadas (até à ordem k, inclusive) dos polinómios de aproximação convenientemente escolhidos também aproximam aquelas derivadas. Imaginemos o caso de duas variáveis x, y, e suponhamos que o domínio das variáveis independentes é definido por

$$a \le x \le b, \qquad c \le y \le d .$$

Prolonguemos a função dada analiticamente de modo a ficar definida no rectângulo seguinte, contendo o anterior, $\alpha \le x \le \beta$, $\gamma < y \le \delta$.

Supôr-se-há, é claro, como anteriormente

$$0 < \alpha < a < b < \beta , \qquad 0 < \gamma < c < d < \delta ,$$

e também que o prolongamento analítico é feito de tal modo que a função $f(u,v)$ continua a ter derivadas contínuas até à ordem $\underline{k}$, derivadas que se anularão, até à ordem $k-1$ assim como a função $f(u,v)$ sôbre o contôrno do rectângulo

$$\alpha \leq x \leq \beta , \qquad \gamma \leq y \leq \delta .$$

Então é fácil vêr que os polinómios construídos como anteriormente satisfazem a todas as condições. Com efeito

$$P_n(x,y) = \frac{\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(u,v)\,[1-(u-x)^2]^n [1-(v-y)^2]^n du\,dv}{\left[\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du\right]^2},$$

e, por exemplo,

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(u,v)\; n[1-(u-x)^2]^{n-1} 2(u-x)\; [1-(v-y)^2]^n du\,dv}{\left[\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du\right]^2} =$$

$$= \frac{-\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(u,v) \frac{\partial}{\partial u} [1-(u-x)^2]^n [1-(v-y)^2]^n du\,dv}{\left[\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du\right]^2} =$$

$$= \frac{\int_\gamma^\delta [1-(v-y)^2]^n dv \int_\alpha^\beta f(u,v) \left(-\frac{\partial}{\partial u}[1-(u-x)^2]^n\right) du\,dv}{\left[\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du\right]^2} =$$

$$= \frac{\int_\gamma^\delta [1-(v-y)^2]^n dv \left(\left\{-[1-(u-x)^2]^n f(u,v)\right\}_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta [1-(u-x)^2]^n \frac{\partial f}{\partial u} du\right)}{\int_{-1}^{+1} \cdots} .$$

Ora, por hipótese (que resulta da forma como se fez o prolongamento analítico da função $\underline{f}$), a quantidade $\left\{-[1-(u-x)^2]^n f(u,v)\right\}_\alpha^\beta = 0$, vindo, assim,

$$\frac{\partial P_n}{dx} = \frac{\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \frac{\partial f}{\partial u} [1-(u-x)^2]^n [1-(v-y)^2]^n du\,dv}{\left(\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du\right)^2} .$$

Quando $\underline{n}$ aumenta indefinidamente, o segundo membro representa, em virtude da demonstração geral do § 68, polinómios aproximados de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Assim, os polinómios $\frac{\partial P_n}{\partial x}$ são polinómios aproximados de $\frac{\partial f}{\partial x}$. É claro que, utilizando sucessivas integrações por partes, vê-se o mesmo para as derivadas de ordem superior, tendo lugar a observação de que não há necessidade de formular hipóteses sôbre os valores das derivadas de ordem k no limite do rectângulo $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)$.

Como segunda observação, digamos que a quantidade ε da Demonstração dos §§ 68 e 69 pode supor-se a mesma para a função f e para as diferentes derivadas até à ordem k (inclusivé).

§ 70) Demonstração de que as funções trigonométricas constituem um sistema completo. No capítulo relativo às séries de Fourier fez-se a demonstração desta circunstância, baseada, aliás, no facto de toda a função "contínua pedaço por pedaço, com derivada contínua pedaço por pedaço" ter um desenvolvimento uniformemente convergente do tipo de Fourier. Aqui, servindo-nos do teorema de Weierstrass, atraz demonstrado, vamos verificar, outra vez, que o sistema ortogonal normalisado, no intervalo $(-\pi,+\pi)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \dots$$
$$\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}},\ \dots,$$

constitue um sistema completo.

Vamos, para isso, provar o teorema seguinte: toda a função contínua no intervalo $(-\pi,+\pi)$ para a qual $f(-\pi)=f(+\pi)$, pode aproximar-se uniformemente por polinómios trigonométricos da forma

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\operatorname{sen}\nu x),$$

onde α_ν,β_ν são constantes.

Substituamos, de facto, x por ϑ e consideremos a função $\rho f(\vartheta)$ onde ρ e ϑ são coordenadas polares no plano. Mediante as fórmulas $\xi=\rho\cos\vartheta$, $\eta=\rho\operatorname{sen}\vartheta$, a função torna-se numa função $\varphi(\xi,\eta)$ dada por

$$\varphi(\xi,\eta)=\rho f(\vartheta).$$

Em virtude das hipóteses feitas sôbre $f(\vartheta)$, vê-se que a função $\varphi(\xi,\eta)$ é contínua em todo o plano (ξ,η). Então pode aproximar-se uniformemente, num rectângulo que contenha o círculo unidade $\xi^2+\eta^2=1$, por meio de polinómios. Regressando às variáveis ρ e ϑ e fazendo, em seguida, $\rho=1$, obtêm-se polinómios em $\cos\vartheta$ e $\operatorname{sen}\vartheta$ que aproximam uniformemente, sôbre o círculo unidade, a função dada $f(\vartheta)$. Em seguida as fórmulas

$$\cos^2\vartheta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\vartheta,\quad \operatorname{sen}^2\vartheta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\vartheta,$$
$$\cos^3\vartheta=\cos\vartheta\cdot\cos^2\vartheta=\cos\vartheta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right)=\cos\vartheta+\frac{1}{4}\left\{\cos\vartheta+\cos 3\vartheta\right\},\ \text{etc},$$

permitem passar para os polinómios trigonométricos anunciados.

Quando a função $f(x)$ não verifica a condição $f(-\pi)=f(+\pi)$, fácil é obter uma função $g(x)$ para a qual $g(-\pi)=g(+\pi)$ e tal que $\int(f-g)^2dx$ seja tão pequeno quanto se queira. Dada pois a quantidade positiva $\underline{\varepsilon}$ e dada a função $f(x)$ contínua no intervalo $-\pi \leq x \leq +\pi$, é possível determinar $\underline{n}$ tal que

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{f-\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_1^n(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\operatorname{sen}\nu x)\right]\right\}^2dx<\varepsilon,$$

o que mostra que as funções trigonométricas constituem um sistema completo. Na verdade pode mesmo dizer-se que existe $N(\varepsilon)$ tal que, quando $n>N(\varepsilon)$, é possível escolher os $\underline{\alpha_\nu}$ e os $\underline{\beta_\nu}$ por forma a ser verificada a condição anterior.

Façamos, porém, algumas observações. Quando se passa dum polinómio com um certo valor de $\underline{n}$ para outro polinómio correspondente a outro valor de $\underline{n}$, os coeficientes α_ν, β_ν, já determinados para o primeiro, não subsistirão, no geral, para o segundo. É [illegible] o que nos garante o método usado no § 68. Em segundo lugar, designemos com $P_0, P_1, P_2, \dots$ os polinómios trigonométricos sucessivos; a série [no caso em que $f(-\pi)=f(+\pi)$]

$$P_0+(P_1-P_0)+(P_2-P_1)+\dots+(P_n-P_{n-1})+\dots$$

é uma série de polinómios trigonométricos que converge uniformemente para a função dada. Em terceiro lugar sabemos que podemos formar os polinómios trigonométricos de Fourier, os quais se aproximam melhor, em média, do que os anteriores. Mas nada nos permite dizer que a série de Fourier converge para a função dada. A teoria especial desenvolvida deu-nos condições suficientes para que tal aproximação pudesse ter lugar.

§ 71) <u>Séries de Fourier de muitas variáveis</u> - Consideremos, por exemplo, o caso de duas variáveis $\underline{s}$ e $\underline{t}$, e tomemos o quadrado

$$0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Visto que as funções

$$1,\ \cos s,\ \operatorname{sen} s,\ \cos 2s,\ \operatorname{sen} 2s,\ \dots \longrightarrow (\text{ou } \varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \dots)$$

constituem um sistema completo no intervalo $(0, 2\pi)$ e que o mesmo se diz das funções

$$1,\ \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ \cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t,\ \dots \longrightarrow [\text{ou } \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots],$$

sabemos que o sistema

$$\omega_{ik}(st)=\begin{cases}\cos\mu s\cos\nu t & (\mu=0,1,2,\dots;\ \nu=0,1,2,\dots)\\ \cos\mu s\operatorname{sen}\nu t & (\mu=0,1,2,\dots;\ \nu=1,2,\dots)\\ \operatorname{sen}\mu s\cos\nu t & (\mu=1,2,\dots;\ \nu=0,1,2,\dots)\\ \operatorname{sen}\mu s\operatorname{sen}\nu t & (\mu=1,2,\dots;\ \nu=1,2,\dots)\end{cases}$$

constitui um sistema completo no quadrado anterior.

§71) <u>Continuação</u> – As séries formais de Fourier obtidas, desde que para a função $F(s,t)$ em causa se admita "continuidade pedaço por pedaço", o mesmo se supondo para as derivadas $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}$, são absoluta e uniformemente convergentes em cada domínio não contendo ponto de descontinuidade.

Empregando a maneira de escrever sob forma complexa, podemos dizer que o sistema $e^{i(\mu s+\nu t)} = \omega_{\mu\nu}(st)$ é um sistema completo, se supomos $\underline{\mu}$ e $\underline{\nu}$ variarem de $-\infty$ a $+\infty$. A normalização destas funções exige que se escreva

$$\omega_{\mu\nu}(s,t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(\mu s+\nu t)}.$$

As componentes de $F(st)$ são

$$a'_{\mu\nu} = \iint \frac{F(st)\, e^{-i(\mu s+\nu t)}}{2\pi}\, ds\, dt,$$

vindo, pois,

$$F(st) = \sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} \frac{1}{2\pi} e^{i(\mu s+\nu t)}.$$

A relação característica de base fornece a igualdade

$$\iint |F(st)|^2 ds\, dt = \sum_{\mu,\nu} |a'_{\mu\nu}|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mu,\nu} \left| \iint F(st)\, e^{-i(\mu s+\nu t)} ds\, dt \right|$$

~~$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mu\nu} \left(\iint F(st)\, e^{-i(\mu s+\nu t)} ds\, dt \iint F(st)\, e^{i(\mu s+\nu t)} ds\, dt \right)$~~

~~$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mu,\nu}$~~

Muitas vezes, em vez dum desenvolvimento da forma

$$F(st) = \sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} \frac{1}{2\pi} e^{i(\mu s+\nu t)}$$

escreve-se o desenvolvimento

$$F(st) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} e^{i(\mu s+\nu t)}.$$

Então tem-se

$$a_{\mu\nu} = \frac{a'_{\mu\nu}}{2\pi}, \quad \text{com} \quad a_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \iint F(st)\, e^{-i(\mu s+\nu t)} ds\, dt,$$

e

$$\iint |F(st)|^2 ds\, dt = 4\pi^2 \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{+\infty} |a_{\mu\nu}|^2.$$

§72) <u>A ordem de grandeza dos coeficientes do desenvolvimento de Fourier.</u>

Para o desenvolvimento de $f(x)$ em série de Fourier bastou-nos fazer hipóteses quanto à derivada primeira. Suponhamos agora que sabemos que a função $f(x)$ e as suas derivadas até à ordem $h-1$ são contínuas, sendo a derivada de ordem $\underline{h}$ uma função contínua pedaço por pedaço. Então, se fôr $\nu \geq 1$, é (supondo $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu e^{i\nu x}$)

$$2|\alpha_\nu| = |a_\nu - i b_\nu| = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2},$$

e

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-i\nu t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i\nu}\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-i\nu t}\, dt = \dots =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\nu}\right)^k \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\, e^{-i\nu t}\, dt .$$

Assim vê-se que se tem

$$2|\alpha_\nu| = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} \leqq \frac{c}{\nu^k} ,$$

onde $\underline{c}$ é uma constante. Vê-se, desta maneira, que os coeficientes a_ν, b_ν tendem tanto mais rapidamente para zero quanto maior número de derivadas tiver a função, para as quais possa fixar-se um limite no intervalo considerado como fundamental.

§ 73) Domínio fundamental diferente de 2π – Quando o domínio fundamental é diferente de 2π, e igual, por exemplo, a $2l$, a função $f(x)$, dada, pela mudança de variável $y = \frac{\pi}{l} x$, torna-se numa função

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} y\right) = \varphi(y),$$

e esta função $\varphi(y)$ desenvolve-se sob a forma

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos \nu y + b_\nu \operatorname{sen} \nu y \right).$$

Logo, a função $f(x)$ desenvolve-se sob a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos \nu \frac{\pi}{l} x + b_\nu \operatorname{sen} \nu \frac{\pi}{l} x \right),$$

sendo

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(y) \cos \nu y\, dy = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \cos \nu \frac{\pi}{l} x\, dx ,$$

$$b_\nu = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \operatorname{sen} \nu \frac{\pi}{l} x\, dx .$$ E, empregando imaginários, tem-se

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x} , \qquad \alpha_\nu = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(t)\, e^{-i\nu\frac{\pi}{l}t}\, dt$$

§ 74 O integral de Fourier – Quando se escreve para uma função $f(x)$

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x} , \qquad \alpha_\nu = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\, e^{-i\nu\frac{\pi}{l}t}\, dt ,$$
$$\nu \bar{\epsilon} r$$

é natural procurar tentar o que sucederá se se faz tender $\underline{l}$ para ∞. E isso porque, então, nos libertaremos da condição de periodicidade que temos sempre imposto a $f(x)$, pois passaremos a obter $f(x)$ em todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Manteremos, naturalmente, a hipótese de que $f(x)$, em cada intervalo finito, é uma função contínua pedaço por pedaço, com derivada contínua pedaço por pedaço. Nos pontos de descontinuidade o valor de $f(x)$ será ainda a média aritmética dos valores limites à direita e à esquerda. Como nova condição, supomos que o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ existe. Se pômos $\frac{\pi}{\ell} = \delta$, ocorre

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta \int_{-\ell}^{+\ell} f(t)\, e^{-i\nu\delta(t-x)}\, dt.$$

Sob um ponto de vista formal, percebe-se o integral de Fourier sob a forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iu(t-x)}\, dt,$$

pois a expressão de $f(x)$ anterior é uma soma tipo $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta F(\nu\delta)$, que, no limite, se tornará $\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\,du$. Se introduzirmos funções reais $f(x)$, virá também

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int du \int f(t)\, [\cos u(t-x) - i \sin u(t-x)]\, dt.$$

Como o primeiro integral a executar é uma soma duma função par e duma função impar, virá, no resultado,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt.$$

Vamos demonstrar êste resultado por uma via directa.

Uma ligeira modificação nos raciocínios empregados para fazer a demonstração rigorosa da série de Fourier permite-nos estabelecer a igualdade

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \nu t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = f(x),$$

onde $\underline{a}$ é um número positivo qualquer. Tem-se, assim,

$$\pi f(x) = \lim_{\nu\to\infty} \int_{-a}^{+a} f(x+t)\,dt \int_0^{\nu} \cos ut\, du = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^{\nu} du \int_{-a}^{+a} f(x+t) \cos ut\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} du \int_{-a}^{+a} f(x+t) \cos ut\, dt$$

Trata-se de verificar agora que o integral $\int_{-a}^{+a} f(x+t) \cos ut\, dt$, onde $\underline{a}$ é qualquer, pode substituir-se pelo integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos ut\, dt$. Seja, com efeito, $A > a$. Tem-se

$$\int_0^{\nu}\int_{-A}^{+A} - \int_0^{\nu}\int_{-a}^{+a} = \int_0^{\nu}\int_{-A}^{-a} + \int_0^{\nu}\int_a^A = \int_{-A}^{-a}\int_0^{\nu} + \int_a^A\int_0^{\nu},$$

e, portanto,

$$\left| \int_0^{\nu}\int_{-A}^{+A} - \int_0^{\nu}\int_{-a}^{+a} \right| = \left| \int_{-A}^{-a} f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \nu t}{t}\, dt \right| + \left| \int_a^A f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \nu t}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{a} \left(\int_{-A}^{-a} |f(x+t)|\,dt + \int_a^A |f(x+t)|\,dt \right).$$

Tendo agora em vista que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ existe, designando o seu valor com C, tem-se

$$\left| \int_0^v \int_{-A}^{+A} - \int_0^v \int_{-a}^{+a} \right| \leq \frac{C}{a}.$$

Se supomos aqui que A tende para ∞, vem

$$\left| \int_0^v \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_0^v \int_{-a}^{+a} \right| \leq \frac{C}{a}.$$

E se supômos que v tende para ∞, tem-se

$$\left| \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} - \pi f(x) \right| \leq \frac{C}{a}.$$

Como a é qualquer, vê-se que o primeiro membro pode tornar-se tão pequeno quanto se queira, qualquer que seja x (uniformidade). Então

$$\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos ut\,dt = \pi f(x),$$

como se queria provar.

Visto que o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos ut\,dt$ existe e é uma função par de u, podemos escrever ainda

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos ut\,dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\,dt.$$

Visto que o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} u(t-x)\,dt$ existe e é uma função ímpar de u, tem-se

$$0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} u(t-x)\,dt,$$

se o integral existe. Da comparação desta igualdade com a anterior, resulta

$$\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\cos u(t-x) - i \operatorname{sen} u(t-x)}{2}\,dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iu(t-x)}\,dt,$$

que é precisamente a forma por que escrevemos inicialmente o integral de Fourier.

§ 75) Extensão do resultado a muitas variáveis — Para o caso de duas variáveis x_1 e x_2, por exemplo, tem-se

$$F(x_1 x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iiiint F(t_1 t_2)\, e^{-i[u_1(t_1-x_1) + u_2(t_2-x_2)]}\, dt_1\, du_1\, dt_2\, du_2,$$

se se supõe que os integrais $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t_1, x_2)|\,dt_1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x_1, t_2)|\,dt_2$ existem.

Para n variáveis é, analogamente,

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_1 t_2 \ldots t_n)\, e^{-i[u_1(t_1-x_1) + \cdots + u_n(t_n-x_n)]}\, dt_1\, du_1\, dt_2\, du_2 \ldots dt_n\, du_n,$$

em hipóteses análogas às anteriores.

Para evitar má compreensão insistamos no caso de duas variáveis. Tem-se

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int du_2 \int F(x_1, t_2)\, e^{-iu_2(t_2-x_2)}\, dt_2,$$

se o integral $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x_1 t_2)|dt_2$ existe. Em segundo, a função de x_1 que figura no segundo membro, considerada como tal, pode escrever-se

$$F(x_1, t_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_1, t_2)\, e^{-iu_1[t_1 - x_1]} dt_1,$$

de sorte que

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_1 t_2)\, e^{-i[u_1(t_1 - x_1) + u_2(t_2 - x_2)]} dt_1 .$$

§ 76) <u>Fórmulas de reciprocidade</u> – Escrevamos de novo o integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iu(t-x)} dt .$$

Se pômos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut} dt = g(u), \text{ vem } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{iux} dx.$$

As fórmulas de reciprocidade são, pois, as seguintes:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{iux} dx ,$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iux} dx .$$

A solução $g(u)$ da primeira é dada pela segunda. Inversamente, a solução $f(x)$ da segunda é dada pela primeira. Êste resultado deve ser aproximado daquele a que se chegou no § 45 relativo à interpolação parabólica.

No caso de muitas variáveis, tem-se

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)\, e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} dx_1 \dots dx_n,$$

$$g(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 x_2 \dots x_n)\, e^{-i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Sob um outro ponto de vista, trata-se aqui de equações integrais. Na primeira, supõe-se conhecida a função $f(x)$ e trata-se de determinar $g(u)$; na segunda, pelo contrário, $g(u)$ supõe-se conhecida e trata-se de determinar $f(x)$. Assim a solução da primeira equação integral é dada pela segunda, e inversamente.

Vejamos agora em que se tornam as fórmulas de reciprocidade no caso em que $f(x)$ é uma função real, par. Sendo

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut}dt\,,\qquad f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)e^{iut}du\,,$$

tem-se

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\cos ut-i\,\mathrm{sen}\,ut\right)dt\,;$$

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\cos ut+i\,\mathrm{sen}\,ut\right)dt\,,$$ e, por soma,

$$2\,g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot 2\cos ut\,dt,$$ ou seja, pois,

$$\begin{cases} g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt, \\ f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}g(u)\cos ut\,dt, \end{cases}$$

visto que, sendo $g(u)$ par e real,

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\left(\cos ut+i\,\mathrm{sen}\,ut\right)dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\left(\cos ut-i\,\mathrm{sen}\,ut\right)du,$$

$$2f(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\cdot\cos ut\,dt\,.$$

Se a função $f(x)$ é uma função real, ímpar, tem-se

$$\begin{cases} g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\,\mathrm{sen}\,ut\,dt, \\ f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}g(u)\,\mathrm{sen}\,ut\,du, \end{cases}$$

como vamos ver. De facto é

$$G(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\cos ut-i\,\mathrm{sen}\,ut\right)dt=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{sen}\,ut\,dt=$$

$$=-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\,\mathrm{sen}\,ut\,dt\,.$$

Se pômos $\frac{G(u)}{-i}=g(u)$, tem-se

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\,\mathrm{sen}\,ut\,dt,$$

sendo agora

$$f(t)=\cancel{F(t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G(u)\left(\cos ut+i\,\mathrm{sen}\,ut\right)dt\,.$$

mo $G(u)$ é uma função ímpar, podemos ~~escrever~~ ainda

$$F(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\,\text{sen}\,ut\,du = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty G(u)\,\text{sen}\,ut\,du =$$

$$= \frac{-i^2\,2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(u)\,\text{sen}\,ut\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\,\text{sen}\,ut\,du.$$

Vê-se, pois, que, com

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\,\text{sen}\,ut\,dt,$$

se tem

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\,\text{sen}\,ut\,du.$$

As fórmulas de reciprocidade, no caso de muitas variáveis, são

$$\begin{cases} g(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int\cdots\int f(x_1x_2\cdots x_n)\,e^{-i(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n)}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n, \\ f(x_1x_2\cdots x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int\cdots\int g(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)\,e^{+i(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n)}\,d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_n. \end{cases}$$

§ 77) <u>Exemplos para o integral de Fourier</u> - A fórmula encontrada para as funções reais

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\{\cos ut\cos ux + \text{sen}\,ut\,\text{sen}\,ux\}d$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \text{sen}\,ux\,du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\text{sen}\,ut\,dt,$$

simplifica-se se $f(x)$ é uma função par, pois então tem-se

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt.$$

Se $f(x)$ é uma função ímpar, vem

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{sen}\,ux\,du\int_0^\infty f(t)\,\text{sen}\,ut\,dt.$$

<u>Como segundo exemplo</u>, estudemos o chamado <u>factor de descontinuidade de Dirichlet</u>. Seja $f(x)$ uma função par tal que

$$f(x) = 1, \quad \text{quando} \quad 0 \leq x < 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{quando} \quad x = 1,$$

$$f(x) = 0, \quad \text{quando} \quad x > 1.$$

Então vem

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^1 \cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,u\cos ux}{u}\,du.$$

Fica-nos, assim, interpretado o integral que figura no último membro, o qual é o factor de descontinuidade de Dirichlet referido.

Estudemos um terceiro exemplo. Suponhamos $\beta>0$ e que, quando $x>0$, é $f(x)=e^{-\beta x}$. Prolonguemos $f(x)$, para x negativo, como função par. Então tem-se

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos ut\,dt.$$

Ora

$$\int e^{-\beta t}\cos ut\,dt=\frac{e^{-\beta t}}{-\beta}\cos ut+\frac{1}{\beta}\int e^{-\beta t}(-u\operatorname{sen}ut)\,dt=$$

$$=-\frac{e^{-\beta t}}{\beta}\cos ut-\frac{u}{\beta}\left[\frac{e^{-\beta t}}{-\beta}\operatorname{sen}ut+\frac{u}{\beta}\int e^{-\beta t}\cos ut\,dt\right]=$$

$$=-\frac{e^{-\beta t}}{\beta}\cos ut+\frac{u}{\beta^2}e^{-\beta t}\operatorname{sen}ut-\frac{u^2}{\beta^2}\int e^{-\beta t}\cos ut\,dt,$$

de sorte que

$$\left(1+\frac{u^2}{\beta^2}\right)\int e^{-\beta t}\cos ut\,dt=\frac{e^{-\beta t}}{\beta^2}\left(u\operatorname{sen}ut-\beta\cos ut\right),$$

ou

$$(\beta^2+u^2)\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos ut\,dt=\left(e^{-\beta t}(u\operatorname{sen}ut-\beta\cos ut)\right)_0^\infty=\beta.$$

Logo é

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\beta\cos ux}{\beta^2+u^2}\,du.$$

Se $f(x)$ se prolonga analiticamente como função impar, tem-se

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}ux\,du\int_0^\infty e^{-\beta t}\operatorname{sen}ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{u\operatorname{sen}ux}{\beta^2+u^2}\,du$$

O integral

$$\int_0^\infty\frac{\cos ux}{\beta^2+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{e^{-\beta|x|}}{\beta},$$

é designado integral de Laplace.

Como quarto exemplo, ponhamos $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Neste caso as fórmulas de reciprocidade são

$$\begin{cases} g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos ut\,dt,\\ f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos ut\,du.\end{cases}$$

Ora estudemos o integral

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos ut\,dt.$$

Uma derivação dos dois membros em ordem a $\underline{u}$ dá

$$F'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} (-t \operatorname{sen} ut)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left(e^{-\frac{t^2}{2}} \operatorname{sen} ut\right)_0^\infty - u \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \cos ut\, dt \right) = -u F(u)$$

de sorte que sendo

$$F'(u) + u F(u) = 0 , \qquad \frac{dF}{F} = -u\, du, \quad \log \frac{F}{F_0} = -\frac{u^2}{2}, \quad F = F_0\, e^{-\frac{u^2}{2}},$$

e devendo, quando $u = 0$, ser $F(0) = F_0 = 1$, vem

$$F(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Logo as fórmulas de reciprocidade dão aqui

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \cos ut\, dt = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \cos ut\, du = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

resultado concordante.

Capítulo VII

Equações diferenciais - Cálculo dos limites

78) **Generalidades** - Quer para as equações diferenciais, como para sistemas de tais equações ou para as equações às derivadas parciais, põe-se, desde o início, a questão de saber da existência de integrais; em seguida, a da sua determinação.

No caso de equações analíticas (precisaremos o significado desta expressão), o método do Cálculo dos limites de Cauchy é de grandes possibilidades para a primeira questão indicada. Na teoria das séries, a propósito da existência de funções implícitas possíveis de desenvolver em série, démos um primeiro exemplo do que deve entender-se por Cálculo dos limites. O processo repousa sôbre o emprêgo de funções dominantes.

79) Existência dos integrais dum sistema de equações diferenciais - Seja, em primeiro lugar, uma só equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

cujo segundo membro se supõe holomorfo na vizinhança dum sistema de valores (x_0, y_0). Vamos então demonstrar o teorema seguinte: a equação considerada admite um integral $y(x)$ holomorfo no domínio do ponto x_0, que se torne igual a y_0 quando se põe $x = x_0$.

A mudança de variáveis $x - x_0 = X$, $y - y_0 = Y$ permite-nos supôr $x_0 = y_0 = 0$. Se se sabe que a nossa equação admite um integral holomorfo que se anula para $x=0$, o desenvolvimento em série do mesmo integral reduz-se ao conhecimento das derivadas sucessivas de y no ponto considerado. Em primeiro lugar, tem-se

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(0,0);$$

em seguida vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}$$

Pondo nestas equações $x=0$, $y=0$, elas permitem determinar, sucessivamente, as derivadas de ordem superior, à custa das derivadas de menor ordem, derivadas que figurarão como coeficientes do desenvolvimento de y. Até Cauchy admitiu-se que a série

$$y(x) = 0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 x^n + \cdots, \qquad (2)$$

deduzida como se indicou era convergente numa vizinhança suficientemente pequena do ponto $x=0$. Observemos ainda que o cálculo das derivadas sucessivas no ponto $(0,0)$ se faz, também, à custa dos coeficientes do desenvolvimento de $f(x,y)$ na vizinhança do ponto em referência, visto que nas expressões dessas derivadas figuram as derivadas parciais da função f.

O nosso objectivo é demonstrar a convergência do desenvolvimento. O processo que leva aos coeficientes de (2) introduz apenas multiplicações e somas, nas quais figuram as quantidades a_{ik} (coeficiente de x^iy^k no desenvolvimento de f no domínio da origem) e as derivadas de ordem inferior.

Substituindo a equação $\overset{(1)}{}$ pela equação

$$\frac{dY}{dx} = \varphi(x,Y), \qquad (3)$$

onde o segundo membro é uma *função dominante* do segundo membro de (1), visto que as derivadas sucessivas de Y serão quantidades positivas, o desenvolvimento análogo a (2) será um desenvolvimento dominante do desenvolvimento (2). Por isso, se o desenvolvimento definido por (3) fôr convergente no domínio da origem (bem entendido que se trata aqui dum desenvolvimento que se anula para $x=0$), sê-lo-á igualmente *a fortiori* o desenvolvimento (2). Ora suponhamos que sabemos que (3) admite um integral holomorfo no domínio da origem, o qual se anula para $x=0$. Êsse integral coincide com o que acaba de referir-se, pelo que a série auxiliar dominante será, de facto, convergente.

§ 79) <u>Continuação</u> - Suponhamos que a função $f(x,y)$, figurando em (1), uma função holomorfa quando as variáveis $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são interiores a dois círculos $\underline{C}$ e $\underline{C'}$, de raios $\underline{a}$ e $\underline{b}$, descritos com centro na origem no plano das variáveis complexas $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Sôbre os contornos $\underline{C}$ e $\underline{C'}$ a função $f(x,y)$ pode supôr-se ainda holomorfa. Imaginemos que $|f(x,y)| < M$ no domínio considerado. Então podemos tomar

$$\varphi(x,y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)}, \qquad (4)$$

de sorte que deve ser considerada a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)} \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{y}{b}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{M}{1-\frac{x}{a}}. \qquad (5)$$

Sob esta última forma, vamos verificar directamente que existe integral holomorfo nulo quando se faz $x=0$. Na verdade, tira-se de (5)

$$y - \frac{y^2}{2b} = -aM \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right) + \text{const.}$$

Como nós queremos que seja $y=0$ quando $x=0$, vê-se que se adoptarmos a determinação do logaritmo que se anule quando $x=0$, a constante deve pôr-se igual a zero. Vem, pois,

$$\frac{y^2}{2b} - y - aM \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right) = 0, \qquad y^2 - 2by - 2abM \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right) = 0,$$

donde

$$y = b \pm \sqrt{b^2 + 2aMb \operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right)},$$

devendo, aliás, pôr-se

$$y = b - b\sqrt{1 + 2a\frac{M}{b}\operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right)}, \qquad (4')$$

onde se deve tomar a determinação do radical que se reduz à unidade quando se põe $x=0$.

Precisamos de verificar agora que a função $y(x)$ definida pela última igualdade, função que é uma solução de (3), é, realmente, uma função holomorfa no domínio da origem. De facto a função sob o radical tem como ponto crítico o ponto $x=a$. No interior dum círculo $\underline{C}$ de raio $\underline{a}$ essa função é holomorfa, estudando-se a partir do ponto $x=0$, onde toma o valor unidade. Quando a nossa função se torna nula, isto é, quando

$$1 + 2a\frac{M}{b}\operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right) = 0,$$

virá

$$\operatorname{Log}\left(1-\frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{2aM}; \qquad 1-\frac{x}{a} = e^{-\frac{b}{2aM}}; \qquad x = \rho = a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right).$$

Assim, no interior dum círculo de raio $\rho < a$, a função y definida por (4) é uma função holomorfa, como se queria provar.

A função y dada em (1), sabemo-lo *a priori*, desenvolve-se em série convergente à volta da origem com coeficientes positivos. Quando se dá a *x* um valor de módulo inferior a ρ, isto é pertencente ao círculo C_ρ de raio ρ no qual o integral existe, o módulo de y é inferior ao valor que se obtem substituindo *x* pela quantidade ρ. Nessas condições vê-se que, no interior de todo o círculo C_ρ é $|Y| < b$, e, é claro, quanto à solução de (1), no mesmo círculo C_ρ, tem-se também $|y| < b$.

A série (2), em C_ρ, é tal que $|y| < b$, de sorte que, substituindo em $f(x,y)$ a variável y pela soma $y(x)$ dada por (2), o resultado da substituição é uma função holomorfa $\phi(x)$ no círculo C_ρ. O nosso objectivo, para a demonstração do teorema, consiste em provar agora que esta função $\phi(x)$ coincide com a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função holomorfa dada por (2). Basta, para isso, verificar que $\frac{dy}{dx}$ e $\phi(x)$ tomam o mesmo valor, bem como as suas derivadas, no ponto $x=0$. O valor de $\phi(x)$ para $x=0$ é $f(0,0)$, o mesmo sucedendo a $\frac{dy}{dx}$. O processo de se obterem agora as derivadas de ordem superior de $\phi(x)$ consiste em derivar $f(x,y)$ considerando y como função de x dada por (2). Assim

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{d\,\phi(x)}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \quad , \text{ com } \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(0,0) \text{, etc.}$$

A função $y(x)$ satisfaz a todas as condições do teorema, que fica, assim, demonstrado.

Uma vez feita esta demonstração, o cálculo dos coeficientes do desenvolvimento (2) pode fazer-se do modo seguinte: escreve-se que

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

é a solução procurada, e substitui-se êste valor de y na equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \;=a_{00} + a_{01}x + a_{10}y + \cdots ;$$

em seguida, igualam-se os coeficientes das mesmas potências de x. O coeficiente de x^{n-1} no primeiro membro é $n\alpha_n$, enquanto que, no segundo membro, o coeficiente dessa mesma potência introduzirá apenas os a_{ik} em número limitado e, ainda, os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Tem-se, pois um verdadeiro processo algébrico para a determinação dos α_i, determinação que se faz por adições e multiplicações (à parte a divisão por números inteiros).

O processo de demonstração estende-se imediatamente ao caso dum sistema de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \,, \qquad (5)$$

cujos segundos membros se supõem funções holomorfas no domínio do ponto $x_0, (y_1)_0, \dots, (y_n)_0$ bates, supondo, ainda para simplificar, $x_0 = 0, (y_k)_0 = 0$, trata-se de demonstrar que o sistema (5) admite um sistema de integrais holomorfos no domínio da origem, integrais que se anulam para $x = 0$. Se $\underline{M}$ representa um limite superior de todos o $|f_k|$ num domínio $|x| \leq a$, $|y_k| \geq b$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, somos levados a estudar o sistema dominante

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{dY_2}{dx} = \dots = \frac{dY_n}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{Y_1}{b}\right) \cdots \left(1 - \frac{Y_n}{b}\right)} \,. \qquad (6)$$

Trata-se de verificar directamente a existência duma solução holomorfa dêste sistema, em que todos Y_i tendam para zero quando $\underline{x}$ tende para zero.

Se essa solução existe, como as funções $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ terão o mesmo valor para $x = 0$ e têem a mesma derivada na vizinhança de $\underline{x}$, essas funções serão iguais. Assim terá necessàriamente lugar a igualdade

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{Y}{b}\right)^n} \,, \qquad (7)$$

e, inversamente, a solução $Y(x)$ desta equação, que é holomorfa e nula, satisfaz ao sistema (6), se se supõem todos os $y_i = Y(x)$.

Ora a equação (7) dá, sucessivamente:

$$\left(1 - \frac{Y}{b}\right)^n dY = \frac{M\,dx}{1 - \frac{x}{a}} \,; \quad \left(1 - \frac{Y}{b}\right)^{n+1} \cdot \frac{-b}{(n+1)} = -aM \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{b}{n+1} \,,$$

$$\left(1 - \frac{Y}{b}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)aM}{b} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + 1 \,,$$

$$1 - \frac{Y}{b} = \sqrt[n+1]{\cdots} \,,$$

$$Y = b - b\sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)aM}{b} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \,,$$

e a função Y [dado que $\operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ é holomorfo no domínio do ponto $x = 0$, e nulo para $x = 0$ (como se supõe)], é uma função holomorfa no círculo de raio ρ definido pela relação

$$1 + \frac{(n+1)aM}{b} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\rho}{a}\right) = 0 \,,$$

que dá sucessivamente:

$$\operatorname{Log}\left(1 - \rho/a\right) = \frac{-b}{(n+1)aM} \,, \qquad 1 - \frac{\rho}{a} = e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}} \,,$$

$$\rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right) .$$

A demonstração termina-se agora como anteriormente.

§ 80) Equações de ordem superior - Consideremos a equação única de ordem n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) . \qquad (8)$$

Estas equações (ou os sistemas) que se resolvem em ordem à derivada de mais alta ordem dizem-se normais. A equação pode ser substituída por um sistema equivalente de n equações de 1ª ordem. Pondo, com efeito,

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy_2}{dx} = y_3, \qquad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} = y_2, \qquad - - - - - ,$$

onde são introduzidas como incógnitas auxiliares as derivadas de y até à ordem $n-1$, inclusivamente, fica demonstrada a nossa afirmação. E tem-se, assim, o teorema seguinte: A equação (8) admite um integral holomorfo no domínio do ponto x_0, integral que toma nesse ponto o valor dado a priori y_0, ao mesmo tempo que as suas derivadas primeira, segunda, etc., até à de ordem $n-1$, tomam, igualmente, valores também dados a priori $y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

§ 81) Observação - A forma como se conduziu no § 79 a demonstração do teorema fundamental relativo à existência de solução dum sistema de equações diferenciais mostra que a solução holomorfa em referência é única. Mas, é claro, que nada nos diz que não haja solução não holomorfa satisfazendo à mesma condição, de tomar no ponto x_0 valores dados a priori.

Como anota E. Goursat a pgs. 369 do seu Tomo II do Curso de Análise (edição quarta), o raciocínio empregado por Briot e Bouquet para tratar esta questão da solução única é o seguinte: Seja a equação $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e seja $y_1(x)$ o integral holomorfo que toma o valor y_0 quando $x = x_0$. Se se põe $y = y_1 + z$, a nossa equação toma a forma

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = f(x, y_1 + z) .$$

Ora o segundo membro será, necessàriamente, uma série ordenada segundo as potências de $x-x_0$ e de z. Fazendo $z=0$ obtem-se a parte independente de z que é idêntica a $\frac{dy_1}{dx}$, de sorte que será

$$\frac{dz}{dx} = z\,\varphi(x,z),$$

sendo $\varphi(x,z)$ uma função holomorfa das variáveis x e z no domínio de $x=x_0$, $z=0$. Se esta última equação admite um integral diferente do integral $z=0$ que tende para zero quando x tende para x_0, consideremos uma curva C levando a êsse ponto x_0, no plano da variável x, e sejam x_1 e x_2 dois pontos dessa curva aos quais corresponderão os valores z_1 e z_2 de z, valores diferentes de zero. Será

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x,z)\,dx,$$

como se tira da nossa equação. Conservando x_2 e o correspondente z_2, façamos tender x_1 para x_0 e, conseqüentemente, z_1 para zero. O módulo do primeiro membro da igualdade anterior aumenta indefinidamente enquanto que o do segundo membro se conserva finito. Entretanto o raciocínio presupõe que a curva descrita por x_1, quando tende para x_0, é uma curva de comprimento finito.

§ 82) Sistemas de equações lineares – Os sistemas de primeira ordem que foram tratados no § 79 supõem que os segundos membros têem forma analítica, mas, de resto, são quaisquer. Entretanto compreende-se que o limite ρ dado no referido §, no sentido tal que os integrais holomorfos lá definidos existem no domínio $|x|<\rho$, não seja o limite de existência dos integrais, e que o próprio emprêgo de funções dominantes mais apropriadas possa estender o domínio dessa existência. É o que sucede no caso muito importante das equações lineares.

Seja o sistema

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n + b_i, \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{9}$$

onde as funções a_{ik} e b_i são funções da única variável x, holomorfas no círculo C de raio R, com centro no ponto x_0.

Vamos demonstrar que o nosso sistema admite um sistema de integrais holomorfos no mesmo círculo C, integrais que se reduzirão a $(y_1)_0, \dots, (y_n)_0$, dados a priori, quando $x=x_0$.

Para se conduzir a demonstração, poderemos supôr

$$(y_1)_0 = (y_2)_0 = \cdots = (y_n)_0 = 0,$$

como se vê pela substituição $z_i = y_i - (y_i)_0$. Designemos, agora, com $\underline{M}$ o valor máximo da série dos módulos dos desenvolvimentos dos $\underline{a_{ik}}$ e $\underline{b_i}$! no interior do círculo $\underline{C}$, ou, mais precisamente, no interior e sôbre o contorno dum círculo $\underline{C}'$, de raio $r < R$, descrito do ponto $\underline{x_0}$ como centro. Para o nosso número $r < R$ existe, para cada $\underline{a_{ik}}$ e $\underline{b_i}$, uma função dominante do tipo $\dfrac{M}{1 - \frac{x-x_0}{r}}$, de sorte que os segundos membros das equações (9) admitem a função dominante única $\dfrac{M}{1 - \frac{x-x_0}{r}}(1 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)$, sendo nós conduzidos ao estudo do sistema diferencial linear dominante

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{dY_2}{dx} = \cdots = \frac{dY_n}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x-x_0}{r}}(1 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n),$$

e, em seguida, à equação única

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x-x_0}{r}}(1 + nY).$$

Por separação de variáveis e integração, tem-se sucessivamente:

$$\frac{dY}{1+nY} = \frac{M\,dx}{1 - \frac{x-x_0}{r}}, \quad \frac{1}{n}\log(1+nY) = -Mr\log\left(1 - \frac{x-x_0}{r}\right) + \text{const.}$$

$$1 + nY = \left(1 - \frac{x-x_0}{r}\right)^{-nMr} \times \text{const},$$

$$Y = \frac{1}{n}\left[\text{const.}\left(1 - \frac{x-x_0}{r}\right)^{-nMr} - 1\right],$$

podendo fazer-se a constante igual à unidade, a fim de que se obtenha $Y = 0$ quando $x = x_0$. Ora a função $Y(x)$ definida por

$$Y = \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{x-x_0}{r}\right)^{-nMr} - 1\right]$$

é uma função holomorfa quando $|x - x_0| < r$. E, visto que $\underline{r}$ é tão próximo de $\underline{R}$ quanto se queira, vê-se que as soluções holomorfas do sistema (9) existem no interior do círculo $\underline{C}$ de raio $\underline{R}$, como se queria provar.

§ 83) Equações às diferenciais totais – Consideremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como $\underline{n}$ variáveis independentes e seja $\underline{z}$ uma função desconhecida dessas variáveis para a qual

$$dz = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n, \tag{10}$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções dadas de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

A equação anterior é equivalente às equações

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2,\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n} = f_n\ . \tag{11}$$

* Trata-se, agora, de resolver (10) ou (11). Se uma solução $z(x_1 x_2 \dots x_n)$ existe, notemos que $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ $(i \neq k)$ se pode calcular de duas maneiras. Temos, com efeito,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i},$$

supondo, é claro, a analiticidade das funções em jôgo. Escrevendo, assim, as relações

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n) \qquad (12)$$

têm-se $\frac{n(n-1)}{2}$ relações. A solução $\underline{z}$ só pode, pois, ser procurada entre as funções que verificam todas estas relações. Vamos tratar, ùnicamente, o caso em que as relações (12) são identicamente verificadas. Nesse caso importante, a equação (10), ou o sistema (11) que a substitui, diz-se completamente integrável. Para uma equação às diferenciais totais completamente integrável vale o seguinte teorema: se as funções f_i são holomorfas no domínio do ponto $(x_1)_0, (x_2)_0, \dots, (x_n)_0, z_0$, existe um integral holomorfo $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ no domínio desse ponto, o qual se torna z_0 quando os x_i se tornam nos $(x_i)_0$.

Sem dúvida que se torna necessário que o cálculo das derivadas sucessivas de $\underline{z}$ no ponto $(x_1)_0, \dots, (x_n)_0$, feito a partir de (11), deve fazer-se univocamente. Uma derivada do tipo $\frac{\partial^p z}{\partial x_k^p}$ só tem, de facto, uma expressão, pois é, sucessivamente, por exemplo:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_1,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial z} f_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} f_1^2, \text{ etc.}$$

Mas uma derivada do tipo $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x_i^p \partial x_k^q}$ pode obter-se de várias maneiras, pois pode partir-se de $\frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i$ ou de $\frac{\partial z}{\partial x_k} = f_k$. Quando se trata de derivadas segundas os valores obtidos são os mesmos, mediante as condições de integrabilidade (12). De facto, elas dizem, essas condições, que os dois processos de calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ levam ao mesmo resultado. Dêste modo, faremos a demonstração por indução. Suponhamos o teorema verdadeiro para as derivadas até à ordem p, vamos demonstrar que é verdadeiro para as derivadas de ordem $p+1$. Para isso basear-nos-emos no seguinte: seja $U(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ uma função. Ponhamos $\frac{dU}{dx_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial z} f_i$, $\frac{d^2 U}{dx_i dx_k} = \frac{d}{dx_k}\left(\frac{dU}{dx_i}\right)$, quando $\underline{i}$ ou $k = 1, 2, \dots, n$. Fácil é de vêr que as condições (12) levam à igualdade

$$\frac{d^2 U}{dx_i dx_k} = \frac{d^2 U}{dx_k dx_i}.$$

De facto tem-se

$$\frac{d^2U}{dx_i dx_k} = \cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}} + \cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x_k} f_i} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \left(\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} f_i} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial z}\right) f_k,$$

$$\frac{d^2U}{dx_k dx_i} = \cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}} + \cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x_i} f_k} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \left(\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} f_k} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial z}\right) f_i,$$

donde se tira a conclusão. Posto isto, sejam $\underline{u}$ e $\underline{v}$ duas derivadas de ordem p que não diferem senão no facto de, no lugar duma derivação em ordem a $\underline{x_i}$, a segunda tem uma derivação em ordem a $\underline{x_k}$; por tal forma que derivando a primeira em ordem a $\underline{x_k}$ e a segunda em ordem a $\underline{x_i}$ se chega a uma mesma derivada $\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_i^r \partial x_k^s}$, $(r+s=p+1)$. Ora $\underline{u}$ e $\underline{v}$ foram obtidas duma mesma derivada $\underline{w}$ de ordem $\underline{p-1}$, por derivação, respectivamente, em ordem a $\underline{x_i}$ e a $\underline{x_k}$, isto é tem-se

$$u = \frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z} f_i, \qquad v = \frac{\partial w}{\partial x_k} + \frac{\partial w}{\partial z} f_k,$$

ou seja, usando a notação atraz indicada,

$$u = \frac{dw}{dx_i}, \qquad v = \frac{dw}{dx_k}.$$

A igualdade que se pretende demonstrar é que

$$\frac{du}{dx_k} = \frac{d^2w}{dx_i dx_k} = \frac{dv}{dx_i} = \frac{d^2w}{dx_k dx_i}.$$

Ora isso acaba de ser feito, de sorte que

$$\frac{du}{dx_k} = \frac{dv}{dx_i}, \text{ como se deseja.}$$

§ 83) Continuação – Tem-de demonstrar-se agora a convergência do desenvolvimento unívoco assim obtido, o que, dentro do espírito do Cálculo dos limites, se fará substituindo na equação às diferenciais totais proposta por uma outra em que as funções $\underline{f_i}$ sejam substituídas por funções dominantes φ_i, sob a condição, porém, de que

$$dZ = \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \dots + \varphi_n dx_n$$

seja também completamente integrável. Suporemos, para simplicidade de escrita, que é $(x_1)_0 = (x_2)_0 = \dots = (x_n)_0 = z_0 = 0$. Então podemos tomar

$$\varphi_i = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)\left(1 - \frac{Z}{\rho}\right)}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

em que $\underline{M}$ é uma constante conveniente. A equação às diferenciais de comparação é, então,

$$dZ = \frac{M(dx_1 + dx_2 + \dots + dx_n)}{\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)\left(1 - \frac{Z}{\rho}\right)}, \qquad (13)$$

se fôr completamente integrável. Ora isto verifica-se imediatamente.

Temos de encontrar integral holomorfo de (13) que se anule quando os x_i se anulam. Se pômos $X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, passa-se à equação

$$\left(1 - \frac{Z}{\rho}\right) dZ = \frac{n\,dX}{\left(1 - \frac{X}{r}\right)}.$$

Esta equação foi já estudada no § 79 e tem, realmente, integral holomorfo nas condições apontadas. Substituindo X por $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ obtem-se uma série convergente no domínio do ponto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, de sorte que a convergência da série resultante da equação às diferenciais proposta fica demonstrada.

Sem dúvida que a equação proposta, no caso de ter soluçao holomorfa só pode ter a solução que dá a série encontrada pelo processo indicado. Que se trata, realmente, de solução, resulta de considerarmos, agora, as equações

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1, \ \frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2, \ \ldots, \ \frac{\partial z}{\partial x_n} = f_n.$$

A primeira, na qual, em f_1, z se considera como função das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é verificada, porque, no ponto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ e f_1 têm o mesmo valor e porque as derivadas nesse ponto são também as mesmas. A derivada 1.ª de $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ é

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 (f_1)_0,$$

e a de f_1 é

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 (f_1)_0.$$

A mesma verificação se faz para as derivadas de ordem superior.

§ 84) *Extensão do teorema* — Se se trata dum sistema de m equações às diferenciais totais da forma

$$dz_h = f_{1h}\,dx_1 + f_{2h}\,dx_2 + \cdots + f_{nh}\,dx_n, \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

onde os f_{ih} são funções de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_m$, as condições de integrabilidade obtêm-se procurando $\frac{\partial^2 z_h}{\partial x_i \partial x_k}$ por dois processos diferentes. Chega-se, assim, a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{ih}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial f_{ih}}{\partial z_1} f_{k1} + \cdots + \dfrac{\partial f_{ih}}{\partial z_m} f_{km} = \\ = \dfrac{\partial f_{kh}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f_{kh}}{\partial z_1} f_{i1} + \cdots + \dfrac{\partial f_{kh}}{\partial z_m} f_{im}. \end{cases}$$

Se estas condições se verificam, tem-se o teorema seguinte: *Todo sistema completamente integral em que os f_{ih} são holomorfos no domínio do ponto $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0, (z_1)_0, (z_2)_0, \ldots, (z_m)_0$ admite um sistema de in-*

tegrais holomorfos ao mesmo domínio, integrais que tomam, respectivamente, os valores $(z_1)_0, (z_2)_0, \dots, (z_m)_0$ quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ se tornam $(x_1)_0, (x_2)_0, \dots, (x_n)_0$.

§ 85) Aplicação do método do Cálculo dos limites às equações às derivadas parciais. – Consideremos uma equação da forma

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1\, x_2 \dots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial z}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right), \qquad (14)$$

que se encontra resolvida em ordem a $\frac{\partial z}{\partial x_1}$. Trata-se duma única equação, que definirá uma única função $\underline{z}$ das variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, e que é de forma normal, isto é susceptível de ser resolvida em ordem a uma das derivadas.

Como sempre, o nosso objectivo é, em primeiro lugar, mostrar a unicidade do desenvolvimento de $\underline{z}$. Em primeiro lugar, a nossa equação, e as que dela se deduzem por derivação em ordem às variáveis independentes, permite exprimir todas as derivadas de $\underline{z}$ em $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ e nas derivadas em ordem às variáveis $x_2, x_3, \dots, x_n$. Se se trata duma derivada do tipo

$$\frac{\partial^{\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n+1} z}{\partial x_1\, \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,!$$

assim sucede, porque, por exemplo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots, \text{ etc.}$$

Mas, tratando-se de derivadas em que figure mais ~~duma~~ de uma vez a variável x_1, por exemplo

$$\frac{\partial^{\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n+2} z}{\partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \partial x_1^2},$$

tem-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z} f + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)}\frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1}.$$

Neste segundo membro figuram derivadas que contêem apenas uma derivação em ordem a x_1 para as quais vale a afirmativa. Quando, depois de feito no referido segundo membro as competentes substituições, se efectuam as derivações em ordem a $x_2, x_3, \dots, x_n$, a afirmativa continua a manter-se. E o método prossegue-se para as derivadas que contêem três derivações em ordem a $\underline{x_1}$, e assim sucessivamente.

Posto isto, suponhamos que o segundo membro da equação proposta (14) é holomorfo no domínio do ponto $(x_1)_0, \dots, (x_n)_0, z_0, (p_2)_0, \dots, (p_n)_0$, onde se põe $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$. Seja $\varphi(x_2 x_3 \cdots x_n)$ uma função das $n-1$ variáveis $x_2, x_3, \dots, x_n$, holomorfa no domínio do ponto $(x_2)_0, (x_3)_0, \dots, (x_n)_0$ e tal que

$$\varphi_0 = z_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)_0 = (p_2)_0, \dots, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)_0 = (p_n)_0 ;$$

então a nossa equação admite um integral holomorfo no domínio do ponto $(x_1)_0, \dots, (x_n)_0$, integral que se reduz à função $\varphi(x_2 x_3 \cdots x_n)$, quando se põe $x_1 = (x_1)_0$.

A diferença com o que se passa nos teoremas anteriormente demonstrados está em que entra aqui, pela primeira vez, uma *função arbitrária* (dentro de pondo limites) dada *a priori*.

Quanto ao método de demonstração, é sempre o mesmo. A função $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ é, por hipótese, uma função holomorfa. A função $z(x_1 x_2 \dots x_n)$ que queremos procurar reduz-se àquela quando se põe $x_1 = (x_1)_0$. Isto significa que as derivadas de $\underline{z}$ em ordem a $x_2, x_3, \dots, x_n$, quando nelas se faz $x_1 = (x_1)_0, x_2 = (x_2)_0, \dots, x_n = (x_n)_0$ se reduzem às derivadas de φ_2, sendo, pois, conhecidas. Como, porém, por outro lado, todas as derivadas de $\underline{z}$, mediante a equação proposta, se exprimem nas derivadas em que x_1 não figura, as condições do enunciado garantem-nos a formação duma série z de $x_1, x_2, \dots, x_n$, ou melhor duma série tipo

$$z = \sum A_{i_1 i_2 \dots i_n} (x_1 - (x_1)_0)^{i_1} (x_2 - (x_2)_0)^{i_2} \cdots (x_n - (x_n)_0)^{i_n},$$

O cálculo dos coeficientes $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ faz-se à custa de somas e multiplicações em que figuram os coeficientes de f e de φ e, assim, a convergência do desenvolvimento unívoco assim obtido ficará provada se se passa para o caso em que f é substituída por uma função dominante $\underline{F}$ e $\underline{\varphi}$ por uma função dominante Φ.

A-fim-de simplificarmos a demonstração, vamos substituir as condições iniciais por outras mais simples. Em primeiro lugar podemos supor $(x_1)_0 = (x_2)_0 = \dots = (x_n)_0 = 0$, pois isso equivale a pôr $y_i = x_i - (x_i)_0$ e a tomar os y_i como novas variáveis independentes. Em segundo lugar, ponhamos

$$z=\varphi(x_2 x_3 \cdots x_n)+u,$$

de sorte que u se deve reduzir a zero quando $x_1=0$. Com esta última transformação a equação proposta escrever-se-á

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f\left(x_1 x_2 \dots x_n,\ \varphi+u,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}+\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

podendo o segundo membro escrever-se

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\Theta\left(x_1 x_2 \cdots x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

nas condições anteriores. Logo, na demonstração, podemos supor a função φ uma função identicamente nula.

Feitas, assim, as transformações necessárias na equação proposta, suponhamos ainda que o segundo membro de (14) não tem termo constante. Se o houvesse e fosse

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=a+\cdots,$$

em que a é constante, far-se-ia $z=ax_1+v$, o que daria

$$a+\frac{\partial v}{\partial x_1}=a+\cdots,$$

ou seja

$\frac{\partial v}{\partial x_1}=$ exp. sem termo constante e da forma indicada por (14).

Com todas as hipóteses que acabam de indicar-se, a demonstração do teorema reduz-se à demonstração do teorema equivalente para a equação

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}=\frac{M}{\left(1-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+Z}{r}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial Z}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial Z}{\partial x_n}}{\rho}\right)}-M,$$

ou, por outras palavras, à demonstração de que esta equação admite integral holomorfo no domínio da origem que se anula identicamente quando se faz $x_1=0$.

Se substituirmos na última equação x_1 por $\frac{x_1}{\alpha}$, em que α é uma constante positiva inferior à unidade, obtém-se uma nova equação dominante, para a qual faremos a demonstração. Trata-se, assim, da equação

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}=\frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\cdots+x_n+Z}{r}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial Z}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial Z}{\partial x_n}}{\rho}\right)}-M. \qquad (15)$$

Bastará mesmo demonstrar unicamente que esta equação admite integral holo-

§85) Continuação - morfo, com coeficientes positivos, no domínio da origem, sem exigir que o integral se reduza a zero quando nele se faz $x_1=0$. E isso pela razão de que este integral, que não carece de ser zero para $x_1=0$, é dominante do que se obtém supondo $Z\equiv 0$ quando $x_1=0$. Para esta última demonstração, relativa à equação (15), façamos $X=\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\dots+x_n$. Vem, sucessivamente: (117)

$$\frac{dZ}{dX}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{M}{\left(1-\frac{X+Z}{r}\right)\left(1-\frac{(n-1)\frac{dZ}{dX}}{\rho}\right)}-M,$$

$$\frac{dZ}{dX}\frac{1}{\alpha}\left[1-\frac{n-1}{\rho}\frac{dZ}{dX}\right]=\frac{M}{1-\frac{X+Z}{r}}-M\left[1-\frac{n-1}{\rho}\frac{dZ}{dX}\right],$$

$$\frac{dZ}{dX}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{n-1}{\rho}M\right)=\frac{n-1}{\alpha\rho}\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\frac{M}{1-\frac{X+Z}{r}}-M. \qquad (16)$$

Escolhamos, agora, $\underline{\alpha}$ suficientemente pequeno para que o coeficiente de $\frac{dZ}{dX}$ no primeiro membro seja positivo. Para $X=Z=0$, tiram-se de (16) duas raízes $\frac{dZ}{dX}$, uma das quais é nula. Duma maneira geral é

$$\frac{dZ}{dX}=\frac{\left(\frac{n-1}{\rho}M-\frac{1}{\alpha}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{n-1}{\rho}M-\frac{1}{\alpha}\right)^2-4\left(\frac{M}{1-\frac{X+Z}{r}}-M\right)\frac{n-1}{\alpha\rho}}}{2\,\frac{n-1}{\alpha\rho}}.$$

Adoptando o sinal - para o radical, tem-se, no segundo membro, uma função holomorfa no domínio do ponto $X=Z=0$, de modo que (16) admite um integral holomorfo no domínio da origem que se anula nêsse ponto bem como a sua derivada primeira. Para verificarmos que os coeficientes do ~~desenvolvimento~~ respectivo são todos positivos, notemos que é

$$\frac{dZ}{dX}=A\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\phi(X,Z),$$

em que $A>0$ e em que $\phi(X,Z)$ é uma série cujos coeficientes são todos positivos. Derivando uma vez vem

$$\frac{d^2Z}{dX^2}=2A\frac{dZ}{dX}\frac{d^2Z}{dX^2}+\frac{\partial\phi}{\partial X}+\frac{\partial\phi}{\partial Z}\frac{dZ}{dX},$$

e, no ponto $X=Z=0$,

$$\left(\frac{d^2Z}{dX^2}\right)_0=\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_0$$ que é positivo.

O mesmo se verifica para as derivadas de ordem superior, como se queria.

Com o raciocínio exposto, demonstra-se que a série deduzida de

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1 x_2 \dots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$$

é uma série convergente quando $|x_i-(x_i)_0| < r'$, em que r' é um número conveniente, representando, consequentemente, uma função holomorfa no domínio do ponto $(x_1)_0, (x_2)_0, \dots, (x_n)_0$. E, visto que as derivadas desta função, quando nela se faz $x_1=(x_1)_0$, são as mesmas que as derivadas de $\varphi(x_2 \dots x_n)$, e ainda que ela toma o mesmo valor que φ, no ponto $(x_1)_0, \dots, (x_2)_0$, tira-se que a série convergente em causa se reduz à função $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ quando nela se faz $x_1=(x_1)_0$. Resta verificar que é satisfeita a equação proposta. Se substituirmos, com efeito, na função f, as variáveis $z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ pela série encontrada e pelas suas derivadas parciais, obtem-se uma função $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que é holomorfa no domínio do ponto $(x_1)_0 (x_2)_0, \dots, (x_n)_0$. Ora a função ψ é idêntica a $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ porque toma o mesmo valor que $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ no referido ponto e porque todas as derivadas parciais são também iguais nesse ponto.

§ 86) Extensão a um sistema de equações às derivadas parciais de 1ª ordem — Suponhamos tratar-se de p equações de 1ª ordem. Serão capazes de definir p funções $z_1, z_2, \dots, z_p$, podendo escrever-se

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1} = f_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial z_p}{\partial x_1} = f_p, \qquad (17)$$

por hipótese. Os segundos membros supõem-se conter as variáveis independentes $x_1, x_2, \dots$ x_n, as funções $z_1, z_2, \dots, z_p$, e as derivadas primeiras destas funções em ordem a $x_2, x_3, \dots, x_n$, sendo holomorfos no domínio do ponto $(x_i)_0, (z_k)_0, (p_i^k)_0$, com $p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}$. Vale o teorema seguinte: o sistema (17) admite um integral holomorfo no domínio do ponto considerado, integral que, quando se faz $x_1=(x_1)_0$ se reduz às p funções dadas $\varphi_1(x_2 \dots x_n), \dots, \varphi_p(x_2, \dots, x_n)$, funções que se supõem holomorfas no domínio do ponto $(x_2)_0, \dots, (x_n)_0$ e que tomam nesse ponto, respectivamente, os valores $(z_1)_0, \dots, (z_p)_0$, ao mesmo tempo que as suas derivadas de primeira ordem $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right)_0$ são iguais a $(p_i^k)_0$. A demonstração é a mesma que no § anterior.

§ 87) Integral geral dum sistema de equações diferenciais. — Vamos dar aqui importantes propriedades das equações diferenciais. Tomemos, de novo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y), \qquad (18)$$

suposto o segundo membro analítico no domínio do ponto (x_0, y_0). Consideremos o integral $y(x)$ que toma o valor y_0 quando $x = x_0$ como uma função de 3 variáveis independentes x, x_0, y_0. Correspondentemente, consideremos a equação como uma equação às derivadas parciais

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) \qquad (19)$$

e suponhamos o 2.º membro holomorfo no domínio do ponto $x = \alpha$, $y = \beta$. A equação (19) definirá y como função de 3 variáveis independentes x, x_0, y_0, faltando no segundo membro, de resto, as variáveis independentes x_0, y_0. Procuremos um integral de (19) sob a forma $y(x, x_0, y_0)$, integral que seja holomorfo no domínio do ponto $x = \alpha$, $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, e que se reduza à função y_0 quando $x = x_0$. Para nos colocarmos, duma maneira precisa, no ponto de vista do § 85, deveríamos pôr o problema seguinte: determinar o integral de (19), que é uma função $y(x, x_0, y_0)$ holomorfa das 3 variáveis x, x_0, y_0, na vizinhança de $x = \alpha$, $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, e que, quando $x = \alpha$, se reduz a y_0. Esta função y_0, quando nela se põe $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, (y_0 é, de resto, independente de x_0), deve reduzir-se a β (o que sucede) e as derivadas de y_0 em ordem a x_0 e a y_0 devem tomar no ponto ($x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$) os valores para os quais o segundo membro de (19) é holomorfo de [illegible] $\frac{\partial y}{\partial x_0}$, $\frac{\partial y}{\partial y_0}$. Ora, como estas últimas não figuram em (19), $\frac{\partial y_0}{\partial x_0}$, $\frac{\partial y_0}{\partial y_0}$ podem ser quaisquer (aqui são iguais, respectivamente, a zero e à unidade).

O problema que nos propusemos aqui é, pois, diferente. Mas façamos na equação (19) a mudança de variáveis

$$u = x + x_0, \quad v = x - x_0.$$

Então vem

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad x_0 = \frac{u-v}{2}, \qquad \text{e, portanto,}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = f\left(\frac{u+v}{2}, y\right). \qquad (20)$$

O segundo membro desta equação é uma função holomorfa de u, v, y, ~~y_0~~ no domínio do ponto $u=2\alpha$, $v=0$, $y_0=\beta$, $y=\beta$ pois que

$$x-\alpha=\frac{u-2\alpha}{2}+\frac{v}{2}\,,\quad x_0-\alpha=\frac{u-2\alpha}{2}-\frac{v}{2}\,.$$

Ao integral de (19) que, para $x=x_0$, se torna $y=y_0$, corresponde, em (20), o integral de (20) que, para $v=0$, se torna $y=y_0$. Ora, escrevendo (20) sob a forma

$$\frac{\partial y}{\partial v}=f\left(\frac{u+v}{2},y\right)-\frac{\partial y}{\partial u}\,,$$

estamos precisamente nas condições do § 85. Como o integral de (20) será único, será único o integral de (19) nas condições desejadas. Designemos com $\varphi(x,x_0,y_0)$ o integral holomorfo em questão e seja

$$|x-\alpha|\leqq r,\quad |x_0-\alpha|\leqq r,\quad |y_0-\beta|\leqq \rho, \qquad (21)$$

um domínio de existência do mesmo. O integral φ possui as propriedades que vamos referir. Em primeiro lugar, se x_0 e y_0 se supõem constantes, trata-se do integral da equação diferencial $y'=f(x,y)$ que se torna y_0 quando $x=x_0$. E, quaisquer que sejam x_0, y_0 do domínio (21), o integral da equação diferencial é regular quando $|x-\alpha|\leqq r$.

O desenvolvimento de $\varphi(x,x_0,y_0)$ é da forma

$$y=y_0+(x-x_0)\,P(x,x_0,y_0)\,, \qquad (22)$$

onde $P(x,x_0,y_0)$ é uma função regular. Mas (22) pode resolver-se em ordem a y_0, como o dá o teorema geral relativo à existência de funções implícitas. Tira-se

$$y_0=\psi(x,x_0,y)\,,$$

em que o segundo membro é analítico. O importante é que esta função $\psi(x,x_0,y)$ é idêntica à função $\varphi(x,x_0,y)$. De facto sejam x_0 e x_1 dois pontos do domínio (21); o integral que se reduz a y_0 quando $x=x_0$ toma no ponto x_1 um valor y_1, mas, é claro, se pomos x_1 e y_1 nos lugares de x_0 e y_0 e escrevemos

$$y=\varphi(x,x_1,y_1)\,,$$

a função φ toma, para $x=x_0$, o valor y_0, isto é tem-se

$$y_0=\varphi(x_0,x_1,y_1)\,,$$

pois há reciprocidade entre os pares de valores (x_0,y_0) e (x_1,y_1). Assim tem-se

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\varphi(x_1,x_0,y_0)\\ y_0&=\varphi(x_0,x_1,y_1)\end{aligned}\right\}\text{ e, pois, }\left\{\begin{aligned}y&=\varphi(x,x_0,y_0)\\ y_0&=\varphi(x_0,x,y)\,,\end{aligned}\right.\quad \text{q. e. d.}$$

§ 87) <u>Continuação</u> – Posto isto, seja x'_0 um ponto qualquer do domínio (21), isto é tal que $|x'_0 - \alpha| \leq r$. Uma outra propriedade da função $\underline{\varphi}$ é a seguinte: consideremos um integral de (19) que passe no ponto (x_0, y_0) do domínio (21). Esse integral dá y: $y(x, x_0, y_0)$, sendo

$$\varphi(x'_0, x, y) = C, \qquad (23)$$

onde $\underline{C}$ é uma constante. Tomemos, com efeito, o integral holomorfo que, para $x = x_0$, toma o valor y_0. Esse integral $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, toma no ponto x'_0 o valor y'_0, sendo

$$y'_0 = \varphi(x'_0, x_0, y_0).$$

Se, agora, $\underline{x_1}$ é um novo valor de $\underline{x}$ e y_1 o valor correspondente de y, no mesmo integral que, para $x = x_0$, toma o valor y_0, ~~correspondente~~, Esse integral $y = \varphi(x, x_1, y_1)$ toma também no ponto x'_0 o mesmo valor y'_0, pelo que será

$$y'_0 = \varphi(x'_0, x_1, y_1), \quad \text{e, pois,} \quad y'_0 = \varphi(x'_0, x, y)$$

como se queria provar. Dêste modo, tira-se de (23)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x, y) = 0. \qquad (24)$$

Esta equação é satisfeita no ponto (x_0, y_0) e como êste ponto é qualquer, a relação (24) é uma identidade.

Estamos agora em condições de vêr se poderá haver integral não holomorfo de (18) que se torne y_0 quando $x = x_0$. Seja, no plano da variável $\underline{x}$, uma curva Γ que se aproxima indefinidamente do ponto x_0. Se y é uma função da variável $\underline{x}$ da qual podemos seguir o seu prolongamento analítico ao longo de Γ, a referida função tenderá para y_0, quando $\underline{x}$ tende para $\underline{x_0}$, sôbre Γ, se, dado ε, existir η tal que $|y - y_0| < \varepsilon$, quando $|x - x_0| < \eta$, sôbre Γ. Consideremos um ponto (x_0, y_0) do domínio D e façamos na equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

a mudança de variável $Y = \varphi(x_0, x, y)$, em que $\underline{\varphi}$ é a função anteriormente encontrada. A equação transformada será

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x, y).$$

Ora o 2º membro é identicamente nulo, pelo que a equação transformada será

$$\frac{dY}{dx} = 0.$$

Um integral que se torne y_0 quando $x = x_0$, dará um integral $Y(x)$ que se torna y_0 quando $x = x_0$ e tal integral só pode ser $Y = y_0$. Então o integral ~~$y(x)$~~ verificará a equação

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y),$$

de sorte que, tendo em vista a forma da função φ, é

$$y_0 = y + (x-x_0)\,\ell(x_0,x,y).$$

Ora existe uma só raiz $y(x)$ desta equação que se torna y_0, quando $\underline{x}$ é igual a x_0, e tal raiz é uma função holomorfa.

Em resumo: todo o integral de $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ que passa por um ponto do domínio $\underline{D}$ verifica a relação $\varphi(x'_0,x,y)=C$. Esta equação diz-se, por isso, que representa o integral geral da equação proposta, sendo $\underline{C}$ uma constante arbitrária (pelo menos dentro de certos limites). Como podemos escrever ainda

$$y = \varphi(x,x'_0,y'_0),$$

a constante de integração é, sob esta forma, a constante y'_0.

Os raciocínios estendem-se a um sistema de equações diferenciais. Seja o sistema

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,\dots,y_n),\ \frac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,\dots,y_n),\ \dots,\ \frac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,\dots,y_n).$$

Se os segundos membros são holomorfos no domínio do ponto $x=\alpha$, $y_1=\beta_1,\dots,y_n=\beta_n$, o nosso sistema pode considerar-se como um sistema de equações às derivadas parciais, no qual, ao lado das funções $y_1,\dots,y_n$, figuram as variáveis independentes x, x_0, $(y_1)_0,\dots,(y_n)_0$, e trata-se, então, de encontrar integrais holomorfos no domínio do ponto $x_0=\alpha$, $x=\alpha$, $(y_1)_0=\beta_1,\dots,(y_n)_0=\beta_n$, integrais que, para $x=x_0$, se reduzam, respectivamente a $(y_1)_0,\dots,(y_n)_0$.

Suponhamos que tais integrais são os seguintes:

$$y_1 = \varphi_1[x,x_0,(y_1)_0,\dots,(y_n)_0],\quad y_2=\varphi_2,\ \dots,\ y_n=\varphi_n, \tag{25}$$

onde os $\underline{\varphi_i}$ são holomorfos no domínio D definido pelas desigualdades

$$|x_0-\alpha|\leq r,\quad |x-\alpha|\leq r,\quad |\beta_i-(y_i)_0|\leq \rho.$$

Das equações (25) tira-se, inversamente,

$$(y_1)_0=\varphi_1[x_0,x,y_1,y_2,\dots,y_n],\ \dots,\ (y_n)_0=\varphi_n[x_0,x,y_1,\dots,y_n].$$

Cada uma destas funções $\underline{\varphi_i}$ verifica a relação

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}f_1+\dots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n}f_n=0.$$

Fazendo no sistema diferencial proposto a mudança de variáveis

$$Y_i=\varphi_i(x_0,x,y_1,y_2,\dots,y_n),\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

o sistema transformado torna-se em

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} f_n = 0 , \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Todos os integrais do sistema proposto satisfazem a relação

$$\varphi_1(x_0, x, y_1, \dots, y_n) = C_1, \ \dots, \varphi_n(x_0, x, y_1, \dots, y_n) = C_n ,$$

pelo que estas equações se dizem o <u>integral geral</u> do sistema proposto.

Pode ainda demonstrar-se que não há outro sistema de integrais senão os integrais holomorfos, nos quais $y_1, y_2, \dots, y_n$ tendem para $(y_1)_0, \dots, (y_n)_0$ quando $\underline{x}$ tende para x_0. Basta pôr

$$\varphi_i = y_i + (x - x_0)\, P_i\, (x_0, x, y_1, \dots, y_n)$$

e verificar que o jacobiano $\dfrac{D(\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_n)}{D(y_1\, y_2 \dots y_n)}$ se reduz à unidade para $x = x_0$.

Duma maneira mais precisa, a mudança de variáveis $Y_i = \varphi_i[x_0, \cancel{x}, y_1, y_2, \dots, y_n]$ leva a $\frac{dY_i}{dx} = 0$. Visto que a função φ_i, quando x tende para x_0 e cada um dos y_i tende para o seu $(y_i)_0$, tende para $(y_i)_0$, o integral de $\frac{dY_i}{dx} = 0$ a considerar é $Y_i = (y_i)_0$. Estes têem-se as equações

$$(y_i)_0 = \varphi_i[x_0, x, y_1, y_2, \dots, y_n] = (x_0 - x)\, P + y_i$$

a resolver. Estas equações são da forma

$$(y_i)_0 - \beta = y_i - \beta + [(x_0 - \alpha) - (x - \alpha)]\, P\, [x_0, x, y_1, \dots, y_n] ,$$

resolvendo-se em ordem a $y_i - \beta$ sob uma forma única

$$y_i - \beta = (y_i)_0 - \beta + [(x - \alpha) - (x_0 - \alpha)]\ P\, [x, x_0, (y_1)_0, \dots, (y_n)_0]$$

<u>Capítulo VIII</u>

<u>Equações diferenciais - Método das aproximações sucessivas e método de Cauchy - Lipschitz.</u>

§ 88) <u>As aproximações sucessivas</u>. Seja $y(x)$ um integral da equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

que toma o valor $\underline{y_0}$ quando $\underline{x}$ ~~tende~~ ~~para~~ o valor $\underline{x_0}$. Se existe, será da forma

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt . \qquad (A)$$

Inversamente: uma função $y(x)$ que satisfaça a esta última equação verifica a equação diferencial $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ e toma o valor y_0 para $x=x_0$.

A equação (λ), que é uma equação integral, substitui, por si só, as duas condições exigidas ao integral da equação $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Ela presta-se a mostrar como deve utilizar-se o método das aproximações sucessivas, que vamos desenvolver no caso de duas equações. Sejam as equações

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,z), \qquad \frac{dz}{dx}=\varphi(x,y,z), \qquad (\mu)$$

e suponhamos, em primeiro lugar, as variáveis reais. As funções f e φ supõem-se contínuas quando

x varia de x_0 a x_0+a

y " " y_0 a y_0+b

z " " z_0 a z_0+c,

e supõe-se que, neste domínio, as funções f e φ têm, para o seu valor absoluto, limite superior M. Além disso admite-se que há dois números positivos A e B tais que

$$|f(x,y,z)-f(x,y',z')|<A|y-y'|+B|z-z'|, \qquad (\mu')$$
$$|\varphi(x,y,z)-\varphi(x,y',z')|<A|y-y'|+B|z-z'|,$$

quando (x,y,z) e (x,y',z') são dois pontos do domínio anteriormente referido.

Suponhamos $a>0$. Se representarmos com h o mais pequeno dos números a, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{M}$, vamos demonstrar que as nossas equações (μ) admitem no intervalo de x_0 a x_0+h um sistema de integrais contínuos que tomam os valores y_0, z_0 quando $x=x_0$.

Escrevamos (μ) sob a forma

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y(t), z(t)]dt, \qquad z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}\varphi[t, y(t), z(t)]dt,$$

e resolvamos este sistema por aproximações sucessivas:

$$1.^a \begin{cases} y_0(x)=y_0 \\ z_0(x)=z_0 \end{cases}; \quad 2.^a \begin{cases} y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0, z_0)dt \\ z_1(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}\varphi(t, y_0, z_0)dt \end{cases}; \quad 3.^a \begin{cases} y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t), z_1(t)]dt \\ y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\varphi[t, y_1(t), z_1(t)]dt \end{cases};$$

$$(n+1).^a \begin{cases} y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t), z_{n-1}(t)]dt, \\ z_n(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}\varphi[t, y_{n-1}(t), z_{n-1}(t)]dt. \end{cases}$$

Comecemos por verificar que, se x pertence ao intervalo (x_0, x_0+h), este processo pode prolongar-se indefinidamente, isto é, as funções $y_n(x)$ e $z_n(x)$ tomam valores respectivamente compreendidos entre (y_0 e y_0+b) e (z_0 e z_0+c). De facto tem-se

$$|y_1-y_0| < M\,|x-x_0| \leq Mh < b\ , \qquad |z_1-z_0| < c\,.$$

Quando em f e φ se substituem y_1 e z_1 por $y(x)$ e $z_1(x)$ as funções obtidas são contínuas no intervalo (x_0, x_0+h) e os seus valores absolutos são inferiores a M. Da mesma maneira

$$|y_2-y_0| < b, \quad |z_2-z_0| < c\ ,$$

e assim sucessivamente. As funções $y_n(x)$ e $z_n(x)$ são funções contínuas de x no intervalo (x_0, x_0+h) e tais que $|y_n-y_0| < b$, $|z_n-z_0| < c$.

Em segundo lugar vamos verificar que $y_n(x)$ e $z_n(x)$ tendem para limites quando n aumenta indefinidamente. De facto tem-se

$$|y_1(x)-y_0| < M(x-x_0)\ , \qquad |z_1(x)-z_0| < M(x-x_0)\ ,$$

onde x é do intervalo (x_0, x_0+h). Depois vem

$$|y_2(x)-y_1(x)| = \int_{x_0}^{x}\{f[t, y_1(t), z_1(t)] - \varphi[t, y_0, z_0]\}\,dt\ , \quad \text{e, portanto,}$$

$$|y_2(x)-y_1(x)| < \int_{x_0}^{x} A\,|y_1(t)-y_0|\,dt + \int_{x_0}^{x} B\,|z_1(t)-z_0|\,dt < AM\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt + BM\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt\ ,$$

ou seja

$$|y_2(x)-y_1(x)| < (A+B)M\,\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Podemos, assim, chegar a estabelecer as desigualdades

$$\begin{cases} |y_n(x)-y_{n-1}(x)| < M(A+B)^{n-1}\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}\ , \\[2ex] |z_n(x)-z_{n-1}(x)| < M(A+B)^{n-1}\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}\,. \end{cases}$$

Se considerarmos agora as duas séries

$$\begin{aligned} &y_0 + (y_1-y_0) + (y_2-y_1) + \cdots + (y_n-y_{n-1}) + \cdots\ , \\ &z_0 + (z_1-z_0) + (z_2-z_1) + \cdots + (z_n-z_{n-1}) + \cdots\ , \end{aligned} \qquad (V)$$

cujos termos são funções contínuas de x no intervalo (x_0, x_0+h), vê-se que o termo geral é, em valor absoluto, inferior ao da série $M\sum(A+B)^{n-1}\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$, o qual, por sua vez, no intervalo considerado, é inferior ao termo geral da série de termos constantes $M\sum(A+B)^{n-1}\frac{h}{n!}$ Visto que a razão de cada termo para o seu anterior $\dfrac{(A+B)h}{n}$ tende para zero, esta últ ma série é convergente e as séries (V) são, pois, absolutamente convergentes no intervalo (x_0, x_0+h). Quando n aumenta indefinidamente, tem-se, no limite,

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y(t), Z(t)]\,dt, \quad Z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi[t, Y(t), Z(t)]\,dt,$$

se $Y(x)$, $Z(x)$ são as somas de (ν). Para verificar esta última afirmação, escrevamos

$$Y(x) - y_{n-1}(x), \qquad Z(x) - z_{n-1}(x).$$

Estas diferenças convergem uniformemente para zero no intervalo (x_0, x_0+h). Então

$$\int_{x_0}^{x} \{ f[t, Y(t), Z(t)] - f[t, y_{n-1}(t), z_{n-1}(t)] \}\,dt, \qquad (\nu')$$

$$\int_{x_0}^{x} \{ \varphi[t, Y(t), Z(t)] - \varphi[t, y_{n-1}(t), z_{n-1}(t)] \}\,dt,$$

quando $\underline{n}$ aumenta indefinidamente, tendem para zero. De facto, as funções $Y(t), Z(t)$, quando $\underline{t}$ varia entre x_0 e $\underline{x}$ do intervalo (x_0, x_0+h) tomam valores compreendidos, respectivamente, entre y_0 e y_0+b, e z_0 e z_0+c. Então as relações (μ) dão aqui

$$\int_{x_0}^{x} A\,|Y(t) - y_{n-1}(t)|\,dt + B \int_{x_0}^{x} |Z(t) - z_{n-1}(t)|\,dt,$$

como limite superior para o valor absoluto das diferenças (ν').

As funções $Y(x)$ e $Z(x)$ satisfazem a todas as condições enunciadas.

§ 88) <u>Continuação</u> - De facto, façamos a verificação para $Y(x)$, por exemplo. Tem-se

$$Y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots .$$

A primeira relação $\underset{1}{(\nu')}$, pondo $\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f[t, Y(t), Z(t)]\,dt$,

$$\phi(x) - [y_n(x) - y_0],$$

mostra que esta diferença tende uniformemente para zero. Então

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} [y_n(x) - y_0] = Y(x) - y_0,$$

ou seja

$$Y(x) = y_0 + \phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y(t), Z(t)]\,dt,$$

como se queria mostrar. É claro que a derivabilidade de $Y(x)$ e de $Z(x)$ em ordem a x resulta da sua própria expressão por meio do integral.

O método que se emprega é aplicável, evidentemente, qualquer que seja o número das equações. Repousa, essencialmente, sôbre o emprego das desigualdades

$$|f(x, y, z) - f(x, y', z')| < A\,|y - y'| + B\,|z - z'|, \qquad (\varepsilon)$$

$$|\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y', z')| < A\,|y - y'| + B\,|z - z'|.$$

Ora estas desigualdades têm, por exemplo, lugar quando as funções f e φ admitem derivadas para si em ordem a y e z, que sejam contínuas no domínio anteriormente considerado. Por outro lado, se as condições (c) têem lugar não apenas no domínio (x_0, x_0+a), (y_0-b, y_0+b), (z_0-c, z_0+c), mas neste domínio estendido a x entre (x_0-a, x_0+a), é claro que o integral existirá no intervalo (x_0-h, x_0+h), como mostra o processo de demonstração.

§ 89) Aunivocidade da solução – Não existe outro sistema de integrais, diferente do sistema $Y(x)$, $Z(x)$, que tome para $x=x_0$, os valores y_0, z_0. Para o verificar, consideremos o caso duma única equação,

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

Seja $Y_1(x)$ outro integral que, para $x=x_0$, toma o valor y_0. Tem-se

$$Y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, Y_1(t)]dt,$$

sendo $Y_1(x)$ uma função que, quando x fica compreendido entre x_0 e x_0+a', toma valores compreendidos entre y_0-b e y_0+b. Basta para isso, supôr a' suficientemente pequeno e inferior a h e supôr que, de facto, $Y_1(x)$ tende para y_0 quando x tende para x_0, ainda que seja por valores descontínuos.

Ora viu-se atrás que $y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt$,

pelo que vem

$$Y_1(x)-y_n(x)=\int_{x_0}^{x}\{f[t, Y_1(t)]-f[t, y_{n-1}(t)]\}dt.$$

Pondo aqui, sucessivamente, $n=1,2,3,\dots$, vem

$$|Y_1(x)-y_1(x)|<A\int_{x_0}^{x}|Y_1(t)-y_0|dt<Ab(x-x_0)$$

$$|Y_1(x)-y_2(x)|<A^2b\int_{x_0}^{x}(t-x_0)dt=A^2b\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2},$$

etc., até

$$|Y_1(x)-y_n(x)|<A^nb\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\dots n}.$$

Ora, quando n aumenta indefinidamente, o segundo membro desta desigualdade tende para zero uniformemente. Então $y_n(x)$ tende uniformemente para $Y_1(x)$; e como, por outro lado, tende uniformemente para $Y(x)$, é, necessàriamente, $Y_1(x)=Y(x)$.

§ 90) Equações lineares – As condições $h<\frac{b}{M}$, $h<\frac{c}{M}$, como se vê observando a demonstração anterior, intervêem para garantir que as funções intermediárias $y_i(x)$, $z_i(x)$ ficam compreendidas entre (y_0-b, y_0+b), (z_0-c, z_0+c), respectivamente, quando x varia no intervalo (x_0, x_0+h). Se soubermos, a priori, que as funções $f(x,y,z)$ e $\varphi(x,y,z)$, quando x varia de x_0 a x_0+h são contínuas quaisquer que sejam y e z, não se torna necessário ter em vista as referidas condições. Então os integrais dados pelo método de aproximações sucessivas são contínuos e existem no intervalo (x_0, x_0+a), contanto que demonstremos a convergência das séries $\sum(y_i(x)-y_{i-1}(x))$, $\sum(z_i(x)-z_{i-1}(x))$, o que se fará supondo terem lugar as condições (c), quando $\underline{x}$ varia entre x_0 e x_0+a e y, z, y', z' são quaisquer. Basta tomar para $\underline{M}$ um limite superior dos valores que tomam $f(x, y_0, z_0)$, $\varphi(x, y_0, z_0)$ quando $\underline{x}$ varia de $\underline{x_0}$ a $\underline{x_0+a}$.

Tudo se verifica como se disse se, por exemplo, f e φ admitirem derivadas parciais em ordem a y e z que sejam finitas no intervalo (x_0, x_0+a), quaisquer que sejam $\underline{y}$ e $\underline{z}$. Se tomarmos, por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = x + \operatorname{sen} y,$$

ficamos sabendo, em face dos raciocínios anteriores, que os seus integrais são funções contínuas de $\underline{x}$, quando esta variável varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Consideremos, em particular, os sistemas de equações diferenciais lineares, tipo

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n + b_n, \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

nos quais os coeficientes $\underline{a_{ik}}$, $\underline{b_i}$ são funções de $\underline{x}$. Se todas essas funções são contínuas no intervalo (x_0, x_1), os integrais de tais equações são igualmente contínuos no mesmo intervalo. Quando os coeficientes a_{ik}, b_i são, por exemplo, polinómios, os integrais são contínuos no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Trata-se dum resultado que já nos foi dado pelo método do Cálculo dos limites. Os integrais das equações lineares só podem admitir por pontos singulares os pontos singulares dos seus coeficientes.

§ 91) Observação. – Acontece, muitas vezes, que os coeficientes a_{ik}, b_i do sistema de equações diferenciais lineares anterior são funções dum certo número de parâmetros, por exemplo, dum parâmetro $\underline{\lambda}$, do qual são funções contínuas quando $\underline{\lambda}$ varia num certo domínio D. Se, quando λ varia em D, têem lugar as diferentes condições aludidas nos dois §§ anteriores, os integrais aparecem como séries de funções uniformemente convergentes de funções contínuas de λ, e serão, por isso, funções contínuas do parâmetro $\underline{\lambda}$ no domínio D. Se os $\underline{a_{ik}}$, $\underline{b_i}$ são funções inteiras de λ, isto é, contínuas qualquer que seja λ, podem obter-se directamente os desenvolvimentos dos integrais segundo as potências de λ escrevendo

$$y_i = u_{i0} + u_{i1}\lambda + u_{i2}\lambda^2 + \cdots + u_{ik}\lambda^k + \cdots, \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

onde os u_{ik} são funções de x, e escrevendo as igualdades que resultam [illegible]

tificação por substituição no sistema proposto. Bem entendido que as funções
$u_{i0}(x)$ serão supostas tornarem-se iguais aos valores iniciais dos integrais quando $x = x_0$, enquanto se os $u_{ik}(x)$, com $k \neq 0$ se supõem nulos. O processo é de via algébrica, como poderia ver-se.

§ 92) Extensão às funções analíticas - O método das aproximações sucessivas pode estender-se às funções de variável complexa. Precisa-se para isso, em primeiro lugar, conseguir desigualdades equivalentes às desigualdades (2). Suponhamos, por exemplo, que se trata duma função $f(x)$ duma única variável. Se é uma função holomorfa numa área $\underline{Q}$ limitada por uma curva convexa $\underline{C}$ e sôbre a própria curva, designemos com A o máximo de $|f'(x)|$ na mesma região. Então a diferença $f(x_2)-f(x_1)$, onde $\underline{x_2}$ e $\underline{x_1}$ são dois pontos quaisquer da referida região, pode escrever-se

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx,$$

podendo o integral tomar-se ao longo da recta que une $\underline{x_1}$ com $\underline{x_2}$. Então é

$$|f(x_2)-f(x_1)|<A\,|x_2-x_1|.$$

Analogamente, seja $f(x,y)$ uma função holomorfa das duas variáveis $\underline{x}$ e $\underline{y}$, quando estas variáveis ficam em duas regiões Q e Q', limitadas por duas curvas convexas $\underline{C}$ e $\underline{C}'$. Se $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são os máximos de $|f'_x|$ e $|f'_y|$ no domínio em questão, tem-se

$$f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=[f(x_2,y_2)-f(x_1,y_2)]+[f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)],$$

e, por consequência, tendo em vista o que acaba de provar-se para uma variável,

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|\leqq A|x_2-x_1|+B|y_2-y_1|.$$

Qualquer que seja o número de variáveis, o resultado é análogo.

Limitemo-nos, então, a uma única equação. Seja

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

em que o segundo membro é holomorfo quando $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|\leqq b$. Se $\underline{M}$ é o máximo de $|f(x,y)|$ naquele domínio e se $\underline{h}$ é o menor dos números a e $\frac{b}{M}$, descrevamos à volta do ponto $\underline{x_0}$, no plano da variável $\underline{x}$, um círculo C_h de raio $\underline{h}$. Então pondo

$$y_1=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt,\quad y_2=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,y_1(t)]\,dt,\ \ldots$$

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,y_{n-1}(t)]\,dt,$$

onde $\underline{x}$ é um ponto interior a $\underline{C_h}$, vê-se que é

$$|y_1-y_0|<Mh\leqq b,\quad |y_2-y_0|\leqq b,\ \ldots;\quad |y_n-y_0|<b.$$

As funções $y_1\,y_2,\ldots,y_n,\ldots$ definidas por êste processo são funções holomorfas de $\underline{x}$ no círculo C_h, podendo o processo ser indefinidamente prosseguido.

Por outro lado é

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \{ f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)] \} dt .$$

Imaginemos que o integral do segundo membro é tomado ao longo da linha recta (x_0, x); então, se $\underline{A}$ é o máximo de $|f'_y|$, vem

$$| f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)] | < A | y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) | .$$

O nosso objectivo é, como se sabe, comparar $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$ ao termo geral duma série uniformemente convergente, ou seja, de facto mostrar que se tem

$$| y_n(x) - y_{n-1}(x) | < M A^{n-1} \frac{|x-x_0|^n}{1.2\ldots n} .$$

Ora, para $n=1$,

$$| y_1(x) - y_0(x) | < M |x - x_0| ,$$

pelo que será fácil estabelecer agora a desigualdade desejada admitindo que tem lugar para $n-1$. Se for, realmente,

$$| y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) | < M A^{n-2} \frac{|t-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

e se pusermos $x = x_0 + re^{i\theta}$, desde que se faça a mudança de variável $t - x_0 = \rho e^{i\theta}$, vem

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int^{r} \{ f[t, y_{n-1}(t)] - f[t, y_{n-2}(t)] \} e^{i\theta} d\rho ,$$

onde, é claro, $t = x_0 + \rho e^{i\theta}$. Então tira-se

$$| y_n(x) - y_{n-1}(x) | < \int_0^r M A^{n-1} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(n-1)!} = M A^{n-1} \frac{r^n}{n!} = \frac{M A^{n-1} |x-x_0|^n}{n!} ,$$

como se deseja. Agora, como no caso real, deve considerar-se a série

$$[y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \cdots .$$

Esta série é uniformemente convergente no círculo C_h, e, como cada termo é uma função holomorfa em C_h, a sua soma será, igualmente, uma função holomorfa em C_h. Verifica-se, em seguida, que essa soma $Y(x)$ satisfaz à equação diferencial proposta, tomando, aliás, o valor y_0, quando $x = x_0$.

É claro que o método do <u>cálculo dos limites</u> levará ao mesmo integral $Y(x)$; mas o raio do círculo de convergência por ele fornecido é, em geral, inferior ao que fornece o método das aproximações sucessivas.

Por outro lado, o que se disse para as equações diferenciais lineares de 1.ª ordem é igualmente válido no domínio complexo. Se os coeficientes $\underline{a_{ik}}$ e $\underline{b_i}$ do sistema linear em causa admitem, no seu conjunto, uma <u>estrela rectilínea</u> E relativa ao ponto x_0, o integrais do sistema são funções holomorfas no interior da estrela. É evidente que, dada uma região Ω do interior da estrela, as séries a que se é levado pelo método das aproximações sucessivas são uniformemente convergentes em Ω.

§ 93) Método de Cauchy-Lipschitz - O nome dêste método provém do facto de ter sido o primeiro método dado por Cauchy e ter sido simplificado por Lipschitz. Seja a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Para se vêr a índole do método, notemos que a equação $\frac{dy}{dx} = f(x)$ tem um integral que, para $x=x_0$, toma o valor y_0, o qual pode considerar-se como limite da soma

$$y_0 + f(x_0)(x_1-x_0) + f(x_1)(x_2-x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(x - x_{n-1}),$$

quando n aumenta indefinidamente, de tal modo que cada um dos intervalos parciais $x_i - x_{i-1}$ tenda para zero, como se vê do facto de o mesmo integral ter a forma

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

É êste resultado que Cauchy estendeu à equação proposta.

A função $f(x,y)$, das variáveis reais x e y, supõe-se contínua quando x varia de x_0 a x_0+a e y varia de y_0-b a y_0+b. Em seguida admite-se que tem lugar a condição de Lipschitz:

$$\left| f(x,y') - f(x,y) \right| < A\,|y'-y|.$$

Esta condição foi já utilizada no método das aproximações sucessivas de E. Picard.

Posto isto, seja M o limite superior de $|f(x,y)|$ no domínio atrás indicado e seja h o mais pequeno dos números a e $\frac{b}{M}$ (supõe-se $a>0$ e $b>0$). Trata-se de demonstrar que a nossa equação admite no intervalo (x_0, x_0+h) um integral contínuo que toma o valor y_0, para $x=x_0$.

Seja x um ponto do intervalo (x_0, x_0+h). Tomemos os pontos intermediários $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}$, onde se supõe $x_i < x_{i+1}$; em seguida ponha-se

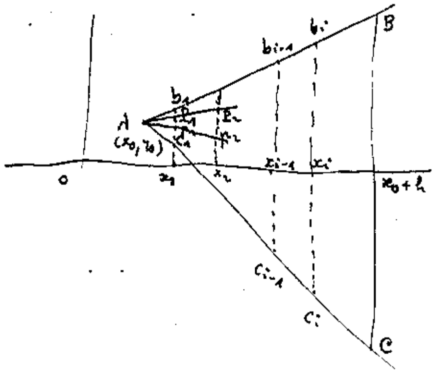
$$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1-x_0), \quad y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)(x_2-x_1), \ldots,$$

$$y_n = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1-x_0) + f(x_1,y_1)(x_2-x_1) + \cdots + f(x_{n-1},y_{n-1})(x-x_{n-1}).$$

Esta soma é análoga à que acima se escreveu, correspondente ao caso em que não intervinha, no 2.º membro, a variável y.

O nosso objectivo é procurar se a soma y_n tende para um limite, quando n aumenta indefinidamente. Para isso, introduzi-remos aqui, como no caso da definição de integral definido, ~~duas~~ somas análogas às somas S e s de Darboux.

Para isso, consideremos o triângulo da figura seguinte:



Trata-se do triângulo $\hat{ABC}$ formado pelas rectas $X = x_0 + h$,

$$Y = y_0 + M(X - x_0), \quad Y = y_0 - M(X - x_0),$$

onde h e M têem o significado acima referido. Então a função $f(x, y)$ é contínua no interior e sôbre os lados dêste triângulo, sendo o seu valor absoluto $\leqq M$, como imediatamente se observa. Por meio das paralelas ao eixo dos yy tirados pelos pontos de abcissas $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots$, o triângulo fica decomposto em trapézios isosceles $b_{i-1} b_i c_{i-1} c_i$.

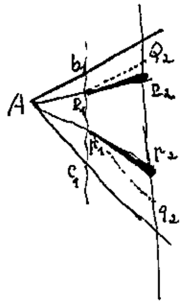
§ 93) Continuação - Designemos com M_1 e m_1 o máximo e o mínimo de $f(x, y)$ no triângulo $A b_1 c_1$. Será, é claro,

$$-M \leqq m_1 \leqq M_1 \leqq M.$$

Pelo ponto A tiremos agora as rectas de coeficientes angulares M_1 e m_1, que definem os pontos P_1 e p_1 da figura. As ordenadas dêstes pontos (da recta $X = x_1$) são

$$Y_1 = y_0 + M_1(x_1 - x_0), \quad y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0),$$

devendo ter-se o cuidado de não confundir êste y_1 com o y_1 atraz mencionado. É claro que P_1 e p_1 pertencem ao triângulo $A\hat{B}C$ e tem-se $Y_1 > y_1$.

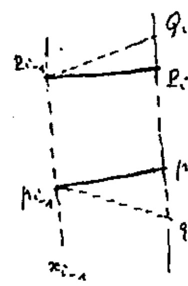


Pelos pontos P_1 e p_1 tiremos, em seguida, as rectas $\overline{P_1 Q_2}$ e $\overline{p_1 q_2}$ paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Se M_2 e m_2 são os valores máximo e mínimo de $f(x, y)$ no trapézio $P_1 Q_2 q_2 p_1$, tiremos as rectas $\overline{P_1 P_2}$ e $\overline{p_1 p_2}$ de coeficientes angulares M_2 e m_2. As ordenadas de P_2 e p_2 são

$$Y_2 = Y_1 + M_2(x_2 - x_1), \quad y_2 = y_1 + m_2(x_2 - x_1), \quad \text{com}$$

$$Y_2 > y_2 \quad \text{e} \quad Y_2 - y_2 \geqq Y_1 - y_1.$$

O processo continua-se como indica a figura abaixo. No trapézio $P_{i-1} Q_i q_i p_{i-1}$ designam-se com M_i e m_i o máximo e o mínimo de $f(x, y)$. Obtêem-se, do modo que acaba de indicar-se, duas linhas poligonais $A P_1 P_2 \dots P_{i-1} P_i \dots P_n$ (que designaremos com L) e $A p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_i p_n$ (que designaremos com l). Os pontos P_n e p_n pertencem à recta $X = x$. Conforme o método usado, podemos afirmar que ambas as linhas L e l estão no interior (ou sô



bre os lados do triângulo $A\overset{\triangle}{B}C$, ficando a linha $\underline{L}$ acima de $\underline{l}$.
A distância entre dois pontos de $\underline{L}$ e $\underline{l}$ situados na mesma paralela ao eixo Oy não pode diminuir, como se vê do estudo das diferenças $Y_i - y_i$. Ora as expressões de $\underline{Y_n}$ e y_n são

$$Y_n = y_0 + M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x - x_{n-1})$$

$$y_n = y_0 + m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x - x_{n-1}),$$

análogas às somas $\underline{S}$ e $\underline{s}$ de Darboux, que se encontram na teoria do integral def nido. Poremos

$$S = Y_n, \quad s = y_n.$$

É claro que a cada modo de subdivisão do intervalo (x_0, x) correspondem linhas diferentes $\underline{L}_1$ e $\underline{l}_1$. Se, em particular, dividirmos cada intervalo (x_{i-1}, x_i) por outros pont de modo a obter intervalos menores, passa-se das linhas $\underline{L}$, $\underline{l}$ a outras linhas $\underline{L}'$, $\underline{l}'$, às quais corresponderão as somas $\underline{S}'$ e $\underline{s}'$. É claro que a linha $\underline{L}'$ se encontra aba xo da linha $\underline{L}$ e que a linha $\underline{l}'$ se encontra acima de $\underline{l}$. Por outro lado tem-se, e consequência,

$$S' \leq S, \quad s' \geq s.$$

Posto isto, consideremos duas subdivisões quaisquer do intervalo (x_0, x), às quai correspondem os dois pares de somas (S, s), (S_1, s_1). Por um processo que consiste em tomar para pontos de subdivisão todos os pontos correspondentes às duas subdivisõ anteriores, chega-se a provar que, para as duas subdivisões quaisquer, é

$$s < S_1, \quad s_1 < S$$

(ao lado das relações $s < S$, $s_1 < S_1$).

Consideremos, então, o conjunto dos números S e designemos com $\underline{I}$ o seu limite inferior; se designarmos com I' o limite superior das somas s, tem-se $I' \leq I$. Suponhamos, questão que trataremos em seguida, que a diferença $S-s$ tende para zero quando o número de pontos do intervalo aumenta indefinidamente, de modo que cada intervalo parcial $x_i - x_{i-1}$ tenda para zero. Então, visto que é

$$S - s = (S - I) + (I - I') + (I' - s),$$

vê-se que cada diferença $S - I$, $I - I'$, $I' - s$ tende para zero. Logo $I' = I$ e as duas somas têm o limite comum I:

$$\lim S = \lim s = I.$$

Resta-nos indagar o que se passa com a diferença $S-s$. É aqui que intervém a <u>condição de Lipschitz</u>. Vamos ver, com efeito, que não basta que seja $f(x,y)$ uma função contínua, mas que intervém a referida condição.

Sejam $\underline{Y_i}$ e y_i as ordenadas dos pontos $\underline{P}_i$ e p_i e ponhamos

$$\delta_i = Y_i - y_i.$$

Visto que a função $f(x,y)$ é contínua no triângulo ABC, pode pôr-se

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \lambda$$

sempre que a distância dos pontos (x,y) e (x',y') seja inferior a $\underline{\sigma}$, supondo que os pontos são do interior do triângulo (ou dos lados).

Posto isto, suporemos, no raciocínio acima feito, que as diferenças $x_i - x_{i-1}$ são inferiores a $\underline{\sigma}$. Ora sendo

$$\delta_{i-1} = Y_{i-1} - y_{i-1} = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + \cdots + (M_{i-1} - m_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})$$

$$\delta_i = Y_i - y_i = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + \cdots + (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

vê-se que é

$$\delta_i = \delta_{i-1} + (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ora é

$$M_i - m_i = f(x'_i, y'_i) - f(x''_i, y''_i) =$$

$$= [f(x'_i, y'_i) - f(x''_i, y'_i)] + [f(x''_i, y'_i) - f(x''_i, y''_i)],$$

onde (x'_i, y'_i) e (x''_i, y''_i) são as coordenadas de dois pontos do trapézio $P_{i-1} Q_i q_i p_{i-1}$.

Ora a continuidade e a condição de <u>Lipschitz</u> dão

$$M_i - m_i < \lambda + K|y'_i - y''_i|$$

Como a diferença $y''_i - y'_i$ é, quando muito, igual a $\delta_{i-1} + 2M(x_i - x_{i-1})$, como o mostra a expressão de $\underline{\delta_i}$, tem-se

$$M_i - m_i < \lambda + K\delta_{i-1} + 2MK(x_i - x_{i-1}).$$

Suponhamos agora todos os intervalos $(x_i - x_{i-1})$ suficientemente pequenos para que

$$2MK(x_i - x_{i-1}) < \lambda$$

Então $M_i - m_i < 2\lambda + K\delta_{i-1}$, pelo que se terá

$$\delta_i < \delta_{i-1} + (x_i - x_{i-1})(2\lambda + K\delta_{i-1}) \quad \text{ou}$$

$$\delta_i < \delta_{i-1}[1 + K(x_i - x_{i-1})] + 2\lambda(x_i - x_{i-1}),$$

ou ainda

$$\delta_i + \frac{2\lambda}{K} < \left(\delta_{i-1} + \frac{2\lambda}{K}\right)[1 + K(x_i - x_{i-1})].$$

Terá <u>a fortiori</u>

$$\delta_i + \frac{2\lambda}{K} < \left(\delta_{i-1} + \frac{2\lambda}{K}\right) e^{K(x_i - x_{i-1})},$$

como se vê do desenvolvimento da exponencial. Fazendo nesta última desigualdade $i=1,2,3,\dots,n$, tem-se

$$\delta_1 + \frac{2\lambda}{K} < \frac{2\lambda}{K} e^{K(x_1-x_0)},$$

$$\delta_2 + \frac{2\lambda}{K} < \left(\delta_1 + \frac{2\lambda}{K}\right) e^{K(x_2-x_1)},$$

$$\delta_n + \frac{2\lambda}{K} < \left(\delta_{n-1} + \frac{2\lambda}{K}\right) e^{K(x-x_{n-1})}.$$

Por produto destas desigualdades obtem-se

$$\delta_n + \frac{2\lambda}{K} < e^{K(x-x_0)} \frac{2\lambda}{K},$$

ou seja

$$S - s = \delta_n < \frac{2\lambda}{K}\left[\text{[illegible]}^{K(x-x_0)} - 1 \right]$$

Como o número positivo λ pode ser escolhido arbitràriamente, vê-se que $S-s$ tende, na verdade, para zero. Logo

$$\lim S = \lim s = I = F(x)$$

A função $F(x)$, que acabamos de definir, existe, pelo menos, no intervalo $(x_0, x_0+$
Vamos precisamente provar que $F(x)$ é um integral da equação proposta, o qual se reduz a y_0, quando $x = x_0$.

De facto, quando os intervalos parciais tendem para zero, as curvas $\underline{L}$ e $\underline{l}$ tendem para uma mesma curva limite $\mathcal{C}$ e as extremidades de $\underline{L}$ e $\underline{l}$ para um ponto limite, extremo da curva limite. A curva limite $\mathcal{C}$ fica constantemente situada entre as poligonais $\underline{L}$ e $\underline{l}$ e passa no ponto $\underline{A}$. A ordenada dum ponto de $\mathcal{C}$ é precisamente, em cada ponto $\underline{x}$, dada pela função $F(x)$ acima definida.

Uma vez definida esta curva $\underline{\mathcal{C}}$ e a função $F(x)$, consideremos agora duas linhas poligonais $\underline{L}$ e $\underline{l}$ quaisquer, supostas prolongadas até ao lado $\underline{BC}$ do triângulo $A\hat{B}C$. Na construção de $\underline{L}$ e $\underline{l}$ apenas supusemos que os intervalos (x_{i-1}, x_i) são inferiores ao menor dos números $\rho, \frac{\lambda}{2MK}$, números que nada têem com as linhas poligonais. Designemos com $\mathcal{L}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$ as duas funções contínuas que representam as ordenadas de $\underline{L}$ e de $\underline{l}$, no intervalo (x_0, x_0+h). A diferença $\mathcal{L}(x) - \mathcal{Q}(x)$ é inferior a $\frac{2\lambda}{K}\left(e^{Kh} - 1\right)$ e o valor absoluto da diferença entre $F(x)$ e qualquer das funções $\mathcal{L}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$ é ainda inferior a $\mathcal{L}(x) - \mathcal{Q}(x)$. Como $\underline{\lambda}$ é uma quantidade tão pequena quanto se queira, vêmos que se podem determinar funções $\mathcal{L}_1(x), \mathcal{L}_2(x), \dots, \mathcal{L}_n(x), \dots$ constituindo uma sucessão convergindo uni formemente para f(x), pelo que esta função será contínua.

Representemos a expressão

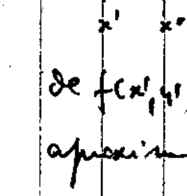
$$y_n = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1-x_0) + f(x_1,y_1)(x_2-x_1) + \cdots + f(x_{n-1},y_{n-1})(x-x_{n-1}).$$

A quantidade y_n aqui definida fica compreendida entre S e $\underline{s}$, pelo que, quando os intervalos $(x_i - x_{i-1})$ tendem para zero o ponto (x, y_n) tende para o ponto $(x, f(x))$

Posto isto, notamos que, se aplicamos a construção a partir dum ponto $M(x', y')$ da curva $\underline{C}$, obtemos duas linhas poligonais L', l' que ficarão entre duas linhas poligonais $\underline{L}$, $\underline{l}$ quaisquer, construídas a partir de $A(x_0, y_0)$. Essas linhas tenderão para a porção de curva $\underline{C}$ compreendida entre $M'(x', y')$ e o lado $\overline{BC}$ do triângulo $\overset{4}{A}BC$.

Se (x', y') e (x'', y'') fôrem dois pontos vizinhos da curva C, com $x'' > x'$, o coeficiente angular da recta $\overline{M'M''}$ está compreendido entre os valores máximo e mínimo da função $f(x,y)$ quando o ponto (x,y) é do interior do triângulo definido pelas 3 rectas

$$X = x'', \quad Y = y' + M(X - x'), \quad Y = y' - M(X - x'),$$



como se vê tendo em conta o processo da construção das linhas poligonais $\underline{L}$ e $\underline{l}$ e o facto de $\underline{C}$ estar sempre entre essas linhas poligonais.

Quando a diferença $x'' - x'$ é suficientemente pequena, o máximo e o mínimo de $f(x,y)$ no triângulo referido diferirão de $f(x', y')$ e $f(x'', y'')$ tão pouco quanto se queira. Quando o ponto (x'', y'') se aproxima indefinidamente do ponto (x', y') o coeficiente angular de $\overline{M'M''}$ aproxima-se indefinidamente de $f(x', y')$. Assim a função $F(x)$ satisfaz à equação diferencial proposta. Por outro lado é $F(x_0) = y_0$, pelo que o teorema enunciado se encontra completamente demonstrado.

Introd. à Mecânica Celeste

①

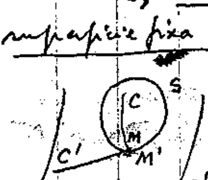
Parte 2ª

Memorial de Mecânica

Capítulo I

Princípio dos trabalhos virtuais

1) Movimento duma superfície S que está constantemente em contacto com uma superfície fixa S'. – Na figura junta supõe-se o contacto realizado num ponto. Um ponto M de



S coincide com um ponto M' de S', num instante t. Num instante t+dt posterior um outro ponto M_1 de S coincidirá com um segundo ponto M_1' de S'. O lugar dos pontos M', em S', é uma curva C', e o lugar dos pontos M, em S, é uma curva C. Consideremos um ponto que esteja constantemente em C', coincidindo em cada instante com M. O seu movimento é realizado com uma velocidade V_{ab}, situada no plano tangente comum às duas superfícies. Pode imaginar-se como resultante do movimento de M sôbre C, ao qual corresponde a velocidade (relativa) V_r, e do movimento de M com respeito a S' (movimento de arrastamento), ao qual corresponde a velocidade V_a. É:

$$\vec{V}_{ab} = \vec{V}_r + \vec{V}_a .$$

Ora V_r e V_{ab} estão no plano tangente comum a S e S', no ponto M. Logo a velocidade V_a do ponto M, de S, com respeito a S', está situada no mesmo plano.

Quando essa velocidade V_a é diferente de zero, diz-se que S escorrega sôbre S'. Quando $V_a = 0$, diz-se que S rola e gira sôbre S'.

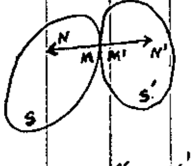
Neste último caso o estado das velocidades de S, no instante t, é dado por uma rotação instantânea ω, passando por M. A projecção ω_n de ω sôbre a normal comum a S e S' diz-se giração, a projecção ω_t sôbre o plano tangente diz-se rolamento.

2) Caso em que S e S' são móveis – Se a superfície S' é igualmente móvel, a velocidade V_a, de M com respeito a S', que se considerou no § anterior, é a velocidade relativa V_r de M com respeito a S'. Essa velocidade encontra-se no plano tangente comum às duas superfícies. A velocidade absoluta de M é então a resultante de V_r e da velocidade do ponto M' de S'. A definição de rolamento e de giração, no caso de $V_r = 0$, faz-se como no exemplo anterior.

3) Lema preliminar. – Antes de demonstrarmos o princípio dos trabalhos virtuais, vamos ainda demonstrar o lema seguinte: num sistema sujeito a ligações, que não desenvolvem atrito, a soma dos trabalhos virtuais das fôrças de ligação, num deslocamento qualquer compatível com as mesmas ligações, é igual a zero.

A demonstração faz-se por uma verificação directa nos diferentes casos de ligações que se podem apresentar. Nós vamos limitar-nos aos dois exemplos de ligações contidos nos dois parágrafos precedentes, por serem os que podem revestir-se duma certa dificuldade.

Quando uma superfície S escorrega sôbre uma superfície fixa S', a reacção de S' sôbr S é normal ao plano tangente comum. Um deslocamento virtual compatível com as ligações é, co se viu, um deslocamento ao qual corresponde uma velocidade situada no mesmo plano tangente comum. Logo trabalho da reacção é nulo. Se a velocidade V_a é nula, a reacção de S' sôbre S, opondo-se ao escorregamento, não é normal, como anteriormente. Mas o trabalho virtual da reacção é ainda nulo num deslocamento virtual compatível com as ligações, porque a velocidade virtual correspondente é nula.



Passemos ao segundo caso, em que S e S' são simultaneamente móveis. Se há es regamento, a velocidade relativa V_r de M, em respeito a S', não é nula. A velo dade absoluta V_M, de M, num movimento (real ou virtual) qualquer é

$$V_M = V_r + V_{M'},$$

sendo $V_{M'}$ a velocidade absoluta de M', no movimento real ou virtual. As reac N e N', de S' sôbre S e de S sôbre S', são iguais e de sinais contrários e normais ao plano tangente comum às duas superfícies. O trabalho virtual a avaliar é

$$\delta\tau = (N \cdot V_M)\,\delta t + (N' \cdot V_{M'})\,\delta t,$$

sendo δt o tempo correspondente ao deslocamento virtual. Mas é

$$(N \cdot V_M) = (N \cdot V_r) + (N \cdot V_{M'}) = (N \cdot V_{M'})$$

e como

$$(N' \cdot V_{M'}) = -(N \cdot V_{M'}), \text{ é tanto}$$

$$\delta\tau = \left[(N \cdot V_M) + (N' \cdot V_{M'})\right]\delta t = \left[(N \cdot V_{M'}) - (N \cdot V_{M'})\right]\delta t = 0,$$

como se queria mostrar.

Finalmente, consideremos o caso em que V_r é nulo, para o qual as reacções mú tuas, iguais e de sinais contrários, não são normais ao plano tangente comum. Um deslocamento compatível com as ligações tem de manter $V_r = 0$. Então a velocidade absoluta de M coincide com a velocidade absoluta de M', sendo

$$V_M = V_{M'}.$$

A acção de S' sôbre S é uma fôrca R; e, a de S sôbre S', uma fôrça −R. Então

$$(R \cdot V_M) - (R \cdot V_{M'}) = (R \cdot V_M) - (R \cdot V_M) = 0,$$

como se queria mostrar.

O lema, como se disse, demonstra-se sucessivamente para os diferentes casos que se po-
dem apresentar. Sob um ponto de vista geométrico geral, definem-se as ligações como sendo liga-
ções sem atrito, sempre que o nosso lema tem lugar.

2) Princípio dos trabalhos virtuais - O princípio enuncia-se assim: é necessá-
rio e basta, para que um sistema sujeito a ligações sem atrito esteja em equilíbrio, que a soma dos
trabalhos das fôrças directamente aplicadas, num deslocamento virtual compatível com as li-
gações, seja igual a zero.

Sigamos, como até aqui, o livro de Paul Appell. Se o sistema está em equilíbri
cada ponto está em equilíbrio mediante as ligações e as fôrças directamente aplicadas. Num desloca
mento virtual compatível com as ligações, o trabalho de todas as fôrças é nulo; mas, como o traba-
lho das ligações é nulo, será igualmente nulo o trabalho das fôrças directamente aplica-
das. Passemos à inversa. Vamos demonstrá-la por absurdo, verificando que se, nas condições
do enunciado, o sistema não estivesse em equilíbrio, seria possível encontrar um movimento virtu
para o qual o trabalho das fôrças directamente aplicadas seria positivo.

Não sendo a posição considerada uma posição de equilíbrio, o sistema entra em mo-
vimento, quando se abandona às fôrças solicitantes. Cada ponto se deslocará no sentido da result
te das fôrças que sôbre ele actuam. Tal deslocamento real é também um deslocamento virtual
compatível com as ligações, pelo que o trabalho das ligações será nulo. Resta o trabalho das
fôrças directamente aplicadas, que será positivo, contra a hipótese.

3) ~~3)~~ A equação geral da Dinâmica - O princípio dos trabalhos virtuais apli-
ca-se aos sistemas de ligações bilaterais, holónomas ou não, conforme a definição geral que
dele se dão, ~~[illegible]~~ correspondente ao caso em que não há atrito.

Ele permite deduzir imediatamente a chamada equação geral da Dinâmica
Imaginemos um sistema sujeito a ligações bilaterais sem atrito, podendo as referidas ligações depender do
tempo. Em cada instante t, há equilíbrio, mediante as ligações, entre as fôrças de inércia
e as fôrças directamente aplicadas. Assim o trabalho das ligações, das fôrças de inércia e
das fôrças directamente aplicadas é nulo, em cada instante, para ~~em~~ qualquer deslocamento virtual compatível com
as ligações, tais como elas existem ~~no~~ no referido instante. Mas como o trabalho das ligações
é nulo, ~~será~~ será nulo o trabalho das fôrças directamente aplicadas e das fôrças de inércia.

Assim tem lugar a igualdade

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\left(m_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\delta x_\nu+\left(m_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2}-Y_\nu\right)\delta y_\nu+\left(m_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2}-Z_\nu\right)\delta z_\nu\right]=0, \quad \ldots\ldots (1)$$

se os pontos do sistema forem em número de $\underline{n}$, se o de ordem $\underline{\nu}$ tiver a massa m_ν e estiver solicitado por forças directamente aplicadas de resultante (X_ν, Y_ν, Z_ν).

É a equação anterior que constitui a equação geral da Dinâmica.

4) Redução das equações do movimento ao número mínimo - Quando o deslocamento virtual mais geral compatível com as ligações, tais quais elas existem no instante t, se obtiver por variações $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ de $\underline{k}$ parâmetros, diz-se que o sistema tem $\underline{k}$ graus de liberdade. Esta definição, tal como a equação geral da Dinâmica, aplica-se indistintamente aos sistemas holónomos e não holónomos.

Será pois

$$\begin{cases}\delta x_1 = a_{11}\delta q_1 + a_{12}\delta q_2 + \cdots + a_{1k}\delta q_k,\\ \delta y_1 = b_{11}\delta q_1 + b_{12}\delta q_2 + \cdots + b_{1k}\delta q_k,\\ \delta z_1 = c_{11}\delta q_1 + c_{12}\delta q_2 + \cdots + c_{1k}\delta q_k,\end{cases}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$\begin{cases}\delta x_n = a_{n1}\delta q_1 + a_{n2}\delta q_2 + \cdots + a_{nk}\delta q_k,\\ \delta y_n = b_{n1}\delta q_1 + b_{n2}\delta q_2 + \cdots + b_{nk}\delta q_k,\\ \delta z_n = c_{n1}\delta q_1 + c_{n2}\delta q_2 + \cdots + c_{nk}\delta q_k,\end{cases}$$

se supomos que o sistema é formado por $\underline{n}$ pontos materiais.

A substituição das variações anteriores na equação geral da Dinâmica dá

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\left(m_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)(a_{\nu1}\delta q_1+a_{\nu2}\delta q_2+\cdots+a_{\nu k}\delta q_k)+\left(m_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2}-Y_\nu\right)(b_{\nu1}\delta q_1+b_{\nu2}\delta q_2+\cdots+b_{\nu k}\delta q_k)+\right.$$
$$\left.+\left(m_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2}-Z_\nu\right)(c_{\nu1}\delta q_1+c_{\nu2}\delta q_2+\cdots+c_{\nu k}\delta q_k)\right]=0,$$

ou seja

$$\delta q_1\left\{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}a_{\nu1}+\frac{d^2y_\nu}{dt^2}b_{\nu1}+\frac{d^2z_\nu}{dt^2}c_{\nu1}\right)-\sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu a_{\nu1}+Y_\nu b_{\nu1}+Z_\nu c_{\nu1})\right\}$$
$$+\delta q_2\left\{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}a_{\nu2}+\frac{d^2y_\nu}{dt^2}b_{\nu2}+\frac{d^2z_\nu}{dt^2}c_{\nu2}\right)-\sum_{\nu=1}^{n}(X_\nu a_{\nu2}+Y_\nu b_{\nu2}+Z_\nu c_{\nu2})\right\}$$
$$+\cdots=0,$$

que podemos escrever $(P_1-Q_1)\delta q_1+(P_2-Q_2)\delta q_2+\cdots+(P_k-Q_k)\delta q_k=0,$

com $P_i=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\left(a_{\nu i}\frac{d^2x_\nu}{dt^2}+b_{\nu i}\frac{d^2y_\nu}{dt^2}+c_{\nu i}\frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right)$, $Q_i=\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\nu i}X_\nu+b_{\nu i}Y_\nu+c_{\nu i}Z_\nu)$.

Visto que $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ são quaisquer, as equações do movimento, em número igual ao número de graus de liberdade, são

$$P_1 - Q_1 = 0, \quad \dots, \quad P_k - Q_k = 0.$$

5) ~~7~~) Caso dos sistemas holónomos – Se as ligações se exprimem por equações sob forma finita relacionando o tempo com as coordenadas dos pontos dos sistemas, por ex.,

$$f_1(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \dots, x_n y_n z_n, t) = 0,$$

$$- - - - - - - - -$$

$$f_h(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \dots, x_n y_n z_n, t) = 0,$$

o número de graus de liberdade do sistema (então chamado holónomo) é $k = 3n - h$.

Se k das quantidades $x_i y_i z_i$ se exprimem em função de k parâmetros $q_1, q_2, \dots, q_k$, as h ligações anteriores exprimirão os restantes $x_i y_i z_i$ em função dos mesmos parâmetros. Assim as coordenadas dos pontos dum sistema holónomo aparecem sob a forma

$$\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(q_1 q_2 \cdots q_k t), \\ y_\nu &= \psi_\nu(q_1 q_2 \cdots q_k t), \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n) \qquad (1') \\ z_\nu &= \pi_\nu(q_1 q_2 \cdots q_k t). \end{aligned}$$

– Os deslocamentos virtuais compatíveis com as ligações, tais quais estas existem no instante t, são dados pelas relações

$$\begin{aligned} \delta x_\nu &= \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k}\delta q_k, \\ \delta y_\nu &= \frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_k}\delta q_k, \qquad (2) \\ \delta z_\nu &= \frac{\partial \pi_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \pi_\nu}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \pi_\nu}{\partial q_k}\delta q_k. \end{aligned}$$

São estas expressões que, depois, terão de ser substituídas na equação geral da Dinâmica.

6 ~~8~~) Equações de Lagrange – As equações de Lagrange, aplicáveis aos sistemas holónomos, com ligações bilaterais que não desenvolvem atrito mas que podem depender do tempo, deduzem-se substituindo na equação geral da Dinâmica (1) os diferenciais $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ como indica (2).

Vem então

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Big[\Big(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - X_\nu\Big)\Big(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\delta q_k\Big) + \Big(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - Y_\nu\Big)\Big(\frac{\partial y_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial y_\nu}{\partial q_k}\delta q_k\Big) +$$
$$+ \Big(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} - Z_\nu\Big)\Big(\frac{\partial z_\nu}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial z_\nu}{\partial q_k}\delta q_k\Big)\Big] = 0,$$

ou

$$(P_1 - Q_1)\delta q_1 + \cdots + (P_k - Q_k)\delta q_k = 0,$$

com

$$P_\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2y_\nu}{dt^2}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2z_\nu}{dt^2}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_\alpha}\right),$$

$$Q_\alpha = \sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\alpha} + Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_\alpha} + Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_\alpha}\right).$$

As equações do movimento são, pois,

$$P_\alpha = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k).$$

Vamos proceder à transformação das quantidades P_α. Tem-se

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right) - \sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + y'\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + z'\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right) - \sum m\left(x'\frac{d\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}}{dt} + y'\frac{d\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}}{dt} + z'\frac{d\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}}{dt}\right).$$

Ora, tendo lugar relações como (1'), é

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}q'_2 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_k}q'_k + \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad (3)$$

pelo que vem

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} \quad \text{e, igualmente,} \quad \frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial y}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial z}{\partial q_\alpha}.$$

Assim P_α pode escrever-se

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right) - \sum m\left(x'\frac{d\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}}{dt} + \cdots\right).$$

Por outro lado é

$$\frac{d\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_\alpha\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_\alpha\partial q_2}q'_2 + \cdots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_\alpha\partial q_k}q'_k + \frac{\partial^2 x}{\partial q_\alpha\partial t},$$

e sendo, em virtude de (3),

$$\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_\alpha}q'_1 + \cdots + \frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q_\alpha}, \quad \text{vê-se que é}$$

$$\frac{d\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}}{dt} = \frac{\partial y'}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}}{dt} = \frac{\partial z'}{\partial q_\alpha},$$

de sorte que P_α tem a forma

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right) - \sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_\alpha}\right).$$

Tomemos agora a semi-força viva T do sistema. É

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = \sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_\alpha}\right),$$

pelo que as equações do movimento têem a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\dots,k).$$

São estas as equações de Lagrange.

Observemos que

$$Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\dots+Q_k\delta q_k=\sum_\nu\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_1}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_1}\right)\delta q_1$$
$$+\sum_\nu\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_2}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_2}\right)\delta q_2$$
$$+ \dots$$
$$+\sum_\nu\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_k}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_k}\right)\delta q_k=$$
$$=\sum_\nu\Big[X_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}\delta q_2+\dots+\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\delta q_k\right)+Y_\nu\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial y_\nu}{\partial q_k}\delta q_k\right)+$$
$$+Z_\nu\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial z_\nu}{\partial q_k}\delta q_k\right)\Big].$$

Sob esta forma, vê-se que a expressão $\sum Q_\alpha\delta q_\alpha$ representa o trabalho virtual das forças aplicadas num deslocamento virtual compatível com as ligações, tais quais elas existem no instante t.

7) Caso em que há função de fôrça

Se há uma função de fôrça, $U(x_1y_1z_1\dots x_ny_nz_nt)$, então $X_\nu=\frac{\partial U}{\partial x_\nu}$, $Y_\nu=\frac{\partial U}{\partial y_\nu}$, $Z_\nu=\frac{\partial U}{\partial z_\nu}$,

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=\sum_\nu\left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_1}\right)=Q_1,$$

e, analogamente, $\frac{\partial U}{\partial q_2}=Q_2,\dots,\frac{\partial U}{\partial q_k}=Q_k$. As equações de Lagrange tomam a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\dots,k).$$

Façamos a observação de que a função U pode depender do tempo.

Podemos ainda dar às equações do movimento a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)-\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}=0,$$

e, como a função U é independente dos q'_α, é $\frac{\partial(T+U)}{\partial q'_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}$, de sorte que, pondo $T+U=L(q,q',t)$, as equações de Lagrange, sempre que há uma solicitação conservativa, isto é, sempre que existe uma função de forças, podem

Escreve-se

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0, \qquad (\alpha=1,2,\ldots,k). \qquad (4)$$

A função L diz-se <u>função lagrangiana</u> ou <u>potencial cinético</u>.

§ ~~10~~) <u>Sistemas lagrangianos gerais</u> - Nas equações (4) a função L não é qualquer. Na verdade, sendo $L = T + U$, e dependendo T ùnicamente das segundas potências das derivadas q'_α, vêem-se as restrições a que está sujeito o sistema (4).

Se a função L se supõe qualquer, os sistemas (4) dizem-se <u>sistemas lagrangianos gerais</u>. Trata-se agora, em primeiro lugar, de saber em que condições êstes sistemas são da forma <u>normal</u>. Ora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}=\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\alpha \partial q'_1}\frac{d^2 q_1}{dt^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\alpha \partial q'_2}\frac{d^2 q_2}{dt^2}+\cdots+\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\alpha \partial q'_k}\frac{d^2 q_k}{dt^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\alpha \partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\cdots.$$

Como as derivadas segundas $\frac{d^2q_\alpha}{dt^2}$ figuram sob forma linear, vê-se que é necessário e basta para que o sistema lagrangiano <u>geral</u> (4) se possa resolver em ordem às derivadas segundas, $\frac{d^2q_\alpha}{dt^2}$, que o <u>hesseano</u>

$$\Delta=\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\alpha \partial q'_\beta}\right\|$$

não seja identicamente nulo.

É natural verificar a que se reduz êste hesseano no caso dinâmico. Então $L=T+U$, sendo T a fôrça viva:

$$T=\frac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Se as ligações são independentes do tempo, tem-se

$$x=\varphi(q_1\cdots q_k), \quad y=\psi(q_1\cdots q_k), \quad z=\pi(q_1\cdots q_k),$$

e, portanto,

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q'_1+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}q'_k, \quad y'=\frac{\partial\psi}{\partial q_1}q'_1+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial q_k}q'_k,$$

$$z'=\frac{\partial\pi}{\partial q_1}q'_1+\cdots+\frac{\partial\pi}{\partial q_k}q'_k,$$

de sorte que T é uma forma quadrática homogénea nos q'_α:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k} a_{\alpha\beta}\, q'_\alpha q'_\beta.$$

O hesseano reduz-se ao determinante $\|a_{\alpha\beta}\|$, como vamos vêr.

Podemos supôr sempre, com efeito, $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$. O coeficiente de q'_α

é dado na expressão

$$\frac{1}{2} q'_\alpha \left(a_{\alpha 1} q'_1 + a_{\alpha 2} q'_2 + \cdots + a_{\alpha\alpha} q'_\alpha \cancel{+} \cdots + a_{\alpha K} q'_K \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} a_{1\alpha} q'_1 q'_\alpha + \frac{1}{2} a_{2\alpha} q'_2 q'_\alpha + \cdots + \frac{1}{2} a_{K\alpha} q'_K q'_\alpha ,$$

de sorte que

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = \frac{1}{2} \left(a_{\alpha 1} q'_1 + a_{\alpha 2} q'_2 + \cdots + a_{\alpha K} q'_\alpha \right)$$
$$+ q'_\alpha a_{\alpha\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{2} \left(a_{1\alpha} q'_1 + a_{2\alpha} q'_2 + \cdots + a_{K\alpha} q'_K \right),$$

onde, nos parêntesis, falta o termo em q'_α. Vê-se bem que é

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = a_{\alpha 1} q'_1 + a_{\alpha 2} q'_2 + \cdots + a_{\alpha\alpha} q'_\alpha + \cdots + a_{\alpha K} q'_K ,$$

de sorte que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial q'_\alpha \partial q'_\beta} = a_{\alpha\beta} ,$$

o que prova a afirmação feita quanto aos hesseanos.

Mas, visto que T é, então, uma forma definida positiva, o determinante $\| a_{\alpha\beta} \|$ não pode ser identicamente nulo, como vamos provar. Consideremos

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = a_{11} q'_1 + a_{12} q'_2 + \cdots + a_{1K} q'_K = 0 ,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q'_2} = a_{21} q'_1 + a_{22} q'_2 + \cdots + a_{2K} q'_K = 0 ,$$
$$- - - - \text{———} - - -$$
$$\frac{\partial T}{\partial q'_K} = a_{K1} q'_1 + a_{K2} q'_2 + \cdots + a_{KK} q'_K = 0 .$$

Êste sistema pode ser satisfeito por um conjunto de valores não todos nulos dos q'_α, se $\| a_{\alpha\beta} \| = 0$. E como

$$2T = \sum q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} ,$$

via-se que a função T poderia anular-se para valores não todos nulos das velocidades lagrangeanas q'_α, o que seria contrário ao facto de ser T uma forma definida positiva.

Fica assim demonstrado que o sistema lagrangeano, no caso dinâmico de ligações independentes do tempo, é um sistema normal.

Para vermos o que se passa no caso das ligações dependentes do tempo, notemos que, então, em virtude de ser

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \dots \qquad (4')$$

a energia cinética T compõe-se de três partes:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \qquad (5)$$

a primeira uma forma quadrática nos q'_α, a segunda linear nos mesmos q'_α, e a última independente dos q'_α.

~~§ 10) Continuação~~ – Deve notar-se, entretanto, que T_2 é, igualmente, uma forma quadrática definida positiva. Na verdade T_2 resulta de $T = \sum \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ substituindo x'_i não por toda a expressão (4') mas pela parte que resulta suprimindo $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. O hesseano reduz-se ao determinante $\| a_{\alpha\beta} \|$ dos coeficientes de T_2.

9) ~~10)~~ Integral primeiro da energia – Um tipo de integral primeiro que existe no caso dos sistemas lagrangeanos gerais, se a função L se supõe independente do tempo, é o integral da energia que vamos deduzir. Tem-se

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} \frac{d^2 q_\alpha}{dt^2} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t},$$

no caso geral. Por outro lado, do sistema lagrangeano tira-se

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) q'_\alpha = 0,$$

pelo que, por ~~diferença~~ soma, se tem

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} \frac{d^2 q_\alpha}{dt^2} + q'_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} \right) + \frac{\partial L}{\partial t},$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Ponhamos $H = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - L$. Então a equação anterior escreve-se

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Se L é independente do tempo, como no começo do § se anunciou, tem lugar o integral

$$H = \text{const.}$$

Este integral diz-se o <u>integral generalizado da energia</u>, e a função H diz-se <u>energia generalizada</u> pelo motivo que vai ver-se.

No caso dinâmico, se as ligações são independentes do tempo e se a função de fôrças $\underline{\mathcal{U}}$ não depende também do tempo, tem-se

$$H = \sum_{\alpha=1}^{k} q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - (T + \mathcal{U}) = 2T - T - \mathcal{U} = T - \mathcal{U},$$

isto é, a função H torna-se na <u>energia total</u> do sistema.

O integral primeiro

$$T - \mathcal{U} = h \text{ (constante)}$$

diz-se o <u>integral da fôrça viva</u>.

Êste caso deve distinguir-se do caso em que as ligações são ainda independentes do tempo mas não há um potencial $-\mathcal{U}$. Das equações

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, k)$$

deduz-se

$$Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \cdots + Q_k q'_k = q'_1 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_2} + \cdots + q'_k \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_k} -$$

$$- q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - q'_2 \frac{\partial T}{\partial q_2} - \cdots - q'_k \frac{\partial T}{\partial q_k} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \cdots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\right) - q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \cdots - q''_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \cdots - q'_k \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

E como

$$\frac{dT}{dt} = q''_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \cdots + q''_k \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_k} + q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} + \cdots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q_k},$$

tem-se

$$\sum Q_\alpha q'_\alpha = \frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt}, \quad \text{ou}$$

$$dT = \sum Q_\alpha dq_\alpha.$$

Daqui se tira a conclusão: num caso de ligações holónomas sem atrito e independentes do tempo <u>a variação da fôrça viva é igual à soma dos trabalhos das fôrças directamente aplicadas.</u>

O teorema pode deduzir-se mesmo para ligações não holónomas independentes do tempo, a partir da equação geral da Dinâmica.

Estamos agora em condições de tratar dos sistemas diferenciais chamados <u>sistemas canónicos</u>, em particular dos sistemas canónicos que aparecem em Mecânica Racional.

Capítulo 2.º

Equações canónicas e princípios de Hamilton e Cartan.

12) Sistemas canónicos – O sistema lagrangeano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}-\frac{\partial L}{\partial q_h}=0 \qquad (h=1,2,\dots,n) \qquad (6)$$

é, como se viu, um sistema normal se o hesseano $\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_h \partial \dot q_k} \right\| = \Delta$ não fôr identicamente nulo.

Tratando-se dum sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, pode substituir-se, como vamos ver, por um sistema de $2n$ equações de 1.ª ordem.

Façamos

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}, \qquad (7)$$

isto é, tomemos como variáveis, além dos q_k, as quantidades $\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}=p_h$, chamadas momentos conjugados dos q_h. Trata-se de n variáveis independentes p_k, considerados como funções dos $\dot q_k$, visto que $\frac{D(p_1\cdots p_n)}{D(\dot q_1\cdots \dot q_n)}=\Delta\neq 0$.

Por outro lado as equações (7) são invertíveis, isto é, podemos delas tirar

$$\dot q_k = u_h(p,q,t),$$

representando sob a forma esquemática que figura no segundo membro uma função u_h das variáveis, p_h, q_h e do tempo.

Então, tendo em vista (6), é

$$\frac{dp_h}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt}=u_k, \qquad (h=1,2,\dots,n) \qquad (8)$$

devendo nas equações que dão os $\frac{dp_k}{dt}$ substituir os $\dot q_h$ por $u_h(p,q,t)$.

O sistema (8) é um sistema normal de $2n$ equações de 1.ª ordem em que as variáveis são os p_h e os q_h. É equivalente ao sistema (6) porque (8) resultou de (6), e, inversamente, de (8) pode fazer-se resultar (6). Com efeito, as últimas equações (8) dão $p_h=\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}$, e, substituindo nas primeiras, vem $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_h}=0$.

É importante verificar agora que os segundos membros das equações (8) se podem exprimir por meio duma função única chamada função característica ou função de Hamilton, a qual é precisamente a energia generalizada

$$H=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h - L, \qquad (8')$$

suposta, naturalmente, expressa nas variáveis p_h, q_h, t.

Para o reconhecer, adopta-se o raciocínio de Hamilton. Escrevamos

$$H = \mathcal{H}(p|q|t) = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - L(q|\dot{q}|t), \qquad (\dot{q}_h = u_h(p, q, t)$$

e, tomando p, q, t como variáveis independentes, procuremos a variação de H correspondente às variações $\delta p, \delta q$. Virá

$$\delta \mathcal{H} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \dot{q}_h \delta p_h + p_h \delta \dot{q}_h - \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\right)_{\dot{q}_h = u_h} \delta q_h - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right)_{\dot{q}_h = u_h} \delta \dot{q}_h \right\} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left\{ u_h \delta p_h - \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\right)_{\dot{q}_h = u_h} \delta q_h \right\},$$

donde se conclui, tendo em vista que δp_h e δq_h são arbitrários,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} = u_h, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\right)_{\dot{q}_h = u_h}.$$

O nosso sistema (8) escrever-se-á, assim,

$$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}. \qquad (h = 1, 2, \dots, n). \qquad (9)$$

Um sistema desta forma, qualquer que seja a função $H(p, q, t)$, diz-se <u>um sistema canónico ou hamiltoniano</u>; as variáveis p e q dizem-se <u>variáveis canónicas</u>.

13) **Resumo. Sistema lagrangeano deduzido dum sistema canónico** – Acabamos de ver que, dado o sistema lagrangeano

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0, \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

se se admite a invertibilidade das relações

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = p_h, \quad \text{isto é, se} \quad \Delta = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0,$$

o sistema lagrangeano torna-se no sistema canónico

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \qquad \text{com} \quad H = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - L(q|\dot{q}|t),$$

onde ~~os~~ $\dot{q}_h$ se deverão exprimir por $\dot{q}_h = u_h(q|p|t)$, deduzidas de $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$.

Inversamente, do sistema canónico deduz-se o sistema lagrangeano, como vamos ver. Com efeito, se nas equações

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

se consideram os p como funções dos $q, \dot{q}, t$, deverá ter-se $p_k = v_k(q, \dot{q}, t)$, equações que se tornarão em identidades pondo $\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}$. Então, por exemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_h}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_l} = \delta_{hl}, \quad \text{em} \quad \begin{cases} \delta_{hl} = 0, \text{ se } h \neq l \\ \delta_{hl} = 1, \text{ se } h = l. \end{cases}$$

Pode também escrever-se, visto ser $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_h \partial \dot q_k} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l} = \delta_{hl},$$

equação que mostra serem recíprocas as matrizes $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_h \partial \dot q_k}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l}\right)$. Os seus determinantes, Δ e Δ_1, verificarão a igualdade $\Delta \Delta_1 = 1$.

As equações $\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}$ darão, em seguida,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\right) + \frac{\partial H}{\partial q_h} = 0.$$

Mas consideremos $L(q|\dot q|t) = \sum p_h \dot q_h - H(p|q|t)$, com $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = v_h(q|\dot q|t)$; vê-se que é

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\delta \dot q_h\right) = \sum_{h=1}^{n}\left(p_h \delta \dot q_h + \dot q_h \delta p_h - \frac{\partial H}{\partial p_h}\delta p_h - \frac{\partial H}{\partial q_h}\delta q_h\right) =$$
$$= \sum_{h=1}^{n}\left(p_h \delta \dot q_h - \frac{\partial H}{\partial q_h}\delta q_h\right),$$

o que levará a

$$\frac{\partial L}{\partial q_h} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_h}\right)_{\dot q_h = v_h}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = p_h,$$

e, portanto a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0,$$

como se queria provar.

O processo ensina a deduzir dum sistema canónico um sistema lagrangeano, se o determinante $\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} \right\| \neq 0$. A função L de Lagrange será

$$L(q|\dot q|t) = \sum p_h \dot q_h - H(p|q|t).$$

14) Representação geométrica - Interpretemos as variáveis p_h, q_h dum sistema canónico $(h = 1, 2, \ldots, n)$ como $2n$ coordenadas dos pontos dum espaço a $2n$ dimensões, chamado espaço das fases. As trajectórias dependerão de $2n$ constantes arbitrárias, correspondendo a uma trajectória dada uma curva do espaço das fases. Como existe uma e uma só solução do sistema diferencial que, para $t = 0$, tenha $p_h = p_h^0$, $q_h = q_h^0$, vê-se que a cada sistema de condições iniciais dadas corresponde uma única trajectória.

15) O integral H = const - Viu-se atraz que um sistema lagrangeano generalizado, quando a função L era independente do tempo, admitia o integral

$$H = \text{const.},$$

sendo $H = \sum \dot q_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - L(q|\dot q)$

Vamos vêr aqui que, dado o sistema canónico,

$$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h},$$

se a função H é independente do tempo, tem logar o integral H = const.

Com efeito é, dum modo geral,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{dp_h}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = [illegible]$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Assim, quando $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, é $\frac{dH}{dt} = 0$ e

$$H = \text{const.},$$

como se queria provar.

16) <u>Outros casos particulares</u> – Quando a função H é independente dum dos qq, por exemplo, quando é $\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0$, tem-se o integral

$$p_r = \text{const.}$$

17) <u>A função hamiltoniana no caso dinâmico</u> – Para os sistemas de ligações bilaterais holónomas que não desenvolvem atrito, supondo haver uma função de fôrças, viu-se que é

$$L = T + U, \qquad T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot q_h \dot q_k, \qquad T_1 = \sum_{h=1}^{n} a_h \dot q_h,$$

sendo T_0 e U funções dos q_h e do tempo.

Aqui é $$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = +\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} \dot q_k + a_h, \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

donde se tira

$$\dot q_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{(-1)} (p_k - a_k), \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

onde a matriz $(a_{hk}^{(-1)})$ é a recíproca de (a_{hk}).

Ora $$H = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot q_h - (T + U),$$

querendo-se tudo expresso nos p, q, t. Vem

$$H = \sum_{h=1}^{n} p_h \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{(-1)} (p_k - a_k) - (T + U) =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}^{(-1)} p_h (p_k - a_k) - (T + U). \qquad (10)$$

O teorema de Euler dá

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2T_2, \qquad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = T_1,$$

de sorte que

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = 2T_2 + T_1 \quad e \quad H = 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 - \mathcal{U} = T_2 - T_0 - \mathcal{U}, \quad (11)$$

importando substituir aqui os $\dot{q}_h$ pelas suas expressões nos p, q, t.

Se as ligações são independentes do tempo, $T_2 \equiv T$, $T_0 \equiv 0$, e

$$H = T - \mathcal{U},$$

importando fazer aqui a referida substituição.

Tanto (10) como (11) mostram que há apenas necessidade de exprimir T_2 nos p, q, t. Ora

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \sum_{k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h (p_h - a_h) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} (p_h - a_h) \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{(-1)} (p_k - a_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}^{(-1)} (p_h - a_h)(p_k - a_k).$$

Assim, no caso geral

$$H = \frac{1}{2} \sum_{h,k}^{n} a_{hk}^{(-1)} (p_h - a_h)(p_k - a_k) - T_0 - \mathcal{U},$$

e, se as ligações são independentes do tempo,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}^{(-1)} p_h p_k - \mathcal{U}.$$

Como um caso particular para esta última expressão, suponhamos que a forma quadrática T tem ùnicamente termos quadrados:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \dot{q}_i^2 .$$

Então a matriz inversa da matriz $(a_{ik} = 0,$ se $i \neq k,$ $a_{ii} \neq 0)$ é a matriz $(\alpha_{ik} = 0,$ se $i \neq k,$ $\alpha_{ii} = \frac{1}{a_{ii}} \neq 0)$, pelo que

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{a_{ii}} - \mathcal{U} .$$

18) <u>Transformações canónicas</u> - Dado o sistema normal de equações diferenciais

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x|t), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

façamos a transformação invertível de variáveis

$$y_j = y_j(x|t) \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

Significa isto que $\frac{D(y_1 \cdots y_n)}{D(x_1 \cdots x_n)}$ não é identicamente nulo, pelo que o sistema anterior dá também

$$x_i = x_i(y|t). \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Então tem-se:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial t},$$

pelo que substituindo nos 2.os membros $\frac{dx_i}{dt}$ por X_i, e, em seguida, x_i por $x_i(y|t)$, vem um novo sistema normal, como o sistema de que se partiu.

Se o sistema inicial é um sistema canónico, o sistema a que se chega é, igualmente, um sistema normal, mas, no geral, não é um sistema canónico.

Se as variáveis p, q se transformam em variáveis π, x, tais que

$$\frac{d\pi_h}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_h}, \qquad \frac{dx_h}{dt} = \frac{d\phi}{\partial \pi_h}, \qquad (h=1,2,\dots,n) \qquad (12)$$

com uma nova função característica ϕ, em vez de H, mas também com a forma canónica, diz-se que a transformação de variáveis é uma transformação canónica.

Para darmos uma condição suficiente para caracterizar as transformações canónicas, continuaremos a seguir o livro de Levi-Civita.

19) Pfaffianos e sistemas associados - Consideremos a expressão diferencial ou pfaffiano $\varphi = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx^i$,

onde os X_i são funções analíticas de $x_1, x_2, \dots, x_n$ num certo domínio do espaço a n dimensões dos pontos $(x_1 x_2 \dots x_n)$. Se se faz uma mudança qualquer de variáveis

$$x^i = \varphi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

a expressão de ψ torna-se

$$\psi = \sum X_i dx^i = \sum \bar{X}_i\, d\bar{x}^i,$$

de sorte que, se os dx^i se transformam de modo contravariante, os X_i transformar-se-ão de modo covariante. Os X_i podem, assim, tomar-se como componentes dum vector covariante, de sorte que, como se sabe, $\frac{\partial X_i}{\partial x^j} = X_{i;j}$ serão as componentes dum tensor de 2.ª ordem duas vezes covariante.

O tensor antissimétrico $X_{ij}-X_{ji}$ é, igualmente, duas vezes covariante. Se dx^i e δx^i fôrem dois símbolos de diferenciais, a expressão

$$\chi = \sum_{i,j} (X_{ij} - X_{ji})\, dx^i \delta x^j$$

é invariante para as transformações de coordenadas.

Se observarmos que é

$$\chi = \sum_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} dx^i \delta x^j - \sum_{i,j} \frac{\partial X_j}{\partial x^i} dx^i \delta x^j = \sum_i dx^i \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \delta x^j - \sum_j \delta x^j \sum_i \frac{\partial X_j}{\partial x^i} dx^i =$$

$$= \sum_i \delta X_i\, dx^i - \sum_j dX_j\, \delta x^j = \sum_i (\delta X_i\, dx^i - dX_i\, \delta x^i),$$

vê-se uma outra forma de geração de χ, que se diz <u>covariante bilinear do pfaffiano φ</u>.

Escrevamos χ sob a forma

$$\chi = \sum_j \varphi_j \cdot \delta x^j, \qquad \text{de sorte que} \quad \varphi_j = \sum_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i} \right) dx^i .$$

Vê-se que a condição necessária e suficiente para que o covariante χ seja identicamente nulo, quaisquer que sejam os δx^j, é que seja

$$\varphi_j = 0 . \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Êste sistema de $\underline{n}$ equações

$$\sum_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i} \right) dx^i = 0 , \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (13)$$

diz-se <u>sistema associado</u> do pfaffiano φ.

Para uma mudança de variáveis o sistema associado tem também caracter invariante, ou, por outras palavras: se $\varphi = \sum \bar{X}_i\, d\bar{x}^i$ fôr a nova expressão do pfaffiano, nas novas variáveis, o respectivo sistema associado

$$\sum_i \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial \bar{x}^i} \right) d\bar{x}^i = 0, \qquad (14)$$

resulta do transformado do anterior, pela mesma transformação de variáveis.

Na verdade (13) exprime que χ é identicamente nulo quaisquer que sejam δx^j, e, portanto, quaisquer que sejam os $\delta \bar{x}^j$, isto é, exprime o mesmo que (14).

20) <u>Condições suficientes para assegurar transformações canónicas</u> –

Consideremos o sistema

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h},$$

e seja o pfaffiano

$$\psi = \sum_h p_h dq_h - H dt, \qquad (15)$$

cujo covariante bilinear é

$$\chi = \sum_h (\delta p_h dq_h - dp_h \delta q_h) - \delta H dt + dH \delta t = \sum_h (\delta p_h dq_h - dp_h \delta q_h) - \sum_h \frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h dt - \sum \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h dt -$$

$$- \frac{\partial H}{\partial t} \delta t dt + \sum_h \frac{\partial H}{\partial p_h} dp_h \delta t + \sum_h \frac{\partial H}{\partial q_h} dq_h \delta t + \frac{\partial H}{\partial t} dt \delta t =$$

$$= \sum_h \left\{ \left(-dp_h - \frac{\partial H}{\partial q_h} dt \right) \delta q_h + \left(dq_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} dt \right) \delta p_h \right\} + \left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \delta t,$$

e cujo sistema associado é, pois,

$$-dp_h - \frac{\partial H}{\partial q_h} dt = 0, \quad dq_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} dt = 0, \quad dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt = 0.$$

Deste sistema se tira

$$\frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

mas, como a última relação é consequência das outras, vê-se que se tira simplesmente

$$\frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}.$$

Logo o sistema canónico é o sistema associado do pfaffiano (15).

Façamos agora no sistema canónico a transformação invertível

$$p_h = p_h(\pi | x | t), \quad q_h = q_h(\pi | x | t). \qquad (h = 1, 2, \dots, n) \ (16)$$

Se observarmos que o sistema associado dum pfaffiano não se altera quando ao pfaffiano se junta uma diferencial exacta, vê-se que basta para que o transformado do sistema canónico por (16) seja igualmente um sistema canónico que tenha lugar a igualdade

$$\sum_h p_h dq_h = \sum_h \pi_h dx_h + H_0 dt + d\Omega, \qquad (17)$$

onde H_0 e Ω são duas funções quaisquer de p, q, π, x, t ($4n+1$ variáveis).

Com efeito, se (17) tem lugar, é também

$$\sum p_h dq_h - H dt = \sum \pi_h dx_h - (H - H_0) dt + d\Omega \qquad (18)$$

Então, mediante (16), o primeiro membro de (18) torna-se no segundo membro de (18);
O sistema associado do 1º membro de (18), ou seja o sistema canónico proposto, trans-

forma-se no sistema associado do 2.º membro ou seja num sistema canónico em que a função característica é $H - H_0$.

A condição (17) é, assim suficiente para que (16) seja uma transformação canónica, como se queria provar.

21) Transformações canónicas dependentes duma função arbitrária de 2n+1 argumentos - Seja $\underline{V}$ uma função dependente de $2n+1$ argumentos, assim escolhidos: o tempo, $\underline{n}$ variáveis q (ou p) e $\underline{n}$ variáveis π (ou x). Suponhamos que o hesseano

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \pi_i} \right\| \qquad (k, i = 1, 2, \dots, n)$$

não é identicamente nulo. Então as relações

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad x_i = \frac{\partial V}{\partial \pi_i} \qquad (19)$$

definem uma transformação do tipo (16). Com efeito as segundas relações, em face de hipótese sôbre ∇, podem resolver-se em ordem aos q_k sob a forma $q_k = q_k(\pi|x|t)$, e, em seguida, substituindo êstes valores dos q_k nos segundos membros das primeiras relações, vem $p_h = p_h(\pi|x|t)$, como se deseja.

Vamos mostrar que a transformação (19) é uma transformação canónica. Trata-se de vêr se tem lugar uma igualdade do tipo

$$\sum p_h dq_k = \sum \pi_h dx_k + H_0 dt + d\Omega. \qquad (20)$$

Ora

$$\sum p_h dq_h + \sum x_h d\pi_h = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial V}{\partial \pi_h} d\pi_h \right) = dV - \frac{\partial V}{\partial t} dt,$$

e como

$$d \sum x_h \pi_h = \sum x_h d\pi_h + \sum \pi_h dx_h,$$

Vem

$$\sum p_h dq_h + d \sum x_h \pi_h - \sum \pi_h dx_h = dV - \frac{\partial V}{\partial t} dt,$$

ou

$$\sum p_h dq_h = \sum \pi_h dx_h - \frac{\partial V}{\partial t} dt + d\left(V - \sum \pi_h x_h\right).$$

Vê-se pois que tem lugar uma igualdade do tipo (20), de sorte que (19) define uma transformação canónica. A nova função característica é $H - H_0 = H + \frac{\partial V}{\partial t}$, a qual deve exprimir-se, naturalmente, nas novas variáveis π, x, t.

22) Transformações completamente canónicas - O raciocínio do § anterior mostra que, se a função V é independente do tempo, a função característica do sistema canónico transformado é a mesma que a do sistema canónico dado. Diz-se, então, que a transformação é completamente canónica. Uma maneira de caracterizar transformações completamente canónicas é por meio da igualdade

$$\sum p_h dq_h = \sum \pi_h d x_h + d\Omega .$$

Quando se procuram transformações canónicas do tipo

$$q_k = q_k(\pi/x), \quad p_k = p_k(\pi/x) \qquad (21)$$

tais transformações só podem ser completamente canónicas. Com efeito é, por hipótese,

$$\sum p_h dq_h = \sum \pi_h d x_h + H_0 dt + d\Omega , \qquad (22)$$

ou seja

$$\sum p_h dq_h - \sum \pi_h d x_h = H_0 dt + d\Omega .$$

Eliminando no 1º membro desta igualdade os p_h e os q_k por meio de (21) o primeiro membro não conterá t nem dt, pelo que o segundo membro deverá satisfazer a

$$H_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 , \quad \text{sendo} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \pi_h} , \frac{\partial \Omega}{\partial x_h} \quad \text{independentes do tempo.}$$

Isto significa que Ω deverá ser da forma

$$\Omega = \Omega_1 + T ,$$

onde Ω_1 depende dos x, π e T só depende do tempo.

Nestas condições, (22) terá a forma

$$\sum p_h d q_h = \sum \pi_h d x_h + d \Omega_1 ,$$

o que demonstra a afirmação feita, de que as transformações canónicas do tipo (21) são completamente canónicas.

Como tipo particular de transformações completamente canónicas temos as transformações homogéneas, para as quais

$$\sum p_h dq_h = \sum \pi_h d x_h . \qquad (23)$$

Uma busca de transformações homogéneas pode fazer-se do modo seguinte: exprimem-se as $\overset{n}{}$ variáveis dum grupo das variáveis dadas em funções, absolutamente quaisquer, das variáveis dum grupo das variáveis transformadas, não intervindo, porém, o tempo:

$$q_h = q_h(x_1 x_2 \cdots x_n) ; \qquad (h = 1, 2, \cdots, n) \qquad (24)$$

em seguida procuram-se

$$p_k = p_k(\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n ; x_1 x_2 \cdots x_n)$$

de modo a ser satisfeita identicamente a relação (23). Vem então

$$\sum_h p_h \sum_i \frac{\partial q_h}{\partial x_i} dx_i = \sum \pi_h dx_h = \sum \pi_i dx_i .$$

Vê-se que tem de ser

$$\pi_i = \sum_h p_h \frac{\partial q_h}{\partial x_i} . \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (25)$$

Se supomos que as relações (24) são invertíveis, o determinante $\left\| \frac{\partial q_h}{\partial x_i} \right\|$ é diferente de zero e as relações anteriores (25) podem resolver-se em ordem aos p_h, que assim virão, como se deseja, expressos nos π e nos x.

Chegaríamos ao mesmo resultado resolvendo primeiramente as equações (24), o que daria $x_h = x_h(q_1 q_2 \dots q_n)$, e, em seguida, pondo $\sum p_h dq_h = \sum \pi_h dx_h = \sum_h \pi_h \sum_i \frac{\partial x_h}{\partial q_i} dq_i$, o que daria $p_i = \sum_h \pi_h \frac{\partial x_h}{\partial q_i}$. O problema da transformação seria então resolvido pelas equações $x_h = x_h(q_1 \dots q_n)$ e $\pi_h = \pi_h(p_1 \dots p_n\, x_1 \dots x_n)$, onde os $x\,x$ destas últimas se substituiriam tendo em vista as primeiras.

23) <u>Parêntesis de Lagrange</u> - Vimos que as transformações completamente canónicas caracterizadas pela relação diferencial de Lie (25')

$$\sum p_h dq_h = \sum \pi_h dx_h + d\Omega ,$$

obrigavam a ser Ω independente do tempo. As relações de transformação

$$\pi_h = \varphi_h(p|q), \qquad x_h = \psi_h(p|q) \qquad (26)$$

levarão, então, do pfaffiano $\sum \pi_h dx_h$ ao pfaffiano $\sum p_h dq_h - d\Omega$, devendo supôr-se em Ω as variáveis π_h e x_h substituídas em função dos p_h e dos q_h. Como o covariante bilinear de $\sum p_h dq_h - d\Omega$ é o mesmo que de $\sum p_h dq_h$, vê-se que as relações de transformação completamente canónica identificam os covariantes bilineares de $\sum \pi_h dx_h$ e $\sum p_h dq_h$. Será, pois,

$$\sum_h (\delta p_h\, dq_h - dp_h\, \delta q_h) = \sum_h (\delta \pi_h\, dx_h - d\pi_h\, \delta x_h),$$

onde

$$\delta \pi_h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \delta q_i \right), \quad dx_h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} dq_i \right),$$

$$d\pi_h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} dq_i \right), \quad \delta x_h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} \delta q_i \right).$$

Fazendo as substituições em (26), temos

$$\sum_i (\delta p_i dq_i - dq_i \delta p_i) = \sum_{h=1}^{n} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \delta q_i \Big) \cdot \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \psi_h}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial \psi_h}{\partial q_j} dq_j \Big) -$$

(23)

$$- \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} dq_i \Big) \cdot \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \psi_h}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial \psi_h}{\partial q_j} \delta q_j \Big) \Big\} =$$

$$= \sum_{i,j} \delta p_i dq_j \sum_h \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} \frac{\partial \psi_h}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_j} \frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} \Big) + \sum_{i,j} \delta p_i dp_j \sum_h \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} \frac{\partial \psi_h}{\partial p_j} - \frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_j} \Big)$$

$$+ \sum_{i,j} \delta q_i dp_j \sum_h \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \frac{\partial \psi_h}{\partial p_j} - \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_j} \Big) + \sum_{i,j} \delta q_i dq_j \sum_h \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \frac{\partial \psi_h}{\partial q_j} - \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_j} \Big) .$$

Ora, ~~dadas~~ $2n$ funções φ_h, ψ_h dos argumentos q_i, p_j, diz-se parêntesis de Lagrange $[q_i, p_j]$ à expressão

$$[q_i, p_j] = \sum_h \Big(\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \frac{\partial \psi_h}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_j} \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} \Big) .$$

Estes parêntesis verificam as relações

$$[q_i, q_i] = 0 , \quad [q_i, p_j] = - [p_j, q_i] ,$$

como imediatamente se conclui da sua expressão.

Assim tem-se

$$\sum_i (\delta p_i dq_i - dq_i \delta p_i) = \sum_{i,j} \delta p_i dq_j \, [p_i, q_j] + \sum_{i,j} \delta p_i dp_j \, [p_i, p_j]$$
$$+ \sum_{i,j} \delta q_i dp_j \, [q_i, p_j] + \sum_{i,j} \delta q_i dq_j \, [q_i, q_j] .$$

Daqui se concluem as igualdades

$$[p_i, q_j] = 0 , \ (i \neq j) \ ; \quad [p_i, p_j] = 0 \ ; \qquad (27)$$
$$[p_i, q_i] = 1 \ ; \qquad [q_i, q_j] = 0 .$$

Estas relações em número de $2n \cdot 2n$, são, de facto, apenas $n(2n-1)$, pela razão seguinte. A condição $[p_i, p_i] = 0$ é uma condição sempre verificada. Cada variável p ou q dá, pois, $2n-1$ parêntesis de Lagrange quando se combina com todas as outras. Viriam, assim, $2n(2n-1)$ condições, que, depois, se reduzem a metade, pelo facto das relações $[u, v] + [v, u] = 0$.

Estas condições (27) garantem a igualdade dos covariantes bilineares de $\sum p_h dq_h$ e $\sum \pi_h dx_h$. E como a igualdade dêstes covariantes obriga que os pfaffianos difiram duma diferencial exacta, vê-se que as relações (27) garantem (25'), e, portanto, a completa canonicidade da transformações (26).

24) Interpretação geométrica - Escrevamos simbolicamente o determinante funcional de (26) sob a forma

$$D = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} & \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \\ \hline \frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} & \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} \end{array}\right| . \qquad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots n \end{array} \right)$$

Trata-se dum determinante de ordem 2n, que vamos sujeitar às seguintes transformações: 1ª) Trocam-se as n primeiras linhas com as n últimas linhas; 2ª) Trocam-se as n primeiras colunas com as n últimas colunas; 3ª) muda-se o sinal a todos os elementos das n primeiras linhas; 4ª) muda-se o sinal a todos os elementos das n primeiras colunas. É claro que o resultado de todas estas operações leva a um determinante D^* igual ao inicial. É

$$D^* = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\partial \psi_h}{\partial q_i} & -\frac{\partial \psi_h}{\partial p_i} \\ \hline -\frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} & \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_i} \end{array}\right| .$$

Efectuamos o produto (por colunas)

$$DD^* = D^*D = D^2 = \left|\begin{array}{c|c} [p_i, q_j] & -[p_i, p_j] \\ \hline [q_i, q_j] & -[q_i, p_j] \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} [p_1, q_1]\ [p_1, q_2] \dots [p_1, q_n], -[p_1, p_1] \dots \\ [p_2, q_1]\ [p_2, q_2] \dots [p_2, q_n], -[p_2, p_1] \dots \\ \\ \\ \end{array}\right|$$

$$= \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right| = 1.$$

Interpretando (26) como uma transformação que faz corresponder aos pontos do espaço das fases, referidos a eixos rectangulares, pontos dum outro espaço a 2n dimensões, igualmente referido a eixos rectangulares, vê-se que os espaços correspondentes têm o mesmo volume.

25) Parêntesis de Poisson - Sejam u e v não dois argumentos, como no caso dos parêntesis de Lagrange, mas duas funções arbitrárias dos 2n argumentos p_h, q_h. Poremos

$$(u, v) = \sum_h \left(\frac{\partial u}{\partial p_h} \frac{\partial v}{\partial q_h} - \frac{\partial u}{\partial q_h} \frac{\partial v}{\partial p_h} \right) .$$

Esta expressão diz-se parêntesis de Poisson.

Se efectuarmos o produto $D D^*$ referido no número anterior por linhas, vem

$$D D^* = D^2 = \begin{vmatrix} (\varphi_i, \psi_j) & -(\varphi_i, \varphi_j) \\ (\psi_i, \psi_j) & -(\psi_i, \varphi_j) \end{vmatrix}, \qquad (28)$$

intervindo, pois, os parêntesis de Poisson. Entretanto, em virtude das propriedades demonstradas dos parêntesis de Lagrange para as transf. completamente canónicas, conclui-se que o determinante D^* é formado pelos elementos que são os menores dos elementos correspondentes de D. Nessas condições, em (28), todos os elementos do determinante (28) serão nulos, salvo os elementos que se indicam no quadro a seguir como diferentes de zero:

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi_i, \psi_j) = 0, \text{ se } i \neq j, \\ (\varphi_i, \psi_i) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\varphi_i, \varphi_j) = 0, \\ (\psi_i, \psi_j) = 0, \end{array} \qquad (29)$$

As condições (29) são idênticas às condições (27), visto que, de (27) se conclui (29), e, inversamente, pode ver-se que, de (29), se conclui (27).

Se, com Sophus Lie, admitirmos que a condição (20) é condição necessária e suficiente para que uma transformação seja canónica, então as condições (27) ou (29) são condições necessárias e suficientes para que as fórmulas (26) definam uma transformação completamente canónica.

26) Princípio de Hamilton - Vimos que os sistemas materiais de ligações bilaterais, holónomos ou não, satisfazendo à condição dos trabalhos virtuais, têm os movimentos regidos pela equação geral da Dinâmica. Trata-se duma forma condensada das leis dos movimentos dos sistemas em referência. Existem outras formas condensadas, equivalentes, bem entendido, ao princípio de D'Alembert, mas que se prestam, por vezes, a enunciar propriedades características dos movimentos naturais, as quais não se enunciariam fàcilmente através da expressão do mesmo princípio. Levi-Civita dedica, no seu tratado de Mecânica, um extenso capítulo ao estudo dessas formas ou princípios gerais.

Seja um movimento natural do sistema. Definamos uma família qualquer de movimentos síncronos (compatíveis com as ligações), com extremos variados, da qual faça parte o movimento natural. Significa isto o seguinte: Seja $\mathbf{P}_i$ a posição, no instante t, dum ponto do sistema considerado. P_i é função do tempo. Um movimento variado é um movimento em que às posições P_i do ponto considerado se faz corresponder a posições $P_i + \delta\mathbf{P}_i$, $\delta\mathbf{P}_i$ devendo escolher-se como se queira, respeitando apenas as ligações. Uma vez definido o movimento variado, o vector $\overline{\delta \mathbf{P}_i}$ é função do tempo. Por outro lado, diz-se que os extremos são variados porque, se se considera o movimento do sistema correspondente a um intervalo de tempo entre dois instantes t_0 e t_1 dados, os vectors $\delta\mathbf{P}_i$ podem ser diferentes de zero nos pontos origem e extremo do movimento natural considerado.

Partindo dêste movimento natural é

$$\int_{t_0}^{t_1} \Lambda\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i} - m_i \mathbf{a}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i})\, dt = 0, \qquad (1)$$

onde, como se disse, $\delta\mathbf{P}_i$ é o vector que leva do ponto P_i ao seu variado, $\mathbf{F}_i$ é a força aplicada em P_i e $\mathbf{a}_i$ é a aceleração do mesmo ponto, suposto de massa $\underline{m_i}$. Na verdade

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i} - m_i \mathbf{a}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i}),$$

é precisamente o primeiro membro da equação geral da Dinâmica

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}) \delta x_i + (Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}) \delta y_i + (Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}) \delta z_i \right] = 0, \quad (1'$$

pois

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = \mathbf{F}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i},$$

$$m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = m_i \mathbf{a}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i},$$

visto que $\delta\mathbf{P}_i$ é compatível com as ligações.

Logo a igualdade (1) é consequência da igualdade (1'). Mas, da relação (1), deduz-se

$$\int_{t_0}^{t_1} \Lambda\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i} + \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \overline{\delta \mathbf{P}_i} \right) dt - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \overline{\delta \mathbf{P}_i} \right)_{t_0}^{t_1},$$

onde $\mathbf{v}_i$ é a velocidade do ponto P_i.
Atendendo a que é

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \overline{\delta \mathbf{P}_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \overline{\delta \mathbf{v}_i} = \delta \sum \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 = \delta T,$$

podemos escrever ainda

$$\int_{t_0}^{t_1} \Lambda \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \overline{\delta \mathbf{P}_i} + \delta T \Big) dt - \Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \cdot \overline{\delta \mathbf{P}_i} \Big)_{t_0}^{t_1} = 0 .$$

Se supomos que os vectores $\delta \mathbf{P}_i$ são nulos na origem e na extremidade, tira-se que é

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(\delta T + \sum \mathbf{F}_i \cdot \overline{\delta \mathbf{P}_i} \big) dt = 0 ,$$

o que traduz o <u>princípio de Hamilton</u>, o qual é caracterizado pela igualdade anterior, que dá uma <u>condição realizada pelos movimentos naturais, em confronto com os movimentos variados virtuais que levam o sistema da mesma configuração inicial à mesma configuração final.</u>

Reciprocamente, se é verificada a relação anterior por um movimento dado, é verificada a relação (1), e um raciocínio fácil vai mostrar que é

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \big(\mathbf{F}_i \cdot \overline{\delta \mathbf{P}_i} - m_i \mathbf{a}_i \cdot \overline{\delta \mathbf{P}_i} \big) = 0 . \qquad (1'')$$

Temos de verificar que o valor de Λ é nulo em cada instante τ compreendido entre t_0 e t_1, qualquer que seja o modo como se tenham escolhido as funções $\delta \mathbf{P}_i$ (com a restrição, apenas, das ligações). Seja r o número destas ligações; o número de parâmetros independentes será de $3n-r = k$ e as componentes das deslocações $\delta \mathbf{P}_i$ obtêm-se afectando linearmente de coeficientes arbitrários $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{3n-r}$ certas deslocações particulares, em número de $3n-r$. Representemos com λ_i' os valores a dar aos λ_i no instante τ para se obterem os valores previamente atribuídos no mesmo instante às funções $\delta \mathbf{P}_i$ que respeitam ao movimento variado particular que se compara com o movimento dado, que satisfaz a (1''). Seja $t_0 \leq t' \leq \tau \leq t'' \leq t_1$; escolhamos os coeficientes λ_i de modo que sòmente sejam diferentes de zero no intervalo (t', t'') e satisfaçam à condição anterior. Então, por hipótese $\int_{t'}^{t''} \Lambda \, dt = 0$. O primeiro teorema da média, cuja possibilidade de aplicação se admite, dá

$$\Lambda^{*} (t'' - t') = 0 ,$$

onde Λ^{*} é um valor de Λ entre t' e t''. O valor Λ' de Λ no instante τ será necessàriamente nulo, visto que t' e t'' se podem escolher tão próximos de τ quanto se queira. Na verdade, se $\Lambda(\tau) \neq 0$, seria $\Lambda \neq 0$ à volta de τ e, em tal domínio, poderíamos escolher t' e t''.

Para fazermos uma aplicação imediata, consideremos um sistema para o qual é

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \overline{\delta \mathbf{P}_i} = \sum_{h=1}^{n} Q_h \, \delta q_h ,$$

$$\delta T = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \delta \dot q_h \right).$$ Se [illegible] $\delta \dot q_h = \delta \frac{d q_h}{dt} = \frac{d}{dt}(q_h + \delta q_h) - \dot q_h = \frac{d}{dt} \delta q_h ,$

vem $$\delta T = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \frac{d}{dt} \delta q_h \right).$$

O princípio de Hamilton dá

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \frac{d}{dt} \delta q_h + Q_h \delta q_h \right) \right] dt = 0 ,$$

ou, integrando

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \frac{d}{dt} \delta q_h \, dt = \left(\sum_{h=1}^{n} \delta q_h \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \right) dt ,$$

e

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \right) + Q_h \right) \right] \delta q_h \cdot dt = 0 ,$$

pois que os δq_h se supõem nulos nos extremos. Daqui se tira que são verificadas as equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h = 0 ,$$

que são precisamente as equações de Lagrange. O processo de demonstração é o mesmo que o que foi usado na parte inversa do princípio de Hamilton.

Tratando-se dum sistema conservativo, o princípio de Hamilton exprime-se pela fórmula variacional

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta \mathcal{U}) \, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + \mathcal{U}) \, dt = 0 ;$$

ou

$$\delta S = 0 , \quad \text{com} \quad S = \int_{t_0}^{t_1} (T + \mathcal{U}) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} L \, dt .$$

Em resumo: dado um sistema conservativo, de ligações bilaterais holónomas que satisfaçam ao princípio dos trabalhos virtuais, vale a relação

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt = 0 ,$$

que traduz uma propriedade do movimento natural, em confronto com os movimentos variados virtuais que levam o sistema da mesma posição inicial à mesma posição final. Como o sistema é holónomo, vale a relação

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial T}{\partial q'_h} \delta q'_h \right),$$

pelo que vem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_h \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial T}{\partial q'_h} \delta q'_h + \frac{\partial U}{\partial q_h} \delta q_h \right) dt = 0,$$

donde se tira, como atrás se viu,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h},$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0. \qquad (2)$$

Assim, dado o integral $\int_{t_0}^{t_1} L(q/q'/t)\,dt$,

a anulação da sua variação primeira leva às equações $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$, e esta afirmação é geral, mesmo que não se trate dum problema dinâmico, pois as equações de Euler relativas ao integral proposto são precisamente as equações (2).

27) <u>O problema do Cálculo das Variações</u>. Dado o integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x\, y\, z \cdots y'\, z' \cdots)\,dx,$$

onde figura a variável independente <u>x</u> e diferentes funções y, z, ... desta variável, assim como as suas derivadas em ordem a x, trata-se de encontrar as funções $y = y(x)$, $z = z(x)$, ... que tornam <u>estacionário</u> o integral J, mas supondo conhecidos os valores das funções procurados nos pontos <u>x_0</u> e <u>x_1</u>.

Se as funções que se desejam são conhecidas consideremos as seguintes famílias de funções $y(x, \varepsilon_1)$, $z(x, \varepsilon_2)$, ... A família $y(x, \varepsilon_1)$ é uma família que se torna na função $y = y(x)$ quando $\varepsilon_1 = 0$, ~~tomando~~ tendo, além disso, todas as funções da família, nos pontos <u>x_0</u> e <u>x_1</u> os mesmos valores que $y(x)$. O mesmo se diz da família $z(x, \varepsilon_2)$, etc.

Escrevendo

$$\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots) = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, y(x, \varepsilon_1), z(x, \varepsilon_2), \ldots, y'(x, \varepsilon_1), z'(x, \varepsilon_2), \ldots\right] dx$$

êste integral deve ter um valor <u>extremo</u> (ou tornar-se estacionário) quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0$. Assim é

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = 0, \ldots$$

Ora

$$\delta J = \varepsilon_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + \varepsilon_2\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 + \cdots, = 0$$

se δJ é a variação de J quando se passa das funções $y(x)$, $z(x)$, .. para as funções variadas. Podemos escrever também

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 \varepsilon_1 + F_z\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \varepsilon_2 + \cdots + F_{y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 \varepsilon_1 + F_{z'}\left(\frac{\partial z'}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \varepsilon_2 + \cdots\right] dx = 0$$

Se notarmos que é

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\left(\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 \varepsilon_1 dx = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\frac{d}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1 = 0}\varepsilon_1 dx = \left[\varepsilon_1\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=0} F_{y'}\right]_{x_0}^{x_1} - \varepsilon_1\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=0}\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx =$$

$$= -\varepsilon_1\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=0}\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx,$$

pois $\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=0}$ nos pontos x_0 e x_1 é nula, vem

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 \varepsilon_1\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right] + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 \varepsilon_2\left[F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right] + \cdots\right\} dx = 0$$

Ora êste δJ tendo de ser nulo quaisquer que sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ e as funções $\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon_2}\right)_0$, etc., deve ser

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0, \quad \frac{d}{dx}F_{z'} - F_z = 0, \quad \cdots,$$

que são as equações de Euler, os quais têem precisamente a forma dum sistema lagrangeano generalizado.

28) ~~Observação~~ - Duma maneira mais precisa, a arbitrariedade de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, leva a

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=0} dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_1}\left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon_2}\right)_{\varepsilon_2=0} dx = 0, \cdots,$$

Tirando-se destas igualdades as equações de Euler em virtude do lema fundamental do Cálculo das Variações a que vamos referir-nos. Dado o integral

$$I = \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

que se supõe nulo, por hipótese, qualquer que seja a função $\eta(x)$ [esta função supõe-se, todavia com derivadas primeiras e segundas], nula em x_0 e x_1, e sendo $\varphi(x)$ uma função contínua dada, é necessàriamente $\varphi(x) = 0$ em todo o intervalo (x_0, x_1).

Se, com efeito, no ponto ξ, entre x_0 e x_1, fôsse $\varphi(\xi) > 0$, por exemplo, então poderia escolher-se o intervalo $\xi_0 < x < \xi_1$, dentro do intervalo (x_0, x_1), no qual $\varphi(x) > 0$, e, pois, $\varphi(x) > \delta > 0$, sendo δ fixo. Se tomássemos $\eta(x) = (x - \xi_0)^4(x - \xi_1)^4$ no referido intervalo, e $\eta(x) = 0$ no resto do intervalo (x_0, x_1), viria $\int_{x_0}^{x_1}\varphi\,\eta\,dx > 0$, contra a hipótese.

21) Princípio de Cartan – Cartan (*Leçons sur les invariants intégraux*) substitui ao princípio de Hamilton, no caso dum sistema holónomo de ligações perfeitas, que podem depender do tempo, mas quando há função de fôrça, um princípio equivalente, como vamos ver. Exponhamos o cálculo desde o início.

Consideremos uma família de movimentos a um parâmetro λ, de tal sorte que os parâmetros $q_1, q_2, \dots, q_\ell$, de que depende a posição do sistema, se consideram funções do tempo e dêsse parâmetro. Além disso, se ~~o~~ parte, por exemplo, dum movimento suposto executado entre duas posições dadas e entre dois tempos dados (t_0, t_1), suporemos que a família de movimentos em questão é de intervalo de tempo variados (t_0 e t_1 serão funções de λ) e entre posições dadas variados (os valores iniciais e finais dos parâmetros são também funções de λ).

No caso que estamos tratando, consideremos o integral

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt,$$

e procuremos a variação δS correspondente à variação $\delta\lambda$ de λ. Tem-se

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\tfrac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]dt =$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]_{t=t_1}\delta t_1 - \left[\tfrac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]_{t=t_0}\delta t_0 +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U - \sum m\left(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z\right)\right]dt +$$

$$+\left(\sum m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)\right)_{t_0}^{t_1},$$

pois não devemos esquecer que S é função de $\underline{\lambda}$ por intermédio dos limites t_0 e t_1 e por meio do integrando. Mas é

$$\delta x_1 = (\delta x)_{t_1} + x_1'\,\delta t_1, \dots$$

pois que δx_1 é a variação de $\underline{x}$ na extremidade, de modo que tal variação é motivada pelo facto do extremo variar quando δx se considera como uma função de $\underline{\lambda}$ ao longo da trajectória percorrida (ou considerada) do ponto (x, y, z) e pelo facto do intervalo de tempo (t_0, t_1) variar igualmente, passando a ser $(t_0+\delta t_0, t_1+\delta t_1)$. É claro que o mesmo se diz quanto a $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$. Assim vem

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U - \sum m(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z)\right]dt + [\omega_\delta]_1 - [\omega_\delta]_0, \qquad (1)$$

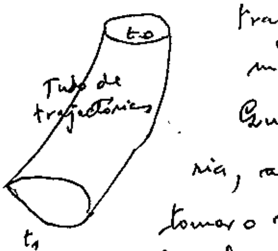
pondo

$$\omega_\delta = \sum m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z) - \left[\sum\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2) - U\right]\delta t.$$

A fórmula (1), tendo em vista a equação geral da Dinâmica, mostra que é $\delta S = 0$, se não se consideram extremos e tempos variados, e se se parte do movimento real. Mas, quando se parte da trajectória real e se consideram extremos e tempos variados, vem

$$\delta S = [\omega\delta]_1 - [\omega\delta]_0 .$$

Consideremos, em particular, um tubo de trajectórias reais, cada uma das quais descrita no intervalo de tempo (t_0, t_1) variável com λ. Podemos figurar no espaço a trajectória correspondente a <u>cada</u> ponto do espaço, trajectória que, naturalmente, tem de ser compatível com as ligações [Veja-se a figura junta].



Quando se parte duma trajectória do tubo e se regressa à mesma trajectória, a acção hamiltoniana $\underline{S}$ [illegible] volta a retomar o seu valor. A sua variação total, nula, por consequência, é, por outro lado, dada pelo integral $\int \delta S = \int [\omega\delta]_1 - \int [\omega\delta]_0 = 0$. Tira-se, assim,

$$\int [\omega\delta]_1 = \int [\omega\delta]_0 ,$$

relação que mostra que o integral $\int \omega_\delta$ tem o mesmo valor qualquer que seja a curva considerada no tubo. Assim, como diz <u>Cartan</u>, $\int \omega_\delta$ é um <u>invariante integral para as equações do movimento</u>, no sentido preciso seguinte: imaginemos o espaço dos estados onde as coordenadas correntes são $(x\, y\, z\, x'\, y'\, z'\, t)$ e a variedade dêsse espaço definida pelas ligações; dado um tubo de trajectórias assentes na variedade, o integral $\int \omega_\delta$ é independente da curva fechada que faz o contôrno do tubo e depende só do tubo.

À expressão diferencial ω_δ dá <u>Cartan</u> o nome de <u>tensor quantidade de movimento-energia</u>; e a propriedade demonstrada para o integral $\int \omega_\delta$ constitui o princípio de <u>Cartan</u> a que se aludiu. Vejamos, com efeito, que a propriedade em referência caracteriza as equações do movimento.

Empreguemos os parâmetros lagrangeanos q_i e ponhamos $L = T + U$.

Será, então,

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q'_i} \delta q'_i \right) \right] dt + L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0$$

$$= \left(\sum \frac{\partial L}{\partial q'_i} \delta q_i \right)_{t_0}^{t_1} + L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) \right] dt ,$$

donde podemos deduzir imediatamente as equações de Lagrange.

29) Princípio de Cartan (Continuação) Uma transformação já empregada dá ainda

$$\delta S = \left\{ \sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right)_{t_1}\delta q_i^1 - \left[\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) q_i' - L\right]_{t_1}^{\delta t_1} \right\}$$
$$- \left\{ \sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right)_{t_0}\delta q_i^0 - \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' - L\right]_0^{\delta t_0} \right\} + \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right)\right] dt,$$

donde se conclui, introduzindo a expressão conhecida da energia generalizada

$H = \sum q_i' \frac{\partial L}{\partial q_i'} - L$,

$$\omega_\delta = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i'}\delta q_i - H\delta t.$$

Mediante a transformação já nossa estabelecida $\frac{\partial L}{\partial q_i'} = p_i$ (transformação chamada de Poisson e que se suporá invertível), sabemos que o raciocínio de Hamilton faz passar das equações de Lagrange às equações canónicas

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ao mesmo tempo a expressão de ω_δ passa a ser $\omega_\delta = \sum p\,\delta q - H\delta t$, de sorte que $\int_C \sum p\,\delta q - H\delta t$ é um invariante integral para as equações anteriores.

Vamos estabelecer aqui estas equações, servindo-nos da propriedade indicada do integral $\int \omega_\delta$. Se assim fôr, fica estabelecido que a propriedade de invariância do integral $\int \omega_\delta$ é característica dos tubos de trajectórias naturais.

Seja, para isso, o sistema diferencial

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \dots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \dots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{T},$$

onde os denominadores são funções dos p, q, t. ~~Suponhamos~~ que êste sistema diferencial admite o invariante $I = \int_{(C)} \sum p\,\delta q - H\delta t$, no sentido já indicado. Imaginemos no espaço dos p, q, t um tubo de curvas integrais parametrado por meio de duas variáveis $\underline{\lambda}$ e $\underline{\tau}$, de tal sorte que λ=const. sejam curvas integrais. A variável $\underline{\tau}$ pode escolher-se de modo que as curvas τ=const. constituam uma sucessão prèviamente escolhida. Quando $\underline{\lambda}$ varia de $\underline{\alpha}$ a curva τ= const. fecha-se. Não esquecendo que o tubo de trajectórias é qualquer, notemos que ao longo duma curva integral é

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \dots = \frac{dt}{T} = \mu\, d\tau,$$

sendo $\mu(\lambda, \tau)$ uma função de ponto sôbre o tubo, função na qual se deve fazer λ=const, se nos deslocamentos ao longo da referida curva integral. Como as curvas τ=const. são escolhidas duma maneira arbitrária, $\underline{\mu}$ é uma função arbitrária.

Quando se passa de $\underline{\tau}$ para $\tau + d\tau$ (ou duma curva $\underline{C}$ para uma curva vizinha do tubo) o integral $I = \int \omega_\delta = \int_C \Sigma p_i \delta q_i - H \delta t$ não varia, por hipótese. Mas, como a sua variação é dada por

$$dI = \int_{\mathcal{C}} \Sigma (dp_i \delta q_i + p_i d\delta q_i) - dH \delta t - H d\delta t ,$$

e é

$$\int_{\mathcal{C}} p_i d\delta q_i = \int_{\mathcal{C}} p_i \delta dq_i = (p_i dq_i)_{\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}} dq_i \delta p_i$$

$$\int_{\mathcal{C}} H d\delta t = \int_{\mathcal{C}} H \delta dt = (H dt)_{\mathcal{C}} - \int dt \delta H ,$$

vem

$$dI = \int_{\mathcal{C}} \Sigma (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) + dt \delta H - dH \delta t ,$$

pois $(p_i dq_i)_{\mathcal{C}}$ e $(H dt)_{\mathcal{C}}$ são nulos visto tratar-se duma diferença de dois valores de mesma função $\underline{\lambda}$ no mesmo ponto. A igualdade

$$\int_{\mathcal{C}} \Sigma (dp_i \delta q_i - dq_i \delta p_i) + dt \delta H - dH \delta t = 0 ,$$

como a curva $\underline{C}$ é qualquer (o tubo é qualquer) exige que os coeficientes de $\delta q_i , \delta p_i , \delta t$ sob o sinal de integral sejam nulos. Assim concluímos que será

$$dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt = 0 , \quad - dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = 0 , \quad dt \frac{\partial H}{\partial t} - dH = 0 ,$$

isto é conclui-se que o sistema diferencial é, precisamente o sistema canónico, como se queria provar. Não esqueçamos que, na verdade, a última equação é consequência das anteriores.

30) Regresso ao estudo de equações canónicas – Vimos que era suficiente (na verdade necessário e suficiente) para que uma transformação fosse canónica que se desse a relação

$$\Sigma p_i \delta q_i = \Sigma \pi_i \delta x_i + H_0 \delta t + \delta \Omega$$

ou seja a relação

$$\Sigma p_i \delta q_i - H \delta t = \Sigma \pi_i \delta x_i + (H_0 - H) \delta t + \delta \Omega .$$

Este resultado liga-se ao princípio de Cartan. Se a igualdade anterior se verifica, como as equações propostas admitem o invariante integral $\int_{(\mathcal{C})} \Sigma p_i \delta q_i - H \delta t$, as equações transformadas admitirão o invariante integral $\int_{\mathcal{C}} \Sigma \pi_i \delta x_i + (H_0 - H) \delta t + \delta \Omega$. Visto que $\int \delta \Omega = 0$, ao longo duma curva fechada, vê-se que $\int_{\mathcal{C}} \Sigma \pi_i \delta x_i + (H_0 - H) \delta t$ é um invariante integral para as equações transformadas, as quais terão, pois, a forma

$$\frac{d\pi_i}{dt} = - \frac{\partial (H_0 - H)}{\partial x_i} , \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial (H_0 - H)}{\partial \pi_i} ,$$

conservando-se, assim, a forma canónica, como se queria provar.

34) <u>**Método** de integração de Hamilton-Jacobi</u> - Relativamente à integração dum sistema canónico, o método clássico de Hamilton-Jacobi reduz a integração dum tal sistema de ordem <u>2n</u> à determinação dum <u>integral completo</u> duma equação às derivadas parciais de primeira ordem, com n+1 variáveis independentes. Na verdade, como anota <u>Levi-Civita</u>, uma tal redução não nos faz avançar no cálculo dos integrais do sistema canónico, pois a integração duma equação às derivadas parciais é de natureza mais elevada que a integração dum sistema. Entretanto o método é importante em Mecânica Celeste, em virtude da forma que leva a considerar para o integral geral dum sistema canónico.

Dado o sistema

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

consideremos a equação às derivadas parciais

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1 q_2 \ldots q_n, t, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0, \qquad (1)$$

dita equação de <u>Hamilton Jacobi</u>, e obtida, como se vê, substituindo em H as variáveis p_i por $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ e escrevendo $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$. O número de variáveis independentes é de n+1.

Diz-se <u>integral completo</u> da nossa equação (1), de primeira ordem, uma função $V(q|t|\pi)$ dependente das variáveis independentes e de <u>n</u> constantes arbitrárias π_k $(k=1,2,\ldots,n)$, que satisfaz à equação proposta e tal que o hesseano

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \pi_i} \right\| \neq 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} k \\ i \end{smallmatrix} = 1,2,\ldots,n\right)$$

é diferente de zero.

O método de integração de <u>Hamilton-Jacobi</u> afirma que o conhecimento dum tal integral completo permite determinar o integral geral do sistema canónico por meio de operações em termos finitos.

Com efeito, efectuemos, determinado V, no sistema canónico a mudança de variáveis

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = p_k, \qquad \frac{\partial V}{\partial \pi_i} = \varkappa_i . \qquad (2)$$

As últimas equações, visto que $\nabla \neq 0$, podem resolver-se em ordem aos q_i sob a forma $q_i = q_i(\pi|\varkappa|t)$, e, em seguida, a substituição dêstes q_i nas primeiras equações levará a $p_i = p_i(\pi|\varkappa|t)$, como se deseja.

Chega-se, assim, a

$$p_h = p_h(\pi|x|t), \quad q_h = q_h(\pi|x|t). \qquad (2')$$

Digamos agora que estas relações, nas quais figuram precisamente $\underline{2n}$ constantes arbitrárias, representam o integral geral do nosso sistema canónico.

De facto, consideradas as fórmulas (2) como fórmulas de transformação do sistema canónico, elas definem, como se sabe, uma transformação completamente canónica, sendo $H+\frac{\partial V}{\partial t}$ a nova função característica.

Mas, quando em $H+\frac{\partial V}{\partial t}$, se substituem os $\underline{p}$ e os $\underline{q}$ pelas suas expressões dadas por (2), vem

$$H\left(q_1 \cdots q_n\, t\, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial V}{\partial t} \equiv 0,$$

de sorte que o sistema canónico transformado tem uma função característica nula, reduzindo-se a

$$\frac{d\pi_h}{dt} = 0, \quad \frac{d x_h}{dt} = 0,$$

cujo integral geral é $\pi_h = \text{const.}$, $x_h = \text{const.}$ Assim, regressando às variáveis iniciais, devemos substituir (ou considerar) em

$$\frac{\partial V}{\partial q_h} = p_h, \quad \frac{\partial V}{\partial \pi_i} = x_i, \qquad (2)$$

os π_i e os x_i por constantes. Se se supõe que os π_i e os x_i representam constantes, o integral geral do sistema canónico proposto é, pois, (2).

A particularidade do método de integração que acabamos de vêr consiste em que se obtem o integral geral sob uma forma tal que, consideradas as constantes como novas variáveis, a transformação respectiva é canónica.

De resto, vamos verificar que, obtido o integral geral do sistema canónico sob a forma

$$p_h = p_h(t|p^0|q^0), \quad q_h = q_h(t|p^0|q^0), \qquad (3)$$

onde figuram as $\underline{2n}$ constantes arbitrárias p^0, q^0, estas relações (3), considerando nelas $\underline{t}$ como um parâmetro, definem uma transformação completamente canónica. Na verdade, consideremos em (3) os p^0, q^0 como os valores de p, q no instante t^0; então podemos supôr que (2) ou (2') dão

$$p_h^0 = p_h(\pi|x|t^0), \quad q_h^0 = q_h(\pi|x|t^0). \qquad (4)$$

Mas sendo, como já se viu,

$$\sum_h p_h dq_h = \sum_h \pi_h dx_h - \frac{\partial V}{\partial t} dt + d\left(V - \sum_h \pi_h x_h\right),$$

é claro que, comparando (2') com (4), vê-se que é igualmente

$$\sum_h p_h^\circ dq_h^\circ = \sum_h \pi_h dx_h - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{t=t_0} dt^\circ + d\left(V_0 - \sum \pi_h x_h\right),$$

onde V_0 é a função V expressa nos $(\pi|x)$ e tendo $\underline{t^\circ}$ em lugar de $\underline{t}$.

Se considerarmos em (2) ou (2') $\underline{t}$ como um parâmetro constante e em (4) t° da mesma forma, vem

$$\sum_h p_h dq_h = \sum p_h^\circ dq_h^\circ - dV_0 + dV = \sum_h p_h^\circ dq_h^\circ + d(V - V_0),$$

o que demonstra a afirmação feita.

Podíamos raciocinar ainda desta maneira. Consideremos o sistema canónico e a transformação $\frac{\partial V}{\partial q_k} = p_h$, $\frac{\partial V}{\partial \pi_h} = x_h$, definida supondo em V que $\underline{t}$ é um parâmetro. Define-se, então, uma transformação canónica, e, na verdade, completamente canónica, pois que

$$\sum p_h dq_h = \sum \pi_h dx_h + d\left(V - \sum \pi_h x_h\right). \qquad (5)$$

Assim as fórmulas

$$\left.\begin{aligned} p_h &= p_h(\pi|x|t) \\ q_h &= q_h(\pi|x|t) \end{aligned}\right\} \text{equivalentes a} \left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_h} &= p_h \\ \frac{\partial V}{\partial \pi_h} &= x_h \end{aligned}\right.,$$

com $\underline{t}$ como parâmetro, levam a (5); logo as fórmulas

$$\begin{aligned} p_h^\circ &= p_h(\pi|x|t^\circ) \\ q_h^\circ &= q_h(\pi|x|t^\circ), \end{aligned}$$

com t° como parâmetro, levarão a $\sum p_h^\circ dq_h^\circ = \sum \pi_h dx_h + d\left(V_0 - \sum \pi_h x_h\right)$.

E o raciocínio prossegue-se agora como anteriormente.

32) Caso em que H é independente do tempo

— Quando H não contém o tempo, a equação

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = 0,$$

pode ser satisfeita pondo $V = -Et + W$, onde E é uma constante e W a nova incógnita, que supomos não dependente do tempo. Com efeito, tomando a nova incógnita W nas condições indicadas tem-se

$$\cancel{-E + \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right)}$$

$$-E + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = 0,$$

pelo que a equação a integrar é, pois,

$$H\left(q_1 \dots q_n; \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_n}\right) = E.$$

O integral $\overline{W}$ que se determina deverá depender dos $q\,q$ e dos $\pi\,\pi$, de tal modo que o hesseano

$$\nabla_1 = \left\| \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_i \partial \pi_j} \right\| \neq 0,$$

pois o hesseano $\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \pi_j} \right\|$ se reduz a este.

Em resumo: tem de ser integrada a equação

$$H\left(q_1 \dots q_n, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_n}\right) = E, \qquad (6)$$

encontrando-se um integral $\overline{W}(q|\pi)$ tal que $\nabla_1 = \left\| \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_i \partial \pi_j} \right\| \neq 0$. Trata-se, pois, de achar $\overline{W}$ de tal modo que o primeiro membro de (6) se torne independente dos q_i. Então aparecerá E como uma função dos π_i. Em seguida ter-se-há

$$V = -E(\pi_1 \dots \pi_n)\cancel{t+}\,\overline{W}(q_1 \dots q_n, \pi_1 \dots \pi_n),$$

de sorte que o integral geral do sistema canónico será

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial q_i} = p_i, \qquad -\frac{\partial E}{\partial \pi_j} t + \frac{\partial \overline{W}}{\partial \pi_j} = \varkappa_j,$$

como anteriormente se viu.

A questão pode, porém, resolver-se doutra maneira. Possuir-se a equação

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E,$$

da qual deverá determinar-se um integral dependente de n constantes com o hesseano diferente de zero, pode tomar-se E como uma dessas constantes $(E = \pi_n)$, havendo necessidade de introduzir, apenas, mais n-1 constantes $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$.

Neste caso a exigência feita de ser V um integral completo, ou seja de um hesseano diferente de zero, pode simplificar-se.

Ponhamos, com efeito,

$$\nabla' = \left\| \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_h \partial \pi_j} \right\|,$$ mas supondo que h e j apenas vão de 1 até n-1,

de sorte que

$$\nabla = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial \pi_j} \right\| = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_1 \partial \pi_1} & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_1 \partial \pi_2} & \dots & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_1 \partial \pi_{n-1}} & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_1 \partial E} \\ \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_2 \partial \pi_1} & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_2 \partial \pi_2} & \dots & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_2 \partial \pi_{n-1}} & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_2 \partial E} \\ - & - & - & - & - \\ \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_n \partial \pi_1} & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_n \partial \pi_2} & \dots & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_n \partial \pi_{n-1}} & \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial q_n \partial E} \end{matrix} \right|,$$

ou seja

$$\nabla = \begin{vmatrix} & & \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial E} \\ & \nabla' & \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial E} \\ & & \vdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \pi_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \pi_2} \quad \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial E} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} \begin{vmatrix} & & \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial E} \\ & \nabla' & \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \pi_1} & \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \pi_2} \quad \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial E} \end{vmatrix},$$

se se supõe que p_n figura em H. Doutra forma teríamos de escrever $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ em vez de $\frac{\partial H}{\partial p_n}$, em que p_i figuraria em H. Se juntarmos aos elementos da última linha os elementos da 1ª, 2ª, ... etc., multiplicados, respectivamente, por $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_{n-1}}$, encontra-se, para elementos da referida última linha, os seguintes [supõe-se, é claro, que os $\frac{\partial H}{\partial p_i}$, uma vez conhecida a função W, são funções dos q e dos π)

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \pi_1}, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial \pi_2}, \ldots, \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial E}.$$

Mas, tendo em vista as relações $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, vêm os elementos da linha anterior sob a forma

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial \pi_1}, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial \pi_2}, \ldots, \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial \pi_{n-1}}, \quad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial E}. \qquad (7)$$

Mas sendo ~~[illegible]~~

$$H(p,q) = H\left(\frac{\partial W}{\partial q}, q\right) = E, \quad \text{independente dos qq,}$$

é

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_j} = \sum_h \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial p_k}{\partial \pi_j} = \frac{\partial E}{\partial \pi_j} = 0, \quad \text{salvo quando } j = n\text{, que dá}$$

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 1 = \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_h}{\partial E}.$$

Todos os elementos da linha (7) são, pois, nulos, salvo o último, pelo que

$$\nabla = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} \begin{vmatrix} \nabla' & \vdots \\ 0 \quad 0 \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\nabla'}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}.$$

A condição $\nabla \neq 0$ é, pois, equivalente a $\nabla' \neq 0$.

Passando agora ao sistema canónico, o integral geral será

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \frac{\partial W}{\partial \pi_i} = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad -t + \frac{\partial W}{\partial E} = -t_0, \end{cases}$$

onde se põe $-t_0$ em vez de x_n. As equações $\frac{\partial W}{\partial \pi_i} = x_i$ e $\frac{\partial W}{\partial E} = t - t_0$, são resolúveis em ordem aos qq, visto que a condição $\nabla' \neq 0$ arrasta $\nabla \neq 0$.

Podemos, porém, dizer aqui que, comparecendo o tempo t apenas na equação $\frac{\partial W}{\partial E}=t-t_0$, o conjunto das equações $\frac{\partial W}{\partial \pi_i}=x_i$, definindo os qq em função das constantes, define, no espaço dos qq as trajectórias possíveis. Em seguida, a equação $\frac{\partial W}{\partial E}=t-t_0$ dará a lei do movimento sôbre cada trajectória.

E, pelo facto de ser, ao longo de cada trajectória, $H=E$, representando H a energia generalizada, vê-se que o valor da constante E dá a energia total sôbre cada trajectória. Esta condição $H=E(=\text{const.})$ ao longo de cada trajectória só tem lugar, pois, quando H é independente do tempo, o que constitui um facto nosso conhecido.

33) Transformações quaisquer dos sistemas canónicos

Dado o sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i=1,2,\dots,n) \qquad (A)$$

estudemos agora uma transformação qualquer. Sejam $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ as novas variáveis, que serão funções dadas dos $x_i\, y_i$ e do tempo, supondo-se, como sempre, invertíveis as fórmulas de transformação. Podemos operar do modo seguinte. É

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial z_k}+\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\right)=\sum_i\left(-\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\frac{dx_i}{dt}\right),$$

ou seja

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}+\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\frac{dy_i}{dt}-\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\frac{dx_i}{dt}\right)=0.$$

Mas

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\sum_\ell\frac{\partial x_i}{\partial z_\ell}\frac{dz_\ell}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\sum_\ell\frac{\partial y_i}{\partial z_\ell}\frac{dz_\ell}{dt},$$

de modo que

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}+\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}-\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)+\sum_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\sum_\ell\frac{\partial y_i}{\partial z_\ell}\frac{dz_\ell}{dt}-\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\sum_\ell\frac{\partial x_i}{\partial z_\ell}\frac{dz_\ell}{dt}\right]=$$

$$=0.$$

Podemos escrever ainda

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}+\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}-\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)+\sum_\ell\frac{dz_\ell}{dt}\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\frac{\partial y_i}{\partial z_\ell}-\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\frac{\partial x_i}{\partial z_\ell}\right)=0,$$

ou, introduzindo os parêntesis de Lagrange,

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}+[z_k,t]+\sum_\ell\frac{dz_\ell}{dt}[z_k,z_\ell]=0. \qquad (\delta)$$

Sabemos que o sistema canónico, como sistema normal, mediante uma transformação invertível, passa a outro sistema normal. O sistema anterior (δ) será êsse novo sistema normal, devendo, naturalmente, resolver-se em ordem às 2n derivadas $\frac{dz_l}{dt}$. O determinante dos $\frac{dz_l}{dt}$ é

$$\Delta = \begin{vmatrix} [z_1, z_1] & [z_1, z_2] & \cdots & [z_1, z_{2n}] \\ [z_2, z_1] & [z_2, z_2] & \cdots & [z_2, z_{2n}] \\ - & - & - & - \\ [z_{2n}, z_1] & [z_{2n}, z_2] & \cdots & [z_{2n}, z_{2n}] \end{vmatrix},$$

por conseqüência um determinante simétrico esquerdo, pois

$$[z_k, z_l] = -[z_l, z_k].$$

Vamos vêr que é, efectivamente $\Delta \neq 0$, nas hipóteses consideradas. Tem-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_1}\frac{\partial y_i}{\partial z_1} - \frac{\partial y_i}{\partial z_1}\frac{\partial x_i}{\partial z_1}\right) & \sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_1}\frac{\partial y_i}{\partial z_2} - \frac{\partial x_i}{\partial z_2}\frac{\partial y_i}{\partial z_1}\right) & \cdots & \sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_1}\frac{\partial y_i}{\partial z_{2n}} - \frac{\partial x_i}{\partial z_{2n}}\frac{\partial y_i}{\partial z_1}\right) \\ - & - & - & - \\ \sum_{l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{2n}}\frac{\partial y_i}{\partial z_1} - \frac{\partial x_i}{\partial z_1}\frac{\partial y_i}{\partial z_{2n}}\right) & \sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{2n}}\frac{\partial y_i}{\partial z_2} - \frac{\partial x_i}{\partial z_2}\frac{\partial y_i}{\partial z_{2n}}\right) & \cdots & \sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_{2n}}\frac{\partial y_i}{\partial z_{2n}} - \frac{\partial x_i}{\partial z_{2n}}\frac{\partial y_i}{\partial z_n}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_4} & \cdots & \frac{\partial x_{2n}}{\partial z_1} & \frac{\partial y_{2n}}{\partial z_1} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ \frac{\partial x_1}{\partial z_{2n}} & \frac{\partial y_1}{\partial z_{2n}} & \frac{\partial x_2}{\partial z_{2n}} & \frac{\partial y_2}{\partial z_{2n}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial z_{2n}} & \frac{\partial y_n}{\partial z_{2n}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & -\frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & -\frac{\partial x_2}{\partial z_4} & \cdots & \frac{\partial y_{2n}}{\partial z_1} & -\frac{\partial x_{2n}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & -\frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial z_2} & -\frac{\partial x_n}{\partial z_2} \\ - & - & - & - & - & - & - \end{vmatrix},$$

de sorte que Δ é simbòlicamente

$$\Delta = \frac{D(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)}{D(z_1, z_2, \ldots z_{2n})} \cdot \frac{D(y_1, -x_1, y_2, -x_2, \ldots, y_n, -x_n)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})} \neq 0.$$

Em resumo: a redução das equações (θ) à forma normal não origina qualquer dificuldade. Pode-se, de resto, arranjar de forma a chegar-se imediatamente às equações transformadas já resolvidas em ordem aos $\frac{dz}{dt}$.

Tem-se, com efeito,

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}\right) = \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right),$$

e como

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = \sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial y_i})$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_i\left[\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial y_i} - \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial x_i}\right] =$$

$$= \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial H}{\partial z_l}\sum_i\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{\partial z_l}{\partial y_i} - \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial z_l}{\partial x_i}\right).$$

Introduzindo agora os parêntesis de Poisson, vem

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_l (z_k, z_l) \frac{\partial H}{\partial z_l}.$$

34) **Substituição dos parêntesis de Lagrange nas equações (θ)** – Designemos, duma maneira geral, com $u, v, \ldots$ as quantidades z_k, t, e seja K uma função arbitrária de $u, v, \ldots$ Ponhamos

$$J_u = \frac{\partial K}{\partial u} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u}.$$

Então

$$\frac{\partial J_u}{\partial v} = \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} + \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \sum_i y_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v},$$
$$\frac{\partial J_v}{\partial u} = \frac{\partial^2 K}{\partial v \partial u} + \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} + \sum_i y_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial y},$$

e, portanto,

$$\frac{\partial J_u}{\partial v} - \frac{\partial J_v}{\partial u} = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial u} \right) = [u, v].$$

Desta maneira o cálculo dos colchetes de Lagrange, que são em número de

$$2n + \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n + n(2n-1) = 2n^2 + n = n(2n+1),$$

reduz-se ao cálculo das $2n+1$ quantidades J_u. Se o tempo t não figura nas fórmulas de transformação, o número dos colchetes é $n(2n-1)$ e o número dos J_u é de $2n$. Então as equações (θ) podem escrever-se

$$\frac{\partial H}{\partial z_k} + \frac{\partial J_{z_k}}{\partial t} - \frac{\partial J_t}{\partial z_k} + \sum_l \frac{dz_l}{dt} \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k} \right) = 0,$$

ou, pondo ainda $H' = H - J_t$,

$$\frac{\partial H'}{\partial z_k} + \frac{\partial J_{z_k}}{\partial t} + \sum_l \frac{dz_l}{dt} \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k} \right) = 0. \qquad (θ')$$

Seguindo nesta parte, como sempre faremos daqui em deante, o livro de Mecânica Celeste de H. Andoyer, imaginemos o caso particular em que as variáveis z_k se partem em dois grupos, precisamente os p_j e q_j, como que temos lidado. Mas suponhamos que a função K é tal que os J_{q_j} são todos nulos e que os J_{p_j} são independentes dos p_j, isto é, exprimem-se nos q_j e no tempo.

As equações (θ') partir-se-hão, desta maneira, nos dois grupos seguintes:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_k} + \frac{\partial J_{p_k}}{\partial t} + \sum_j \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial J_{p_k}}{\partial q_j} = 0,$$

$$\frac{\partial H'}{\partial q_k} \; [illegible] \; \sum_j \frac{dp_j}{dt} \frac{\partial J_{p_j}}{\partial q_k} = 0. \qquad (θ'')$$

a mudança de variáveis $J_{p_j} = q'_j$, isto é substituamos às variáveis q_j as variáveis $\underline{q'_j}$. Então será

$$\frac{\partial H'}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial H'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k},$$

e o nosso sistema (D'') transforma-se no seguinte:

$$\sum_j \frac{\partial H'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} - \sum_j \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial p_j} + \frac{\partial q'_j}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = 0,$$

que é precisamente da forma

$$\frac{dq'_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial q'_j}.$$

Sob esta forma, vê-se que tomando os p_j e os $\underline{q'_j}$ como variáveis conjugadas fica conservada a forma canónica, sendo a nova função característica a função

$$H' = H - J_t.$$

E a transformação será completamente canónica, se fôr $J_t = 0$.

35) Aplicações - Partindo do sistema canónico (A) suponhamos que os $\underline{x_i}$ se exprimem unicamente nos p_j e no tempo, e tomemos para função $\underline{K}$ uma função que se exprime igualmente nos p_j e no tempo. Então, sem mesmo saber quais são as variáveis q_j, é $J_{q_j} = 0$, e se pomos $J_{p_j} = q_j$, ou seja

$$q_j = J_{p_j} = \frac{\partial K}{\partial p_j} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j},$$

a transformação que leva dos (x_i, y_i) aos (p_j, q_j) é uma transformação canónica.

Se, por exemplo, se faz

$$x_i = \alpha_i^1 p_1 + \alpha_i^2 p_2 + \cdots + \alpha_i^n p_n,$$

e se põe $K = 0$, deverá fazer-se

$$q_j = \sum_i y_i \alpha_i^j = \alpha_1^j y_1 + \alpha_2^j y_2 + \cdots + \alpha_n^j y_n,$$

para se ter uma transformação canónica, de resto, aqui, completamente canónica. Sabe-se, de resto, que é $\sum_i x_i y_i = \sum_j p_j q_j$, pois se os $\underline{x_i}$ se supõem transformados por contravariância, a variância dos y_i é, precisamente, a covariância.

36) Sobre algumas proposições gerais - Dado o sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7)$$

§ [illegible]) [illegible] – suponhamos que F e K, não apenas funções de $\underline{t}$ e dos x_i e y_i, mas ainda dum certo número de parâmetros $a_1, a_2, \dots$. Feita a integração do sistema, aparecem os $x_i\, y_i$ como funções de $\underline{t}$, dos parâmetros $a_1, a_2, \dots$ e de $\underline{2n}$ constantes de integração $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$. Substituindo êsses valores de $x_i\, y_i$ na função F, esta função fica expressa em t, a_i, c_k, como os $x_i\, y_i$.

Posto isto, designemos com $u, v, \dots$ as diferentes quantidades $t, a_1, a_2, \dots, c_1, c_2, \dots$, empreguemos o símbolo $\underline{\partial}$ para significarmos as derivadas de F, $x_i\, y_i$ quando se supõem estas funções expressas nos $u, v, \dots$, e reservemos o símbolo $\underline{\delta}$ para as derivadas de $\underline{F}$ antes de se fazer a substituição. Se, como anteriormente, ponhamos

$$J_u = \frac{\partial K}{\partial u} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u}, \qquad [u, v] = \frac{\partial J_u}{\partial v} - \frac{\partial J_v}{\partial u} = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial y_i}{\partial u} \right)$$

é

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\delta F}{\delta y_i}\frac{\partial y_i}{\partial u} \right),$$

quando o parâmetro u comparece em F, pois, doutra forma, será $\frac{\delta F}{\delta u} = 0$.

Na expressão anterior os $x_i\, y_i$ estão expressos nos parâmetros $u, v, \dots$ de sorte que valem as relações

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\delta F}{\delta y_i}, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta x_i},$$

de sorte que se tem

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial t} \right) = \frac{\delta F}{\delta u} + [t, u],$$

e, em particular,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\delta F}{\delta t}, \quad \text{pois } [t, t] \equiv 0.$$

Daqui se tira a seguinte conclusão: se a função F é independente do tempo, ou melhor, não depende explicitamente do tempo, é uma constante do movimento, como já, de resto, vimos por várias vezes. A fórmula $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + [t, u]$, utilizando os J_u, escreve-se

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial J_t}{\partial u} - \frac{\partial J_u}{\partial t},$$

ou seja

$$\frac{\partial J_u}{\partial t} = \frac{\partial J_t}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\delta F}{\delta u}.$$ Pondo $J_t = F + G$, tem-se ainda

$$\frac{\partial J_u}{\partial t} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial G}{\partial u},$$

sendo

$$J_t = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = F + G, \quad \text{isto é}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = F + G - \sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = F + G - \sum y_i \frac{\delta F}{\delta y_i}.$$

Não devemos esquecer, com efeito, que esta relação supõe a integração do sistema ca nónico já efectuada, valendo, pois, a relação $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$.

A última igualdade escrita mostra que G pode ser escolhida como função arbitrária de $u, v, \ldots$, desde que, em seguida, K se determine pela mesma equação. Tal determinação far-se-há por uma quadratura, podendo, ao valor encontrado, juntar-se uma função arbitrária de $u, v, \ldots,$ (contanto que não sejam funções de t.) Tomemos, em particular, G independente das constantes de integração c_k. Então vem, em particular,

$$\frac{\partial J_{c_k}}{\partial t} = 0 .$$

Êste resultado mostra que os J_{c_k} só dependerão dos $a_1, a_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$. As relações $[c_k, c_l] = \frac{\partial J_{c_k}}{\partial c_l} - \frac{\partial J_{c_l}}{\partial c_k}$ mostram que o mesmo sucede com os colchetes de Lagrange $[c_k, c_l]$, o que traduzirá uma propriedade característica dêstes parentesis, pois que o seu valor nada tem que vêr com a forma como se escolhem $\underline{K}$ e $\underline{G}$.

Postos êstes resultados, consideremos o problema seguinte: É dado o sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (\lambda)$$

e é dado estoutro sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i};$$

êste último, suposto integrado, representará igualmente o integral geral do anterior desde que as $\underline{2n}$ constantes de integração que aqui figuram sejam consideradas novas variáveis para a transformação de (λ). Quere dizer que o sistema (λ) se transformará noutro sistema normal em que as variáveis dependentes são os $\underline{c_k}$, que deverão ser determinados em função de $\underline{t}$.

O sistema transformado de (λ) será

$$\frac{\partial H}{\partial c_k} + [c_k, t] + \sum_l [c_k, c_l] \frac{dc_l}{dt} = 0,$$

como anteriormente se viu. Mas

$$[c_k, t] = \frac{\partial J_{c_k}}{\partial t} - \frac{\partial J_t}{\partial c_k} = -\frac{\partial J_t}{\partial c_k} = -\frac{\partial (F+G)}{\partial c_k} = -\frac{\partial F}{\partial c_k},$$

em virtude das hipóteses feitas quanto à escolha de J_t e da função G, e da propriedade demonstrada para os J_{c_k}, que são independentes do tempo. Assim, obtêem-se as equações

$$\frac{\partial (H-F)}{\partial c_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{c_k}}{\partial c_l} - \frac{\partial J_{c_l}}{\partial c_k} \right) \frac{dc_l}{dt} = 0,$$

como transformadas de (λ). É êste resultado e alguns das propriedades atrás demonstradas que constitui uma parte das proposições gerais que desejávamos,

– Suponhamos agora, em segundo lugar, que os parâmetros $a_1, a_2, \dots$, que figuram em F, se podem dividir em dois grupos; a um lado $a', b', \dots$, a outro lado $\mu', \nu', \dots$; aqueles figurando, de facto, isoladamente, mas os parâmetros $\mu', \nu', \dots$ figurando sob a forma

$$M' = m't + \mu', \quad N' = n't + \nu', \dots,$$

onde os $m', n', \dots$ são funções dos $a', b', \dots$. Esta hipótese é absolutamente facultativa. Relativamente às constantes de integração, vamos fazer hipóteses análogas, as quais, agora, diferentemente das anteriores, exigirão certas formas para o sistema canónico. Suponhamos que os c_k se partem em dois grupos; a um lado $a, b, \dots$, a outro $\mu, \nu, \dots$, de tal sorte que estas últimas figurem sob o aspecto

$$M = mt + \mu, \quad N = nt + \nu, \dots$$

onde $m, n, \dots$ são funções de $a, b, \dots, a', b', \dots$.

Feito isto, designemos com $u, v, \dots$ os argumentos $t, a', b', \dots, M', N', \dots, a, b, \dots, M, N, \dots$. Dada uma função f dêstes argumentos, tem-se

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum m \frac{\partial f}{\partial M} + \sum m' \frac{\partial f}{\partial M'},$$

onde as somas têm significado evidente.

O facto dos x_i, y_i, expressos nos argumentos anteriores, serem as soluções desejadas para o sistema canónico de função característica F, traduz-se pelas igualdades

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum m \frac{\partial x_i}{\partial M} + \sum m' \frac{\partial x_i}{\partial M'} = \frac{\delta F}{\delta y_i},$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum m \frac{\partial y_i}{\partial M} + \sum m' \frac{\partial y_i}{\partial M'} = -\frac{\delta F}{\delta x_i}.$$

Assim será

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\delta F}{\delta y_i}\frac{\partial y_i}{\partial u} \right) = \frac{\delta F}{\delta u} + [t, u] + \sum_m m[M, u] + \sum_{m'} m'[M', u],$$

e pondo

$$J_t + \sum m J_M + \sum m' J_{M'} = F + G,$$

vem

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial J_t}{\partial u} - \frac{\partial J_u}{\partial t} + \sum m \left(\frac{\partial J_M}{\partial u} - \frac{\partial J_u}{\partial M} \right) + \sum m' \left(\frac{\partial J_{M'}}{\partial u} - \frac{\partial J_u}{\partial M'} \right) =$$

$$= \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} - \sum m \frac{\partial J_M}{\partial u} - \sum \frac{\partial m}{\partial u} J_M - \sum m' \frac{\partial J_{M'}}{\partial u} - \sum \frac{\partial m'}{\partial u} J_{M'}$$

$$- \frac{\partial J_u}{\partial t} + \sum m \left(\frac{\partial J_M}{\partial u} - \frac{\partial J_u}{\partial M} \right) + \sum m' \left(\frac{\partial J_{M'}}{\partial u} - \frac{\partial J_u}{\partial M'} \right),$$

donde se tira

$$\frac{dJ_u}{dt} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial G}{\partial u} - \sum \frac{\partial m}{\partial u} J_M - \sum \frac{\partial m'}{\partial u} J_{M'} \qquad (\mu)$$

visto que

$$\frac{dJ_u}{dt} = \frac{\partial J_u}{\partial t} + \sum m \frac{\partial J_M}{\partial u} + \sum m' \frac{\partial J_{M'}}{\partial u}.$$

[illegible]

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \left[\sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum m\left(\frac{\partial K}{\partial M} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial M}\right) + \sum m'\left(\frac{\partial K}{\partial M'} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial M'}\right)\right] = F + G,$$

ou seja

$$\frac{dK}{dt} = F + G - \sum_i y_i \frac{dx_i}{dt} = F + G - \sum_i y_i \frac{\delta F}{\delta y_i}.$$

Desde que a função $\underline{G}$ seja escolhida arbitràriamente, esta equação serve para determinar K, por uma quadratura. Assim, se escolhermos $\underline{G}$ independente dos $M', N', \dots, M, N, \dots$, isto é $G(a', b', \dots, a, b, \dots)$, vem, tendo em vista a igualdade (μ),

$$\frac{dJ_M}{dt} = 0, \qquad \frac{dJ_a}{dt} = \frac{\partial G}{\partial a} - \sum \frac{\partial m}{\partial a} J_M.$$

A primeira relação mostra que os J_M só dependem de $a', b', \dots, a, b, \dots$, e a segunda, cujo segundo membro só depende de $a', b', \dots, a, b, \dots$, mostra que os J_a são funções lineares do tempo, com coeficientes dependendo dos mesmos $a', b', \dots, a, b, \dots$

Relativamente a J_t, tem-se

$$\frac{dJ_t}{dt} = \frac{\delta F}{\delta t} = \frac{d}{dt}\left(F - \sum m' J_{M'}\right).$$

Se a função F sob a sua forma primitiva, isto é, antes da substituição dos x_i, y_i pelos valores encontrados para estas variáveis depois da integração, não contém o tempo a não ser por intermédio dos argumentos $M', N', \dots$, a função $F - \sum m' J_{M'}$ é uma constante, exprimindo-se unicamente nos $a', b', \dots, a, b, \dots$

37) Aplicação à Mecânica Celeste — Como aplicação à Mecânica Celeste, H. Andoyer, pág. 36, diz o seguinte: façamos a hipótese, sempre realizada em Mecânica Celeste, de que os x_i, y_i, assim como a função F, são séries inteiras em $\underline{t}$, e séries inteiras de $e^{iM'}, e^{iN'}, \dots, e^{iM}, e^{iN}, \dots$, mas havendo unicamente potências positivas de $\underline{t}$ e potências positivas ou negativas de $e^{iM'}, \dots, e^{iM}, \dots$, e sendo os coeficientes funções de $a', b', \dots, a, b, \dots$; ou, doutra maneira, trata-se, para x_i, y_i, F, de ~~séries~~ inteiras, com expoentes positivos, de t, com termos que dependem linearmente de cosenos e senos dos arcos múltiplos de $M', N', \dots, M, N, \dots$; e suponhamos mais, quanto aos x_i, que podem comparecer termos lineares em $M', N', \dots, M, N, \dots$ com coeficientes puramente numéricos;

— então diremos, abreviadamente, que a integração leva a expressões para x_i, y_i, e para F, sob a forma de séries mistas, que podem, em particular, ser periódicas, isto é não enter o tempo t a não ser por intermédio dos argumentos $M', N', \ldots M, N, \ldots$ Com H. Poincaré admite-se o seguinte: duas séries mistas que tomam os mesmos valores para todos os valores da variável t são idênticas, isto é, são compostas dos mesmos termos. Mas tem-se a restrição seguinte: as duas séries a comparar, escritas sob forma exponencial, ou como séries inteiras de $e^{iM'}, e^{iN'}, \ldots, e^{iM}, e^{iN}, \ldots$ são tais que, qualquer delas, não contém dois termos em que os argumentos

$$l M' + p N' + \cdots + k M + j N + \cdots$$

difiram duma constante. Duma maneira mais clara: tomemos os dois argumentos, correspondentes a dois termos,

$$l_1 M' + p_1 N' + \cdots + k_1 M + j_1 N + \cdots$$
$$l_2 M' + p_2 N' + \cdots + k_2 M + j_2 N + \cdots,$$

ou seja

$$l_1 (m't + \mu') + p_1 (n't + \nu') + \cdots + k_1 (mt + \mu) + j_1 (nt + \nu) + \cdots$$
$$l_2 (m't + \mu') + p_2 (n't + \nu') + \cdots + k_2 (mt + \mu) + j_2 (nt + \nu) + \cdots,$$

então êstes dois argumentos não poderão dar

$$(l_1 - l_2) m' + (p_1 - p_2) n' + \cdots + (k_1 - k_2) m + (j_1 - j_2) n + \cdots = 0,$$

pois, se dessem, a diferença entre os dois argumentos seria a constante

$$(l_1 - l_2) \mu' + (p_1 - p_2) \nu' + \cdots + (k_1 - k_2) \mu + (j_1 - j_2) \nu + \cdots$$ [illegible],

o que não se admite.

Também poderemos exprimir-nos dizendo que uma relação linear e homogénea, com coeficientes inteiros, entre $m', n', \ldots, m, n, \ldots$ não é admissível.

§ 38) Transformações dos sistemas canónicos importantes em Mecânica Celeste

– Na ordem de ideias que vimos seguindo, observemos que a derivada em ordem ao tempo (derivada completa) duma série mista como as anteriormente indicadas é ainda uma série mista e que o integral tem a mesma propriedade. O mesmo se diz de qualquer derivada parcial em ordem a um dos $u, v, \ldots$, incluindo o tempo, sendo, porém, mister distinguir entre derivada completa em ordem ao tempo e derivada parcial em ordem ao tempo. O produto de duas séries mistas é igualmente uma série mista. Assim a igualdade

$$\frac{dK}{dt} = F + G - \Sigma y_i \frac{dx_i}{dt}$$

, dá para K uma série mista, em face da maneira como no § anterior se supõe escolhida a função G. Quando, em seguida, se põe

$$J_u = \frac{\partial K}{\partial u} + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

vê-se que J_u é igualmente uma série mista. Escrevamos, ordenando segundo as potências de t,

$$x_i = x_i^0 + x_i' t + x_i'' t + \cdots \quad , \quad K = K^0 + K' t + K'' t^2 + \cdots ,$$

$$y_i = y_i^0 + y_i' t + y_i'' t + \cdots \quad , \quad J_u = J_u^0 + J_u' t + J_u'' t^2 + \cdots .$$

Vê-se que é, necessàriamente, supondo $u \neq t$,

$$J_u^0 = \frac{\partial K^0}{\partial u} + \sum_i y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial u}.$$

Mas sendo os J_M, como se viu no § anterior, constantes, e sendo os J_a funções lineares do tempo com coeficientes constantes, necessàriamente se reduzirão às constantes as expressões J_M^0 e J_a^0, as quais, no geral, seriam séries periódicas, por não conterem termos mistos. Assim

$$\left.\begin{matrix} J_M^0 \\ J_a^0 \end{matrix}\right(a', b', \ldots, a, b, \ldots)$$ são funções, apenas, das variáveis indicadas em parêntesis.

Como K^0 é uma série periódica, não carecemos conhecê-la para o cálculo de J_M^0 e de J_a^0, bastando-nos o termo constante de K^0; e, como êste termo constante é arbitrário, pode supôr-se igual a zero, o que levará a $J_M^0 = J_a^0 = \left(\sum_i y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial u}\right)_0$, com $u = a, M$. Façamos, então, no sistema canónico

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

a mudança de variáveis que consiste em substituir os x_i, y_i pelos $M, N, \ldots;$ $a, b, \ldots$ obtidos pela integração do sistema $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i};$ mas empregando, apenas, para a transformação, as relações

$$x_i = x_i^0; \quad y_i = y_i^0.$$

Como a função K é arbitrária, utilizemos $K \equiv K^0$, onde K^0 é obtido como atrás se disse, a partir de K, obtido como também se viu. Então, designando, duma maneira geral, com z_k, as novas variáveis $M, N, \ldots, a, b, \ldots$, é

$$J_{z_k} = \frac{\partial K^0}{\partial z_k} + \sum_i y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial z_k},$$

o que significa que os J_{z_k} se reduzem aos J_M^0 e J_a^0 atrás mencionados, sendo, aliás,

$$J_{z_k} = \left(\sum_i y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial z_k}\right)_0,$$

em que, duma maneira geral, f_0 designa a parte constante duma função periódica f.

Para se obterem as equações transformadas, precisamos de conhecer J_t. Deve se observar cautela com a interpretação de J_t, pois trata-se do J_t relativo à mudança de variáveis, dado, por consequência, por

$$J_t = \frac{\partial K^\circ}{\partial t} + \sum n' \frac{\partial K^\circ}{\partial m'} + \sum_i y_i^\circ \left(\frac{\partial x_i^\circ}{\partial t} + \sum n' \frac{\partial x_i^\circ}{\partial m'} \right) =$$

$$= \sum n' \left(\frac{\partial K^\circ}{\partial m'} + \sum_i y_i^\circ \frac{\partial x_i^\circ}{\partial m'} \right),$$

visto que $\frac{\partial K^\circ}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial x_i^\circ}{\partial t} = 0$, visto serem K° e x_i° séries periódicas. Em última análise, vem

$$J_t = \sum n' J^\circ_{m'} .$$

As equações transformadas serão, pois,

$$\frac{\partial(H - \cancel{J_t})}{\partial z_k} + \frac{\partial J_{z_k}}{\partial t} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k} \right) \frac{dz_l}{dt} = 0,$$

ou seja, visto que $\frac{\partial J_{z_k}}{\partial t} = 0$,

$$\frac{\partial \left(H^\circ - \sum n' J^\circ_{m'} \right)}{\partial z_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k} \right) \frac{dz_l}{dt} = 0,$$

onde H° designa a expressão em que se torna H quando nela se faz $x_i = x_i^\circ$, $y_i = y_i^\circ$. Para se calcular $\sum n' J^\circ_{m'}$, podemos servir-nos da relação

$$\frac{d}{dt}\left(F - \sum n' J_{m'} \right) = \frac{\delta F}{\delta t}.$$

Se, em particular, F não contém o tempo sob a sua forma primitiva, então $\frac{\delta F}{\delta t} = 0$, de sorte que $F - \sum n' J_{m'}$ será uma constante. O mesmo acontecerá com $F^\circ - \sum n' J^\circ_{m'}$. Se designarmos com J esta constante, será

$$J = F^\circ_0 - \sum n' \left(\sum_i y_i^\circ \frac{\partial x_i^\circ}{\partial m'} \right)_0 ,$$

e, consequentemente,

$$H^\circ - \sum n' J^\circ_{m'} = H^\circ - F^\circ + J .$$

É interessante que se fôr, em particular, $H = F$, virá simplesmente $H^\circ - \sum n' J^\circ_{m'} = J$. Como diz Andoyer "se a solução das novas equações (em z_k) se apresenta sob forma periódica, tem-se também uma solução da forma periódica do sistema inicial, solução que, a princípio, se apresentava com termos nos quais _t_ aparecia explicitamente. É um outro _processo_ do _método de variação de constantes_".

Para acabarmos o que desejamos conhecer sôbre equações canónicas, vamos tratar agora, dentro das hipóteses feitas neste §, o caso em que, além disso, as variveis x_i, y_i, assim como a função F, depois de feita a integração, e bem assim as derivadas $\frac{\delta F}{\delta u}$, não contêm explicitamente o tempo, figurando, pois, esta variável unicamente por intermédio dos argumentos $M', N', \ldots, M, N, \ldots$ Isto equivale a dizer que as soluções encontradas do sistema de função característica F são de forma periódica, mas ressalvando o caso de poderem as variáveis x_i depender linearmente dos argumentos $M', \ldots, M, \ldots$, com coeficientes puramente numéricos. Então, na igualdade

$$\frac{dK}{dt} = F + G - \sum_i y_i \frac{dx_i}{dt},$$

escolhamos para G o termo constante da função periódica $\sum y_i \frac{dx_i}{dt} - F$. Então $\underline{K}$ aparecerá com forma periódica, reduzindo-se à parte K^0 referida anteriormente. O termo constante arbitrário de K escolhe-se igual a zero, como no raciocínio de atrás. Nestas hipóteses a expressão

$$J_t = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

reduz-se a zero. E a igualdade

$$\frac{dJ_t}{dt} = \frac{\delta F}{\delta t} + \frac{\partial G}{\partial t} - \sum \frac{\partial m}{\partial t} J_M - \sum \frac{\partial m'}{\partial t} J_{M'}$$

mostra que $\frac{dJ_t}{dt} = \frac{\delta F}{\delta t} = 0$, isto é, mostra que a função F, sob a sua forma primitiva, não depende do tempo. Os diferentes $\underline{J_u}$ são todos funções periódicas e os $\underline{J_M}$ e $\underline{J_a}$ são constantes iguais a $\left(\sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_0$, com $u = M, a$. Mas é aqui

$$F - \sum m' J_{M'} = \sum m J_M - G,$$

como se tira da igualdade $\quad J_t = F + G - \sum m J_M - \sum m' J_{M'}$.

Assim $F - \sum m' J_{M'}$ é uma constante, que designaremos com J. Será

$$J = F_0 - \sum m' (J_{M'})_0 \quad , \quad \text{com} \quad (J_{M'})_0 = \sum_i \left(y_i \frac{\partial x_i}{\partial M'}\right)_0 .$$

A relação

$$\frac{dJ_u}{dt} = \frac{\delta F}{\delta u} + \frac{\partial G}{\partial u} - \sum \frac{\partial m}{\partial u} J_M - \sum \frac{\partial m'}{\partial u} J_{M'},$$

como ambos os membros são funções periódicas, mostra que não há termo constante pois o 1.º membro é a derivada completa em ordem ao tempo duma função periódica.

Fazendo sucessivamente $u = M', a, a'$ temos

$$0 = \left(\frac{\delta F}{\delta M'}\right)_0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial a} = \sum \frac{\partial m}{\partial a} J_M ,$$

$$\frac{\partial G}{\partial a'} = \sum \frac{\partial m}{\partial a'} J_M + \sum \frac{\partial m'}{\partial a'} (J_{M'})_0 - \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 .$$

Como a função $\underline{G}$ depende apenas de $a', b', \ldots, a, b, \ldots$, temos

$$dG = \sum J_M \, dm + \sum \left[\sum \frac{\partial m'}{\partial a'} (J_{M'})_0 - \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 \right] da'.$$

Esta relação mostra,

que a função $\underline{G}$ se pode exprimir [illegible], o mesmo sucedendo às derivadas parciais em ordem a estas quantidades

$$\frac{\partial G}{\partial m} = J_m, \quad \frac{\partial G}{\partial a'} = \sum \frac{\partial m'}{\partial a'}(J_{m'})_0 - \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 .$$

Introduzindo

$$J = \sum m J_m - G$$

vem

$$dJ = \sum m\, dJ_M + \sum \left[\left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 - \sum \frac{\partial m'}{\partial a'}(J_{m'})_0\right] da',$$

de sorte que J se exprime nos J_M e nos a', o mesmo sucedendo às suas derivadas parciais em ordem a estas quantidades:

$$\frac{\partial J}{\partial J_M} = m, \quad \frac{\partial J}{\partial a'} = \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 - \sum \frac{\partial m'}{\partial a'}(J_{m'})_0 .$$

Se, em particular, não houver parâmetros m', tem-se $F \equiv J$, valendo o integral das fôrças vivas, como sempre.

Para fazermos, como anteriormente, a mudança de variáveis no sistema canónico de função característica H, tomando como novas variáveis $m, n, \ldots, a, b, \ldots$ tem-se

$$\frac{\partial(H - \sum m' J_{m'})}{\partial z_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k}\right)\frac{dz_l}{dt} = 0,$$

ou ainda

$$\frac{\partial(H - F + J)}{\partial z_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial z_l} - \frac{\partial J_{z_l}}{\partial z_k}\right)\frac{dz_l}{dt} = 0. \qquad (\phi)$$

§ 39) **Observação** - Teremos ocasião de aplicar ainda as considerações seguintes: Na mudança de variáveis tratada no § 37, suponhamos que os x_i, y_i dependem do tempo não apenas explicitamente mas ainda por um intermédio duma quantidade ρ, suposta uma função dada do tempo. Nesse caso, as derivadas $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ ou $\frac{\partial y_i}{\partial t}$ deverão substituir-se por $\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dt}$, de sorte que o colchete $[z_k, t]$ deve substituir-se, nas equações transformadas por

$$[z_k, t] + [z_k, \rho]\frac{d\rho}{dt}.$$

Assim, dado o sistema $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}$, $\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$,

se supomos integrado o sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

e queremos fazer a transformação no primeiro tomando para novas variáveis $a, b, \ldots, m, n, \ldots$ mas considerando o parâmetro $\underline{a_1}$ como uma função determinada do tempo, então as equações transformadas

$$\frac{\partial(H-F)}{\partial c_k} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{c_k}}{\partial c_l} - \frac{\partial J_{c_l}}{\partial c_k}\right)\frac{dc_l}{dt} = 0$$

deverão substituir-se pelas equações

$$\frac{\partial(H-F)}{\partial c_k} + \left(\frac{\partial J_{c_k}}{\partial a_1} - \frac{\partial J_{a_1}}{\partial c_k}\right)\frac{da_1}{dt} + \sum_l \left(\frac{\partial J_{c_k}}{\partial c_l} - \frac{\partial J_{c_l}}{\partial c_k}\right)\frac{dc_l}{dt} = 0.$$

Se nos considerarmos na totalidade das hipóteses do § anterior, suponhamos que o parâmetro $\underline{a}_1$ é o parâmetro μ', que figura em $M' = m' + \mu'$. Então as equações (ϕ) deverão ter os seus primeiros membros aumentados de $\left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial M'} - \frac{\partial J_{M'}}{\partial z_k}\right)\frac{d\mu'}{dt} = -\frac{\partial J_{M'}}{\partial z_k}\frac{d\mu'}{dt}$, visto que os J_{z_k} são constantes independentes dos M'. É de resto

$$\frac{dJ_{M'}}{dt} = \frac{\delta F}{\delta m'},$$

o que determina $J_{m'}$, à parte a constante $(J_{m'})_0$.

Mas se o parâmetro a_1 fôr $\underline{a}'$, então as equações (ϕ) devem ter os primeiros membros aumentados de

$$\left(\frac{\partial J_{z_k}}{\partial a'} - \frac{\partial J_{a'}}{\partial z_k}\right)\frac{da'}{dt} - t\sum \frac{\partial m'}{\partial a'}\frac{\partial J_{m'}}{\partial z_k}\frac{da'}{dt},$$

sendo, de resto,

$$\frac{dJ_{a'}}{dt} = \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right) - \left(\frac{\delta F}{\delta a'}\right)_0 - \sum \frac{\partial m'}{\partial a'}\left[J_{m'} - (J_{m'})_0\right],$$

igualdade que serve para o cálculo de $J_{a'}$, à parte a constante do mesmo $J_{a'}$, que é igual a $\left(\sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial a'}\right)_0$.

* * *

A título de exercício vamos dar alguns complementos sôbre equações canónicas.

• Capítulo 3º

Exercícios e complementos sôbre equações canónicas

§ 40) **Exercícios** - 1º) Dado um ponto livre de massa unitária, referido a coordenadas polares espaciais, determinar $H(p|q|t)$ expresso nos qq e nas variáveis conjugadas pp.

Neste caso é $U=0$; T tem apenas parte quadrática, de sorte que

$$H = \sum q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = T_2 - T_0 - U = T.$$

Ora

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2\right),$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} = \dot{\rho}\,; \quad p_\theta = \rho^2\dot{\theta}\,; \quad p_\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \dot{\varphi}\,.$$

Logo

$$H(p|q|t) = T = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \rho^2\frac{p_\theta^2}{\rho^4} + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{p_\varphi^2}{\rho^4\operatorname{sen}^4\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\right).$$

2º) Resolver o mesmo problema em coordenadas cilíndricas, mas tendo em vista que a forma quadrática T, expressa nos $q\dot{q}$, é ortogonal.

Temos

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right). \text{ Logo}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + p_z^2\right).$$

3º) Considerando um sistema de $(N+1)$ pontos livres $(i=0,1,2,\dots,N)$ e tomando como parâmetros lagrangeanos as coordenadas cartesianas ortogonais (ξ_i, η_i, ζ_i) resolver o mesmo problema. Temos

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} m_i\left(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2\right).$$

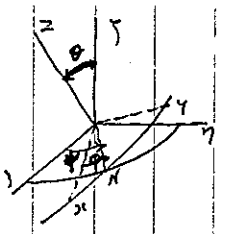
As variáveis conjugadas são

$$\pi_i = m_i\dot{\xi}_i, \quad \chi_i = m_i\dot{\eta}_i, \quad \rho_i = m_i\dot{\zeta}_i)$$

Logo

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{m_i}\left(\pi_i^2 + \chi_i^2 + \rho_i^2\right)$$

4º) Caso dum sólido móvel à volta dum ponto fixo. Vamos tomar os ângulos de Euler como parâmetros lagrangeanos. O sistema tri-rectângulo fixo será $(O\xi\eta\zeta)$ e os ângulos de Euler que definem o terno principal de inércia (relativo ao ponto fixo), com respeito ao terno fixo, são ψ, θ, φ.



$O\zeta \rightarrow \frac{d\psi}{dt}$

$Oz \rightarrow -\frac{d\varphi}{dt}$

$ON \rightarrow \frac{d\theta}{dt}$

Tem-se $T = \frac{A p^2 + B q^2 + C r^2}{2}$, como sabemos

Mas

$$\left\{ \begin{aligned} p &= -\frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos\varphi \\ q &= \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen}\theta \overset{\cos\varphi}{\vee} + \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen}\varphi \\ r &= \frac{d\psi}{dt} \cos\theta \; \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\}$$ onde as projecções têem lugar sôbre os eixos móveis.

Tem-se agora

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot\psi} &= A p (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) + B q (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi) + C r \cos\theta = p_{\dot\psi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} &= -C r = p_{\dot\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} &= A p \cos\varphi + B q \operatorname{sen}\varphi = p_{\dot\theta}, \end{aligned} \right.$$

equações que vamos resolver em ordem a $\underline{Ap}, \underline{Bq}, \underline{Cr}$. Tem-se

~~[illegible]~~

$$\left. \begin{aligned} -A p \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + B q \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - \cos\theta \, p_{\dot\varphi} &= p_{\dot\psi} \\ A p \cos\varphi + B q \operatorname{sen}\varphi &= p_{\dot\theta} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \end{matrix},$$

$$B q \operatorname{sen}\theta - p_{\dot\varphi} \cos\theta \cos\varphi = p_{\dot\psi} \cos\varphi , \qquad B q = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} p_{\dot\psi} + \frac{\cos\theta \cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} p_{\dot\varphi},$$

$$A p \cos\varphi + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\varphi \, p_{\dot\psi} + \frac{\cos\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} p_{\dot\varphi} = p_{\dot\theta},$$

$$A p = \frac{p_{\dot\theta}}{\cos\varphi} - p_{\dot\psi} \frac{\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta \cos\varphi} - p_{\dot\varphi} \frac{\cos\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta \cos\varphi}.$$

Logo

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{p_{\dot\theta}}{\cos\varphi} - \frac{p_{\dot\psi} \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{p_{\dot\varphi} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \right]^2 + \frac{1}{B} \left[p_{\dot\psi} \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta \cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} p_{\dot\varphi} \right]^2 + \frac{1}{C} p_{\dot\varphi}^2 \right\}$$

§ 41) Transformações completamente canónicas lineares. Imaginemos que a funcão $V\,(q|\pi|t)$, dos $2n+1$ argumentos, já nossa conhecida para um certo tipo de transformações completamente canónicas, é linear nas $\underline{2n}$ variáveis $\underline{q}$ e $\underline{\pi}$ que contém. Suponhamos ainda que é independente do tempo. A transformação completamente canónica, em têrmos finitos, é

$$p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad \pi_i = \frac{\partial V}{\partial \pi_i},$$

como vimos, então $\frac{\partial V}{\partial q_h}$ é linear nos $\pi\pi$ e $\frac{\partial V}{\partial \pi_i}$ é linear nos qq. Tem-se uma transformação completamente canónica linear.

Outro exemplo: estudámos as transformações homogéneas, para as quais

$$\sum_{h=1}^{n} p_h dq_h = \sum_{1}^{n} \pi_h dx_h .$$

E vimos que podíamos pôr arbitrariamente, sob a condição de invertibilidade,

$$q_h = q_h(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Depois vinha

$$\sum_{i,h=1} p_h \frac{\partial q_h}{\partial x_i} dx_i = \sum_i \pi_i dx_i , \quad e$$

$$\pi_i = \sum_h p_h \frac{\partial q_h}{\partial x_i} .$$

Suponhamos

$$x_h = \sum_{i=1}^{n} b_{hi} q_i .$$

Temos o seguinte exercício: Dadas as relações $x_h = \sum_{i=1}^{n} b_{hi} q_i$, associar-lhe as relações que dão os ππ, por forma que se tenha uma transformação completamente canónica homogénea. Verificar a invariância da forma bilinear unitária $\sum_{h=1}^{n} p_h q_h$.

Tem-se $\sum_{h=1}^{n} p_h dq_h = \sum_{h=1}^{n} \pi_h \sum_{i=1}^{n} b_{hi} dq_i = \sum p_i dq_i$.

$$p_i = \sum_h \pi_h b_{hi}$$

Temos, pois, o seguinte sistema

$$\left. \begin{aligned} x_h &= \sum_{i=1}^{n} b_{hi} q_i \\ p_h &= \sum_{i=1}^{n} b_{ih} \pi_i \end{aligned} \right\}$$

Se a transformação dos qq nos xx é contragrediente, a transformação dos pp nos ππ é cogrediente.

Verifica-se a relação $\sum x_h \pi_h = \sum p_h q_h$

Assim, se (no caso $n=3$)

$$x_1 = q_1 , \quad x_2 = q_1 - q_2 , \quad x_3 = q_2 - q_3 ,$$

deverá ser

$$\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 =$$

$$= \pi_1 q_1 + \pi_2 (q_1 - q_2) + \pi_3 (q_2 - q_3) ,$$

pelo que

$$p_1 = \pi_1 + \pi_2 ,$$

$$p_2 = \pi_3 - \pi_2 , \qquad p_3 = -\pi_3 ,$$

Dá também

$$\left\{ \begin{aligned} \pi_1 &= p_1 + p_2 + p_3 \\ \pi_2 &= -p_2 - p_3 \end{aligned} \right. \qquad \left. \pi_3 = -p_3 \right\} .$$

§ 42) Transformações completamente canónicas binárias – Exercício – Demonstrar que, no caso de duas variáveis conjugadas p, q, uma transformação completamente canónica é uma transformação equivalente (que conserva as áreas). A condição

$$p\,dq = \pi\,dx + d\Omega$$

dá

$$p\left(\frac{\partial q}{\partial \pi}d\pi + \frac{\partial q}{\partial x}dx\right) = \pi\,dx + d\Omega \; ; \quad p\frac{\partial q}{\partial \pi}d\pi + \left(p\frac{\partial q}{\partial x} - \pi\right)dx = d\Omega .$$

Se o primeiro membro é diferencial exacta, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial q}{\partial \pi}\right) = \frac{\partial}{\partial \pi}\left(p\frac{\partial q}{\partial x}\right) - 1 \; ; \quad \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \pi} + p\frac{\partial^2 q}{\partial \pi \partial x} = \frac{\partial p}{\partial \pi}\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial^2 q}{\partial \pi \partial x} - 1 ,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial \pi} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial \pi} \end{vmatrix} = 1 .$$

Se (p, q) passa ao plano (π, x), isto é, se as fórmulas de transformação se interpretam dizendo que fazem corresponder a um ponto (p, q), num plano, outro ponto (π, x) noutro plano, temos, para as áreas correspondentes:

$$\iint dp\,dq = \iint \Delta\, d\pi\, dx = \iint d\pi\, dx .$$

No caso de duas variáveis, tem lugar o teorema inverso: toda a transformação equivalente é uma transformação completamente canónica. Com efeito se

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \pi} - \frac{\partial p}{\partial \pi}\frac{\partial q}{\partial \pi} = 1$$

é também

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial q}{\partial \pi}\right) = \frac{\partial}{\partial \pi}\left(p\frac{\partial q}{\partial x} - \pi\right) \quad \text{e}$$

$$p\frac{\partial q}{\partial \pi}d\pi + \left(p\frac{\partial q}{\partial x} - \pi\right)dx = d\Omega$$ é uma diferencial exacta. Assim

$$p\,dq = \pi\,dx + d\Omega , \qquad \text{q. e. d.}$$

Aplicação: – Passar de (p, q) a (L, ℓ), por transformação completamente canónica, sabendo que é

$$\ell = nq; \text{ sendo } \underline{n} \text{ uma função de } p.$$

$$\ell\, dL + d\Omega = q\, dp$$

Como vimos nas transformações homogéneas, podemos supôr $d\Omega = 0$. Então

$$nq\,dL = q\,dp \; , \quad n\,dL = dp$$

$$dL = \frac{dp}{n} \; , \qquad L = \int \frac{dp}{n(p)} .$$

§ 43) Operadores lineares e comutadores – O que vamos dizer nos §§ a seguir refere-se aos sistemas lineares normais. Por isso se pode fazer o seu transporte para os sistemas canónicos. Neste § recordemos o seguinte. Consideremos as funções analíticas $f(x_1, x_2, \ldots)$ de $\underline{\nu}$ variáveis. Um operador linear $\hat{A}$ no campo dessas funções é um operador que

verifica as relações $A(f_1+f_2) = Af_1+Af_2$,
$A(\alpha f_1) = \alpha Af_1$,
onde f_1 e f_2 são funções de campo e α é uma constante.

Os operadores do tipo $A = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$ são operadores lineares.

Consideremos os dois operadores

$$A = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}, \qquad B = \sum_{\rho=1}^{N} \beta_\rho \frac{\partial}{\partial z_\rho},$$

e verifiquemos que AB e BA não são idênticos, isto é, que A e B não são comutáveis.

Temos

$$ABf = A\sum_{\rho=1}^{N} \beta_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} = \sum_{\rho=1}^{N} A\left(\beta_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\right) = \sum_{\rho=1}^{N}\left(A\beta_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} + \beta_\rho A\frac{\partial f}{\partial z_\rho}\right) =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{N} A\beta_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} + \sum_{\rho,\nu} \beta_\rho \alpha_\nu \frac{\partial^2 f}{\partial z_\rho \partial z_\nu};$$

$$BAf = \sum_{\rho=1}^{N} B\alpha_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho} + \sum_{\rho,\nu} \alpha_\rho \beta_\nu \frac{\partial^2 f}{\partial z_\rho \partial z_\nu} \neq ABf.$$

Mas vê-se que o comutador

$$[AB] = AB - BA = \sum_{\rho=1}^{N} (A\beta_\rho - B\alpha_\rho)\frac{\partial}{\partial z_\rho},$$

é um operador linear.

§44) Integrais e invariantes dum sistema normal – Seja o sistema normal

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x|t), \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

no qual t representa o tempo. No espaço $(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, uma solução do sistema representa uma curva. De facto tal solução aparecerá com a forma

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad x_n = f_n(t).$$

O integral geral depende de n constantes arbitrárias, de sorte que temos ∞^n curvas soluções, mas, por um ponto dado do espaço, passa uma só dessas soluções (curvas).

Como se sabe, diz-se integral do sistema uma relação em termos finitos

$$f(x|t) = \text{const.}, \qquad (\lambda)$$

que é identicamente satisfeita por todas as soluções do sistema, tomando, é claro, a constante do segundo membro valores diferentes, conforme a solução em causa.

Um integral representa no espaço (x,t) uma hipersuperfície e toda a curva solução que tenha um ponto nessa hipersuperfície assenta nela inteiramente.

Dando em (λ) à constante do segundo membro os ∞^1 valores possíveis para a constante, obtêem-se ∞^1 hipersuperfícies, as quais preencherão todo o espaço (x, t). Embora, analìticamente, pareça, à primeira vista, que cada hipersuperfície deverá ser constituída por ∞^n curvas soluções, o certo é que, geomètricamente, cada hipersuperfície deverá conter ∞^{n-1} soluções, por forma que as ∞^1 hipersuperfícies comportem a totalidade, ∞^n, das soluções. Analìticamente, se, em (λ), atribuirmos aos x_i valores arbitrários, o facto de ser conhecida a constante determinaria $\underline{t}$, pelo que os (x_i, t), no seu conjunto, determinariam a curva integral; parece que, sendo arbitrários os $\underline{n}$ valores dos x_i a totalidade das soluções sôbre a hipersuperfície seria ∞^n. Esta infinidade baixa duma unidade pelo facto de ser definida a mesma curva integral por qualquer dos pontos desta. Pode raciocinar-se ainda desta maneira: se, em (λ), $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ são funções quaisquer de $\underline{t}$, x_n é uma função bem determinada de $\underline{t}$.

O primeiro membro de (λ) também se diz um invariante do sistema (e, às vezes, mesmo, um integral, mas impròpriamente).

Vamos mostrar que os invariantes verificam uma mesma equação às derivadas parciais de 1.ª ordem. Com efeito, se f é um invariante, tem-se

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0,$$

quando os $\underline{x_i}$ são funções de $\underline{t}$ que satisfazem ao sistema diferencial proposto. Podemos escrever também

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i X_i(x \mid t) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Assim, a função f satisfaz a esta equação quando os $\underline{x_i}$ são funções de $\underline{t}$ satisfazendo ao sistema diferencial proposto. Mas podemos supôr os $\underline{x_i}$ e o $\underline{t}$ arbitrários porque existe sempre um (e um só) integral que, para $t = t_0$, toma valores prèviamente atribuídos aos x_i. Assim a equação às derivadas parciais anterior é identicamente satisfeita pela função f.

1) Demonstrar directamente que, no caso de duas variáveis conjugadas p, q, uma transformação completamente canónica é uma transformação equivalente (que conserva as áreas).

2) Dado o operador linear $A=\sum\limits_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, no qual os α_ν são funções dadas de $x_1, x_2, \dots, x_N$, mostrar que o comutador $[AB] = AB - BA$, onde $B=\sum\limits_{\nu=1}^{N} \beta_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, é igualmente um operador linear.

3) A condição necessária e suficiente para que $f(x|t) = \text{const.}$ seja um integral do sistema $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x|t)$, $(i=1,2,\dots,n)$ é que f verifique a equação às derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Verificar que a condição é realmente suficiente; escrever a equação às derivadas parciais análoga à anterior, relativa ao sistema canónico

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

utilizando o simbolismo dos parêntesis de Poisson.

4) Seja u uma função contínua das $2n$ variáveis p_k, q_k e seja f uma função qualquer das mesmas variáveis. O parêntesis de Poisson $(u,f) = Af$ pode interpretar-se como um operador linear A aplicado a f. Demonstrar que tem lugar a identidade

$$(u,(v,w)) + (v,(w,u)) + (w,(u,v)) = 0.$$

Conduza a demonstração verificando, primeiramente, que todos os termos do primeiro membro contêm uma derivada segunda como factor, e, em seguida, verificando que não pode haver derivadas segundas do u, por exemplo, no 1.º membro. A demonstração simplifica-se pondo

$$Af = (v,f), \quad Bf = (w,f),$$

e tendo em vista que A e B são operadores lineares.

5) Se f_1 e f_2 são dois integrais do sistema canónico e se (f_1,f_2) não se reduz a uma constante, demonstrar que (f_1,f_2) é igualmente um integral do sistema canónico.

Introdução à Mecânica Celeste

Parte 3.ª

Memorial de Astronomia

Capítulo 1.º

Ideia sumária do sistema solar

1) Generalidades - Em virtude da grande distância a que as estrelas se encontram dos astros do sistema solar, considera-se êste sistema, o que, de resto, se verá mais detalhadamente na parte de Mecânica Celeste pròpriamente dita, como constituindo um sistema isolado no espaço. A massa do Sol é muito maior que a dos outros astros, os quais são: os grandes planetas com os seus satélites, os pequenos planetas e os cometas

Os grandes planetas são os seguintes: Mercúrio, Venus, Terra - Lua, Marte - 2 satélites, Júpiter - 9 satélites, Saturno - anel e dez satélites, Urano - 4 satélites, Neptuno - 1 satélite. Tomando a massa do Sol como unidade de massa, a massa de Mercúrio é de cêrca de $\frac{1}{6.000.000}$ e a massa de Júpiter é de cerca de $\frac{1}{1047}$. Aquele é o mais pequeno e êste o maior dos grandes planetas.

As massas dos satélites são, em geral, desprezáveis em face da massa do planeta a que pertencem. Só para a Lua há excepção. A massa da Lua é cerca de $\frac{1}{81,5}$ a da Terra.

Os pequenos planetas são de massas desprezáveis. São em grande número. As suas órbitas estão compreendidas entre as órbitas de Marte e de Júpiter, salvo algumas excepções. O planeta 433, Eros, tem a sua órbita entre a Terra e Marte e os planetas chamados troianos têm as órbitas com um eixo maior muito vizinho do da órbita de Júpiter.

As massas dos cometas são igualmente desprezáveis.

É natural dar o quadro completo das massas dos grandes planetas. Conforme Newcomb são as seguintes: Mercúrio → $\frac{1}{6.000.000}$; Venus → $\frac{1}{408000}$; Terra → $\frac{1}{333.432}$; Terra-Lua → $\frac{1}{329.390}$; Marte → $\frac{1}{3.093.500}$; Júpiter → $\frac{1}{1047,355}$; Saturno → $\frac{1}{3501,6}$, Urano → $\frac{1}{22869}$; Neptuno → $\frac{1}{19314}$. Todos êstes dados são extraído da Connaissance des Temps

2) Ideia geral dos problemas dos movimentos inteiros no sistema solar –

Os estudos de Mecânica Celeste limitam-se, geralmente, aos problemas dos movimentos dos corpos do sistema solar. A redução dos referidos problemas costuma fazer-se do modo seguinte: estudam-se os movimentos do centro de gravidade dum pequeno planeta, ou dum cometa, ou o do centro de gravidade dum sistema planeta-satélites, e, em seguida, o movimento do centro de gravidade ~~dum~~ cada satélite com respeito ao centro de gravidade do planeta de que faz parte, e não com respeito ao centro de gravidade do sistema planeta-satélites.

É claro que, dos movimentos anteriores, resulta imediatamente o movimento do centro de gravidade de cada grande planeta, com respeito ao Sol.

Resta, em seguida, o movimento de cada astro à volta do seu centro de gravidade. Duma maneira geral, quer se trate dum planeta quer dum satélite, êsse movimento reduz-se, duma forma bastante próxima da realidade, a uma rotação uniforme à volta dum eixo principal central de inércia que conserva uma direcção invariável no espaço.

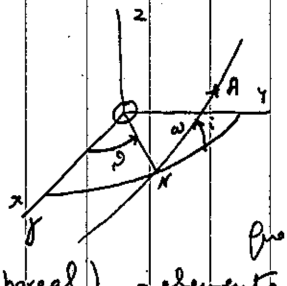
Regressando ao estudo dos movimentos dos centros de gravidade, a respectiva função de fôrça, no caso dum planeta, tem um primeiro termo principal que é o proveniente da acção do Sol; no caso dum satélite, o primeiro termo principal provém da acção do planeta de que faz parte. Êsses termos principais são os que se obteriam reduzindo o Sol ou o planeta ao seu centro de gravidade e concentrando nele toda a massa.

Assim, o primeiro problema é um problema de movimento kepleriano elítico (problema dos dois corpos), ou, para certos bólidos, um problema de movimento kepleriano hiperbólico.

Em seguida deverão ter-se em conta as perturbações.

3) Perturbações – Consideremos um planeta ou um cometa. Num certo instante t_0 há que considerar uma certa posição e uma certa velocidade. Êsses dois ~~da~~ dados são bastantes para se deduzir a órbita kepleriana t_0 do planeta ou do cometa. Mas, a acção perturbadora exercida pelos outros grandes planetas (se se trata do movimento dum grande planeta) ou pelos grandes planetas determina que a trajectória real se afaste da trajectória kepleriana E_o acima aludida, a qual porém, é tangente, na posição considerada no instante *t_o*.

A elipse E_o diz-se *órbita osculadora* da órbita real no instante *t_o*; a sua posição no espaço é determinada por 6 elementos, os quais se dizem *elementos osculadores* no instante t_o. Recordemos rápidamente quais são êsses elementos: suponhamos que, na figura, o triedro de referência, com origem no centro do Sol, é o triedro das *coordenadas eclíticas celestes*. Se *N* é o *ponto nodal* atravessado pelo astro quando passa do hemisfério que não contém o polo Q da eclítica para aquele que o contém (trata-se do polo da eclítica mais vizinho do polo boreal), os elementos são os seguintes:



$O\gamma\hat{N} = ☊ =$ *longitude do nodo*; $\widehat{NA} = \omega =$ *distância periélia*; $i = y\hat{N}A =$ *inclinação da órbita*; em seguida há dois elementos que fixam as dimensões da órbita no seu plano e que são: *a* = semi-eixo maior; *e* = excentricidade da órbita; por último há um elemento de natureza cinemática que é o que dá, por exemplo, a época da passagem do astro no periélio A, ou equivalente.

É claro que os elementos osculadores são definidos e relativos a cada instante *t_o*; se se conhecerem as suas variações em função do tempo, pode determinar-se a posição do astro num instante qualquer. Notemos ainda que (a posição real do astro e as componentes da sua velocidade se exprimem em função dos elementos osculadores da mesma maneira que a posição do astro e as componentes da sua velocidade no movimento kepleriano correspondente se exprimem nos elementos da órbita kepleriana.

4) *Forma analítica das perturbações*. Seja *h* um elemento osculador qualquer, ou, mais geralmente, uma função qualquer dos elementos osculadores. Se *h_o* é o seu valor na origem do tempo, a forma de *h* é a seguinte:

$$h = h_0 + s + p - p_0 + s',$$

onde o significado das letras é o seguinte: s é uma soma finita de termos da forma At^p, em que A é uma constante e p um número positivo inteiro; êstes termos dizem-se termos seculares do elemento h e o seu conjunto constitui as desigualdades seculares ou perturbações seculares de h; p é uma soma finita de termos $A \operatorname{sen}(\alpha t + \beta) + B \cos(\alpha t + \beta)$ onde A, B, α, β, são constantes; êstes termos dizem-se termos periódicos e o seu conjunto dá as perturbações periódicas de h; p_0 é o valor de p para $t = 0$; s' é uma soma de termos da forma $At^p \operatorname{sen}(\alpha t + \beta) + Bt^p \cos(\alpha t + \beta)$; êstes termos dizem-se termos mistos e o seu conjunto dá as perturbações mistas de h.

É claro que, tendo em vista a estabilidade do sistema solar, as expressões assim obtidas para h não podem valer indefinidamente. Com efeito uma expressão t^p cresce indefinidamente com o tempo e o valor de h não obedeceria à referida estabilidade. Entretanto, pràticamente, o desenvolvimento indicado para h vale durante vários séculos.

5) Valores médios – Diz-se valor médio h_m de h no instante t a parte de h nêsse instante obtida suprimindo os termos periódicos e mistos, ou seja,

$$h_m = h_0 + s - p_0.$$

Este valor é independente da origem do tempo. Com efeito, mudando essa origem os termos seculares dão termos constantes ou seculares, os termos periódicos dão termos periódicos e os termos mistos dão termos mistos ou periódicos.

Seja agora a função $f(h)$ e ponhamos $f(h_0) = f_0$. Então

$$f(h) = f_0 + \left(\frac{df}{dh}\right)_0 (s + p - p_0 + s') + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dh^2}\right)_0 (s + p - p_0 + s')^2 + \dots,$$

que nós escreveremos, tal como h, sob a forma

$$f(h) = f_0 + S + P - P_0 + S'.$$

Se notarmos que se tem

$$(s + p - p_0 + s')^2 = (s - p_0)^2 + 2(s - p_0)(p + s') + (p + s')^2,$$

ou seja, desprezando $(p + s')^2$,

$$(s + p - p_0 + s')^2 = (s - p_0)^2 + 2(s - p_0)(p + s'),$$

vem

$$f_0 + \left(\frac{df}{dh}\right)_0 (s + p - p_0 + s') + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dh^2}\right)_0 \left[(s - p_0)^2 + 2(s - p_0)(p + s')\right] + \dots = f_0 + S + P - P_0 + S$$

Sem dúvida que, quanto à parte periódica, se tem

$$P - P_0 = f(h_0 + p - p_0) - f(h_0);$$

por outro lado o último raciocínio feito mostra que é (veja-se ainda o cálculo no verso da página)

$$f_0 + S - P_0 = f_0 + \left(\frac{df}{dh}\right)_0 (s - p_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dh^2}\right)_0 [s - p_0]^2 + \dots,$$

ou seja

$$f_0 + S - P_0 = f(h_0 + s - p_0).$$

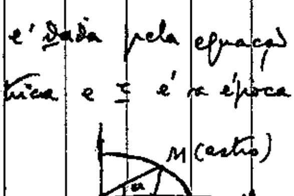
Daqui a seguinte conclusão: o valor médio da função $f(h)$ é a função do valor médio.

É claro que esta conclusão não poderia tirar-se se não fossem desprezados os termos da ordem do quadrado de $(s+p)$. É que as potências desta quantidade podem levar a termos seculares ou constantes.

O que se diz duma função dum elemento h diz-se duma função de vários elementos. E, embora tenhamos raciocinado para o caso dos planetas ou dos cometas, o mesmo se afirma para o caso dos movimentos dos centros de gravidade dos satélites. E há resultados análogos para os movimentos à volta dos centros de gravidade.

6) Unidades – Dissémos já que, para unidade de massa, se toma a massa do Sol. Quanto à unidade de tempo, será tomado o dia médio. Quanto à unidade de comprimento, a sua determinação faz-se por via indirecta.

Recordemos que a lei do movimento dum astro sôbre a órbita kepleriana é dada pela equação de Kepler $u - e \operatorname{sen} u = n(t - \tau)$, onde u é a anomalia excêntrica e τ é a época da passagem periélia. Como se sabe $n = \frac{2\pi}{T}$ é chamado movimento médio diurno, desde que T é a duração da revolução sideral, calculada em dias médios. Sabe-se então que, se fôr m a massa dum planeta, m_0 a massa do Sol, f a constante da atracção universal, tem lugar a relação



$$n^2 a^3 = f(m_0 + m).$$

Daqui se tira

$$n = a^{-3/2}\sqrt{f(m_0 + m)}.$$

Se supõe m desprezável em face de m_0, vê-se que a hipótese $a = 1$ arrasta a relação $n = \sqrt{f}$. Pode, pois, definir-se a unidade de comprimento como sendo dada pelo semi-eixo maior da órbita dum pequeno planeta cujo movimento médio é $n = \sqrt{f}$, onde f tem o valor que se lhe fixa antecipadamente, com Gauss

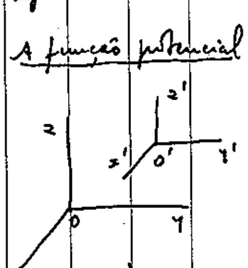
Mecânica Celeste

Capítulo I

Redução dos problemas

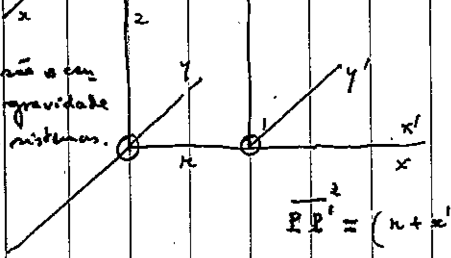
1) Objecto da Mecânica Celeste

2) A função potencial $U = \sum \frac{f m m'}{\overline{PP'}}$ (Andoyer, Mecânica Celeste, pgs. 2 e seguintes)



São dados dois sistemas S e S', o primeiro de pontos P, de massa m, referido ao triedro (Oxyz), o segundo de pontos P', de massa m', referido ao triedro (Ox'y'z').

Para simplicidade, escolhamos os eixos da 2ª figura.



O e O' são os centros de gravidade dos dois sistemas.

$$\begin{cases} P(x, y, z) \\ P'(x', y', z') \end{cases}$$

$$\overline{PP'}^2 = (r + x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

$$= r^2 - 2r(x - x') + [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2],$$

$$\overline{PP'}^2 = r^2 - 2Pr + Q^2 \quad \begin{cases} P = x - x' \\ Q^2 = (x - x')^2 + (y - y)^2 + (z - z')^2. \end{cases}$$

Então

$$U = f \sum m m' \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2Pr + Q^2}} = f \sum \frac{m m'}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{P}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}} =$$

$$= \sum \frac{f m m'}{r} \left(1 - 2\frac{P}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Somos levados a estudar a expressão $E = (1 - 2zx + z^2)^{-1/2}$.

Pondo $y = 2zx + z^2$ vem

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - y}} = (1 - y)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} y + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} y^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^2 + \cdots \qquad |y| < 1$$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + \frac{1}{2}(2zx - z^2) + \frac{3}{8}(2zx - z^2)^2 + \cdots \qquad (1)$$

$$= P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_n z^n + \cdots,$$

desde que ordenemos segundo as potências de z.

A substituição de y por $2zx - z^2$ em E será justificada na teoria das séries inteiras. Vê-se que é

$$P_0 = 1 ; \quad P_1 = x ; \quad P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{12}{8}x = \frac{3x-1}{2} ; \cdots$$

$\underline{P_n}$ é um polinómio do grau $\underline{n}$ em x. Com efeito, quando aparece z^n aparece um termo do desenvolvimento de $(2zx - z^2)^n$, além proveniente do primeiro termo do binómio. Os outros termos que contêm z^n provêem de potências inferiores a $\underline{n}$ do binómio. Logo, no coeficiente de z^n, aparece x^n e potências de $\underline{x}$ inferiores a $\underline{n}$.

Os polinómios podem determinar-se por uma lei de recorrência: diferenciando (1) com respeito a $\underline{z}$, vem

$$-\frac{(-2x+2z)\times 1}{(1-2xz+z^2)\, 2\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = P_1 + 2P_2 z + \cdots + nP_n z^{n-1} + \cdots,$$

e, portanto,

$$(x-z)(P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_n z^n + \cdots) = (1-2xz+z^2)(P_1 + 2P_2 z + \cdots + nP_n z^{n-1} + \cdots),$$

donde se tira, igualando os coeficientes de z^n em ambos os membros,

$x P_n -$ [illegible] $P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1}$,

ou seja

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}. \qquad (2)$$

Esta relação de recorrência (2) vai reaparecer-nos em breve. Proponhamo-nos encontrar um polinómio de grau $\underline{n}$, $P_n(x)$, tal que seja nulo o integral

$$\int_a^b Q\, P_n\, dx,$$

onde Q é um polinómio de grau inferior a $\underline{n}$, qualquer que seja êsse polinómio Q.

Se P_n existe pode considerar-se como a derivada de ordem $\underline{n}$ dum polinómio R do grau $\underline{2n}$, mas o polinómio R não é determinado porque podemos juntar-lhe um polinómio arbitrário do grau $n-1$. Assim, pondo

$$P_n = \frac{d^n R}{dx^n},$$

podemos sujeitar R à condição de se anular, bem como as suas derivadas até à de ordem $n-1$, inclusivamente, quando se põe $x=a$. Então, com efeito, ficarão determinados os coeficientes de $x^0, x, \ldots, x^{n-1}$, os quais, a princípio, eram quaisquer.

③

Então é

$$\int_a^b Q \frac{d^nR}{dx^n}\,dx = \left(\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}}\,Q\right)_a^b - \int_a^b \frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}}\,\frac{dQ}{dx}\,dx =$$

$$= \left(\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}}\,Q - \frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}}\,Q'\right)_a^b + \int_a^b \frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}}\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx =$$

$$= \left(Q\,\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}} - \frac{dQ}{dx}\,\frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}} + \cdots \pm R\,\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right)_a^b \mp \int_a^b R\,\frac{d^nQ}{dx^n}\,dx.$$

O último termo, que ainda contém um integral, é nulo, pois Q é um polinómio de grau inferior a $\underline{n}$.

A anulação de $\int_a^b Q\,\frac{d^nR}{dx^n}\,dx$ exige, pois,

$$Q(b)\,R^{(n-1)}(b) - Q'(b)\,R^{(n-2)}(b) + \cdots \pm Q^{(n-1)}(b)\,R(b) = 0,$$

e, como isto terá de ter lugar quaisquer que sejam $\varphi(b), \varphi'(b), \ldots, \varphi^{(n-1)}(b)$, pois que o polinómio $Q(x)$ é arbitrário, virá separadamente

$$R(b)=0, \quad R'(b)=0, \quad \ldots, R^{(n-1)}(b)=0.$$

Ao lado destas igualdades temos as igualdades de hipótese

$$R(a)=0, \quad R'(a)=0, \quad \ldots, R^{(n-1)}(a)=0.$$

Assim

$$P_n = C\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x-a)^n(x-b)^n\right)$$

Quando os limites $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são -1 e $+1$, os polinómios P_n dizem-se polinómios de Legendre, desde que a constante $\underline{C}$ seja escolhida como vai indicar-se

$$X_n = \frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Será, assim,

$$X_1 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}(x^2-1) = x; \quad X_2 = \frac{1}{8}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4-2x^2+1\right) = \frac{1}{8}\left(12x^2-4\right)$$
$$= \frac{3x^2-1}{2}, \text{ etc.}$$

Aqui poremos também $X_0=1$, pelo que $X_0, X_1, X_2, \ldots$ coincidem com $P_0, P_1, P_2, \ldots$, como, de resto, vamos provar de modo geral.

$\underline{X_n}$ é um polinómio de grau $\underline{n}$, como P_n. Todos os expoentes de x, em X_n, são da mesma paridade que $\underline{n}$.

Recordemos a fórmula de Leibniz que dá a derivada de ordem n dum produto:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = v\,\frac{d^nu}{dx^n} + \frac{n}{1}\,\frac{dv}{dx}\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}\,\frac{d^2v}{dx^2}\,\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + \frac{d^nv}{dx^n}\,u.$$

Aplicada ao produto $\underset{v}{\underset{\shortparallel}{(x-1)^n}}\,\underset{u}{\underset{\shortparallel}{(x+1)^n}}$, vê-se que

$$X_n(+1) = \frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot2^n\cdot n(n-1)\cdots2\cdot1 = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} = +1,$$

e que $X_n(-1) = (-1)^n$.

Da propriedade demonstrada para os polinómios X_n resulta a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0, \quad \text{se } m \neq n.$$

Daqui resulta a relação de recorrência a que acima nos referimos.

É claro que um polinómio de grau _n_ se pode exprimir linearmente em $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Então

$$x X_n = C_0 X_{n+1} + C_1 X_n + C_2 X_{n-1} + C_3 X_{n-2} + \cdots.$$

E vê-se que

$$\int_{-1}^{+1} x X_n \cdot X_{n-2} \, dx = C_3 \int_{-1}^{+1} X_{n-2}^2 \, dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} x X_n \cdot X_{n-3} \, dx = C_4 \int_{-1}^{+1} X_{n-3}^2 \, dx = 0,$$

---

pelo que

$$x X_n = C_0 X_{n+1} + C_1 X_n + C_2 X_{n-1}.$$

Vamos determinar os coeficientes C_0, C_1, C_2; virá a relação de recorrência entre 3 polinómios consecutivos. O coeficiente C_1 é nulo porque não há em $x X_n$ termo do grau n.

Fazendo $x = 1$ em ambos os membros, tem-se

$$+1 = C_0 + C_2;$$

e também, igualando os coeficientes de x^{n+1},

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} = \quad = \frac{(2n+2)(2n+1)2n\cdots(n+2)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n\cdot(2n+2)} \cdot C_0$$

ou seja

$$C_0 = \frac{n+1}{2n+1} \quad \text{e} \quad C_2 = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1},$$

pelo que

$$x X_n = \frac{n+1}{2n+1} X_{n+1} + \frac{n}{2n+1} X_{n-1}$$

ou

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) x X_n + n X_{n-1} = 0$$

Aparece-nos aqui, precisamente, a relação (2). Como P_0, P_1 coincidem com X_0, X_1, o mesmo sucede com os restantes polinómios P_n.

Temos, assim, o desenvolvimento (1) sob a forma

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots, \text{ em} \qquad (3)$$

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

O estudo da convergência do desenvolvimento (3) levaria a concluir que o mesmo é válido sob as condições $|z|<1$, $|x|\leq 1$.

Se regressarmos à nossa função potencial $\underline{U}$, vem

$$U = \sum \frac{fmm'}{r}\left(1 - 2\frac{\rho}{r}\frac{p}{\rho} + \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{-1/2}, \text{ pelo que } \begin{cases} z = \frac{\rho}{r} \\ x = \frac{p}{\rho} \end{cases}.$$

A condição $|x|\leq 1$ ou $|\underline{p}|\leq|\rho|$ é imediatamente verificada, pois que $\underline{p}^2 \leq \rho^2$. Quanto à condição $|\rho|<r$ ou $\rho<r$ é igualmente verificada porque ρ é da ordem da distância entre dois pontos do mesmo sistema e os sistemas estão muito afastados relativamente às suas dimensões. Será, pois,

$$U = \sum\frac{fmm'}{\rho\rho'} = \sum\frac{fmm'}{r}\left(1-2\frac{p}{r}+\frac{\rho^2}{r^2}\right)^{-1/2} = \sum\frac{fmm'}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}X_1+\frac{\rho^2}{r^2}X_2+\cdots+\frac{\rho^n}{r^n}X_n+\cdots\right)$$

$$= \sum\frac{fmm'}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}X_1\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\rho^2}{r^2}X_2\left(\frac{p}{\rho}\right)+\cdots\right),$$

ou seja

$$\begin{cases} U = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \\ \qquad\qquad \text{com} \\ U_0 = \frac{f}{r}\sum mm' \\ U_1 = \frac{f}{r^2}\sum mm'\rho\, X_1\left(\frac{p}{\rho}\right) \end{cases} \quad \cdots \quad U_n = \frac{f}{r^{n+1}}\sum mm'\rho^n X_n\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

e sendo $X_1(z) = z$, $X_2(z) = \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}$, $X_3(z) = \frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z$, $X_4(z) = \frac{35}{8}z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{3}{8}$,

$$X_5(z) = \frac{63}{8}z^5 - \frac{35}{4}z^3 + \frac{15}{8}z, \ldots$$

Vê-se que $\rho^n X_n\left(\frac{p}{\rho}\right)$ é um polinómio homogéneo em p e ρ, além do grau n, com potências sempre pares de ρ.

Vamos estudar mais em detalhe U_0, U_1, U_2.

Temos

$$U_0 = \frac{f}{r}\sum mm' = \frac{f}{r}\sum m \times \sum m' = \frac{fMM'}{r},$$

se <u>M</u> e <u>M'</u> fôrem as massas dos dois sistemas S e S'.

Quanto a U_1 vem

$$U_1 = \frac{f}{r^2}\sum mm'\, q\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f}{r^2}\sum mm' p = \frac{f}{r^2}\sum mm'(x-x') =$$

$$= \frac{f}{r^2}\left\{\sum mm'x - \sum mm'x'\right\} = \frac{f}{r^2}\sum m' . \sum mx - \frac{f}{r^2}\sum m . \sum m'x'.$$

Ora, como <u>O</u> e <u>O'</u> são os centros de gravidades dos dois sistemas, é

$$\sum mx = \sum my = \sum mz = 0; \quad \sum m'x' = \sum m'y' = \sum m'z' = 0.$$

Logo

$$U_1 = 0.$$

Quanto a U_2, vem

$$U_2 = \frac{f}{r^3}\sum mm' q^2\left(\frac{3}{2}\frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{f}{r^3}\sum mm'\left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2\right) =$$

$$= \frac{f}{r^3} \cdot \frac{1}{2}\sum mm'(3p^2 - q^2).$$

Mas

$$\frac{1}{2}\sum mm'(3p^2 - q^2) = \frac{1}{2}\sum mm'\left\{3(x-x')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum mm'\left\{2(x^2 - 2xx' + x'^2) - (y^2 - 2yy' + y'^2) - (z^2 - 2zz' + z'^2)\right\} =$$

$$= \sum mm'\left(x^2 - \frac{y^2+z^2}{2} + x'^2 - \frac{y'^2+z'^2}{2}\right) =$$

$$= M'\sum m\left[x^2+y^2+z^2 - \frac{3}{2}(y^2+z^2)\right] + M\sum m'\left[x'^2+y'^2+z'^2 - \frac{3}{2}(y'^2+z'^2)\right].$$

Bibliografia: <u>Andoyer</u>, tomo I do Curso de Mecânica Celeste, págs. 2, 3, 4; <u>Goursat</u>, tomo I do Curso de Análise Matemática, págs. 208, 209, 455 e 456.

---

§ 2) <u>Continuação</u>. A expressão de U_2 pode agora escrever-se

$$U_2 = \frac{f}{r^3}\left\{M'\sum m\left[x^2+y^2+z^2 - \frac{3}{2}(y^2+z^2)\right] + M\sum m'\left[x'^2+y'^2+z'^2 - \frac{3}{2}(y'^2+z'^2)\right]\right\}.$$

Designemos por G, G' os momentos de inércia dos dois sistemas com respeito aos centros de gravidade O, O' e por H, H' os momentos de inércia com respeito à recta OO'; então é

$$\sum m(x^2+y^2+z^2) = G, \quad \sum m'(x'^2+y'^2+z'^2) = G'$$

$$\sum m(y^2+z^2) = H, \quad \sum m'(y'^2+z'^2) = H',$$

de sorte que

$$U_2 = \frac{fM'}{r^3}\left(G - \frac{3}{2}H\right) + \frac{fM}{r^3}\left(G' - \frac{3}{2}H'\right).$$

Sejam agora Ox_1, Oy_1, Oz_1 os eixos principais centrais de inércia de S, e sejam A, B, C os momentos de inércia correspondentes. Designando com α, β, γ os cosenos directores de OO' em respeito a $(Ox_1y_1z_1)$ é

$$G = \frac{1}{2}(A+B+C), \quad H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2;$$

sem intervenção dos produtos de inércia, na expressão de H, porque os mesmos são nulos.

Tem-se assim

$$U_2 = \frac{fM'}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{3}{2}(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \frac{3}{2}(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{r^3}\left[\alpha^2\left(\frac{B+C}{2} - A\right) + \beta^2\left(\frac{C+A}{2} - B\right) + \gamma^2\left(\frac{A+B}{2} - C\right)\right]$$

$$+ \frac{fM}{r^3}\left[\alpha'^2\left(\frac{B'+C'}{2} - A'\right) + \beta'^2\left(\frac{C'+A'}{2} - B'\right) + \gamma'^2\left(\frac{A'+B'}{2} - C'\right)\right],$$

desde que se introduzam notações análogas para o sistema S'. Podemos escrever ainda

$$U_2 = \frac{fM'}{r^3}\cdot\frac{1}{4}\left[2(A+B+C) - 6(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{4r^3}\left[2C(1-3\gamma^2) + 2(A+B) - 6(A\alpha^2+B\beta^2)\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{4r^3}\left[2C(1-3\gamma^2) + 2(A+B)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 6(A\alpha^2+B\beta^2)\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{4r^3}\left[2C(1-3\gamma^2) - 3A\alpha^2 - A\alpha^2 + 2A(\beta^2+\gamma^2) - \cdots\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{4r^3}\left[2C(1-3\gamma^2) - 3A\alpha^2 - A + 3A\beta^2 + 3A\gamma^2 + \cdots\right] + \cdots$$

$$= \frac{fM'}{4r^3}\left[(2C-A-B)(1-3\gamma^2) + 3A(\beta^2-\alpha^2) + 3B(\alpha^2-\beta^2)\right] + \cdots$$ ou seja, pois,

$$\boxed{U_2 = \begin{cases} \dfrac{fM'}{4r^3}\left[(2C-A-B)(1-3\gamma^2) + 3(B-A)(\alpha^2-\beta^2)\right] + \\ + \dfrac{fM}{4r^3}\left[(2C'-A'-B')(1-3\gamma'^2) + 3(B'-A')(\alpha'^2-\beta'^2)\right] \end{cases}}$$

O cálculo dos U_i pode prosseguir-se. Mas interessa-nos fixar o seguinte:

Sendo

$$U_n = \frac{f}{r^{n+1}}\sum m m' \rho^n X_n\left(\frac{p}{\rho}\right),$$

e sendo o coeficiente de $\frac{f}{r^{n+1}}$ um polinómio do grau $\underline{n}$ em l e q, contendo apenas potências pares de q, a expressão de U_n é uma soma de termos tipo $\sum A m m' x^p y^q z^r x'^{p'} y'^{q'} z'^{r'}$, ou seja uma soma tipo

$$\sum k\, K\, K',$$

sendo k um coeficiente numérico e sendo K e K' da forma

$$K = \sum m x^p y^q z^r, \qquad K' = \sum m' x'^{p'} y'^{q'} z'^{r'},$$

de tal sorte que $p+q+r+p'+q'+r' = n$.

Suponhamos que se conservam as origens O, O' dos sistemas S, S', mas que os eixos rectangulares são quaisquer. Como aparecerão os termos do desenvolvimento de U? Basta, para isso, fazer as mudanças das coordenadas x, y, z e das coordenadas x', y', z' nas expressões anteriores. O coeficiente $\underline{k}$ dependerá de 12 parâmetros: os cosenos dos ângulos dos novos eixos x, y, z com os antigos x, y, z e os cosenos dos ângulos dos novos eixos x', y', z' com os antigos $x' y' z'$. Podem substituir-se por outros 12, a saber: os cosenos dos ângulos dos novos x, y, z com OO'; cosenos dos ângulos dos novos $x' y' z'$ com OO'; e cosenos dos ângulos dos novos $x' y' z'$ com os novos $x\, y\, z$. Ao todo, pois, 12 parâmetros.

3) Sôbre a ordem dos U_i – O mais importante é achar a ordem de grandeza relativa dos termos do desenvolvimento

$$U = U_0 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$$

Como as dimensões de S e de S' são pequenas em face de OO', a razão $\frac{U_n}{U_0}$, contendo um factor $\frac{1}{r^{n+1}} \cdot \frac{r}{1} = \left(\frac{1}{r}\right)^n$, vê-se que é da ordem $\underline{n}$ com respeito à paralaxe mútua dos dois sistemas, pois, na comparação das distâncias, a unidade é tomada na distância entre dois pontos do sistema S ou do sistema S'.

A convergência da nossa série é, porém, aumentada com as hipóteses naturais, que resultam de ter em conta a forma dos corpos celestes.

Com efeito, se os corpos celestes fôssem rigorosamente simétricos com respeito a O e O', respectivamente, os termos U_n com índice ímpar seriam nulos. Ora isso é vizinho da realidade, pelo que tais U_n adquirem um novo coeficiente numérico muito pequeno.

Mas há mais: suponhamos que S e S' são constituídos por camadas esféricas homogéneas. Então teremos $\underline{U}$ sob a forma

(9)

$$U = \sum \frac{f m m'}{\overline{PP'}} = f m'_1 \sum \frac{m}{\overline{PP'_1}} + f m'_2 \sum \frac{m}{\overline{PP'_2}} + \cdots,$$

onde se põem em evidência os diferentes pontos do sistema S'. É

$$\sum \frac{m}{\overline{PP'_1}} = \frac{M}{\overline{OP'_1}} \; ; \; \sum \frac{m}{\overline{PP'_2}} = \frac{M}{\overline{OP'_2}}, \cdots$$

de sorte que

$$U = f M \left(\frac{m'_1}{\overline{OP'_1}} + \frac{m'_2}{\overline{OP'_2}} + \cdots \right) = f M \frac{M'}{r} = \frac{f M M'}{r}.$$

Então todos os termos U_n, salvo U_0, seriam nulos e viria

$$U = U_0 = \frac{f M M'}{r}.$$

Se esta hipótese das camadas esféricas, sem se verificada rigorosamente, é vizinha da realidade, vêmos que os U_n de índice par adquirem igualmente um factor pequeno.

4) Sôbre as equações do movimento – Consideremos o universo formado pelo Sol, S_0, e pelos planetas, cometas, estrelas, formando sistemas $S_p, S_q, \ldots$. Quando o sistema S_p se refere a um planeta, abrange igualmente os satélites dêste.

Empreguemos os índices i e j para distinguir dois quaisquer dos sistemas considerados. Considerando um sistema absolutamente fixo no espaço, x_i, y_i, z_i serão as coordenadas, em respeito a êsse sistema, do centro de gravidade M_i de S_i. O potencial de atracção mútua é $f m_i m_j U_{ij}$, e põe-se

$$\Delta_{ij}^2 = \overline{M_i M_j}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

Calculemos o termo correspondente a U_2. Designemos em $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$, $(\lambda'_i, \mu'_i, \nu'_i)$, $(\lambda''_i, \mu''_i, \nu''_i)$ os cosenos directores dos eixos principais centrais de S_i em respeito aos eixos fixos. Temos $U_2 = \frac{fm'}{r^3}[\cdots] + \frac{fM}{r^3}[\cdots]$, o que dá aqui

$$U = f m_i m_j U_{ij} = U_0 + U_2 = \frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}} + f m_i m_j \left(K_i^j + K_j^i \right),$$

pondo

$$U_2 = \frac{f m_j}{\Delta_{ij}^3}[\cdots] \frac{f m_i}{\Delta_{ij}^3}[\cdots] = f m_i m_j \left(K_i^j + K_j^i \right),$$

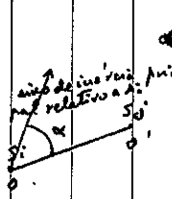
em

$$K_i^j = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{1}{\Delta_{ij}^3} \left\{ \alpha^2 \left(\frac{B_i + C_i}{2} - A_i \right) + \beta^2 \left(\frac{C_i + A_i}{2} - B_i \right) + \gamma^2 \left(\frac{A_i + B_i}{2} - C_i \right) \right\}$$

$$K_j^i = \frac{1}{m_j} \cdot \frac{1}{\Delta_{ij}^3} \left\{ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \right\}$$

⑩

Ora é aqui



$$\alpha = \lambda_i \frac{X_j - X_i}{\Delta_{ij}} + \mu_i \frac{Y_j - Y_i}{\Delta_{ij}} + \nu_i \frac{Z_j - Z_i}{\Delta_{ij}},$$

$$\beta = \lambda_i' \frac{X_j - X_i}{\Delta_{ij}} + \cdots,$$

$$\gamma = \lambda_i'' \frac{X_j - X_i}{\Delta_{ij}^{3}} + \cdots,$$

de sorte que

$$K_i^d = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{1}{\Delta_{ij}^3} \left\{ \frac{1}{2\Delta_{ij}^2} (B_i + C_i - 2A_i) \left[(X_j - X_i)\lambda_i + \mu_i (Y_j - Y_i) + \nu_i (Z_j - Z_i) \right]^2 + \cdots \right\},$$

ou seja, pois,

$$K_i^d = \frac{B_i + C_i - 2A_i}{2 m_i \Delta_{ij}^5} \left[\lambda_i (X_i - X_j) + \mu_i (Y_i - Y_j) + \nu_i (Z_i - Z_j) \right]^2 +$$
$$+ \frac{C_i + A_i - 2B_i}{2 m_i \Delta_{ij}^5} \left[\lambda_i' (X_i - X_j) + \mu_i' (Y_i - Y_j) + \nu_i' (Z_i - Z_j) \right]^2 +$$
$$+ \frac{A_i + B_i - 2C_i}{2 m_i \Delta_{ij}^5} \left[\lambda_i'' (X_i - X_j) + \mu_i'' (Y_i - Y_j) + \nu_i'' (Z_i - Z_j) \right]^2.$$

A expressão de K_j^i resulta de K_i^d mudando i em j e j em i, ao mesmo que se fazem figurar os cosenos directores dos ângulos dos eixos principais centrais de inércia de S_j relativamente aos eixos fixos. Feito isto escrevamos agora as equações do movimento do centro de gravidade do sistema S_i. Tem-se

$$\left\{ m_i \frac{d^2 X_i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial X_i} \sum_j f m_i m_j U_{ij}, \right.$$

ou

$$\left\{ \frac{d^2 X_i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\sum_j f m_j U_{ij} \right). \right.$$

Vê únicamente Andoyer, tomo I, págs. 4, 5, 6, 8 e 9.

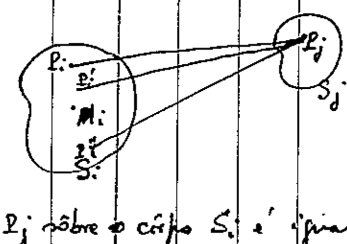
Ao escreverem-se as equações do movimento do centro de gravidade do sistema S_i, tivémos em vista os dois princípios seguintes:

1º - O movimento do centro de gravidade é o mesmo como se toda a massa de S_i estivesse concentrada naquele centro, então sujeito à acção de todas as fôrças que actuam no sistema, tanto interiores como exteriores;

2º - As fôrças interiores são aqui as que provêem unicamente dos pontos de S_i. As outras são fôrças exteriores. São as que provêem dos outros sistemas S_j.

É claro que as fôrças interiores, pela hipótese feita da atracção newtoniana, são duas a duas iguais e de sinais contrários, desaparecendo no conjunto.

Posto isto, observemos o seguinte: admitamos que os corpos celestes são compostos de camadas esféricas homogéneas, como atrás se disse. Vejamos como se pode fazer o transporte das fôrças que actuam sôbre S_i para o seu centro de gravidade M_i. Tomemos um ponto P_j de S_j. A acção de $\underline{S_i}$ sôbre o ponto P_j, de massa μ_j, de S_j, é a mesma como se toda a massa de $\underline{S_i}$ estivesse concentrada no centro. O seu valor é $-f\frac{\mu_j M_i}{\overline{M_i P_j}^2}$. A acção do ponto P_j sôbre o côrpo S_i é igual e de sinal contrário, tendo, portanto, o valor $f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}^2}$. As



~~$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}}\right)$~~ suas componentes segundo os eixos coordenados são

$$f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}^2} \cdot \frac{x_j - x_i}{\overline{M_i P_j}}, \ldots$$

ou sejam

$$f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}^3}(x_j - x_i) = \frac{d}{\partial x_i}\left(f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}}\right) \text{ etc.}$$

A acção total de S_j tem as componentes

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j f\mu_j \frac{M_i}{\overline{M_i P_j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f M_i \mu_j}{\overline{M_i M_j}}\right).$$

No caso, pois, em que a função potencial de atracção mútua se reduziria ao primeiro têrmo, sem dúvida que as equações do movimento teriam a forma

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j f m_j U_{ij}\right)$$

No caso atrás considerado, em que devem introduzir-se os têrmos correspondentes a U_2, existe, sem dúvida, uma função de fôrça, a qual terá a forma

$$\sum_j f m_i m_j U_{ij},$$

se se estuda o movimento do centro de gravidade M_i, de S_i.

Portanto,

[redacted]

~~As~~ equações do movimento do centro de gravidade de S_i, escritas sob a última forma,

$$\frac{d^2X_i}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\sum_j f m_j U_{ij}\right), \dots$$

, serão as equações a aplicar. Elas mostram que o movimento do referido centro de gravidade é o dum ponto material livre, de massa igual à unidade, sob a acção duma função de fôrça igual a $\sum_j f m_j U_{ij}$.

No programa da Mecânica Celeste figuram principalmente os movimentos no interior do sistema solar, e, por consequência, os movimentos relativos dos centros de gravidade dos planetas e dos cometas com respeito ao Sol. Se pômos

$$X_p - X_0 = x_p, \quad Y_p - Y_0 = y_p, \quad Z_p - Z_0 = z_p,$$

em que p se refere ao centro de gravidade, M_p, do planeta ~~ou~~ do cometa, e <u>zero</u> se refere ao centro de gravidade, M_0, do Sol, as coordenadas dos segundos membros são as coordenadas relativas, enquanto que as dos primeiros membros são coordenadas absolutas, referidas ao sistema absoluto atrás indicado.

Então será

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = \frac{d^2X_p}{dt^2} - \frac{d^2X_0}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(f m_0 U_{0p} + \sum_q f m_q U_{pq}\right) - \frac{\partial}{\partial X_0}\left(f m_p U_{0p} + \sum_q f m_q U_{0q}\right),$$

onde o índice q se refere, como atrás se disse, aos restantes sistemas atraentes não especificados, os quais serão os planetas (grandes e pequenos com os seus satélites) e as estrelas.

Mas é

$$\frac{\partial U_{0p}}{\partial X_p} = -\frac{\partial U_{0p}}{\partial X_0} = \frac{\partial U_{0p}}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial U_{pq}}{\partial X_p} = \frac{\partial U_{pq}}{\partial x_p},$$

$$-\frac{\partial U_{0q}}{\partial X_0} = \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q},$$

pois as funções U_{0p}, U_{0q}, U_{pq} dependem das diferenças $X_p - X_0, \dots; X_q - X_0, \dots; X_q - X_p, \dots$; e estas diferenças são, precisamente, $x_p, \dots; x_q, \dots; X_q - X_p = (X_q - X_0) - (X_p - X_0) = x_q - x_p, \dots$.

Como U_{0q} não depende de x_p, y_p, z_p, podemos escrever

$$\frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial z_q}\right).$$

Então vem

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_p}\Big\{f(m_0 + m_p) U_{0p} + \sum_q f m_q \Big(U_{pq} + x_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial U_{0}}{\partial z_q}$$

Assim, o movimento relativo de M_p, ou seja o movimento relativo do centro de gravidade dum grande planeta, dum pequeno planeta ou dum cometa, com respeito ao Sol, resulta da função de fôrça

$$\mathcal{U}_p = f(m_0+m_p)\,U_{0p} + \sum_q f m_q \left(U_{pq} + x_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial U_{0q}}{\partial z_q} \right). \qquad (a)$$

Um termo importante de $\underline{\mathcal{U}_p}$ é o termo $f(m_0+m_p)\frac{1}{r_p}$, onde

$$r_p^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 .$$

Trata-se, precisamente, do primeiro termo de U_{0p}. Vamos avaliar os restantes termos de $\mathcal{U}_p$ e desprezar aquêles que forem muito pequenos em face de $\frac{f m_0}{r_p}$.

No somatório $\sum_q$ figuram todos os corpos do mundo, salvo aquele cujo movimento se estuda e o Sol. Figuram, pois, pequenos planetas, grandes planetas, cometas e estrelas.

A parte relativa aos pequenos planetas e aos cometas, ainda que o corpo M_p seja um pequeno planeta ou um cometa, é desprezável porque $\underline{m_q}$ é muito pequeno em face de $\underline{m_0}$.

Os pequenos planetas e cometas desaparecem, em (a), do $\sum_q f m_q(\dots)$.

Restam grandes planetas, estrelas e Sol.

Vamos estudar a acção proveniente das estrelas, o que faremos por duas partes: primeiro considerando em U_{pq} e U_{0q} apenas os primeiros termos $\frac{1}{\Delta_{pq}}$ e $\frac{1}{r_q}$; em segundo lugar tratando os termos K_p^q, K_q^p, K_0^q, K_q^0.

Tem-se

$$\frac{1}{\Delta_{pq}} = \frac{1}{\sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2+(z_q-z_p)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p r_q \cos H_{pq} + r_q^2}},$$

com

$$r_p^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 ,$$

$$x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q = \left(\frac{x_p}{r_p}\frac{x_q}{r_q} + \dots \right) r_p r_q = r_p r_q \cos H_{pq} ,$$

sendo H_{pq} o ângulo das duas direcções M_0M_p, M_0M_q, que vão do Sol, M_0, para os sistemas S_p (ou M_p), S_q (ou M_q). Podemos escrever

$$\frac{1}{\Delta_{pq}} = \frac{1}{r_q}\left(1 - 2\frac{r_p}{r_q}\cos H_{pq} + \frac{r_p^2}{r_q^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r_q}\left(1 + \cos H_{pq}\frac{r_p}{r_q} + \frac{3\cos^2 H_{pq} - 1}{2}\frac{r_p^2}{r_q^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{r_q} + \frac{r_p}{r_q^2}\cos H_{pq} + \frac{r_p^2}{2r_q^3}\left(3\cos^2 H_{pq} - 1\right) + \cdots$$

Quanto a $\frac{1}{r_q}$, a parte que figura em (a) leva a

$$x_p \frac{\partial\left(\frac{1}{r_q}\right)}{\partial x_q} + y_p \frac{\partial\left(\frac{1}{r_q}\right)}{\partial y_q} + z_p \frac{\partial\left(\frac{1}{r_q}\right)}{\partial z_q} = -\frac{1}{r_q^3}\left(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q\right) =$$

$= -\frac{r_p}{r_q^2}\cos H_{pq}$. Logo a primeira parte da acção das estrelas, provém de

$$\sum_q f m_q \left[\frac{1}{r_q} + \frac{r_p}{r_q^2}\cos H_{pq} + \frac{r_p^2}{2r_q^3}\left(3\cos^2 H_{pq} - 1\right) + \cdots - \frac{r_p}{r_q^2}\cos H_{pq}\right].$$

Se tivermos em vista que $\frac{1}{r_q}$ não dá contribuição para os segundos membros das equações do movimento porque não depende de x_p, y_p, z_p, vem apenas que considerar

$$\sum_q f m_q \left[\frac{r_p^2}{2r_q^3}\left(3\cos^2 H_{pq} - 1\right) + \cdots\right],$$

no caso das estrelas, M_q. A razão dêstes termos para o primeiro termo $\frac{f m_0}{r_p}$ de U_p é da ordem de

$$\frac{m_q}{m_0}\,\frac{r_p^2}{r_q^3}\cdot r_p = \frac{m_q}{m_0}\left(\frac{r_p}{r_q}\right)^3 = \frac{m_q}{m_0}\,\frac{r_p}{r_q}\left(\frac{r_p}{r_q}\right)^2. \qquad (b)$$

Trata-se, assim, do produto de $\frac{m_q}{m_0}\cdot\frac{r_p}{r_q}$ por uma quantidade da ordem do quadrado da paralaxe anual das estrelas. Seria necessário atribuir a $\frac{m_q}{m_0}$, um valor tão extraordinàriamente grande para que tivesse de entrar-se em conta em (b), que tem de ser posta de parte uma tal hipótese.

Passemos agora ao estudo da segunda parte da acção que é possível vir das estrelas, ou seja ao estudo dos termos $K_p^q, K_q^p, K_0^q, K_q^0$. Sendo

$$K_p^q = \frac{1}{m_p}\cdot\frac{1}{\Delta_{pq}^3}\{\ldots\}, \quad K_q^p = \frac{1}{m_q}\cdot\frac{1}{\Delta_{pq}^3}\{\ldots\},$$

$$K_0^q = \frac{1}{m_0}\cdot\frac{1}{r_q^3}\{\ldots\}, \quad K_q^0 = \frac{1}{m_q}\cdot\frac{1}{r_q^3}\{\ldots\},$$

as razões para $\frac{f m_0}{r_p}$ dos termos correspondentes são da forma

$$\frac{1}{m_p}\cdot\frac{m_q}{\Delta_{pq}^3}\cdot\frac{r_p}{m_0} = \frac{m_q}{m_0}\cdot\frac{r_p}{\Delta_{pq}}\cdot\frac{1}{m_p}\left(\frac{1}{\Delta_{pq}}\right)^2, \ldots \qquad (c)$$

$$\frac{1}{m_0}\cdot\frac{m_q}{r_q^3}\cdot\frac{r_p}{m_0} = \frac{m_q}{m_0}\cdot\frac{r_p}{r_q}\cdot\frac{1}{m_0}\left(\frac{1}{r_q}\right)^2, \ldots.$$

O facto de figurarem $\left(\frac{1}{\Delta_{pq}}\right)^2$, $\left(\frac{1}{r_q}\right)^2$, etc. garante a insensibilidade dos termos respectivos, ainda que m_p figure em denominador. Deve notar-se, com efeito, que êste m_p embora se possa referir a um pequeno planeta, tal pequeno planeta é aquele cujo movimento estudo, visto que os outros desaparecem de U_p. Ora os numeradores ($B_i+C_i-2A_i$) que figuram nas fracções que dão as expressões de K_i^d e de K_j^i são da ordem dos m_i, e, portanto, $\frac{B_i+C_i-2A_i}{m_i}$ é da ordem da unidade. Por isso mesmo devemos escrever as razões precedentes (c) sob a forma

$$\frac{m_q}{m_0}\cdot\frac{r_p}{\Delta_{pq}^3} = \frac{m_q}{m_0}\cdot\frac{r_p}{\Delta_{pq}}\left(\frac{1}{\Delta_{pq}}\right)^2, \;\dots,\; \frac{m_q}{m_0}\cdot\left(\frac{r_p}{r_q}\right)^3 = \frac{m_q}{m_0}\,\frac{r_p}{r_q}\cdot\left(\frac{r_p}{r_q}\right)^2, \dots \text{ etc.}$$

Em resumo: A função U_p deve escrever-se figurando no somatório $\sum_q f m_q(\dots)$ apenas os grandes planetas, salvo, evidentemente, o grande planeta cujo movimento se estuda, se de tal se trata. Se se trata do movimento dum pequeno planeta ou dum cometa, sucede ainda a mesma coisa: apenas figuram os grandes planetas no $\sum_q f m_q$.

A função U_p tem uma parte principal

$$\boxed{U_p = f(m_0+m_p)\frac{1}{r_p} + \sum_q f m_q\left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{r_p}{r_q^2}\cos H_{pq}\right).}$$

Vamos vêr que esta parte principal é precisamente a "Função de fôrça que tem de se tomar no estudo do movimento relativo de todos os planetas e cometas, salvo para a Terra".

Provaremos, com efeito, a influência dos termos $K_0^p, K_p^0, K_p^q, K_q^p, K_0^q, K_q^0$, onde q se refere a um grande planeta.

Comecemos por K_0^p. A razão deste termo para $\frac{1}{r_p}$ é

$$\frac{B_0+C_0-2A_0}{m_0 r_p^3}\cdot r_p = \frac{B_0+C_0-2A_0}{m_0}\left(\frac{1}{r_p}\right)^2.$$

Se tomarmos para unidades de medida, quer para massas quer para distâncias, quantidades que se refiram ao Sol e suas dimensões, $\left(\frac{1}{r_p}\right)^2$ é da ordem do quadrado do diâmetro aparente do Sol, visto de M_p, tendo, além disso, um factor da ordem das diferenças mútuas dos momentos de inércia do Sol, sendo, por isso, K_0^p desprezável.

O mesmo se diz de K_p^0 ~~se o~~ planeta cujo movimento se estuda não tem satélites, pois que, então, o factor da ordem das diferenças mútuas dos momentos de inércia aparece ainda com pequeno valor. Mas, se há satélites, êste raciocínio deixa de aplicar-se e torna-se necessário estudar o têrmo K_p^0. Quanto aos têrmos complementares de U_{pq} e de U_{0q}, não há necessidade de se terem em conta, pelo facto de estarem ainda afectados do coeficiente m_q, pequeno em face de m_0.

Suponhamos, pois, que M_p tem satélites e estudemos K_p^0. Se os satélites forem de massas $m_{p_1}, m_{p_2}, \ldots$, e os centros de gravidade dos mesmos forem $M_{p_1}, M_{p_2}, \ldots$, reservando m_{p_0} para a massa do planeta e M_{p_0} para o seu centro de gravidade próprio, tem-se

$$m_p = m_{p_0} + m_{p_1} + m_{p_2} + \ldots$$

Por outro lado, usando uma notação que se compreende por si mesmo, é

$$f m_0 m_p U_{0p} = f m_0 m_{p_0} U_{0p_0} + f m_0 m_{p_1} U_{0p_1} + f m_0 m_{p_2} U_{0p_2} + \ldots,$$

ou seja

$$U_{0p} = \frac{m_{p_0}}{m_p} U_{0p_0} + \frac{m_{p_1}}{m_p} U_{0p_1} + \frac{m_{p_2}}{m_p} U_{0p_2} + \ldots,$$

visto que o potencial de atracção mútua do Sol e do planeta é a soma dos potenciais de atracção mútua do Sol e das diferentes partes do planeta. Não devemos esquecer, com efeito, que, anteriormente, se entendeu por planeta o conjunto do planeta propriamente dito e dos seus satélites.

Sem dúvida que agora cada uma das funções $U_{0p_0}, U_{0p_1}, U_{0p_2}, \ldots$ se pode reduzir ao primeiro têrmo $\frac{1}{\Delta_{p_0}}, \ldots$ porque os têrmos complementares de cada uma destas funções contêem agora, como sempre, diferenças desprezáveis entre momentos de inércia. Tem-se, assim,

$$U_{0p} = \frac{m_{p_0}}{m_p} \cdot \frac{1}{\Delta_{0p_0}} + \frac{m_{p_1}}{m_p} \frac{1}{\Delta_{0p_1}} + \frac{m_{p_2}}{m_p} \cdot \frac{1}{\Delta_{0p_2}} + \ldots$$

Designemos agora com $(\xi_{p_0}, \eta_{p_0}, \zeta_{p_0}), (\xi_{p_1}, \eta_{p_1}, \zeta_{p_1}), \ldots$ as coordenadas de M_{p_0}, M

etc., em respeito a m_p. Então é

$$m_{p0}\xi_{p0} + m_{p1}\xi_{p1} + m_{p2}\xi_{p2} + \cdots = 0,$$

$$\Delta_{op0}^2 = (x_p + \xi_{p0})^2 + (y_p + \eta_{p0})^2 + (z_p + \zeta_{p0})^2,$$

$$\Delta_{op1}^2 = (x_p + \xi_{p1})^2 + (y_p + \eta_{p1})^2 + (z_p + \zeta_{p1})^2, \quad .$$

Ora, por exemplo,

$$\Delta_{op1}^2 = r_p^2 + 2(x_p\xi_{p1} + y_p\eta_{p1} + z_p\zeta_{p1}) + r_{p1}^2, \qquad (r_{p1}^2 = \xi_{p1}^2 + \cdots)$$

ou seja

$$\frac{1}{\Delta_{op1}} = \frac{1}{r_p}\cdot\left(1 + 2\frac{r_{p1}}{r_p}\cos H_{pp1} + \frac{r_{p1}^2}{r_p^2}\right)^{-1/2}.$$

Se atendermos a que $\frac{1}{\Delta_{op1}}$ está afectado do pequeno coeficiente $\frac{m_{p1}}{m_{p0}}$, vê-se que se pode substituir $\frac{1}{\Delta_{op1}}$ por $\frac{1}{r_p}$. O mesmo se diz de $\frac{1}{\Delta_{op2}}$, etc.

O raciocínio não é, porém, aplicável a Δ_{op0}, pois que não é pequeno o coeficiente $\frac{m_{p0}}{m_p}$. Mas, neste caso, tem-se

$$\Delta_{op0}^2 = \left(x_p - \frac{m_{p1}}{m_{p0}}\xi_{p1} - \frac{m_{p2}}{m_{p0}}\xi_{p2} \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$= r_p^2 - 2\left(\frac{m_{p1}}{m_{p0}} r_{p1} r_p \cos H_{pp1} + \frac{m_{p2}}{m_{p0}} r_{p2} r_p \cos H_{pp2} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{m_{p1}}{m_{p0}}\xi_{p1} + \frac{m_{p2}}{m_{p0}}\xi_{p2} + \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$= r_p^2 - 2\left(\frac{m_{p1}}{m_{p0}} r_p r_{p1} \cos H_{pp1} + \cdots\right) + \left(\frac{m_{p1}}{m_{p0}}\right)^2 r_{p1}^2 + \frac{m_{p2}^2}{m_{p0}^2} r_{p2}^2 + \cdots$$

$$= r_p^2\left[1 - 2\left(\frac{m_{p1}}{m_{p0}}\frac{r_{p1}}{r_p}\cos H_{pp1} + \cdots\right) + \left(\frac{m_{p1}}{m_{p0}}\right)^2\left(\frac{r_{p1}}{r_p}\right)^2 + \left(\frac{m_{p2}}{m_{p0}}\right)^2\frac{r_{p2}^2}{r_p^2} + \cdots\right],$$

pelo que, a anulação de todos os termos que contêm $\frac{m_{p1}}{m_{p0}}$, $\frac{m_{p2}}{m_{p0}}$, … levará a

$$\frac{1}{\Delta_{op0}} = \frac{1}{r_p}, \quad \text{ainda neste caso.}$$

Se tal anulação fôr legítima, o que sempre sucede, salvo no caso da Terra e da Lua, pois a massa da Lua não é desprezável em face da da Terra, tem-se

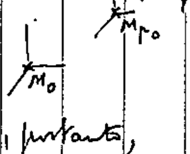
$$U_{op} = \frac{m_{p0}}{m_p}\cdot\frac{1}{r_p} + \frac{m_{p1}}{m_p}\cdot\frac{1}{r_p} + \cdots = \frac{1}{r_p}.$$

Fica assim demonstrado que o movimento do centro de gravidade dum planeta ou dum cometa, salvo o caso da Terra (quer o planeta seja pequeno planeta quer grande planeta), é derivado da função de força

$$\boxed{U_p = \frac{f(m_0+m_p)}{r_p} + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{r_p}{r_q^2} \cos H_{pq} \right)},$$

como anteriormente se tinha enunciado.

5º) **Movimento do centro de gravidade da Terra.** – Designemos com $x_{p_1}, y_{p_1}, \dots$ as coordenadas do centro de gravidade M_{p_1} da Lua, não com respeito a M_p (centro de gravidade do sistema Terra-Lua), mas com respeito a M_{p_0}, centro de gravidade da Terra. Então tem-se:



$m_p = m_{p_0} + m_{p_1}$; $\quad x_{p_1} = \xi_{p_1} - \xi_{p_0}$,

$m_{p_0}\xi_{p_0} + m_{p_1}\xi_{p_1} = 0$; $\quad y_{p_1} = \eta_{p_1} - \eta_{p_0}$,

$\left\{ \begin{array}{l} m_{p_0}\xi_{p_0} + m_{p_1}(x_{p_1}+\xi_{p} \\ m_p \xi_{p}^{0} + m_{p_1} x_{p_1} = 0 \end{array} \right.$

de modo que $\xi_{p_0} = -\frac{m_{p_1}}{m_p} x_{p_1}, \dots; \ \xi_{p_1} = \frac{m_{p_0}}{m_p} x_{p_1}, \dots$

e, portanto, $\quad U_{0p} = \frac{m_{p_0}}{m_p} U_{0p_0} + \frac{m_{p_1}}{m_p} U_{0p_1} = \frac{m_{p_0}}{m_p} \cdot \frac{1}{\Delta_{0p_0}} + \frac{m_{p_1}}{m_p} \frac{1}{\Delta_{0p_1}}$;

$$\Delta_{0p_0}^2 = (x_p + \xi_{p_0})^2 + \dots = \left(x_p - \frac{m_{p_1}}{m_p} x_{p_1}\right)^2 + \dots =$$

$$= r_p^2 - 2\frac{m_{p_1}}{m_p} r_p r_{p_1} \cos H_{pp_1} + \left(\frac{m_{p_1}}{m_p}\right)^2 r_{p_1}^2,$$

$$\Delta_{0p_1}^2 = \left(x_p + \frac{m_{p_0}}{m_p} x_{p_1}\right)^2 + \dots = r_p^2 + 2\frac{m_{p_0}}{m_p} r_p r_{p_1} \cos H_{pp_1} + \left(\frac{m_{p_0}}{m_p}\right)^2 r_{p_1}^2,$$

com $\quad r_{p_1}^2 = x_{p_1}^2 + y_{p_1}^2 + z_{p_1}^2$, e designando com H_{pp_1} o ângulo das direcções M_0M_p e $M_{p_0}M_{p_1}$, ou, mesmo, o ângulo de M_0M_p com $M_pM_{p_1}$, pouco diferente daquele. Então vem

$$U_{0p} = \frac{m_{p_0}}{m_p} \frac{1}{r_p} \left(1 - 2\frac{m_{p_1}}{m_p} \frac{r_{p_1}}{r_p} \cos H_{pp_1} + \frac{m_{p_1}^2}{m_p^2} \frac{r_{p_1}^2}{r_p^2}\right)^{-1/2} +$$

$$+ \frac{m_{p_1}}{m_p} \frac{1}{r_p} \left(1 + 2\frac{m_{p_0}}{m_p} \frac{r_{p_1}}{r_p} \cos H_{pp_1} + \frac{m_{p_0}^2}{m_p^2} \frac{r_{p_1}^2}{r_p^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{m_{p_0}+m_{p_1}}{m_p} \cdot \frac{1}{r_p} + \left(\frac{m_{p_0}}{m_p} \frac{1}{r_p} \frac{m_{p_1}}{m_p} \frac{r_{p_1}}{r_p} \cos H_{pp_1} - \frac{m_{p_1}}{m_p} \frac{1}{r_p} \frac{m_{p_0}}{m_p} \frac{r_{p_1}}{r_p} \cos H_{pp_1} \right) +$$

$$+\frac{m_{\mu 0}}{m_\mu}\cdot\frac{1}{r_\mu}\left(\frac{m_{\mu 1}}{m_\mu}\frac{r_{\mu 1}}{r_\mu}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{\mu\mu 1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{m_{\mu 1}}{m_\mu}\cdot\frac{1}{r_\mu}\left(\frac{m_{\mu 0}}{m_\mu}\frac{r_{\mu 1}}{r_\mu}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{\mu\mu 1}-\frac{1}{2}\right)+\cdots$$

ou seja ainda

$$U_{0\mu}=\frac{1}{r_\mu}+\frac{m_{\mu 0}m_{\mu 1}^2+m_{\mu 1}m_{\mu 0}^2}{m_\mu^3}\frac{r_{\mu 1}^2}{r_\mu^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{\mu\mu 1}-\frac{1}{2}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{r_\mu}+\frac{m_{\mu 0}m_{\mu 1}}{m_\mu^2}\frac{r_{\mu 1}^2}{r_\mu^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{\mu\mu 1}-\frac{1}{2}\right).$$

Assim a função de força para o estudo do movimento do centro de gravidade da Terra não é precisamente a anterior (a) mas a seguinte

$$\boxed{U_\mu=\frac{f(m_0+m_\mu)}{r_\mu}+\frac{f(m_0+m_\mu)m_{\mu 0}m_{\mu 1}}{m_\mu^2}\frac{r_{\mu 1}^2}{r_\mu^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2 H_{\mu\mu 1}-\frac{1}{2}\right)+\sum_q f m_q\left(\frac{1}{\Delta_{\mu q}}-\frac{r_\mu}{r_q^2}\cos H_{\mu q}\right)}$$

6) <u>Movimento dos centros de gravidade dos satélites.</u> No programa de Mecânica Celeste que nos propomos realizar, ou seja limitado aos movimentos dentro do sistema solar, o nosso objectivo será, naturalmente, atingido por três degraus sucessivos: 1.º)-movimento dos centros de gravidade dos planetas ou dos cometas, relativo ao Sol (problema anterior); 2.º)-movimento dos centros de gravidade dos satélites relativo ao planeta de que fazem parte (problema dêste §); 3.º)-movimento dos astros à volta dos seus próprios centros de gravidade.

Conservando certas notações já introduzidas no § anterior e relativas aos satélites, designemos agora em $(x_{\mu 1}, y_{\mu 1}, z_{\mu 1})$, $(x_{\mu 2}, y_{\mu 2}, z_{\mu 2})$, ... as coordenadas dos centros de gravidade dos satélites $M_{\mu 1}, M_{\mu 2}, \ldots$ com respeito ao planeta $M_{\mu 0}$, entendido o próprio planeta e não o conjunto M_μ (planeta-satélites).

Com emprêgo de notações já bem conhecidos, tem-se

$$\frac{d^2 x_{\mu 1}}{dt^2}=\frac{d^2 X_{\mu 1}}{dt^2}-\frac{d^2 X_{\mu 0}}{dt^2}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu 1}}\left(f m_{\mu 0}U_{\mu 0\mu 1}+f m_{\mu 2}U_{\mu 1\mu 2}+f m_0 U_{0\mu 1}+f m_q U_{\mu\right.$$

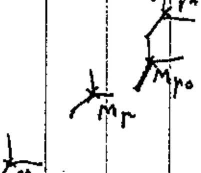
$$-\frac{\partial}{\partial X_{p_0}}\left(f m_{p_1} U_{p_0 p_1} + f m_{p_2} U_{p_0 p_2} + f m_0 U_{0 p_0} + f m_q U_{p_0 q}\right),$$

pois que o movimento do ponto $(X_{p_0}, Y_{p_0}, Z_{p_0})$, por exemplo, será determinado pelos satélites do planeta a que o ponto se refere, pelo Sol e pelos grandes planetas M_q. Nestas condições, devem, nos parêntesis anteriores, que figuram em $\frac{d^2 x_{p_1}}{dt^2}$, subentender-se somatórios a percorrer o índice p_2 e o índice q.

A função $U_{p_0 p_1}$ contém $X_{p_1} - X_{p_0}, \dots$ ou sejam $x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1}$. A função $U_{p_1 p_2}$ contém $X_{p_1} - X_{p_2} = (X_{p_1} - X_{p_0}) - (X_{p_2} - X_{p_0}), \dots$ ou seja $x_{p_1} - x_{p_2}, y_{p_1} - y_{p_2}, z_{p_1} - z_{p_2}$.

Passemos a $U_{0 p_1}$. Como contém $X_{p_1} - X_0$, etc. Interessa-nos substituir estas diferenças por expressões em que figurem as coordenadas relativas do planeta com respeito ao Sol e as coordenadas relativas dos satélites com respeito a M_{p}.

Ora é



$$\underline{X_{p_1} = X_p + [x_{p_1} + (X_{p_0} - X_p)] = X_{p_0} + x_{p_1}}$$

e

$$m_p X_p = m_{p_0} X_{p_0} + m_{p_1}(X_{p_0} + x_{p_1}) + m_{p_2}(X_{p_0} + x_{p_2}) + \dots,$$

pelo que

$$m_p X_{p_0} = m_p X_p - m_{p_1} x_{p_1} - m_{p_2} x_{p_2} - \dots,$$

ou seja

$$X_{p_0} = X_p - \mu_{p_1} x_{p_1} - \mu_{p_2} x_{p_2} - \dots), \text{ pondo } \frac{m_{p_1}}{m_p} = \mu_{p_1}, \dots$$

Logo

$$X_{p_1} - X_0 = X_{p_0} + x_{p_1} - X_0 = X_p - \mu_{p_1} x_{p_1} - \mu_{p_2} x_{p_2} - \dots + x_{p_1} - X_0 =$$

$$= x_p + (1 - \mu_{p_1}) x_{p_1} - \mu_{p_2} x_{p_2} - \dots$$

Relativamente a $U_{p_1 q}$ temos de considerar as diferenças

$$X_q - X_{p_1} = (X_q - X_0) - (X_{p_1} - X_0) = x_q - x_p - (1 - \mu_{p_1}) x_{p_1} - \dots$$

E $U_{0 p_0}$ depende de $x_{p_0} = x_p - \mu_{p_1} x_{p_1} - \dots$, e $U_{p_0 q}$ depende de

$$X_q - X_{p_0} = x_q - x_p + \mu_{p_1} x_{p_1} + \dots$$

Desta sorte podemos imaginar o movimento do centro de gravidade do satélite definido pela seguinte função de forças:

$$U_{\mu_1} = f(m_{\mu_0}+m_{\mu_1})\,U_{\mu_0\mu_1} + f m_{\mu_2}\left(U_{\mu_1\mu_2} + x_{\mu_1}\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial x_{\mu_2}} + y_{\mu_1}\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial y_{\mu_2}} + z_{\mu_1}\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial z_{\mu_2}}\right) +$$
$$+ f m_0\left(\frac{1}{1-\mu_{\mu_1}}U_{0\mu_1} + \frac{1}{\mu_{\mu_1}}U_{0\mu_0}\right) + f m_q\left(\frac{1}{1-\mu_{\mu_1}}U_{\mu_1 q} + \frac{1}{\mu_{\mu}}U_{\mu_0 q}\right),$$

pois que

$$\frac{\partial U_{\mu_0\mu_1}}{\partial X_{\mu_1}} = \frac{\partial U_{\mu_0\mu_1}}{\partial x_{\mu_1}};\quad \frac{\partial U_{\mu_1\mu_2}}{\partial X_{\mu_1}} = \frac{\partial U_{\mu_1\mu_2}}{\partial x_{\mu_1}};\quad \frac{\partial U_{0\mu_1}}{\partial X_{\mu_1}} = \frac{1}{1-\mu_{\mu_1}}\frac{\partial U_{0\mu_1}}{\partial x_{\mu_1}};\quad \frac{\partial U_{\mu_1 q}}{\partial X_{\mu_1}} = \frac{1}{1-\mu_{\mu_1}}\frac{\partial U_{\mu_1 q}}{\partial x_{\mu_1}};$$
$$-\frac{\partial U_{\mu_0\mu_1}}{\partial X_{\mu_0}} = \frac{\partial U_{\mu_0\mu_1}}{\partial x_{\mu_1}};\quad -\frac{\partial U_{0\mu_0}}{\partial X_{\mu_0}} = \frac{1}{\mu_{\mu_1}}\frac{\partial U_{0\mu_0}}{\partial x_{\mu_1}};\quad -\frac{\partial U_{\mu_0 q}}{\partial X_{\mu_0}} = +\frac{1}{\mu_{\mu_1}}\frac{\partial U_{\mu_0 q}}{\partial x_{\mu_1}};$$

$$-\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial X_{\mu_0}} = \frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial x_{\mu_2}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}}\left(x_{\mu_1}\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial x_{\mu_2}} + y_{\mu_1}\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial y_{\mu_2}} + z_{\mu_1}\frac{\partial U_{\mu_0\mu_2}}{\partial z_{\mu_2}}\right).$$

Vamos reduzir, em U_{μ_1}, os diferentes potenciais de atracção mútua às suas partes principais. Temos, primeiramente,

$$\frac{f(m_{\mu_0}+m_{\mu_1})}{r_{\mu_1}}\;;\qquad (r_{\mu_1} = \overline{M_{\mu_0}M_{\mu_1}})$$

depois

$$f m_{\mu_2}\left(\frac{1}{\Delta_{\mu_1\mu_2}} + x_{\mu_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{\mu_2}}\right)}{\partial x_{\mu_2}} + y_{\mu_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{\mu_2}}\right)}{\partial y_{\mu_2}} + z_{\mu_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{\mu_2}}\right)}{\partial z_{\mu_2}}\right) =$$
$$= f m_{\mu_2}\left(\frac{1}{\Delta_{\mu_1\mu_2}} - \frac{r_{\mu_1}}{r_{\mu_2}^2}\cos H_{\mu_1\mu_2}\right),\quad \text{com}\ \begin{cases}\Delta_{\mu_1\mu_2} = r_{\mu_1}^2 - 2r_{\mu_1}r_{\mu_2}\cos H_{\mu_1\mu_2} + r_{\mu_2}^2,\\ r_{\mu_2} = \overline{M_{\mu_0}M_{\mu_2}},\ H_{\mu_1\mu_2} = (M_{\mu_0}M_{\mu_1}\widehat{\ }M_{\mu_2}\end{cases}$$

e, em seguida,

$$\frac{f m_0}{1-\mu_{\mu_1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{0\mu_1}} + \frac{f m_0}{\mu_{\mu_1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{0\mu_0}}\,.$$

Para estudarmos esta parte, introduzamos um ponto fictício $M_{\mu'}$, de coordenadas relativas ao Sol iguais a $x_{\mu'}, y_{\mu'}, z_{\mu'}$, sendo

$$x_{\mu'} = x_{\mu} - \mu_{\mu_2}x_{\mu_2} - \mu_{\mu_3}x_{\mu_3} - \cdots.$$

Então

$$\Delta_{0\mu_1}^2 = \left[x_{\mu'} + (1-\mu_{\mu_1})x_{\mu_1}\right]^2 + \left[y_{\mu'} + (1-\mu_{\mu_1})y_{\mu_1}\right]^2 + \left[z_{\mu'} + (1-\mu_{\mu_1})z_{\mu_1}\right]^2 =$$
$$= r_{\mu'}^2 + 2(1-\mu_{\mu_1})r_{\mu_1}r_{\mu'}\cos H_{\mu_1\mu'} + (1-\mu_{\mu_1})^2 r_{\mu_1}^2,$$

onde $r_{\mu'} = M_0M_{\mu'}$ e $H_{\mu_1\mu'}$ é o ângulo das direcções $M_{\mu_0}M_{\mu_1}$ e $M_0M_{\mu'}$.

Quanto a $\Delta_{0\mu_0}$, temos, analogamente,

$$\Delta_{0\mu_0}^2 = \left(x_{\mu'} - \mu_{\mu_1}x_{\mu_1}\right)^2 + \cdots = r_{\mu'}^2 - 2\mu_{\mu_1}r_{\mu'}r_{\mu_1}\cos H_{\mu'\mu_1} + \mu_{\mu_1}^2 r_{\mu_1}^2,$$

pelo que a parte proveniente da acção do Sol se reduz a

$$\frac{f m_0}{1-\mu_{\mu_1}}\left[r_{\mu'}^2 + 2(1-\mu_{\mu_1})r_{\mu'}r_{\mu_1}\cos H_{\mu'\mu_1} + (1-\mu_{\mu_1})^2 r_{\mu_1}^2\right]^{-1/2} + \frac{f m_0}{\mu_{\mu_1}}\left(r_{\mu'}^2 - 2\mu_{\mu_1}r_{\mu'}r_{\mu_1}\cos H_{\mu'\mu_1} + \mu_{\mu_1}^2 r_{\mu_1}^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Desenvolvendo como habitualmente vem, não escrevendo o primeiro termo de cada um dos dois desenvolvimentos, pois que êsse termo é $\frac{1}{r_{p'}}$ e não contribui para a derivada em ordem a x_{p_1},

[illegible]

$$\frac{f m_0}{1-\mu_{p_1}} \left\{ -\frac{r_{p_1}}{r_{p'}^2} (1-\mu_{p_1}) \cos H_{p'p_1} + \frac{r_{p_1}^2}{r_{p'}^3} \left[\frac{3}{2} \cos^2 H_{p'p_1} - \frac{1}{2} \right] (1-\mu_{p_1})^2 + \dots \right\}$$

$$+ \frac{f m_0}{\mu_{p_1}} \left\{ \frac{r_{p_1}}{r_{p'}^2} \mu_{p_1} \cos H_{p'p_1} + \frac{r_{p_1}^2}{r_{p'}^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{p'p_1} - \frac{1}{2} \right) \mu_{p_1}^2 + \dots \right\} =$$

$$= f m_0 \sum_2^{\infty} \frac{r_{p_1}^n}{r_{p'}^{n+1}} X_n (\cos H_{p'p_1}) \left[(1-\mu_{p_1})^{n-1} (-1)^n + \mu_{p_1}^{n-1} \right]. \qquad (A)$$

É esta, pois, a parte da função de fôrça que corresponde à acção do Sol. O primeiro termo do seu desenvolvimento é

$$f m_0 \frac{r_{p_1}^2}{r_{p'}^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{p'p_1} - \frac{1}{2} \right).$$

A sua razão para o termo $\frac{f(m_{p_0}+m_{p_1})}{r_{p_1}}$ é $\frac{m_0}{m_{p_0}} \cdot \left(\frac{r_{p_1}}{r_{p'}} \right)^3$. Embora $\frac{m_0}{m_{p_0}}$ seja grande, a razão $\frac{r_{p_1}}{r_{p'}}$ é muito pequena e figura ao cubo. Não esqueçamos, com efeito, que $r_{p'}$ é da ordem de r_p, pois que o ponto $M_{p'}$ não difere muito do ponto M_p. Assim reduziremos a parte relativa ao Sol únicamente a

$$f m_0 \frac{r_{p_1}^2}{2 r_p^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{p p_1} - \frac{1}{2} \right),$$

onde o índice p' se substitui por p. [illegible]

O estudo da acção dos grandes planetas obriga-nos agora ao estudo do último termo de U_{p_1}: $f m_q \left(\frac{1}{1-\mu_{p_1}} U_{p_1 q} + \frac{1}{\mu_{p_1}} U_{p_0 q} \right)$. Êste termo é da mesma forma que o que corresponde à acção solar e pode ser tratado da mesma maneira. Aparecem mantendo o mesmo ponto fictício $M_{p'}$, em vez das coordenadas x_p, y_p, z_p, as coordenadas $x_p - x_q, y_p - y_q, z_p - z_q$, de modo que

$$\Delta_{p_1 q}^2 = \left(x_{p'} - x_q + (1-\mu_{p_1}) x_{p_1} \right)^2 + \dots$$

em vez de $r_{p'}^2 = x_{p'}^2 + y_{p'}^2 + z_{p'}^2$

aparece $\Delta^2_{p'q} = (x_{p'}-x_q)^2 + (y_{p'}-y_q)^2 + (z_{p'}-z_q)^2$. E, por último, em vez do ângulo $H_{p'p_1}$ aparece o ângulo $Q_{p'p_1}$ que fazem as duas direcções seguintes: $\overline{M_{p_0}M_{p_1}}$ e $\overline{M_qM_{p'}}$; mas a substituição do índice p' por p é legítima, como anteriormente.

Quanto aos termos complementares das acções mútuas, apenas $K_{p_0}^{p_1}$ e $K_{p_1}^{p_0}$ se deverão conservar, ou seja: apenas se conservam os da primeira função $U_{p_0p_1}$, que figura em U_{p_1}. Mas $K_{p_1}^{p_0}$ é desprezável, em face das dimensões dos satélites, salvo o caso da Lua, que vai ser tratado especialmente.

Em resumo a função de força para o movimento dum satélite é

$$\boxed{U_{p_1} = f(m_{p_0}+m_{p_1})\left(\frac{1}{r_{p_1}} + K_{p_0}^{p_1}\right) + f m_{p_2}\left(\frac{1}{\Delta_{p_1p_2}} - \frac{r_{p_1}}{r_{p_2}^2}\cos H_{p_1p_2}\right) + f m_0 \frac{r_{p_1}^2}{2r_{p}^3}\left(3\cos^2 H_{pp_1} - 1\right).}$$

7) Caso da Lua: No caso da Lua o ponto $M_{p'}$ coincide com M_p. A função de força é a seguinte:

$$\boxed{\begin{aligned} U_{p_1} = {} & f(m_{p_0}+m_{p_1})\left(\frac{1}{r_{p_1}} + K_{p_0}^{p_1} + K_{p_1}^{p_0}\right) + \\ & + f m_0 \sum_2^\infty \left[(-1)^n\left(\frac{m_{p_0}}{m_p}\right)^{n-1} + \left(\frac{m_{p_1}}{m_p}\right)^{n-1}\right]\frac{r_{p_1}^n}{r_p^{n+1}} X_n(\cos H_{pp_1}) \\ & + f m_q \sum_2^\infty \left[(-1)^n\left(\frac{m_{p_0}}{m_p}\right)^{n-1} + \left(\frac{m_{p_1}}{m_p}\right)^{n-1}\right]\frac{r_{p_1}^n}{\Delta_{pq}^{n+1}} X_n(\cos Q_{pp_1}), \end{aligned}}$$

pois há, apenas, um único satélite. O ângulo H_{pp_1} é o ângulo de $M_{p_0}M_{p_1}$ com M_0M_p e o ângulo Q_{pp_1} é o ângulo de $M_{p_0}M_{p_1}$ com M_qM_p.

8) Resumo dos §§ anteriores - Encontrámos a função de força para o movimento relativo dos centros de gravidade dos diferentes planetas (relativamente ao Sol), em particular do da Terra; encontrámos a função de força para o movimento relativo dos satélites (relativo ao planeta a que pertencem), em particular do da Lua.

Por centro de gravidade do planeta entende-se o centro de gravidade do conjunto planeta-satélites, mas é claro que, das coordenadas anteriores, se deduzem as coordenadas dos próprios centros de gravidade M_{μ_0} dos planetas.

Notemos, com efeito, as igualdades sucessivas seguintes:

$$m_\mu X_\mu = m_{\mu_0} X_{\mu_0} + m_{\mu_1} X_{\mu_1} + m_{\mu_2} X_{\mu_2} + \cdots \quad ;$$

$$X_\mu - X_0 = \frac{m_{\mu_0}}{m_\mu} X_{\mu_0} + \frac{m_{\mu_1}}{m_\mu} X_{\mu_1} + \frac{m_{\mu_2}}{m_\mu} X_{\mu_2} + \cdots - \frac{m_{\mu_0} + m_{\mu_1} + m_{\mu_2} + \cdots}{m_\mu} X_0 \; ;$$

$$x_\mu = \frac{m_{\mu_0}}{m_\mu} (X_{\mu_0} - X_0) + \frac{m_{\mu_1}}{m_\mu} (X_{\mu_1} - X_0) + \frac{m_{\mu_2}}{m_\mu} (X_{\mu_2} - X_0) + \cdots \; ;$$

$$x_\mu = \frac{m_{\mu_0}}{m_\mu} (X_{\mu_0} - X_0) + \frac{m_{\mu_1}}{m_\mu} \left[x_\mu + (1 - \mu_{\mu_1}) x_{\mu_1} - \mu_{\mu_2} x_{\mu_2} - \cdots \right] +$$

$$+ \frac{m_{\mu_2}}{m_\mu} \left[x_\mu + (1 - \mu_{\mu_2}) x_{\mu_2} - \mu_{\mu_1} x_{\mu_1} + \cdots \right] + \cdots$$

Vê-se que as diferenças $X_{\mu_0} - X_0$, $Y_{\mu_0} - Y_0$, $Z_{\mu_0} - Z_0$ são consequências das coordenadas conhecidas.

9) Movimento à volta dos centros de gravidade – O problema apenas se resolve directamente para Marte, Júpiter, e para a Terra e para a Lua. Para os outros astros, a observação diz que esse movimento se reduz a uma rotação uniforme à volta dum eixo principal central de inércia, eixo que conserva uma direcção invariável no espaço.

No caso de Saturno, com o seu anel, o conjunto Saturno-anel move-se à volta dum eixo de direcção fixa, o qual é sensivelmente perpendicular ao plano do anel. Assim o anel está sensivelmente no plano do equador do planeta.

Deixando, porém, ao problema um aspecto geral, sejam S_i e S_j dois corpos (não dois sistemas) cujos centros de gravidade são M_i e M_j. A orientação de S_i, referida a eixos de direcção fixa passando por M_i, é definida pelos cosenos directores dos eixos principais centrais de inércia, cosenos que são funções dos três ângulos de Euler, φ_i, ψ_i, ω_i.

A função de força tem de reduzir-se aos termos que dependem explicitamente tais ângulos. Assim sendo ela

$$f m_i \sum m_j U_{ij},$$

com $U_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} + K_i^j + K_j^i$, é claro que $\frac{1}{\Delta_{ij}}$ e K_j^i não terão que figurar.

A função de força para o movimento de S_i à volta do seu centro de gravidade é

$$V_i = f m_i \sum_j m_j K_i^j,$$ a qual daremos a forma

$$\boxed{V_i = f \sum_j \frac{m_j}{4\Delta_{ij}^3}\left[(2C_i - A_i - B_i)(1 - 3\gamma_i^2) + 3(B_i - A_i)(\alpha_i^2 - \beta_i^2)\right],}$$

onde, como sabemos, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ são os cosenos dos ângulos de M_iM_j com os eixos principais centrais de inércia de S_i.

A pg. 21 do livro de *Andoyer*, que estamos seguindo, como bastas vezes se tem dito, diz-se o seguinte: "Em V_i, a soma deverá limitar-se aos corpos susceptíveis de exercer uma influência sensível: pode avaliar-se essa influência comparando os termos correspondentes de V_i à semi-força viva do corpo S_i, que é, duma maneira aproximada, conforme o que acima se disse (refere-se o livro à existência dum eixo de rotação que conserva uma direcção invariável no espaço), metade do produto de C_i, por exemplo, pelo quadrado da velocidade angular de rotação. Reconhece-se assim, que, no caso da Terra, é necessário tomar para S_j o Sol e a Lua; no caso da Lua, é necessário tomar para S_j a Terra e, talvez, o Sol; para Jupiter, os S_j são o Sol e os principais satélites de Jupiter; para Marte, basta considerar a acção do Sol."

10) Forma simétrica das equações do movimento

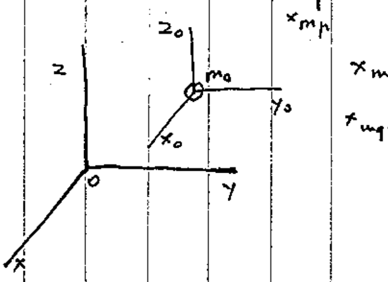
10) Forma simétrica das equações do movimento - Embora, nos §§ anteriores, tenhamos feito a redução dos problemas da Mecânica Celeste, não esquecemos os factos seguintes: quando se estuda o movimento do centro de gravidade dum sistema planeta-satélite, por exemplo, a expressão da função de fôrça contém as coordenadas dos sistemas atraentes que são funções do tempo. O mesmo se diz do movimento do centro de gravidade dum satélite à volta do planeta de que faz parte.

A solução dos problemas de Mecânica Celeste enunciados terá de fazer-se em detalhe, para cada problema, mas a forma de solução, na verdade, depende das circunstâncias próprias dêsse problema.

Sem dúvida que a redução aludida é muito informativa, sob um ponto de vista geral. Quando estudámos, por exemplo, o movimento do centro de gravidade dum sistema planeta-satélites, ou dum pequeno planeta ou dum cometa, chegámos à função de fôrça

$$U_p = \frac{f(m_0+m_p)}{r_p} + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{r_p}{r_q^2} \cos H_{pq} \right).$$

Pode vêr-se directamente que esta função de fôrça é precisamente aquela a que se chega quando se estuda o movimento de vários corpos reduzidos a massas pontuais e únicamente solicitados pelas suas atracções. Sejam, na figura, o sistema fixo o x y z e os pontos materiais m_0, m_p, m_q, etc., que se atraem. O movimento absoluto de $\underline{m_p}$ é dado pelas equações



$$m_p \frac{d^2 X_p}{dt^2} = f \frac{m_0 m_p}{r_p^2} \frac{X_0 - X_p}{r_p} + f \sum_q \frac{m_q m_p}{\Delta_{pq}^2} \frac{X_q - X_p}{\Delta_{pq}}.$$

e o movimento absoluto de $\underline{m_0}$ é dado pelas equações

$$m_0 \frac{d^2 X_0}{dt^2} = f \frac{m_0 m_p}{r_p^2} \frac{X_p - X_0}{r_p} + f \sum_q \frac{m_0 m_q}{r_q^2} \frac{X_q - X_0}{r_q},$$

pelo que, por diferença, depois de dividir aquelas por $\underline{m_p}$ e estas por $\underline{m_0}$, se obtem

$$\frac{d^2 X_p}{dt^2} - \frac{d^2 X_0}{dt^2} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{f(m_0+m_p)}{r_p^2} \frac{x_0 - x_p}{r_p} + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{\Delta_{pq}^2} \cdot \frac{x_q - x_p}{\Delta_{pq}} - \frac{1}{r_q^2} \frac{x_q}{r_q} \right).$$

Podemos escrever ainda (pois $X_p - X_0 = x_p$)

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left[f(m_0+m_p) \frac{1}{r_p} + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q}{r_q^3} \right) \right]$$

donde se conclui a funcção de força,

$$U_p = \frac{f(m_0+m_p)}{r_p} + \sum_q f m_q \left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{r_p}{r_q^2} \cos H_{pq} \right),$$

que é precisamente a dada acima.

Vê-se pois que o movimento do centro de gravidade dum grande planeta, por exemplo (salvo o caso da Terra), é o mesmo como se a massa do Sol e dos outros grandes planetas se encontrassem concentrados nos seus centros de gravidade, ùnicamente sujeitos às acções newtonianas entre pontos.

Mas é de vantagem, para certas indagações teóricas, ter uma forma diferente para as equações do movimento, ainda que então se seja obrigado a empregar outras variáveis não tão naturais como as utilizadas anteriormente.

Como diz Andoyer, pg. 22: "o fim que se procura atingir é de nos servirmos duma funcção de fôrça única para determinar os movimentos relativos dos pontos do sistema S formado por M_0 e pelos M_p". Por isso nós dizemos que vamos procurar uma forma simétrica para as equações do movimento.

Como se trata de pontos materiais, a funcção de fôrça será

$$U = \sum \frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

onde os índices i, j tomam os valores 0, p, q, ... relativos ao Sol e aos grandes planetas.

Quanto à fôrça viva **T**, é

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right].$$

Trata-se agora de obter T sob a forma duma soma de duas partes: uma dependendo, tal como U, ùnicamente da configuração do sistema, outra que corresponde ao movimento absoluto do mesmo sistema.

Para isso observemos a identidade seguinte:

$$m_0 u_0^2 + m_1 u_1^2 = (m_0+m_1) \left(\frac{m_0 u_0 + m_1 u_1}{m_0+m_1} \right)^2 + \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1} (u_1 - u_0)^2.$$

Se u_0 e u_1 se substituem primeiramente por $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dx_1}{dt}$, depois por $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, e, em seguida, por $\frac{dz_0}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, e se adicionam os resultados, vem

$$m_0 V_0^2 + m_1 V_1^2 = (m_0+m_1) \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 \right] + \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1} \left[\left(\frac{d(x_1-x_0)}{dt}\right)^2 + \cdots \right].$$

onde V_0 e V_1 são as velocidades absolutas e ξ, η, ζ são as coordenadas do centro de gravidade de M_0 e

Daqui se tira a seguinte conclusão:

A fôrça viva do sistema formado pelos dois pontos materiais M_0 e M_1, de massas $\underline{m_0}$ e $\underline{m_1}$, é igual à soma que se obtem juntando à fôrça viva do seu centro de gravidade G_1, afectado da massa m_0+m_1, a fôrça viva de M_1 no seu movimento relativo à volta de M_0, mas afectando M_1 da massa aparente $m_1' = \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}$.

Seja, então, o sistema de $\underline{n+1}$ pontos $M_0, M_1, \dots, M_n$, de massas $m_0, m_1, \dots, m_n$ e de velocidades absolutas $V_0, V_1, \dots, V_n$.

$\underline{G_1}$ = centro de gravidade de m_0 e de m_1 com a massa $\mu_1 = m_0+m_1$;
G_2 = " " " G_1 " M_2 " " " $\mu_2 = \mu_1+m_2 = m_0+m_1+m_2$;

G_n = " " " G_{n-1} " M_n " " " $\mu_n = \mu_{n-1}+m_n = m_0+m_1+\dots+m_n$

Designaremos com φ_i a velocidade absoluta de $\underline{G_i}$ e com ξ_n, η_n, ζ_n as coordenadas absolutas de G_n; e designemos com (x_1,y_1,z_1) as coordenadas relativas de M_1 com respeito a M_0 e com v_1 a velocidade relativa correspondente, e com (x_2,y_2,z_2) e v_2 os elementos análogos de $\mathbf{M_2}$ com respeito a G_1, etc., até (x_n,y_n,z_n) e v_n que são relativos a M_n, no seu movimento com respeito a G_{n-1}. Ponhamos ainda $m_0=\mu_0$, e

$$m_1' = m_1\frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad m_2' = m_2\frac{\mu_1}{\mu_2}, \dots, \quad m_n' = m_n\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

Então é

$$m_0V_0^2 + m_1V_1^2 = m_1'v_1^2 + \mu_1\varphi_1^2,$$

$$\mu_1\varphi_1^2 + m_2V_2^2 = m_2'v_2^2 + \mu_2\varphi_2^2$$

$$\mu_{n-1}\varphi_{n-1}^2 + m_nV_n^2 = m_n'v_n^2 + \mu_n\varphi_n^2,$$

de sorte que a semi fôrça viva do sistema é

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i'\left(\frac{dx_i^2}{dt^2}+\frac{dy_i^2}{dt^2}+\frac{dz_i^2}{dt^2}\right)+\frac{1}{2}\mu_n\left(\frac{d\xi_n^2}{dt^2}+\frac{d\eta_n^2}{dt^2}+\frac{d\zeta_n^2}{dt^2}\right).$$

Os $3n+3$ parâmetros **absolutos** que definiam o sistema foram aqui substituidos por $\underline{3n}$ parâmetros relativos e $\underline{3}$ parâmetros absolutos.

Trata-se agora de exprimir a função de fôrça nos mesmos parâmetros. Na verdade aparecerão apenas os parâmetros relativos, como sabemos.

Quanto a $\overline{M_0M_1}$ as componentes são x_1, y_1, z_1;

Quanto a $\overline{M_0M_2}$ temos: $\overline{M_0M_2} = \overline{M_0G_1} + \overline{G_1M_2} = \frac{m_1}{\mu_1}\overline{M_0M_1} + \overline{G_1M_2}$,

de sorte que as projecções de $\overline{M_0M_2}$ são

$$\frac{m_1}{\mu_1}x_1 + x_2, \quad \frac{m_1}{\mu_1}y_1 + y_2, \quad \frac{m_1}{\mu_1}z_1 + z_2 .$$

Passando a $\overline{M_0M_3}$ temos

$$\overline{M_0M_3} = \overline{M_0G_1} + \overline{G_1G_2} + \overline{G_2M_3}, \text{ de componentes}$$

$$\left(\frac{m_1}{\mu_1}x_1 + \frac{m_2}{\mu_2}x_2 + x_3, \dots\right)$$

até $\overline{M_0M_n}$ de componentes

$$\left(\frac{m_1}{\mu_1}x_1 + \frac{m_2}{\mu_2}x_2 + \dots + \frac{m_{n-1}}{\mu_{n-1}}x_{n-1} + x_n, \dots\right)$$

É claro que as distâncias Δ_{ij} são precisamente do tipo $\overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_2}, \dots$ ou $\overline{M_iM_j}$. Mas $\overline{M_iM_j} = \overline{M_iM_0} + \overline{M_0M_j}$, de sorte que não há nada de novo a considerar com $\overline{M_iM_j}$.

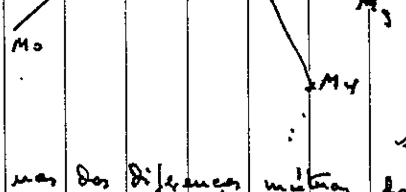
Temos, assim, tanto T como U expressos em $(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n)$ e ξ_n, η_n, ζ_n. As equações do movimento (tendo em vista que U não depende de ξ_n, η_n, ζ_n) são

$$\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta_n}{dt^2} = 0 .$$

Assim o centro de gravidade G_n do sistema total, como de resto se sabe, está animado dum movimento rectilíneo e uniforme. Em seguida as equações de Lagrange dão

$$\frac{d}{dt}\left(m'_i \frac{dx_i}{dt}\right) = m'_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \dots$$

Assim o movimento relativo de M_1 em respeito a M_0, ou, mais geralmente, de M_i em respeito a G_{i-1} é o dum ponto material de massa m'_i sob a acção da função de fôrça (sempre a mesma) U.



Duma maneira geral o que se pretendeu foi escrever a forma quadrática

$$m_0 U_0^2 + m_1 U_1^2 + \dots + m_n U_n^2$$

sob a forma duma soma de quadrados dependendo apenas das diferenças mútuas dos U_i, e dum último quadrado proporcional a $m_0U_0 + \dots + m_nU_n$, pois, assim, intervêem neste último quadrado unicamente as derivadas das coordenadas do centro de gravidade.

Capítulo III

Movimento dum ponto material

11) Primeiros Elementos da órbita – Tomemos como equações do movimento dum ponto material as equações canónicas

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dy}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z'},$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

que supõem, é claro, o ponto de massa unitária.

Como se viu, ao tratar-se da redução dos problemas, há na função de força $\underline{U}$ um termo preponderante do tipo $\frac{k^2}{r}$, em que $\underline{r}$ é o raio vector, contado a partir da origem das coordenadas. $\underline{k}^2$ é uma constante.

Suponhamos que $\underline{U}$ está simplesmente igual a $\frac{k^2}{r}$. Então tinha-se

$$L = T + U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{k^2}{r},$$ e a função H reduzia-se a

$$H = \sum q'_i \frac{\partial L}{\partial q'_i} - L = \sum q' \frac{\partial T}{\partial q'} - L = 2T - (T + U) = T - U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{k^2}{r},$$

e, portanto

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\left(\frac{k^2}{r^2}\frac{x}{r}\right), \dots$$

ou seja ainda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + k^2\frac{y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + k^2\frac{z}{r^3} = 0.$$

Conclui-se fàcilmente que a órbita seria plana, tendo também lugar o integral da força viva, aliás fácil de demonstrar directamente. Com efeito é

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz + k^2\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = 0,$$

ou

$$d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + k^2\frac{r\,dr}{r^3} = 0,$$

ou

$$dT + k^2\frac{dr}{r^2} = 0, \quad \text{ou} \quad d\left(T - \frac{k^2}{r}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad T - \frac{k^2}{r} = \text{const.}$$

Para demonstrar que a órbita é plana, escrevamos

$$\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \dots .$$

Concluem-se as três relações

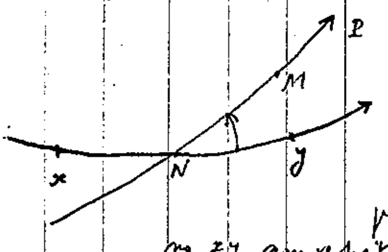
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = B,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = A.$$

Delas se tira $Ax + By + Cz = 0$. Assim, o plano da órbita passa pela origem.

De facto, porém, a função $\underline{U}$ não contém apenas o termo preponderante da forma $\frac{k^2}{r}$. A órbita não é, pois, plana. Nós vamos, porém, aplicando uma teoria desenvolvida nas equações canónicas, fazer uma mudança de variáveis no sistema canónico de função característica $\underline{H}$, integrado que seja o sistema canónico em que a função característica é F.



Sôbre uma esfera cujo centro está na origem das coordenadas e que passa por uma posição do ponto móvel M, seja $\underline{P}$ o plano da órbita correspondente ao caso H=F. O plano $\underline{P}$ será orientado como se quiser, mas, uma vez feito isso, o seu polo $\underline{p}$ será aquele para o qual a orientação de $\underline{P}$ é a mesma que a do plano $\underline{xy}$ com respeito ao seu polo $\underline{z}$. O triedro $Oxyz$ será, de resto, quási sempre, um triedro directo. Em Mecânica Celeste o plano xy é geralmente a eclítica duma certa data. Se $\underline{N}$ é um dos nodos P sôbre xy, $xN = \vartheta$ é a longitude do nodo, e o ângulo $\underline{\omega}$, indicado na figura, é a inclinação da órbita. É claro que $\underline{\vartheta}$ e $\underline{\omega}$ determinam completamente o plano $\underline{P}$ da órbita e a sua orientação. Nos problemas reais de Mecânica Celeste, no geral o plano $\underline{P}$ é orientado no sentido do movimento do ponto material, e o nodo $\underline{N}$ escolhido é aquele que o ponto $\underline{M}$ atravessa quando passa do hemisfério que não contém $\underline{z}$ para aquele que contém $\underline{z}$. É claro que o conhecimento de (x, y, z), (x', y', z') em função do tempo determina completamente a posição do ponto $\underline{M}$. Mas essas $\underline{6}$ variáveis podem ser substituídas por outras. De facto, conhecendo $\underline{\vartheta}$ e $\underline{\omega}$, a posição do ponto $\underline{M}$ no plano $\underline{P}$ fica definida conhecendo-se o arco $\widehat{NM} = u$, chamado argumento da latitude e contado no sentido da orientação de P, assim como o raio vector $\underline{r}$. As coordenadas x, y, z devem, pois, exprimir-se nas quatro quantidades ϑ, ω, r, u, não se designando neste momento (o que se fará mais adiante) as outras duas variáveis que devem juntar-se às quatro anteriores, a fim de se passar de x, y, z, x', y', z' às novas $\underline{6}$ variáveis. Bem entendido que a função $H = F + \cdots$, se suporá função das variáveis ϑ, ω, r, u, assim como do tempo.

Procedamos à mudança de variáveis, utilizando os J_q, J_p. Designando com $\underline{\alpha}$ uma qualquer das novas variáveis, tem-se

$$J_\alpha = \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = x' \frac{\partial x}{\partial \alpha} + y' \frac{d y}{\partial \alpha} + z' \frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

desde que se tome $K = 0$, pois K é uma função arbitrária das novas variáveis e de $\underline{t}$.

Se $\underline{\alpha}$ é uma das variáveis ainda não definida, tem-se $J_\alpha = 0$. Mas se $\underline{\alpha}$ é uma das variáveis θ, ω, u, r, vê-se, pela expressão de J_α, que esta quantidade é o produto escalar da velocidade V pela velocidade V_α num movimento virtual do ponto $\underline{M}$ para o qual apenas variasse a variável $\underline{\alpha}$, sendo ainda $\delta\alpha = \delta t$.

Quando $\underline{\omega}$ varia sòzinho, tem-se um movimento de rotação à volta de ON. A velocidade ~~de~~ $\underline{M}$ será o momento do vector unidade tomado sôbre ON com respeito a M. Essa velocidade é perpendicular a V, e, por isso, $J_\omega = 0$. Quanto a J_r, notemos que V_r é um vector igual à unidade dirigido segundo OM, de sorte que J_r é a projecção $\underline{r'}$ de V sôbre OM.

Estudemos agora V_u. Trata-se duma rotação à volta de $\underline{Op}$ e a velocidade de V_u é o momento do vector unidade dirigido segundo $\underline{Op}$ com respeito ao ponto M; o seu valor é $\underline{r}$, sendo dirigido no plano P perpendicularmente a $\underline{OM}$. O seu produto escalar por V, ou seja J_u, representa o momento $\underline{h}$ de V com respeito a Op, como se vê decompondo V nas suas componentes radial e perpendicular a esta, no plano P.

Restamos V_θ. Trata-se do momento, com respeito a M, do vector unidade dirigido segundo Oz. Decomponhamos êsse vector em dois vectores: um, igual a $\underline{\cos\omega}$, dirigido segundo Op; o outro, igual a $\underline{\operatorname{sen}\omega}$, situado no plano P. O momento dêste último é perpendicular ao plano $\underline{P}$, pelo que o seu produto escalar por V é nulo. Resta o momento do vector $\underline{\cos\omega}$ dirigido segundo Op. Virá $J_\theta = h' = h\cos\omega$. Tem-se, pois:

$$J_\omega = 0, \quad J_r = r', \quad J_u = h, \quad J_\theta = h' = h\cos\omega.$$

12) Integração do sistema canónico por mudança de variáveis - Conforme o que se viu nas transformações dos sistemas canónicos, quando os J_{q_j} são nulos e os J_{p_j} são funções dos q_j e do tempo, associando aos p_j as variáveis J_{p_j}, tem-se uma transformação canónica. Aqui teremos, pois, as novas variáveis:

$$p_j \longrightarrow r, u, \theta \ ; \quad J_{p_j} \longrightarrow r', h, h'.$$

Na verdade substitui-se ao argumento da latitude $\underline{u}$ a chamada longitude na órbita, igual a $v = u + \theta$. Então tem-se uma mudança de variáveis

$$\begin{cases} r = r \\ \theta = \theta \\ v = u + \theta \end{cases}$$ e, se conservarmos r', h, temos de entrar com uma variável y tal que os dois pfaffianos

$$r\,dr' + \theta\,dh' + u\,dh = r\,dr' + \theta\,dy + v\,dh,$$

para se obter uma transformação completamente canónica. Vê-se que deverá ser

$$\theta\, dh' + u\, dh = \theta\, dy + (u+\theta)\, dh,$$

o que mostra bastar escolher $\theta\, dh' = \theta\,(dy + dh)$ ou seja $h + y = h'$ ou

$$y = h' - h.$$

Escolhemos, pois, os dois grupos de variáveis

$$\underbrace{r, \theta, v}\ ; \quad \underbrace{r', h_1, h},$$

onde $h_1 = y = h' - h = h(\cos w - 1)$.

Observando agora que as transformações consideradas são sempre completamente canónicas, pois, para a primeira, é $J_t = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$, visto ser $K = 0$ e os x_i se exprimirem independentemente do tempo, e, para a segunda, a canonicidade completa ter sido já verificada, vê-se que o transformado do sistema canónico de função característica $\underline{H}$ é o sistema canónico

$$(1)\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r'}, & \frac{dr'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h_1}, & \frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v}, \end{cases} \quad \text{com} \quad H = F + W = T - \frac{k^2}{r} + W = T - U,$$

onde W é a parte de H que não está contida em F, de modo que

$$U = \frac{k^2}{r} - W.$$

Será assim

$$H = T - U\left(r, \theta, v, \frac{h_1}{h}, t\right), \quad T = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right),$$

isto é: $\underline{U}$ depende de x, y, z, t, e, portanto, de r, θ, ω, v, t ou $r, \theta, \frac{h_1}{h}, v, t$; e T tem a expressão considerada, como se vê tendo em conta a expressão de $J_u = h$.

Em resumo: trata-se de integrar (1) sabendo que

$$H = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - U = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \left(\frac{k^2}{r} - W\right) = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \left(\frac{k^2}{r} + V\right),$$

designando com V a chamada <u>função perturbadora</u> $-W$.

Vamos agora (e ainda) proceder à integração do sistema (1) do modo seguinte: voltamos a pôr $V = 0$, ou $U = \frac{k^2}{r}$ e efectuamos a integração que levará à órbita plana; e, em seguida, ~~faremos~~ uma mudança de variáveis em que as novas variáveis serão as constantes de integração do problema anterior (ou, melhor ainda, em que as novas variáveis serão quantidades convenientemente escolhidas equivalentes às constantes de integração do problema com $V = 0$).

Passemos pois a supôr que, no sistema (1), se põe, em vez de H, a função

$$F = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{k^2}{r}.$$

Vê-se que h, θ, h_1 são constantes porque F não depende das variáveis com elas conjugadas, facto que nos mostra, de novo, tratar-se de movimento plano, em face do significado das referidas variáveis. O integral das áreas tem lugar no plano da órbita porque $\underline{h}$ é uma constante. O integral das fôrças vivas tem lugar, o que levará a

$$F = T - U = \text{const.},$$

pois que F não depende explicitamente do tempo.

Em vez das constantes $\underline{F}$ e $\underline{h}$ empregaremos outras, $\underline{p}$ e $\underline{\varepsilon}$, dadas por:

$$h = k\sqrt{p}\,, \quad F = -\frac{k^2}{2p}(1-\varepsilon^2)\,.$$

Temos de determinar agora as variáveis r, r', v. Ora é

$$\frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{k^2 p}{r^2}\right) - \frac{k^2}{r} = -\frac{k^2}{2p}(1-\varepsilon^2)\,,$$

ou seja

$$r'^2 = -\frac{k^2}{p}(1-\varepsilon^2) + 2\frac{k^2}{r} - \frac{k^2 p}{r^2}\,.$$

Relativamente a $\underline{v}$ tem-se

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}\,.$$

Vem, pois, por eliminação de $\underline{dt}$ entre as equações que dão $\underline{r}$ e $\underline{v}$,

$$\frac{k^2 p}{r^4}\frac{dr^2}{dv^2} = -\frac{k^2}{p}(1-\varepsilon^2) + 2\frac{k^2}{r} - \frac{k^2 p}{r^2}\,, \quad \text{ou seja}$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{dv}\right]^2 + (1-\varepsilon^2) - 2\frac{p}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)^2 = 0\,.$$

Por derivação em ordem a $\underline{v}$ vem

$$2\,\frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{dv}\cdot\frac{d^2\frac{p}{r}}{dv^2} - 2\,\frac{d\frac{p}{r}}{dv} + 2\,\frac{p}{r}\,\frac{d\frac{p}{r}}{dv} = 0\,,$$

ou

$$\frac{d^2\frac{p}{r}}{dv^2} + \frac{p}{r} = 1\,. \quad \text{Logo é} \quad \frac{d^2\left(\frac{p}{r}-1\right)}{dv^2} + \left(\frac{p}{r}-1\right) = 0\,,$$

e, portanto,

$$\frac{p}{r} = 1 + \alpha\cos(v-\varpi)\,,$$

onde aparecem duas constantes $\underline{\alpha}$ e $\underline{\varpi}$. Como a equação de primeira ordem de que se partiu tem de ser satisfeita, vem

$$+\alpha^2\operatorname{sen}^2(v-\varpi)\,] + \cancel{1} - \varepsilon^2 - \cancel{2} - \cancel{2\alpha\cos(v-\varpi)} + \cancel{1} + \cancel{2\alpha\cos(v-\varpi)} + \alpha^2\cos^2(v-\varpi)$$

$$= 0\,, \quad \text{donde} \quad \alpha^2 = \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \alpha = \varepsilon\,, \text{ se se quiser,}$$

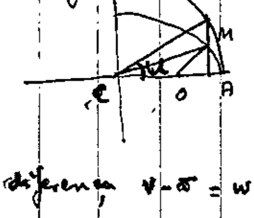
A equação

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(v-\varpi)$$

mostra que a trajectória é uma cónica de parâmetro $\underline{p}$ e de excentricidade

ε, cujo foco está na origem das coordenadas.

Se o centro *O* de atracção é o Sol, o ponto da órbita mais próximo de *O* diz-se o *periélio* (na figura o ponto A). Quando se faz $v=\varpi$ vem



$$\frac{p}{r}=1+\varepsilon\;,\qquad r=\frac{p}{1+\varepsilon},$$

e, como *p* é o parâmetro da órbita, *r* é então o raio vector correspondente ao ponto A. Por isso, ϖ é a *longitude do periélio* e a diferença $v-\varpi=w$ diz-se *anomalia verdadeira* do ponto móvel.

Quando se escreveram as igualdades $h=k\sqrt{p}$, $F=-\frac{k^2}{2p}(1-\varepsilon^2)$, supôs-se, naturalmente, $p>0$. Então se $F>0$ tem-se de ser $\varepsilon>1$, pelo que a órbita seria uma hipérbole. À órbita elítica, para a qual $\varepsilon<1$, corresponde $F<0$. Se se põe agora

$$p=a(1-\varepsilon^2),$$

no caso $\varepsilon<1$, *a* será o semi-eixo maior da órbita elítica. Mas, se a órbita é hiperbólica, *a* representa o semi-eixo transverso tomado negativamente.

Resta-nos agora determinar a lei do movimento, para o que nos serviremos da equação

$$r^2\frac{dv}{dt}=k\sqrt{p},$$

mas limitando-nos ao caso do movimento elítico. Introduzindo os eixos rectangulares $(O\xi, O\eta)$, que correspondem às coordenadas polares (r,w), a equação da elipse é

$$\frac{(\xi+a\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1\,.$$

Podemos pôr

$$\xi=r\cos w=a(\cos u-\varepsilon)\quad,\text{ o que leva a }\quad \cos^2u+\frac{\eta^2}{b^2}=1,\quad \eta^2=b^2\operatorname{sen}^2u,\quad e,$$

portanto,

$$\eta=r\operatorname{sen}w=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{sen}u,$$

introduzindo uma variável auxiliar *u* chamada *anomalia excêntrica*, cujo significado geométrico está indicado na figura. Virá então

$$r^2\frac{dv}{dt}=\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=a(\cos u-\varepsilon)\cdot a\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos u\frac{du}{dt}+a\sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{sen}u\cdot a\operatorname{sen}u\frac{du}{dt}=$$

$$=a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(1-\varepsilon\cos u)\frac{du}{dt}=k\sqrt{p}$$

Pondo aqui $n=\frac{k\sqrt{p}}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ vem $(1-\varepsilon\cos u)\frac{du}{dt}=n$, e, portanto,

$$u-\varepsilon\operatorname{sen}u=n(t-t_0),$$

sendo *t_0* uma nova constante de integração. Esta última equação é a célebre *equação de Kepler*. Já não há outras constantes de integração, pois temos as 6 constantes

$$h,\ h_1,\ \theta,\ \varpi,\ F,\ t_0,\quad\text{ou}\quad p,\ \varepsilon,\ h_1,\ \varpi,\ \theta,\ t_0.$$

Convém agora ter em conta a seguinte terminologia:

t_0 = época da passagem no periélio,
n = movimento médio do ponto $\underline{M}$, móvel;
$n(t-t_0) = g$ = anomalia média;
$g + \varpi = l$ = longitude média do ponto $\underline{M}$.

Se $\underline{l_0}$ é o valor de $\underline{l}$ na origem do tempo, ou a longitude média da época, tem-se

$$l_0 = -nt_0 + \varpi,$$

podendo a equação de Kepler tomar a forma

$$u - \varepsilon \operatorname{sen} u = g = l - \varpi = nt - nt_0 = nt + l_0 - \varpi.$$

Os elementos do movimento kepleriano, usados em Astronomia, são

$$(\varepsilon, l_0, a, \theta, \omega, \varpi)$$

devendo ter-se em vista que

$$n = k a^{-3/2}, \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1-\varepsilon^2) \quad (b = \text{semi-eixo menor da órbita})$$

$$l_0 - \varpi = g_0,$$

onde g_0 é a anomalia média da época.

No caso dos cometas de órbitas com grande excentricidade (órbitas quási parabólicas, de excentricidade vizinha de um), substitui-se $\underline{a}$ pela distância periélia

$$q = a(1-\varepsilon) = \frac{p(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

e emprega-se $\underline{t_0}$, em vez de $l_0 = \varpi - nt_0$.

Também não devemos esquecer as relações

$$h = k\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}, \quad h_1 = h(\cos\omega - 1), \quad F = -\frac{k^2}{2p}(1-\varepsilon^2) = -\frac{k^2}{2a}.$$

As três anomalias g, u, w variam no mesmo sentido, sendo uma delas bastante para se determinarem as outras. Quando $t = t_0$, é $g = 0$, $u = 0$, $w = 0$. Todas as três anomalias são iguais no periélio e no ponto oposto, chamado afélio; no primeiro, iguais a $\underline{0}$ ou 2π; no segundo, iguais a π.

O movimento é periódico, havendo simetria com respeito à linha dos apsides, que passa pelo periélio e pelo afélio.

13) Relações entre as anomalias $\underline{u}$ e $\underline{w}$ - Das fórmulas anteriormente escritas

$$\frac{r}{a}\operatorname{sen} w = \sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{sen} u,$$

$$\frac{r}{a}\cos w = \cos u - \varepsilon,$$

deduz-se

$$\frac{r^2}{a^2} = (1-\varepsilon^2)\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos u = 1 + \varepsilon^2\cos^2 u - 2\varepsilon\cos u = (1-\varepsilon\cos u)^2,$$

e, portanto,

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u,$$

sem qualquer ambiguidade. Será, assim,

$$\frac{r}{a}\left(\cos^2\frac{w}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{w}{2}\right) = 1 - \varepsilon\cos u$$

$$\frac{r}{a}\left(\cos^2\frac{w}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{w}{2}\right) = \cos u - \varepsilon\,,$$

e, portanto,

$$2\,\frac{r}{a}\cos^2\frac{w}{2} = (1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)\cos u\,,$$

$$2\,\frac{r}{a}\operatorname{sen}^2\frac{w}{2} = (1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)\cos u\,, \quad \text{ou seja}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{r}{a}}\operatorname{sen}\frac{w}{2} = \sqrt{1+\varepsilon}\operatorname{sen}\frac{u}{2}\,, \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{w}{2} = \sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{u}{2}\,, \end{array}\right.$$

sem ambiguidade porque as anomalias u, w, g estão simultaneamente compreendidas entre (0 e π) e (π e 2π) ou entre $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$.

Das últimas fórmulas escritas tira-se a fórmula importante

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\,,$$

que dá $w > u$, quando u e w estão simultaneamente entre 0 e π.

Tem-se ainda

$$\boxed{\frac{a}{r}\operatorname{sen} u = \frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,, \quad \frac{a}{r}\cos u = \cos w + \frac{a\varepsilon}{r}.}$$

Se tivermos em vista que

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u\,,$$

vem também

$$\frac{a}{r}\cdot\frac{1-\frac{r}{a}}{\varepsilon} = \cos w + \frac{a\varepsilon}{r}\,, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon} = \cos w + \frac{a\varepsilon}{r}\,,$$

donde se tira

$$\frac{a}{r}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon} + \cos w \quad \text{ou} \quad \frac{a}{r}\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon\cos w}{\varepsilon}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon^2}.$$

Tem-se, pois, também

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{r}\operatorname{sen} u = \frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\ \frac{a}{r}\cos u = \cos w + \varepsilon\,\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon^2} = \frac{\cos w + \varepsilon}{1-\varepsilon^2}\,. \end{array}\right.$$

14) **Observações** - Para a prática astronómica, as diferentes fórmulas deduzidas no § anterior usam-se por um dos grupos seguintes:

$$1.^\circ \left\{\begin{array}{l} \frac{r}{a}\operatorname{sen} w = \sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{sen} u\,, \\ \frac{r}{a}\cos w = \cos u - \varepsilon\,, \\ \frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u\,, \end{array}\right. \quad 2.^\circ \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{r}{a}}\operatorname{sen}\frac{w}{2} = \sqrt{1+\varepsilon}\operatorname{sen}\frac{u}{2}\,, \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{w}{2} = \sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{u}{2}\,, \\ \operatorname{tg}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\,, \end{array}\right. \quad 3.^\circ \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{r}\operatorname{sen} u = \frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,, \\ \frac{a}{r}\cos u = \frac{\cos w + \varepsilon}{1-\varepsilon^2}\,, \\ \frac{a}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon^2}\,. \end{array}\right.$$

Façamos ainda as seguintes observações: tomando como argumento a anomalia média g, vê-se que a equação de Kepler $u - \varepsilon \operatorname{sen} u = g$ mostra ser u uma função periódica impar de g (que se suporá variar entre $-\pi$ e $+\pi$); $\frac{a}{r} = 1 - \varepsilon \cos u$ é uma função periódica par de g; $\frac{r'}{a n} = \frac{1}{n} \varepsilon \operatorname{sen} u \frac{du}{dt} = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{sen} u \frac{n}{1-\varepsilon \cos u} = \frac{\varepsilon \operatorname{sen} u}{1-\varepsilon \cos u}$ é uma função periódica impar de g; e $w - g$, que se diz equação do centro, e que tem a forma revelada pelo primeiro grupo de equações anteriores por ex., é também uma função impar de g. Trata-se, assim, de quantidades que se desenvolvem em séries de Fourier.

499

§ 15) Mudança de variáveis no sistema

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r'}, \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{1}{2}\left(r'^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - U \\ U = \frac{k^2}{r} + W = f\left(r, v, \theta, \frac{h_1}{h}, t\right). \end{array} \right.$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial h_1}, \quad \frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

Passemos a transformar o sistema anterior, introduzindo como novas variáveis as constantes de integração do sistema canónico em que a função característica é F. Essas constantes, chamadas elementos do movimento elítico, eram: $\theta, a, \varepsilon, h_1, \varpi, g_0$. Na verdade, visto que a constante g_0 apenas figura no argumento $g = nt + g_0$, introduziremos, antes, g que g_0, não esquecendo que n verifica a relação $n^2 a^3 = k^2$. As variáveis θ e h_1 conservam-se, havendo que substituir $g, \varpi, a, \varepsilon$ às variáveis r, r', v, h. Ora os integrais encontrados (com $H = F$) são periódicos pois $r, r', W - g = v - \varpi - g$ são funções periódicas de g e h é uma constante. Acha-se no caso do § ~~38~~ 15 das equações canónicas, no qual:

os $x_i \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \\ v \end{array} \right.$, os $a' \longrightarrow h$, os μ' não existem, os $M', N', \ldots$ não existem; os $M, N, \ldots \longrightarrow$ são g unicamente;

os $y_i \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r' \\ h \end{array} \right.$, os $a, b, \ldots \longrightarrow a, \varepsilon, \varpi$; os $\mu, \nu, \ldots \longrightarrow g_0$; os $m', n', \ldots$ não existem; os $m, n, \ldots \longrightarrow n$.

Determinando K como se indicou (consequência de ser G o termo constante da função periódica $\sum y_i \frac{dx_i}{dt} - F$, de modo que $\frac{dK}{dt}$ não tenha termo constante e K seja uma função periódica, com uma parte constante igual a zero) e designando com u uma qualquer das novas variáveis, temos de calcular os J_u. Estas quantidades são constantes dadas por

$$J_u = \left(\sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \right)_0 = \left(r' \frac{\partial r}{\partial u} + h \frac{\partial v}{\partial u} \right)_0$$

Quando $u = a$ vem

$J_a = r' \frac{\partial r}{\partial a} + h \frac{\partial v}{\partial a}$. Mas esta quantidade é uma função periódica impar, como resulta das observações feitas no § anterior. Logo tem de ser $J_a = 0$. Do ③⑨ mesmo modo se vê que é $J_\varepsilon = 0$. Quanto a J_ϖ, tem-se

$$J_\varpi = \left(r' \frac{\partial r}{\partial \varpi} + h \frac{\partial v}{\partial \varpi} \right)_0 = h ,$$

pois que $\underline{r}$ não depende de ϖ.

Resta-nos tratar J_g. Do que se viu a propósito dos $J_m, J_n, \ldots$, esta quantidade J_g exprime-se em $m, n, \ldots, a', b', \ldots$; no nosso caso exprime-se em $\underline{n}$ e $\underline{k}$, podendo, pois calcular-se supondo $\varepsilon = 0$. Mas então vem

$$x = a , \quad v = g + \varpi , \quad h = k\sqrt{a} ,$$

e

$$J_g = k\sqrt{a} .$$ Como não há argumentos $\underline{m}'$, tem-se $F = J = -\frac{k^2}{2a}$.

Sabemos, também, que $\underline{J}$ (e, portanto, F) se exprime em J_g e k (em J_m e $a', b', \ldots$). Vem imediatamente, de facto,

$$J = F = -\frac{k^2 \cdot k^2}{2 J_g^2} = -\frac{k^4}{2 J_g^2} .$$

Por consequência, também as derivadas de F (ou J) em ordem a $\underline{J_g}$ e $\underline{k}$ se exprimem nestas mesmas variáveis. Mas sendo

$$\frac{\partial F}{\partial J_g} = \frac{\partial J}{\partial J_g} = n = \frac{k^4}{J_g^3} , \qquad \frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\partial J}{\partial k} = \frac{2k^3}{J_g^2} = \left(\frac{\delta F}{\delta k} \right)_0 ,$$

vê-se que, como $\frac{\delta F}{\delta k} = -2\frac{k}{r}$, tem (a função $\frac{1}{r}$) como termo constante, no desenvolvimento de Fourier, $\frac{k^2}{J_g^2} = \frac{1}{a}$. Relativamente à função G, tem-se

$$G = \frac{3}{2} \frac{k^2}{a}$$

Posto isto, se tomarmos com J_q e J_p, respectivamente,

$$J_q \to J_\varepsilon , J_a , \qquad J_p \to J_\varpi , J_g ,$$

e, em seguida, como variáveis

$$p \to \varpi, g, \theta , \qquad J_p \to J_\varpi, J_g, h_1 ,$$

o sistema transformado é um sistema canónico.

Podemos, de resto, substituir, ainda, $\underline{g}$ por $l = g + \varpi$. Neste último caso a associação de variáveis conjugadas [~~imposta pela igualdade de Pfaff~~

~~$J_\varpi d\varpi + J_g dg + h_1 d\theta = J_g dl + h_1 d\theta + \Pi d\varpi$~~ ,]

mostra que deve tomar-se $\Pi = J_\varpi - J_g$. Temos pois:

a um lado: $\boxed{p \to \varpi, l, \theta}$; a outro lado :

$$\mathrm{II} = J_\sigma - J_g = B = h - k\sqrt{a},$$
$$J_g = A = k\sqrt{a} = na^2,$$
$$h_1 = \mathcal{C} = h(\cos\omega - 1),$$

ou seja ainda

$$A = (J_g = k\sqrt{a} = na^2),$$
$$B = [J_\sigma - J_g = h - k\sqrt{a} = A(\sqrt{1-e^2} - 1)],$$
$$\mathcal{C} = [h_1 = h(\cos\omega - 1) = (A+B)(\cos\omega - 1)].$$

O sistema transformado do sistema proposto no início dêste § é, pois:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial H}{\partial A}, \qquad \frac{dA}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l},$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial H}{\partial B}, \qquad \frac{dB}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \sigma},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial C}, \qquad \frac{dC}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

Para pôr em evidência a função perturbadora basta atender à relação $H = F - V$, em que V (anteriormente W) é essa função. Então, como $F = -\frac{k^4}{2J_g^2} = -\frac{k^4}{2A^2}$, tem-se

$$\frac{dA}{dt} = +\frac{\partial V}{\partial l}, \qquad \frac{dl}{dt} = n - \frac{\partial V}{\partial A},$$
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial B},$$
$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \theta}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial C},$$

que tem uma forma quási canónica. É, de resto,

$$n = \frac{k^4}{A^3} = \frac{\partial}{\partial A}\left(-\frac{k^4}{2A^2}\right).$$

Temos, assim, dado um grande passo nos métodos teóricos da Mecânica Celeste. E vê-se como há uma grande latitude na escolha das novas variáveis, a qual deverá ser feita conforme as conveniências das diferentes questões a tratar.

Poderíamos, abandonando agora os métodos teóricos dos dois capítul anterior passar aos problemas do estudo detalhado do movimento kepleriano, d fixação, no espaço, duma órbita e ao da determinação duma órbita por 3 observações (ou por uma observação e uma velocidade), ou, ainda, por diferentes observações aproximadas. Continuaremos, porém, a via teórica que es

tamos trabalhando, indicando aos estudantes as páginas seguintes do livro ①
de Andoyer: para as tabelas dos movimentos keplerianos, pgs. 65 a 92; para a fixação de órbitas no espaço, pgs. 98 a 105; para as órbitas, pgs. 116 e seguintes. Para êste último problema, porém, o livro de Luc Picart ou o livro de Stracke são bastante mais compreensíveis. O primeiro "Calcul des orbites et des éphémérides" foi indicado na bibliografia dada no começo do Curso. O segundo intitulado "Bahnbestimmung".

①

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{M'M}=(r'^2+r^2-2r'r\cos H)^{-1/2}=(D^2-r'r\eta)^{-1/2}=\frac{1}{D}\left(1-\frac{r'r\eta}{D^2}\right)^{-1/2}$$

$\cos H=\cos\varphi+\frac{\eta}{2}$ $\qquad r'^2+r^2-2r'r\cos\varphi-2r'r\frac{\eta}{2}=D^2-r'r\eta$

$D^2=r'^2+r^2-2r'r\cos\varphi$ $\qquad 2q+1=2p \qquad 2q=2p-1$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{D}+\frac{1}{2}\frac{r'r}{D^3}\eta+\frac{1.3}{2.4}\frac{r'^2r^2}{D^5}\eta^2+\cdots \qquad \frac{(r'r)^q}{D^{2q+1}}=\frac{(r'r)^{p-1/2}}{D^{2p}}$$

$(r'r)^{p-\frac{1}{2}}D^{-2p}$ $\qquad \begin{cases}a'\\a\end{cases} \quad d^2=a'^2+a^2-2a'a\cos\varphi$

$$(a'a)^{p-\frac{1}{2}}d^{-2p}=\frac{1}{\sqrt{a'a}}\left(\frac{a'a}{d^2}\right)^p=\frac{1}{\sqrt{a'a}}\left(\frac{a'a}{a'^2+a^2-2a'a\cos\varphi}\right)^p=\frac{1}{\sqrt{a'a}}\mathfrak{F}^p$$

$a<a'$

$\frac{a}{a'}=\alpha$

$$\mathfrak{F}^p=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi}\right)^p=\sum b_n^p\cos n\varphi \qquad \boxed{b_n^p=b_{-n}^p}$$

$$\frac{1}{\Delta}=\sum\frac{1.3.5\cdots(2p-2)}{2.4.6\cdots(2p-1)}\frac{(r'r)^{p-1/2}}{D^{2p}}\eta^{p-1/2}$$

$p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\cdots$

$$\frac{1}{\sqrt{a'a}}\left(\frac{a'a}{d^2}\right)^p=\frac{1}{\sqrt{a'a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n^p e^{in\varphi}$$

Em particular, para $p=\frac{1}{2}$, tem-se o desenvolvimento

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{a'a}}\left(\frac{a'a}{d^2}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{a'a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n^{1/2}e^{in\varphi}$$

Introduzamos η. Então a f. perturbadora é

$$R_0=\sum\frac{1.3.5\cdots(2p-2)}{2.4.6\cdots(2p-1)}\left(\frac{a'a}{d^2}\right)^p\frac{1}{\sqrt{a'a}}\eta^{p-1/2}=\sum_p\sum_n\frac{1}{\sqrt{a'a}}\frac{1.3.5\cdots(2p-2)}{2.4.6\cdots(2p-1)}b_n^p e^{in\varphi}\eta^{p-1/2}$$

$$\begin{cases}\eta=2(\cos H-\cos\varphi)\\ \varphi=v'-v\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\eta=\cos H-\cos\varphi=\left(-\operatorname{sen}^2\frac{i'}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{i}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{i'}{2}\operatorname{sen}^2\frac{i}{2}\right)\cos(v'-v)$$
$$+\operatorname{sen}^2\frac{i'}{2}\operatorname{sen}^2\frac{i}{2}\cos(v'-v-2\theta'+2\theta)$$

~~$\left(1-\cos^2\frac{i'}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{i}{2}\right)$~~

$+$

$\gamma'=2\operatorname{sen}\frac{i'}{2}, \quad \gamma=2\operatorname{sen}\frac{i}{2}$

$\gamma_1'=\frac{1}{2}\gamma'e^{-i\theta'}, \quad \gamma_2'=\frac{1}{2}\gamma'e^{i\theta'}, \quad \gamma_1=\frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta}, \quad \gamma_2=\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta}$

$\sigma_2 = \gamma_1'\gamma_2(\qquad) - \gamma_1\gamma_2' - \gamma_1\gamma_2$

$\sigma_1 = \gamma_2'\gamma_1(\qquad) - \gamma_1'\gamma_2' - \gamma_1\gamma_2$

$\sigma_1' = -\gamma_1'\gamma_1(\qquad) + \gamma_1'^2 + \gamma_1^2$

$\sigma_2' = -\gamma_2'\gamma_2(\qquad) + \gamma_2'^2 + \gamma_2^2$

Capítulo III

Desenvolvimentos em série relativos ao movimento kepleriano elítico

§16) Questões preliminares - Antes de entrarmos pròpriamente nas séries relativas ao movimento kepleriano elítico, vamos tratar algumas questões preliminares. As letras a, ε, u, [illegible], w, g, r terão o mesmo significado que no capítulo precedente. Ao lado das coordenadas polares (r, w) no plano da órbita, introduziremos também as coordenadas rectangulares (X, Y). Trata-se de quantidades todas reais, precisando-se que a, Λ, ε são quantidades positivas.

O movimento kepleriano elítico é um movimento periódico no plano da órbita. Quando g, aumentam de 2π, o mesmo sucede às anomalias u e w. Consideremos uma função real das coordenadas do ponto móvel no seu plano. Se supomos que essa função se prolonga periòdicamente fora do domínio correspondente a um ciclo das coordenadas e se a função não contém singularidades no domínio, salvo aquelas singularidades que os desenvolvimentos de Fourier permitem, o mesmo se dizendo para as derivadas, em suma, se a função em causa é representável por uma série de Fourier duma das 3 variáveis g, u, w, percebe-se que tais séries tenham aqui um interesse particular. Porémos

$$x = e^{ig}, \quad y = e^{iu}, \quad z = e^{iw},$$

de sorte que os desenvolvimentos de Fourier são indiferentemente, desenvolvimentos em relação a uma das variáveis x, y, z, passando-se duns a outros quando se têem relações apropriadas ligando entre si as variáveis x, y, z, duas a duas.

No caso duma série de Fourier da variável g

$$f = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu g}, \quad \text{temos}$$

uma expressão análoga à da série de Laurent escrevendo

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n.$$

A função f, nos raciocínios de que aqui carecemos, é, geralmente, da forma $f = f_1 + if_2$, sendo f_1 e f_2 funções reais. É claro, como vimos, que o desenvolvimento em série de Fourier tem lugar para tais funções.

De facto, supondo

$$f=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{-\infty}^{+\infty}(\alpha_n+i\beta_n)e^{ing}=\sum_{-\infty}^{+\infty}(\alpha_n+i\beta_n)(\cos ng+i\,\mathrm{sen}\,ng),$$

onde se pôs $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, vê-se que é

$$f_1=\sum_{-\infty}^{+\infty}(\alpha_n\cos ng-\beta_n\,\mathrm{sen}\,ng),$$

$$f_2=\sum_{-\infty}^{+\infty}(\beta_n\cos ng+\alpha_n\,\mathrm{sen}\,ng).$$

Nós escrevemos êste resultado sob forma _simétrica_, pondo

$$f_1=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\alpha_n+\alpha_{-n}}{2}\cos ng-\frac{\beta_n-\beta_{-n}}{2}\,\mathrm{sen}\,ng\right),$$

$$f_2=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\beta_n+\beta_{-n}}{2}\cos ng+\frac{\alpha_n-\alpha_{-n}}{2}\,\mathrm{sen}\,ng\right).$$

De facto, o coeficiente de _sen ng_ na primeira série, por exemplo, é

$$\mathrm{sen}\,ng\left\{-\frac{\beta_n-\beta_{-n}}{2}+\frac{\beta_{-n}-\beta_n}{2}\right\}=-\beta_n\,\mathrm{sen}\,ng+\beta_{-n}\,\mathrm{sen}\,ng=$$
$$=-(\beta_n\,\mathrm{sen}\,ng-\beta_{-n}\,\mathrm{sen}(-ng)),$$

que é exactamente o que se encontra na primeira expressão dada para f_1. O mesmo se verifica quanto aos restantes coeficientes, tanto em f_1, como em f_2.

Na forma simétrica os coeficientes de $\cos ng$ e de $\cos(-ng)$ são iguais, enquanto que os coeficientes de $\mathrm{sen}\,ng$ e de $\mathrm{sen}(-ng)$ são iguais e de sinais contrários.

Podíamos escrever ainda

$$f_1=\alpha_0+\sum_1^{\infty}(\alpha_n+\alpha_{-n})\cos ng-\sum_1^{\infty}(\beta_n-\beta_{-n})\,\mathrm{sen}\,ng,$$

$$f_2=\beta_0+\sum_1^{\infty}(\beta_n+\beta_{-n})\cos ng+\sum_1^{\infty}(\alpha_n-\alpha_{-n})\,\mathrm{sen}\,ng,$$

para reencontrar o aspecto por que tratámos os desenvolvimentos na teoria das séries de Fourier.

Quando a função f_2 não existe, tem-se $\beta_n+\beta_{-n}=0$, $\alpha_n-\alpha_{-n}=0$, $\beta_0=0$. Então, como $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, $a_{-n}=\alpha_{-n}+i\beta_{-n}=\alpha_n-i\beta_n$, vê-se que a_n e a_{-n} são imaginários conjugados. Quando é a função f_1 que não existe, tem-se $\alpha_0=0$, $\alpha_n+\alpha_{-n}=0$, $\beta_n-\beta_{-n}=0$, ou $-\alpha_n=\alpha_{-n}$, $\beta_{-n}=\beta_n$.

Nos casos mais frequentes, a função f_1 é par e a função f_2 é impar relativamente a y. Então $\beta_n = +\beta_{-n}$, $\beta_n = -\beta_{-n}$, ou seja $\beta_n = -\beta_{-n} = 0$, e $a_n = \alpha_n$.

§17) Relações entre as variáveis x, y, z – Usaremos aqui as notações auxiliares seguintes:

$$\varepsilon = \text{sen}\,\varphi, \quad \eta = \cos\varphi, \quad \theta = \text{tg}\,\frac{\varphi}{2}, \quad \omega = \cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad \omega' = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\varphi},$$

sendo o ângulo φ positivo e agudo. Observemos simplesmente que é

$$\frac{\varepsilon}{2\theta} = \frac{2\,\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\,\text{sen}\frac{\varphi}{2}} = \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = (1+\theta^2)^{-1} = 1-\theta^2+\dots = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\eta = \omega =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}^2\varphi} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)^{1/2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\dots\right),$$

$$\omega' = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\varphi} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\dots\right)}{1-\varepsilon^2} = \left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2+\dots\right)\left(1+\varepsilon^2+\dots\right).$$

Assim vê-se que $\frac{\varepsilon}{2\theta}$, η, ω, ω' são funções de ε que podem desenvolver-se em série inteira ordenada segundo as potências desta quantidade, ou em série inteira ordenada segundo as potências de θ. Quando $\varphi = 0$ as diferentes séries que dão $\frac{\varepsilon}{2\theta}$, η, ω, ω' tornam-se iguais à unidade.

Comecemos agora por exprimir y em z. Tem-se, como se sabe,

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{w}{2} = \sqrt{1-\varepsilon}\cos\frac{u}{2}, \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\,\text{sen}\,\frac{w}{2} = \sqrt{1+\varepsilon}\,\text{sen}\,\frac{u}{2}, \end{cases}$$

de sorte que é

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}}\left(\frac{e^{\frac{iw}{2}}}{2}+\frac{e^{-\frac{iw}{2}}}{2}\right) = \sqrt{1-\varepsilon}\left(\frac{e^{\frac{iu}{2}}+e^{-\frac{iu}{2}}}{2}\right), \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\left(\frac{e^{\frac{iw}{2}}}{2i}-\frac{e^{-\frac{iw}{2}}}{2i}\right) = \sqrt{1+\varepsilon}\left(\frac{e^{\frac{iu}{2}}}{2i}-\frac{e^{-\frac{iu}{2}}}{2i}\right), \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}}\left(e^{\frac{iw}{2}}+e^{-\frac{iw}{2}}\right) = \sqrt{1-\varepsilon}\left(e^{\frac{iu}{2}}+e^{-\frac{iu}{2}}\right), \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\left(e^{\frac{iw}{2}}-e^{-\frac{iw}{2}}\right) = \sqrt{1+\varepsilon}\left(e^{\frac{iu}{2}}-e^{-\frac{iu}{2}}\right), \end{cases}$$

donde se tira

$$\begin{cases} 2\sqrt{\frac{r}{a}}\,e^{\frac{iw}{2}} = \left(\sqrt{1-\text{sen}\,\varphi}+\sqrt{1+\text{sen}\,\varphi}\right)e^{\frac{iu}{2}} + \left(\sqrt{1-\text{sen}\,\varphi}-\sqrt{1+\text{sen}\,\varphi}\right)e^{-\frac{iu}{2}}, \\ 2\sqrt{\frac{r}{a}}\,e^{-\frac{iw}{2}} = \left(\sqrt{1-\text{sen}\,\varphi}-\sqrt{1+\text{sen}\,\varphi}\right)e^{\frac{iu}{2}} + \left(\sqrt{1-\text{sen}\,\varphi}+\sqrt{1+\text{sen}\,\varphi}\right)e^{-\frac{iu}{2}}, \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}}\,e^{\frac{iw}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\,e^{\frac{iu}{2}} - \text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\,e^{-\frac{iu}{2}}, \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\,e^{-\frac{iw}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\,e^{-\frac{iu}{2}} - \text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\,e^{\frac{iu}{2}}, \end{cases} \qquad (1)$$

donde, por divisão

$$z = \frac{e^{\frac{iu}{2}} - \text{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,e^{-\frac{iu}{2}}}{e^{-\frac{iu}{2}} - \text{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,e^{\frac{iu}{2}}} = \frac{y-\theta}{1-\theta y} = y\,\frac{1-\theta y^{-1}}{1-\theta y}.$$

Por multiplicação, membro a membro, das duas relações (1) vem

$$\frac{r}{a} = \omega\left(e^{\frac{iu}{2}} - \vartheta e^{-\frac{iu}{2}}\right)\left(e^{-\frac{iu}{2}} - \vartheta e^{\frac{iu}{2}}\right) = \omega(1-\vartheta y)(1-\vartheta y^{-1}) =$$

$$= \omega - \omega\vartheta y^{-1} - \omega\vartheta y + \omega\vartheta^2 = \omega(1+\vartheta^2) - \omega\vartheta(y+y^{-1}) = \cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right) - \cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(y+y^{-1}) =$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1}).$$

Resolvendo (1) em ordem a $\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{\frac{iu}{2}}$ e $\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{-\frac{iu}{2}}$, chega-se analogamente a

$$\begin{cases} \eta\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{\frac{iu}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\, e^{\frac{iw}{2}} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\, e^{-\frac{iw}{2}} \\ \eta\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{-\frac{iu}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\, e^{-\frac{iw}{2}} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\, e^{\frac{iw}{2}}, \end{cases}$$

donde se conclui por divisão

$$y = z\,\frac{1+\vartheta z^{-1}}{1+\vartheta z},$$

e, por multiplicação,

$$\frac{a}{r} = \omega'(1+\vartheta z)(1+\vartheta z^{-1}) = \frac{1}{\eta^2}\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(z+z^{-1})\right].$$

É, pois,

$$\frac{1+\vartheta z^{-1}}{1+\vartheta z} = \frac{1-\vartheta y}{1-\vartheta y^{-1}},$$ donde se tira

$$(1+\vartheta z)(1-\vartheta y) = (1+\vartheta z^{-1})(1-\vartheta y^{-1}) = (1+\vartheta z)\left(1-\vartheta z\,\frac{1+\vartheta z^{-1}}{1+\vartheta z}\right) =$$

$$= (1+\vartheta z) - \vartheta z(1+\vartheta z^{-1}) = 1-\vartheta^2 = 1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\eta}{\omega}.$$

Mas sendo

$$\vartheta\frac{dz}{dy}(1-\vartheta y) - \vartheta(1+\vartheta z) = 0,$$

vem

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1+\vartheta z}{1-\vartheta y} = \frac{\eta}{\omega}\cdot\frac{1}{(1-\vartheta y)^2} = \frac{\eta}{\omega}\cdot\frac{1}{1-\vartheta y}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{1}{1-\vartheta y^{-1}} =$$

$$= \frac{\eta}{\omega}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{\omega}{\frac{r}{a}} = \eta\,\frac{z}{y}\,\frac{a}{r};$$

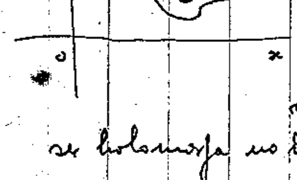
ou seja

$$\frac{y}{z}\,\frac{dz}{dy} = \eta\,\frac{a}{r}.$$

A quantidade z, considerada como função de y, tem uma única singularidade $y=\frac{1}{\vartheta}$ tratando-se de polo simples. A função z^{-1}, de y, tem uma única singularidade → o polo simples $y=\vartheta$. A quantidade y, considerada como função de z, tem uma única singularidade, $z=-\frac{1}{\vartheta}$, e a função y^{-1} tem a única singularidade $z=-\vartheta$.

As variáveis y e z, expressas uma na outra, estão agora em condição de se substituir uma à outra num desenvolvimento qualquer em série em que entre uma delas. Mas pode seguir-se também um método indirecto como veremos. Antes de continuarmos na nossa ordem de ideias, recordemos alguns elementos da teoria das funções de variável imaginária.

§ 18) Digressão sôbre as funções de variável imaginária – Comecemos por uma fórmula fundamental. Seja $f(z)$ uma função holomorfa no domínio $\mathcal{D}$ e contínua sôbre o contôrno Γ do domínio. Não é necessário, de resto, que o domínio seja simplesmente conexo. Seja $\underline{x}$ um ponto do interior de $\mathcal{D}$, e consideremos a função $\frac{f(z)}{z-x}$. Esta função é holomorfa em $\mathcal{D}$, salvo no ponto $\underline{x}$. De $\underline{x}$ como centro descrevamos um círculo γ, de raio ρ, situado, igualmente, em $\mathcal{D}$. A função $\frac{f(z)}{z-x}$ passará a ser holomorfa no domínio limitado por Γ e γ. Imaginemos, como na figura junta, por exemplo, que Γ é o conjunto das curvas $\underline{C}$ e $\underline{C}'$. O teorema de Cauchy, que nos diz que o integral de $\frac{f(z)}{z-x}$ ao longo de Γ e γ é igual a zero, dá aqui



$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{(C')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int_{(\gamma)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz\,,$$

supondo os integrais tomados em sentido tal que as áreas interiores às curvas lhes ficam à esquerda. Se o raio ρ, de γ, é suficientemente pequeno, a continuidade de $f(z)$ no ponto $\underline{x}$ dá $f(z) = f(x) + \delta$, sendo $|\delta|$ muito pequeno. Mas é

$$(\alpha) \qquad \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x)\int_{(\gamma)} \frac{dz}{z-x} + \int_{(\gamma)} \frac{\delta\,dz}{z-x}\,,$$ onde o integral do 1.º membro é estendido a todo o contôrno (Γ).

O cálculo do primeiro integral do segundo membro é fácil. Pondo

$$z = x + \rho e^{i\vartheta}, \text{ vem}$$

$$\int_{(\gamma)} \frac{dz}{z-x} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\vartheta} d\vartheta}{\rho e^{i\vartheta}} = 2\pi i.$$

Quanto ao integral $\int_{(\gamma)} \frac{\delta\,dz}{z-x}$, o seu valor é independente do raio ρ do círculo (γ), como provém da igualdade (α). Então, se supomos $|\delta| < \eta$, sendo η um número fixo, o módulo do nosso integral é inferior a $\frac{\eta}{\rho}\,2\pi\rho = 2\pi\eta$. Como η é tão pequeno quanto se queira, o integral será nulo. Assim, vem

$$\int_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 2\pi i f(x).$$

Eis esta a fórmula fundamental de Cauchy. Dá o valor de $f(z)$ num ponto do interior do contôrno, conhecidos que sejam os valores de $f(z)$ sôbre o contôrno.

Como aplicação, vamos procurar exprimir agora a derivada de $f(z)$, no ponto x, também sob a forma dum integral. Tem-se

$$2\pi i\, f(x+\Delta x) = \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-x-\Delta x},$$

podendo supôr-se $\Delta x + x$ no interior do círculo γ atraz referido. Assim vem

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x-\Delta x)}. \qquad (\beta)$$

Quando Δx tende para zero, ~~para~~ que tenderá o integral do 2º membro? Tem-se

$$\int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x-\Delta x)} = \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2} + \int_{(\Gamma)} \frac{\Delta x\, f(z)\,dz}{(z-x)^2(z-x-\Delta x)}. \qquad (\beta')$$

Seja agora M um limite superior de $|f(z)|$ quando z percorre (Γ), seja L o comprimento de (Γ) e designemos com δ um limite inferior da distância dum ponto (Γ) a um ponto de (γ). Então o último integral da equação anterior tem um módulo inferior a

$$L . \frac{|\Delta x| . M}{\delta^3},$$

de sorte que tende para zero com Δx. Assim de (β) e (β') tira-se

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2},$$

quando se tomam os limites dos dois membros de (β), para $\Delta x = 0$.

É claro que o processo pode continuar-se, tendo lugar a igualdade

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Este facto pode exprimir-se dizendo que, para o integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

tem lugar o processo habitual de diferenciação sob o sinal de integral, processo que é indefinidamente aplicável. Vê-se, pois, que uma função holomorfa num domínio Ω é indefinidamente derivável nesse domínio. As funções derivadas são, igualmente, funções holomorfas.

Feito isto, o segundo ponto a tratar da nossa digressão consiste em demonstrar o <u>Desenvolvimento de Taylor</u>.

Seja $f(z)$ uma função holomorfa no interior dum círculo C, de centro o

Então o valor da função num ponto x qualquer do interior do círculo é igual à soma da série

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a) + \dots$$

Para se efectuar a demonstração pode supôr-se que a função $f(z)$ é holomorfa sôbre o círculo C, porque, se o não fôr, toma-se C interior ao círculo da proposição e tal que contenha x no seu interior.

Em virtude da fórmula fundamental, tem-se

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz.$$

Escrevamos a igualdade

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-a)-(x-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}} =$$

$$= \frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{x-a}{z-a} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n} + \frac{\frac{(x-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}}}{1-\frac{x-a}{z-a}}\right] =$$

$$= \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^3} + \dots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(z-x)(z-a)^{n+1}}.$$

Então tem-se, por substituição na fórmula fundamental,

$$f(x) = J_0 + J_1(x-a) + J_2(x-a)^2 + \dots + J_n(x-a)^n + R_n,$$

com

$$J_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \quad J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}, \dots,$$

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \qquad R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

Quando n aumenta indefinidamente, o resto R_n tende para zero, como vamos vêr. Seja M um limite superior de $|f(z)|$ ao longo do círculo C, R o raio dêste círculo e $r = |x-a|$. Então

$$|R_n| < \frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{M}{R-r}\cdot 2\pi R = \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1},$$

e, visto que é $r < R$, fica demonstrada a nossa afirmação.

Tem-se, pois, o desenvolvimento em série

$$f(x) = J_0 + J_1(x-a) + J_2(x-a)^2 + \dots + J_n(x-a)^n + \dots,$$

sendo

$$J_0 = f(a), \quad J_1 = f'(a), \quad J_2 = \frac{1}{2!} f''(a), \dots, \quad J_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \text{ etc},$$

como se pretendia provar.

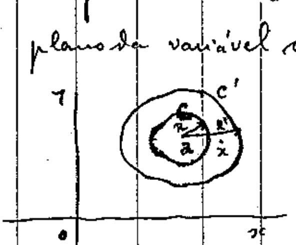
A demonstração exige que o círculo C seja tal que, no seu interior, a função $f(z)$ seja holomorfa. Assim a série de Taylor valerá no interior dum círculo com centro no ponto $\underline{a}$ e passando pelo ponto singular de $f(z)$ mais vizinho de $\underline{a}$. Esse círculo definirá, assim, o círculo de convergência da série de Taylor.

Uma aplicação imediata do desenvolvimento de Taylor é o seguinte: seja $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ um cociente de duas funções holomorfas num domínio circular à volta da origem. Se $\varphi(z)$ não se anula num domínio circular à volta da origem que esteja contido no anterior, o cociente em referência é uma função holomorfa no segundo domínio circular considerado, podendo pois desenvolver-se em série ordenada segundo as potências de $\underline{z}$ nesse domínio. Assim fica tratado o problema do cociente de duas séries inteiras.

Por intermédio da noção de função de função, podemos tratar igualmente o problema da substituição duma série noutra série.

O terceiro ponto a tratar é o que respeita ao desenvolvimento de Laurent.

Seja $f(z)$ uma função holomorfa numa coroa circular compreendida entre dois círculos concêntricos C e C', com centro no ponto $\underline{a}$ do plano da variável complexa z. Vamos mostrar que o valor $f(x)$ da função num ponto $\underline{x}$ da coroa circular é igual à soma de duas séries convergentes, uma ordenada segundo as potências positivas inteiras de $x-a$, a outra segundo as potências inteiras negativas da mesma quantidade.

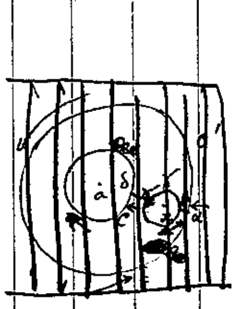


A função $f(z)$ pode supôr-se holomorfa sôbre os círculos C e C', pois, se o não fôsse, visto que $\underline{x}$ não está sôbre nenhum dos círculos, poderíamos substituir C e C' por círculos C_1 e C_1' inteiramente contidos na coroa circular anterior. Designemos com $\underline{R}$ e $\underline{R'}$ os raios de $\underline{C}$ e de $\underline{C'}$ e com $\underline{r}$ o módulo de $x-a$. Na hipótese da figura, é $R > r >$

Do ponto $\underline{x}$ como centro, descrevamos um círculo γ de raio suficientemente pequeno para estar todo na coroa circular. Então é, como mostra a figura abaixo,

$$\int_{(C')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int_{(\gamma)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 0.$$

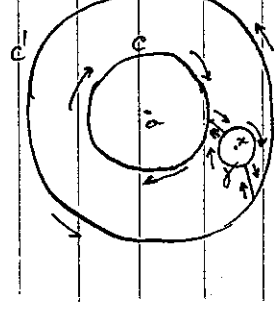
Mas, por outro lado, tem-se



$$\int_{(\gamma)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = -2\pi i f(x),$$

de sorte que vem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C')} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$



Tratemos o primeiro integral. Tem-se

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-a)-(x-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}} =$$

$$= \frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{x-a}{z-a} + \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^2 + \dots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(z-a)^n(z-x))}\right],$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathscr{C}')}\frac{f(z)\,dz}{z-x} = J_0 + J_1(x-a) + J_2(x-a)^2 + \dots + J_n(x-a)^n + R_n,$$

com
$$J_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathscr{C}')}\frac{f(z)\,dz}{z-a}, \quad J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathscr{C}')}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}, \quad \dots, \quad J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathscr{C}')}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathscr{C}')}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

Quando $\underline{n}$ aumenta indefinidamente, o resto $\underline{R_n}$ tende para zero.

Quanto ao integral estendido a $\underline{C}$, suponhamos invertido o sentido de integração e ponhamos
$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-a}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z-a}{x-a}\right)} = \frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(x-z)(x-a)^n}.$$

Vê-se que se tem de estudar o integral Δ_n
$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n\frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$
quando $\underline{n}$ aumenta indefinidamente. Ora é fácil de ver que Δ_n tende para zero. Se, com efeito, $M \geq |f(z)|$ ao longo de C, o módulo de Δ_n é tal que
$$|\Delta_n| < \frac{1}{2\pi}\, M\left(\frac{R}{r}\right)^n\int_{(C)}\frac{dz}{r-R} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{M}{r-R}\left(\frac{R}{r}\right)^n 2\pi R =$$
$$= \frac{MR}{r-R}\left(\frac{R}{r}\right)^n,$$
sendo $\frac{R}{r} < 1$. Temos, pois, no sentido tal que a área $\underline{\text{interior}}$ a C fica à esquerda,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{x-z} = \frac{K_1}{x-a} + \frac{K_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{K_n}{(x-a)^n} + \dots,$$

com
$$K_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\,(z-a)^{n-1}\,dz.$$

Logo é:
$$f(x) = J_0 + J_1(x-a) + \dots + J_n(x-a)^n + \dots$$
$$+ \frac{K_1}{x-a} + \dots + \frac{K_n}{(x-a)^n} + \dots,$$

como se queria provar.

Observemos que, tanto nas séries de $\underline{\text{Taylor}}$ como na de $\underline{\text{Laurent}}$ os integra
podem ser estendidos, não aos círculos $\underline{C}$ e $\underline{C}'$ que nelas estão designados, mas, no cas

da série de Taylor, a um círculo qualquer interior a cada círculo considerado, e, no caso da série de Laurent, a um círculo qualquer da coroa circular referida. É o que resulta do facto de $f(z)$ ser holomorfa em todo o círculo C e na coroa circular entre C e C', respectivamente, num caso e noutro. A série de Laurent pode escrever-se

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n (x-a)^n, \quad \text{com} \quad J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},$$

como imediatamente se verifica.

Lembremos agora alguns elementos sôbre pontos singulares duma função $f(z)$. Dada uma função $f(z)$ holomorfa num círculo de centro a, tem lugar o desenvolvimento

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+\dots+A_m(z-a)^m+\dots$$

como vimos. A função diz-se regular no ponto a, que é chamado um ponto ordinário para a função. Um ponto ordinário aparece, pois, como um ponto no domínio do qual (domínio suficientemente pequeno) a função pode ser representada por um desenvolvimento tayloriano convergente. Se o primeiro coeficiente A_0 é nulo, o ponto a diz-se um zero de $f(z)$. Se o desenvolvimento começa pelo termo de grau m, isto é, se se tem

$$f(z)=A_m(z-a)^m+A_{m+1}(z-a)^{m+1}+\dots, \qquad m>0$$

com $A_m \neq 0$, o ponto a diz-se um zero de ordem m. Como se vê, todas as derivadas de $f(z)$ são nulas no ponto a até à de ordem m, que é diferente de zero.

Podemos escrever

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

em que $\varphi(z)$ é uma série inteira de $z-a$, que não se anula para $z=a$. Como a função $\varphi(z)$ é contínua, podemos escolher um domínio à volta do ponto a onde a função $\varphi(z)$ se não anula, donde a seguinte conclusão: os zeros duma função holomorfa são pontos isolados. Todo o ponto não ordinário duma função uniforme $f(z)$ diz-se um ponto singular. Um ponto singular a de $f(z)$ diz-se um polo, se êsse ponto fôr um ponto ordinário para a função $\frac{1}{f(z)}$. Quando se faz o desenvolvimento da função holomorfa $\frac{1}{f(z)}$, não pode haver termo constante diferente de zero, porque, se o houvesse, era

$$\frac{1}{f(z)}=A_0+A_1(z-a)+\dots,$$

e

$$f(z)=\frac{1}{A_0+A_1(z-a)+\dots}$$

seria uma função que tinha em a um ponto ordinário. Será, pois,

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\varphi(z),$$

sendo $\varphi(z)$ uma função holomorfa que não se anule para $z=a$

Desta maneira tem-se

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots}{(z-a)^m},$$

o que escrevemos ainda

$$f(z)=\frac{B_m}{(z-a)^m}+\frac{B_{m-1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{B_1}{z-a}+P(z-a),$$

onde $P(z-a)$ é uma função regular no domínio do ponto $\underline{a}$ e onde os coeficientes $\underline{B_i}$ são constantes. O coeficiente B_m é, por hipótese, diferente de zero. O número $\underline{m}$ diz-se ordem do polo. Tem-se a seguinte conclusão: um polo de ordem $\underline{m}$ de $f(z)$ é um zero de ordem $\underline{m}$ de $\frac{1}{f(z)}$ e, inversamente.

Escrevendo a última igualdade sob a forma

$$f(z)= \Delta + P(z-a),$$

diz-se que $\underline{\Delta}$ é a parte principal de $f(z)$ no domínio do polo.

Se $\underline{a}$ é um polo de $f(z)$, quando $|z-a|$ tende para zero, $|f(z)|$ tende para infinito.

Com efeito, sendo $\alpha_0\neq 0$ (ou $B_m\neq 0$), consideremos um domínio suficientemente pequeno à volta de $\underline{a}$ onde a série $\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\ldots$ não se anule. Então, nesse domínio, o módulo da série conserva-se superior a um número positivo $\underline{M}$, de sorte que, pondo $|z-a|=r$, tem-se

$$|f(z)| > \frac{M}{r^m},$$

de sorte que $|f(z)|$ aumenta indefinidamente quando r tende para zero.

Quando se observa que a série $\psi(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots$, num domínio suficientemente pequeno à volta de $\underline{a}$ é uma função holomorfa, vê-se que $f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$ é holomorfa nesse domínio, salvo no ponto $\underline{a}$. Por isso, os polos são pontos singulares isolados.

Continuando na nossa digressão sobre as funções de variável imaginária, a fim de não darmos a este § uma grande extensão, enumeraremos outros §§ relativos a essa digressão.

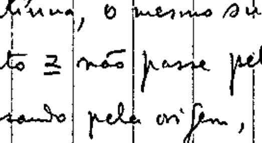
§ 19) Funções meromorfas – Toda a função uniforme num domínio D que, nesse domínio, não tem outros pontos singulares senão polos, diz-se uma função meromorfa em D. É claro que uma função meromorfa em todo o plano pode ter uma infinidade de polos, mas, numa região inteiramente situada a distância finita, o número de polos é necessariamente finito, assim como o número de zeros. É o que nos garante o teorema de Bolzano-Weierstrass, tendo em vista que, tanto os polos como os zeros duma função uniforme são pontos isolados.

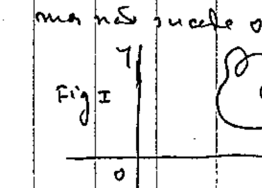
Na vizinhança dum ponto a, uma função meromorfa é da forma $f(z)=(z-a)^{\mu}\varphi(z)$, sendo $\varphi(z)$ uma função regular não nula para $z=a$. Quando $\mu>0$, o ponto a é um zero de ordem μ; se $\mu=0$, trata-se dum ponto ordinário, que não é zero de $f(z)$; se $\mu<0$, trata-se dum polo de ordem $-\mu$.

Antes de passarmos ao estudo doutros pontos singulares de funções uniformes, vamos recordar ~~alguns~~ exemplos importantes de funções não uniformes.

§ 20) Estudo de algumas funções irracionais - Quando o ponto z descreve uma curva contínua, as variáveis x e y da relação $z=x+iy$ ~~[illegible]~~ variam duma maneira contínua, o mesmo sucedendo a $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ e ao argumento $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, desde que o ponto z não passe pela origem das coordenadas. Se z descreve uma curva fechada não passando pela origem, nas condições anteriores, x, y, ρ retomam os seus valores iniciais, mas não sucede o mesmo ao argumento θ, na sua variação contínua. Quando a origem é do exterior da curva fechada (figura I), o argumento retoma, de facto, o seu valor inicial; mas, no caso da figura II, se partirmos do ponto A_0, no sentido indicado pela flecha, ao chegarmos de novo a A_0 o argumento tem diminuído de 4π. Duma maneira geral, podemos arranjar a fazer que, duma maneira contínua, o argumento aumente ou diminua de $2n\pi$, sendo n um número inteiro.

Fig I





Em vez de falarmos do argumento de z podemos falar do argumento de $z-a$. Então, é claro, será o ponto a que desempenha o mesmo papel que a origem no raciocínio anterior.

Estudemos, então, a equação

$$u^m=z,$$

onde m é um inteiro positivo. Pondo

$$z=\rho(\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega)\ ,\qquad u=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

a equação dada é equivalente às relações seguintes

$$r^m=\rho,\qquad m\varphi=\omega+2k\pi.$$

A primeira destas equações dá $r=\rho^{1/m}$; a segunda dá $\varphi=\frac{\omega+2k\pi}{m}$, de sorte que ra quantidade u procurada tem a forma

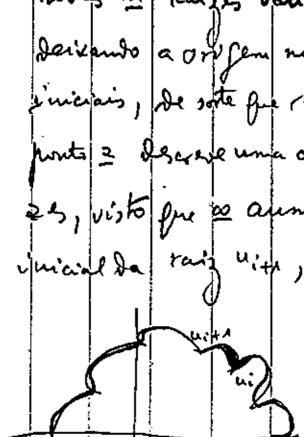
$$u = \rho^{1/m}\left(\cos\frac{\omega+2k\pi}{m} + i\,\text{sen}\,\frac{\omega+2k\pi}{m}\right).$$

Sabemos que bastará dar a k os valores $0, 1, 2, \ldots, m-1$, de sorte que a nossa equação tem m raízes distintas. Escreve-se

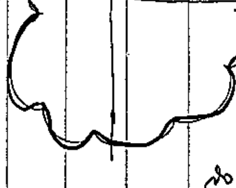
$$u = z^{1/m}$$

significando o 2º membro uma qualquer das m raízes.

Quando a variável z descreve uma curva contínua, cada uma das referidas m raízes variará duma maneira contínua. Se z descreve uma curva fechada deixando a origem no exterior, tanto o módulo como o argumento retomam os seus valores iniciais, de sorte que cada uma das raízes descreve igualmente uma curva fechada. Mas, se o ponto z descreve uma curva que dê uma volta à origem, o argumento de cada uma das raízes, visto que ω aumenta de 2π, aumenta de $\frac{2\pi}{m}$. O valor final da raiz u_i é o valor inicial da raiz u_{i+1}, sucedendo que o valor final da raiz u_{m-1} é o valor inicial da raiz u_0. O conjunto das curvas descritas pelas m raízes dá uma curva fechada à volta da origem. Na construção dessa curva não devemos esquecer que os valores iniciais (e finais) de todas as raízes estão à mesma distância da origem, e que os valores intermediários têm para todos a mesma variação (em $\rho^{1/m}$, m é fixo).



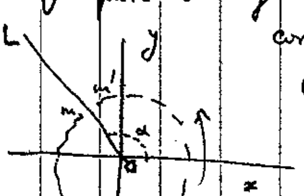
Logo as raízes $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ permutam-se circularmente quando a variável z descreve no sentido directo uma curva fechada encerrando a origem, mas não contendo ponto duplo. Se há ponto duplo, como na figura abaixo,



Quando a variável z descreve a curva fechada AB, recai-se no caso primeiramente estudado, em que as raízes descrevem curvas fechadas isoladas. Descrevendo-se, em seguida, CA, tem lugar o que se referiu para uma curva envolvendo a origem.

Se a variável z der duas voltas à origem cada raiz u_i passa, no final, a tomar o valor inicial u_{i+2}, etc. Podemos imaginar curvas que nos levem, por continuidade, duma raiz qualquer a outra raiz qualquer.

É por isso que ~~as~~ m raízes se consideram como m ramos distintos duma mesma função. O ponto $z=0$ diz-se ponto crítico ou ponto de ramificação. Para que os m valores de u possam considerar-se funções distintas torna-se necessário interromper a continuidade por meio duma semi-recta indefinida que parta da origem (por exemplo) OL, de tal sorte que uma curva fechada não possa cortar essa semi-recta. Se α fôr o ângulo dessa semi-recta com Ox, a dois pontos m e m' situados dum e doutro lado do corte no plano produzido por OL correspondem os argumentos α e α − 2π, e o valor de u_i em m' é igual ao valor de u_i em m multiplicado por $\left(\cos\frac{2\pi}{m} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{m}\right)$. Entretanto, porém, o argumento não pode aumentar, continuando a variável z a percorrer a curva fechada; regressará ao valor inicial variando em sentido contrário àquele em que variou primeiramente.



Cada uma das raizes u_i torna-se, desta maneira, uma função monogénea. É fácil encontrar o valor da derivada $u_i' = \frac{du}{dz}$. Seja u_0 uma das raizes para um valor de $z = z_0$. Para um valor de z vizinho de z_0 o valor correspondente de u será vizinho de u_0. Temos de procurar $\frac{u - u_0}{z - z_0}$ no limite. A razão inversa $\frac{z - z_0}{u - u_0} = \frac{u^m - u_0^m}{u - u_0}$ tende para $m u_0^{m-1}$, de sorte que a derivada procurada é

$$u' = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{u_0^{m-1}} = \frac{1}{m} \frac{u_0}{u_0^m} = \frac{1}{m} \frac{u_0}{z_0} = \frac{1}{m} z_0^{\frac{1}{m}-1}.$$

A derivada de $u = z^{1/m}$ é, pois,

$$u' = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} \frac{u}{z},$$

convindo tomar a última expressão, para evitar toda a ambiguidade.

Do mesmo modo que se fez anteriormente, poderíamos estudar aqui

$$u^m = A(z-a),$$

em que A é uma constante. Quando z varia, esta equação determina m raizes que se permutam circularmente em torno do ponto crítico $z = a$.

É o que imediatamente se conclui pondo

$$u = r(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi), \quad A = R(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha), \quad z - a = \rho(\cos\omega + i\,\text{sen}\,\omega).$$

Então

$$r^m(\cos m\varphi + i\,\text{sen}\,m\varphi) = R\rho\left[\cos(\theta+\alpha) + i\,\text{sen}(\theta+\alpha)\right],$$

$$r = (R\rho)^{\frac{1}{m}}, \quad m\varphi = \theta + \alpha + 2k\pi,$$

ou seja

$$r = (R\rho)^{1/m}, \quad \varphi = \frac{\theta + \alpha + 2k\pi}{m},$$

de sorte que é

$$u = (R\rho)^{1/m}\left(\cos\frac{\theta + \alpha + 2k\pi}{m} + i\,\text{sen}\frac{\theta + \alpha + 2k\pi}{m}\right).$$

Cada um dos ramos da função u pode tornar-se uma função monogénea fazendo um corte no plano a partir do ponto a.

§ 21) Estudo da função log z: Seja a equação

$$e^u = z.$$

Ponhamos

$$z = \rho(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega), \qquad u = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

Tem-se

$$e^{r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)} = \rho(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega),$$

ou seja

$$e^{r\cos\varphi}\left(\cos(r\,\mathrm{sen}\,\varphi) + i\,\mathrm{sen}(r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\right) = \rho(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega),$$

donde se tira

$$e^{r\cos\varphi} = \rho, \qquad r\,\mathrm{sen}\,\varphi = \omega + 2k\pi,$$

ou ainda

$$r\cos\varphi = \log\rho, \qquad r\,\mathrm{sen}\,\varphi = \omega + 2k\pi.$$

Dados ρ e ω tem-se

$$r^2 = (\log\rho)^2 + (\omega + 2k\pi)^2 \text{ etc.}$$

Vê-se que é, chamando $\log(z)$ um dos valores de u,

$$u = \log(z) = \log\rho + i(\omega + 2k\pi).$$

Há uma infinidade de valores de u, correspondentes aos valores possíveis de k. Os logaritmos formam uma progressão aritmética de razão $2\pi i$.

Se fôr

$$\mathrm{Log}(z) = \log\rho + i(\omega + 2k\pi)$$
$$\mathrm{Log}(z') = \log\rho' + i(\omega' + 2k'\pi),$$

vê-se que

$$\mathrm{Log}(zz') = \log\rho\rho' + i(\omega + \omega' + 2k''\pi) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z').$$

Suponhamos agora que a variável z descreve no seu plano uma curva contínua qualquer não passando pela origem.

Ao longo dessa curva ρ e ω variam duma maneira contínua, o mesmo sucedendo a cada uma das determinações do logaritmo. Se a curva não envolve a origem cada uma das determinações do logaritmo descreverá uma curva fechada; mas, se a origem é envolvida, cada determinação do logaritmo terá como valor final o valor inicial da determinação seguinte. As diferentes determinações não podem considerar-se como funções distintas, pois pode passar-se, por continuidade duma às outras. O ponto $z = 0$ é, pois, um ponto crítico para o logaritmo.

Num domínio limitado por uma única curva fechada não contendo a origem, cada determinação de $\log(z)$ é uma função contínua uniforme. É também uma função monogénea. Para encontrar a derivada, consideremos dois pontos z e z_1 vizinhos, na região considerada. Quando z_1 tende para z, $Log(z_1)$ tende para $Log(z)$, pois consideramos uma determinação de $Log(z)$. Como $Log(z)=u$, $Log(z_1)=u_1$, tem-se

$$\frac{Log(z_1)-Log(z)}{z_1-z} = \frac{u_1-u}{e^{u_1}-e^{u}}.$$

No limite tem-se

$$u' = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z}. \qquad \text{Logo} \qquad \frac{d\,Log(z)}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Do mesmo modo se estuda $Log(z-a)$.

Os factos recordados bastarão para nos habilitar ao estudo dos diferentes casos que poderão apresentar-se-nos.

§22) Pontos singulares essenciais — Um ponto singular duma função uniforme que não é um polo diz-se um ponto singular essencial. Um ponto singular é isolado se é possível descrever um círculo $\underline{C}$ à volta dêsse ponto tal que no interior dêsse círculo não haja outro ponto singular para a função.

Consideremos êsses pontos. O desenvolvimento de Laurent fornece o valor e a forma de $f(z)$ na vizinhança dum ponto singular isolado. Tem-se, na vizinhança de $\underline{a}$,

$$f(z) = P(z-a) + \frac{A_{-1}}{z-a} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \dots,$$

onde $P(z-a)$ é a parte regular e o restante é a denominada parte principal de $f(z)$ no domínio do ponto $\underline{a}$. Esta parte principal não pode reduzir-se a um polinómio, pois, senão, o ponto $\underline{a}$ seria um polo, contra a hipótese.

Sabemos que é

$$A_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C')} f(z)(z-a)^{m-1}\,dz,$$

onde $\underline{C}'$ é um círculo de raio $\underline{r}$, à volta do ponto $\underline{a}$, círculo aliás qualquer, contanto que seja interior a $\underline{C}$. Tem-se

$$|A_{-m}| < \mathfrak{M}(r)\,\frac{1}{2\pi}\,r^{m-1}\,2\pi r = \mathfrak{M}(r)\,r^{m},$$

onde $\mathfrak{M}(r)$ designa o máximo de $|f(z)|$ sôbre o círculo C'. A série $\sum \frac{A_{-m}}{(z-a)^m}$ tem o têrmo geral de módulo inferior a $\mathfrak{M}(r)\left(\frac{r}{|z-a|}\right)^m$, pelo que será convergente em todo o plano, salvo no ponto $z=a$, pois $\underline{r}$ é tão pequeno quanto se queira. Assim, pondo $\frac{1}{z-a} = x$, a parte principal em questão $G(x)$ é uma função inteira da variável x, isto é, uma função holomorfa em todo o domínio da variável x. Sob a forma inicial escreve-se

$$f(z) = P(z-a) + G\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

sendo $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ uma função inteira de $\frac{1}{z-a}$.

É importante, agora, o resultado seguinte: "se, do ponto a como centro, se descreve um círculo de raio ρ (arbitrário, mas suficientemente pequeno), há no interior dêsse círculo pontos para os quais $f(z)$ difere tão pouco quanto se queira de todo o número dado".

Comecemos por demonstrar que, dados os números positivos ρ e M, existem valores de z tais que $|z-a| < \rho$, $|f(z)| > M$. Se, com efeito, fôsse $|f(z)| \leq M$ quando $|z-a| < \rho$, seria $\mathfrak{M}(r) \leq M$ quando $r < \rho$, e a desigualdade

$$|A_{-m}| < \mathfrak{M}(r)\, r^m \leq M r^m$$

dava $A_{-m} = 0$. Seja então a equação $f(z) = A$. Se esta equação admite raízes no interior de C, por mais pequeno que seja o raio ρ, o teorema está estabelecido para o número A. Se a equação $f(z) = A$ não admite uma infinidade de raízes na vizinhança do ponto a podemos tomar ρ suficientemente pequeno para que no interior do círculo de raio ρ de centro a a equação $f(z)$ não tenha nenhuma raiz. A função $\frac{1}{f(z)-A} = \varphi(z)$ é holomorfa nesse círculo, salvo no ponto $z = a$. Êste ponto a é necessàriamente um ponto singular essencial de $\varphi(z)$, pois se o não fôsse, seria um polo ou um ponto ordinário para $f(z)$. Mas então há valores de z para os quais $|\varphi(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$ ou $|f(z) - A| < \varepsilon$, por mais pequeno que seja ε, dentro do círculo de raio ρ.

Esta propriedade dos pontos singulares essenciais distingue-os dos polos. Na vizinhança dum polo o módulo da função $f(z)$ aumenta indefinidamente quando nos aproximamos dêsse polo, enquanto que $f(z)$ é indeterminada na vizinhança dum ponto singular essencial.

§ 23) Resíduos — No domínio dum polo ou dum ponto singular essencial tem-se

$$f(z) = P(z-a) + G\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Calculemos $\int_{(C)} f(z)dz$ ao longo dum círculo envolvendo o único ponto singular a. A parte do integral $\int_{(C)} P(z-a)dz$ é nula. Quanto ao integral $\int_{(C)} G\left(\frac{1}{z-a}\right)dz$, podemos fazer a integração termo a termo. Vimos, com efeito, ao demonstrar que $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ era uma função inteira de $\frac{1}{z-a}$ e a convergência desta série é uniforme. Quando se acha o integral

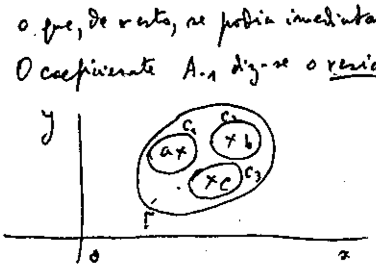
$$\int_{(C)} \frac{A_{-m}\, dz}{(z-a)^m}$$

, o valor dêste integral é zero, se $m > 1$.

Para $m=1$, tem-se $\int_{(b)} \frac{A_{-1}}{z-a}\,dz = 2\pi i A_{-1}$. Tem-se, assim,

$$\int_{(b)} f(z)\,dz = 2\pi i A_{-1},$$

o que, de resto, se podia imediatamente ver calculando o coeficiente J_{-1} da série de Laurent respectiva.
O coeficiente A_{-1} diz-se o residuo da função $f(z)$ relativo ao ponto singular $\underline{a}$.



Seja agora $f(z)$ uma função uniforme no interior dum contorno Γ (simplesmente conexo ou não), contínua sôbre o contorno, e tendo no interior de Γ pontos singulares $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ Sejam A, $C, \dots$ os resíduos correspondentes. Tem-se

$$\int_{(\Gamma)} f(z)\,dz = \int_{(c_1)} + \int_{(c_2)} + \int_{(c_3)} + \dots,$$

se $c_1, c_2, c_3, \dots$ são círculos ou contornos contidos no interior de Γ e envolvendo $a, b, c, \dots$

assim
$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i(A+B+C+\dots)$$

Interessantável fórmula mostra o papel importante dos resíduos, que se torna importante sab calcular. Se o ponto $\underline{a}$ é um polo de $f(z)$, de ordem $\underline{m}$, o produto $(z-a)^m f(z)$ é uma função regular no ponto $\underline{a}$, sendo o resíduo de $f(z)$ o coeficiente de $(z-a)^{m-}$ no desenvolvimento de $(z-a)^m f(z)$. No caso dum polo simples, por exemplo, $m-1=0$, d sorte que o resíduo é o limite, para $z=a$, do produto $(z-a)f(z)$.

Se fôr
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1(z-a)+\dots}{(z-a)[a_0+a_1(z-a)+\dots]},$$

tem-se
$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \frac{\alpha_0}{a_0} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

§ 24) Estudo duma função para valores infinitamente grandes da variável – ra o estudo de $f(z)$ quando $|z|$ aumenta indefinidamente, poderíamos pôr $z=\frac{1}{z'}$, de sorte que $f(z)=f\left(\frac{1}{z'}\right)$, e estudemos $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ na vizinhança do ponto $z'=0$.

Ou, então, procedamos do modo seguinte: Suponhamos que se pode encon um número positivo $\underline{R}$ suficientemente grande para que todo valor finito de z de dulo superior a $\underline{R}$ seja um ponto ordinário de $f(z)$. Descrevendo com centro na o gem e raio $\underline{R}$ um círculo $\underline{C}$, dizemos que a função $f(z)$ é regular num ponto qualque do domínio do ponto do infinito ou domínio exterior a $\underline{C}$.

Seja agora $\underline{C}'$ um círculo concêntrico de raio $R'>R$. Como a função $f($ é holomorfa na coroa circular entre $\underline{C}$ e $\underline{C}'$, tem-se

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{-m} z^m.$$

Os coeficientes A_{-m} são independentes do raio R'. Por isso o desenvolvimento anterior lugar para todo o domínio do ponto do infinito. Há então três casos a distinguir, q vamos examinar sucessivamente: 1.º – se há apenas potências negativas de z

$$f(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_m}{z^m} + \dots,$$

a função $f(z)$ tende para A_0 quando $|z|$ aumenta indefinidamente. Diz-se que a função regular no ponto do infinito, ou ainda que o ponto do infinito é um ponto ordinário de f(z

Se A_m é o primeiro coeficiente não nulo, o ponto do infinito é um zero de ordem m.

Em segundo lugar suponhamos

$$f(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

sendo B_m o primeiro coeficiente não nulo. Diz-se que o ponto no infinito é um pol de ordem m de $f(z)$, sendo o polinómio $B_m z^m + \dots + B_1 z$ a parte principal r tiva ao polo. Quando $|z|$ aumenta indefinidamente o mesmo sucede a $|f(z)|$.

Em terceiro lugar, se há no desenvolvimento um número infinito de ter com potências positivas de z, o ponto do infinito é um ponto singular essencial d $f(z)$. Em particular, uma função inteira admite o ponto do infinito como pr singular essencial.

O resíduo correspondente ao ponto do infinito não é, porém, B_1. Por conservar a propriedade

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\,dz = \text{resíduo}$$

em que C é o círculo do domínio do ponto do infinito, como deve fazer-se a de nição? Ora tem-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\,dz = A_1,$$

quando C é percorrido no sentido directo. Mas, para deixar à esquerda o domínio do ponto do infinito, deve considerar-se o sentido contrário, vindo, então,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\,dz = -A_1.$$

Logo $-A_1$ é o resíduo que deve considerar-se. Desta maneira uma função pode ser regul no domínio do ponto do infinito sem que o resíduo seja nulo, como por exemplo $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.

Quando o ponto do infinito é um polo ou um zero de $f(z)$, podemos sever ne domínio deste ponto

$$f(z) = z^{\mu}\varphi(z),$$

em que μ é um número inteiro, positivo no caso dum polo, negativo no caso dum zero. A função $\varphi(z)$ é uma função regular no infinito, que é diferente de zero quando $z = \infty$

Por derivação logarítmica tem-se

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu}{z} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

A função $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ é uma função regular no domínio do ponto do infinito, começando o desenvolv mento por um termo em $\frac{1}{z^2}$ ou de grau superior. O resíduo de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ no domínio do infi é, pois, $-\mu$. E êste valor $-\mu$ é a ordem da função f(z) no domínio do infinito, porque, q do $\mu > 0$, tem-se um polo de ordem μ, pelo que a função é de ordem $-\mu$ relativamente a $\frac{1}{z}$. Quando $\mu < 0$, pelo contrário, tem-se um zero de ordem $\underline{\mu}$, pelo que a função é de ordem $-\mu > 0$ relativamente a $\frac{1}{z}$.

Seja agora f(z) uma função uniforme que não tem senão um número fini de pontos singulares. Podemos enunciar o teorema seguinte: a soma dos resíduos de todo o plano, compreendido o ponto do infinito, é igual a zero.

Descrevendo ~~da origem~~ um círculo $\underline{C}$ contendo todos os pontos singulare de f(z) situados a distância finita, o integral $\int_{(C)} f(z)dz$ tomado no sentido d recto é igual ao produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos relativos a todos o pontos singulares a distância finita. Por outro lado o mesmo integral no sentido inverso é igual ao produto de $2\pi i$ pelo resíduo relativo ao ponto do infinito. A s ma dos dois integrais é nula; logo a soma dos resíduos é nula.

Cauchy chamou resíduo integral a soma dos resíduos relativos a todos os pontos singulares a distância finita. Quando há um número finito de po tos singulares o resíduo integral é igual e de sinal contrário ao resíduo relativo do po do infinito.

Como exemplo, consideremos $f(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}}$, em que P(z) é um p nómio de grau $\underline{p}$ e Q(z) um polinómio de grau $\underline{2q}$. No exterior dum circ lo de raio R maior que os módulos dos zeros de Q(z), f(z) é uma função unifor podendo escrever-se

$$f(z) = z^{p-q} \frac{\frac{\alpha_0}{z^p} + \frac{\alpha_1}{z^{p-1}} + \dots + \alpha_p}{\sqrt{\frac{\beta_0}{z^{2q}} + \frac{\beta_1}{z^{2q-1}} + \dots + \beta_{2q}}} = z^{p-q}\,\varphi(z),$$

em que φ(z) é uma função regular no domínio do infinito, que não se anula p na $z = \infty$. O ponto no infinito é um polo de f(z), se $p > q$; um ponto ordinário se $p \leq q$. Quando $p < q-1$ o resíduo é nulo.

Findaremos aqui a nossa digressão, retomando agora a teoria dos desenvolvimentos em série relativos ao movimento kepleriano elítico.

§ 25) <u>Regresso ao estudo dos desenvolvimentos de Fourier do § 16</u> — Consideremos o desen
vimento de Fourier relativo à variável y; pode considerar-se um desenvolvimento de Fou
relativo à variável $\underline{u}$ ou à variável $\underline{w}$. É, como desenvolvimento de Laurent, supor

$$f = \sum b_n y^n = \sum c_n z^n. \qquad (A)$$

Se, no plano da variável $\underline{z}$, o desenvolvimento anterior é, realmente, um desenvolvimento de Laurent, tem-se, como se sabe,

$$2\pi i c_n = \int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

onde $\underline{\mathcal{C}}$ é um círculo que pode supôr-se de raio igual à unidade, pois o desenvolvimento de Laurent tem, certamente, lugar para os pontos $\underline{z}$ dêsse círculo, pelo que o mesmo p
pertencerá à corôa circular que deve considerar-se.

Se substituirmos a variável $\underline{z}$ pela variável y, tem-se

$$2\pi i\, c_n = \int_{(B)} f\, \frac{dz}{dy}\, dy\, \frac{1}{z^{n+1}} = \int_{(B)} f\, \frac{y}{z}\, \frac{dz}{dy} \left(\frac{y}{z}\right)^n \frac{dy}{y^{n+1}},$$

onde (B) é o caminho correspondente no domínio da variável complexa y. Podemos dizer q
o coeficiente $\underline{c_n}$ de z^n no desenvolvimento de f segundo as potências de $\underline{z}$ é igual
coeficiente de y^n no desenvolvimento segundo $\underline{y}$ de

$$\eta \frac{a}{n} \left(\frac{y}{z}\right)^n f = \eta\, \omega' (1+\vartheta z)(1+\vartheta z^{-1}) \ldots =$$

$$= \frac{\eta}{\omega} \cdot \frac{1}{1-\vartheta y} \cdot \frac{1}{1-\vartheta y^{-1}} \cdot \frac{(1-\vartheta y)^n}{(1-\vartheta y^{-1})^n}\, f =$$

$$= \frac{\eta}{\omega} (1-\vartheta y)^{n-1} (1-\vartheta y^{-1})^{-n-1} f.$$

Se notarmos que é $\dfrac{df}{d(\log z)} = \dfrac{df}{dz} z$, vem (representando $\dfrac{df}{d(\log z)}$ em $D_z f$)

$$D_z f = z \frac{df}{dz} = \sum n\, c_n z^n.$$

Empregaremos, analogamente, as notações $D_y f$ e $D_x f$. Vê-se que o coeficien
c_n de z^n no desenvolvimento (A) pode interpretar-se doutra maneira. É

$$D_y f = y \frac{df}{dy} = y \frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} = \frac{y}{z} \frac{dz}{dy}\, z \frac{df}{dz} = \frac{y}{z} \frac{dz}{dy} D_z f,$$

de sorte que $\underline{c_n}$ em (A) é igual ao coeficiente de y^n no desenvolvimento de

$$\frac{1}{n} \left(\frac{y}{z}\right)^n D_y f = \frac{1}{n} (1-\vartheta y)^n (1-\vartheta y^{-1})^{-n} D_y f,$$

pois

$$2i\pi . n\, c_n = \int_{(\mathcal{C})} \frac{D_z f}{z^{n+1}}\, dz = \int_{(B)} \frac{z}{y} \frac{dz}{dy} \frac{D_y f\, dy}{z^{n+1}} = \int_{(\mathcal{C})} D_y f \left(\frac{y}{z}\right)^n \frac{dy}{y^{n+1}}.$$

Trocando o papel de y e de z, vê-se que o coeficiente $\underline{b_n}$ de y^n no desenvolvimento (A) é igual ao coeficiente de $\underline{z}^n$ no desenvolvimento segundo as potências de $\underline{z}$ da função

$$\frac{1}{\eta}\frac{r}{a}\left(\frac{z}{y}\right)^n f = \frac{\eta}{\omega}(1+\theta z)^{n-1}(1+\theta z^{-1})^{-n-1} f,$$

ou da função

$$\frac{1}{n}\left(\frac{z}{y}\right)^n D_z f = \frac{1}{n}(1+\theta z)^n(1+\theta z^{-1})^{-n} D_z f,$$

salvando o caso $n=0$, para a última hipótese.

Introduzamos agora a variável $\underline{x}$. Viu-se que era $u - \varepsilon \operatorname{sen} u = g$, e, portanto,

$$ig = iu - i\varepsilon \operatorname{sen} u = iu - \frac{\varepsilon}{2}(e^{iu} - e^{-iu}) = iu - \frac{\varepsilon}{2}(y - y^{-1}).$$

Assim será

$$x = e^{ig} = y\, e^{\frac{\varepsilon}{2}(y^{-1}-y)}$$

relação que não se pode resolver em ordem a y. Se, em vez de y, empregarmos a variável $\underline{z}$, vem, ainda de forma mais complicada,

$$x = z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z} e^{\frac{\varepsilon}{2}\left(z^{-1}\frac{1+\theta z}{1+\theta z^{-1}} - z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z}\right)} =$$

$$= z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z} e^{\frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{(z^{-1}+\theta)(1+\theta z)-(z+\theta)(1+\theta z^{-1})}{(1+\theta z^{-1})(1+\theta z)}\right\}} =$$

$$= z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z} e^{\frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{z^{-1}\cancel{+\theta}\cancel{+\theta}+\theta^2 z - z\cancel{-\theta}\cancel{-\theta}-\theta^2 z^{-1}}{(1+\theta z^{-1})(1+\theta z)}\right\}} = z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z} e^{\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\frac{z^{-1}-z}{(1+\theta z^{-1})(1+\theta z)}} =$$

$$= z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z} e^{\eta\left(\frac{\theta z^{-1}-\theta z+\theta^2-\theta^2}{(1+\theta z^{-1})(1+\theta z)}\right)} = z\frac{1+\theta z^{-1}}{1+\theta z} e^{\eta\left(\frac{\theta z^{-1}}{1+\theta z^{-1}} - \frac{\theta z}{1+\theta z}\right)}.$$

Observe-se ainda a relação,

$$\log x = \log y + \frac{\varepsilon}{2}(y^{-1} - y) \qquad \text{e} \;,\text{ portanto,}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{y^2}+1\right)dy = \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}y - \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{y}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{dy}{y}\left\{1 - \frac{\varepsilon}{2}(y + y^{-1})\right\} \text{[illegible]} = \frac{dy}{y}\frac{r}{a}$$

donde

$$\boxed{\frac{x\,dy}{y\,dx} = \frac{a}{r}}.$$

Ao lado desta fórmula, fixemos esta outra:

$$\boxed{\frac{x\,dz}{z\,dx} = \eta\frac{a^2}{r^2}}.$$

Para encontrarmos esta última, podemos proceder do modo seguinte: é, como se viu,

$\frac{y\,dz}{z\,dy} = \eta\,\frac{a}{r}$, e sendo $\frac{x\,dy}{y\,dx} = \frac{a}{r}$, por multiplicação vem

$$\frac{\cancel{y}\,x\,dz\,\cancel{dy}}{z\,\cancel{y}\,\cancel{dy}\,dx} = \eta\,\frac{a^2}{r^2} = \frac{x\,dz}{z\,dx}.$$

As funções $\underline{x}$ e $\underline{x^{-1}}$ de y admitem como pontos singulares os pontos que vamos ver. Tem-se

$$x = y\,e^{\frac{\varepsilon}{2y}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon y}{2}} = y\left(1+\frac{\varepsilon}{2y}+\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2}{4y^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{\varepsilon y}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2 y^2}{4}\cdots\right),$$

de sorte que $y=0$ e $y=\infty$ são pontos singulares essenciais para $\underline{x}$. Vê-se também que são igualmente para x^{-1}. Considerando $\underline{x}$ e x^{-1} como função de $\underline{z}$, vê-se que os pontos singulares essenciais são $z=\frac{1}{\vartheta}$ e $z=-\vartheta$.

Se considerarmos y ou y^{-1} como função de $\underline{x}$, procuremos os pontos singulares. Os pontos de descontinuidade são pontos para os quais a derivada $\frac{dy}{dx}$ não existe. Obtêm-se pondo $\frac{dx}{dy}=0$. Ora, pondo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{r}{a}\,\frac{x}{y} = 0,$$

tem $x=0$ $(e\ x=\infty)$, e, em seguida, pondo $\frac{r}{a}=0$, vem

$$\frac{\varepsilon}{2}\,(y+y^{-1}) = 1.$$

Desta relação tira-se

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)=1,\quad \frac{\varepsilon}{2}\left(y^2+1\right)=y\quad, \text{ou}$$

$$y^2-\frac{2}{\varepsilon}\,y+1=0,$$

$$y = \frac{1}{\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-1} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}-1} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \pm \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} =$$

$$= \begin{cases}\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi},\ \frac{1-\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1}{\vartheta},\ \vartheta.\end{cases}$$

Assim, os pontos singulares procurados são aqueles para os quais y toma os valores

$$y_1=\frac{1}{\vartheta},\qquad y_2=\vartheta.$$

Então

$$x_1 = \frac{1}{\vartheta}\,e^{\frac{\varepsilon}{2}\left(\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)} = \frac{1}{\vartheta}\,e^{\frac{\varepsilon}{2}\frac{\vartheta^2-1}{\vartheta}} = \frac{1}{\vartheta}\,e^{-\eta},$$

$$x_2 = \vartheta\,e^{\eta}.$$

Os pontos singulares procurados são, pois, $\underline{x_1}$ e $\underline{x_2}$. Tanto os números $\underline{x_1}$ e $\underline{x_2}$ como $\underline{y_1}$ e $\underline{y_2}$ são positivos. Só pode verificar-se que se tem

$$x_2 < 1 < x_1.$$

De facto o produto $x_1 x_2$ é igual à unidade, e, por outro lado, considerando $\underline{x_2}$ como função de ϑ, tem-se

$$\frac{dx_2}{d\vartheta} = e^{\eta}+\vartheta\,e^{\eta}\,\frac{d\eta}{d\vartheta} = e^{\eta}\left[1+\vartheta\cdot(-\operatorname{sen}\varphi)\,\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\right] = e^{\eta}\cos^2\varphi,$$

de sorte que a derivada é positiva. Logo x_2 cresce quando φ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, que é o intervalo que nos interessa. Para $\varphi = 0$, é $x_2 = 0$; e para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, é $x_2 = 1$.

Relativamente ao estudo da natureza dêstes pontos singulares x_1 e x_2, vamos proceder do modo seguinte. Tem-se

$$\frac{dx}{dy} = \frac{h}{a}\frac{x}{y} = \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(y + y^{-1})\right]\frac{x}{y},$$

de sorte que

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{y^2}x\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1})\right) + \frac{1}{y}\frac{dx}{dy}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1})\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y^2} - 1\right).$$

Sob a condição $\frac{dx}{dy} = 0$, tem-se, pois que a primeira parcela também é nula,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\varepsilon x}{2y^2}\left(y^{-1} - y\right).$$

Ora x, considerado como função de y, não tem em $y = y_1$ ou $y = y_2$ ponto singular. É

$$x = x_1 + \frac{(\theta^2 - 1)}{\theta}\frac{\varepsilon\frac{1}{\theta}e^{-\eta}}{2\frac{1}{\theta^2}}\frac{1}{2}(y - y_1)^2 + \cdots, \qquad x = x_2 + \frac{\varepsilon\theta e^{\eta}}{2\theta^2}(\theta^{-1} - \theta)\frac{1}{2}(y - y_2)^2 + \cdots,$$

ou seja

$$x = x_1 - \frac{n\theta}{2}e^{-\eta}(y - y_1)^2 + \cdots, \qquad x = x_2 + \frac{n}{2\theta}e^{\eta}(y - y_2)^2 + \cdots$$

Sob esta forma a natureza dos pontos singulares é a que resulta das considerações que vão fazer-se no § seguinte.

§ 26) **Pontos críticos** - Seja a equação

$$F(x, y) = 0,$$

para a qual $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ no ponto origem $(x = 0,\ y = 0)$, O primeiro membro supõe-se desenvolvido em série sob a forma

ponto que se supõe solução da equação

$$F(x\,y) = Ax + By^n + \cdots, \qquad (AB \neq 0)$$

onde o primeiro termo não nulo contendo apenas a variável y é da ordem n. Os termos não escritos contêem ou x^2, ou xy, ou y^{n+1}. Se, na equação

$$Ax + By^n + \cdots = 0,$$

se considerasse y como a variável independente e x como função, ter-se-ia o desenvolvimento

$$x = y^n(a_0 + a_1 y + \cdots). \qquad (a_0 \neq 0)$$

Extraindo a raiz n a ambos os membros, tem-se

$$x^{\frac{1}{n}} = y\sqrt[n]{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots}.$$

Para $y=0$, a equação auxiliar

$$u^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$$

admite n raizes distintas. Na vizinhança de $y=0$ cada uma dessas raizes é uma função holomorfa de y que se desenvolve em série inteira [~~os pontos~~ críticos são aqueles que anulam o radicando, o que não sucede com $y=0$], isto é, tem-se

$$\sqrt[n]{a_0 + a_1 y + \dots} = b_1 + b_2 y + \dots ,$$

e, pois,

$$x^{\frac{1}{n}} = y\,(b_1 + b_2 y + \dots) = b_1 y + b_2 y^2 + \dots .$$

Bem entendido que temos aqui n valores de $x^{1/n}$, pois, no 2º membro, devemos multiplicar um valor ~~por~~ pelas n potências sucessivas de $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, para assim se terem os n valores correspondentes às n raizes u. E tem-se, deste modo,

$$y = c_1 x^{\frac{1}{n}} + c_2 \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \dots$$

Este desenvolvimento, no qual devemos dar a $x^{\frac{1}{n}}$ os seus n valores, dá n raizes y que tendem para zero quando x tende para zero. As n raizes y formam, pois, um único sistema circular, pois pode passar-se dumas raizes às outras por variação contínua de x.

§ 27) Regresso aos desenvolvimentos finais do § 25 e outros.

Vimos que era

$$x - x_1 = -\frac{\eta\theta}{2}\, e^{-\eta} (y - y_1)^2 + \dots$$

$$x - x_2 = \frac{\eta}{2\theta}\, e^{\eta} (y - y_2)^2 + \dots .$$

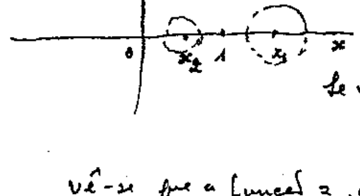
Assim $(y - y_1)$ admite um desenvolvimento da forma

$$y - y_1 = -\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{2}{\eta}}\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{1/2} + \dots$$

e $y - y_2$ admite um desenvolvimento

$$y - y_2 = \theta\sqrt{\frac{2}{\eta}}\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)^{1/2} + \dots .$$

Para o primeiro desenvolvimento interessam-nos valores de x tais que $|x| < x_1$; a determinação a adoptar para o radical $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{1/2}$ tem de ser aquela que leva a um valor de $y=1$ quando $x=1$. No segundo desenvolvimento, a determinação do radical tem de ser analogamente aquela que dá $y=1$ quando $x=1$, fazendo crescer x a partir de x_2



Se notarmos agora que se tem

$$z = y\,\frac{1 - \theta y^{-1}}{1 - \theta y} = \frac{y - \theta}{1 - \theta y} = \frac{y - y_2}{1 - y_2 y} = \frac{1}{\theta}\,\frac{y - y_2}{y_1 - y} ,$$

vê-se que a função z, de x, tem também os pontos singulares $x = x_1$, $x = x_2$, com os valores correspondentes $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$.

Os desenvolvimentos correspondentes são

$$\frac{1}{z} = \frac{\varepsilon}{\eta}\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{1/2}+\cdots\ ; \quad z = \frac{\varepsilon}{\eta}\sqrt{\frac{1}{2\eta}}\left(1-\frac{x_2}{x}\right)^{1/2}+\cdots,$$

o que é fácil de encontrar.

Viu-se atrás que, em virtude de se ter y explicitamente em z e z explicitamen em y, podíamos substituir fàcilmente uma variável por outra num desenvolvimento tivesse lugar segundo uma delas. Entretanto usámos também um método indirecto pa fazer tal substituição, quando afirmámos, por exemplo, que o coeficiente de z^n no desen vimento de f segundo as potências de z era igual ao coeficiente de y^n no desenvolvime segundo as potências de y da função $\eta\frac{a}{r}\left(\frac{y}{z}\right)^n f$.

Este método indirecto vai prestar-nos serviços aqui. Visto que não podem primir y e z explicitamente em x, trata-se, por via indirecta, sabendo q

$$f = \Sigma\, b_n y^n = \Sigma\, c_n z^n,$$

achar a_n tal que

$$f = \Sigma\, a_n x^n.$$

A êste respeito temos duas afirmações. Em primeiro lugar, o coeficiente a_n é igual ao coeficiente de y^n no desenvolvimento segundo y de

$$\frac{r}{a}\, e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} f,$$

ou ainda de (excluindo $n=0$)

$$\frac{1}{n}\, e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} D_y f.$$

Em segundo lugar o coeficiente a_n é igual ao coeficiente de z^n no desen vimento segundo z de

$$\frac{1}{\eta}\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{z}{x}\right)^n f = \frac{\eta^2}{\omega^2}(1+\theta z)^{n-2}(1+\theta z^{-1})^{-n-2}\, e^{n\eta\left(\frac{\theta z}{1+\theta z}-\frac{\theta z^{-1}}{1+\theta z\right.}}$$

ou, excluindo o caso $n=0$, da função

$$\frac{1}{n}(1+\theta z)^n(1+\theta z^{-1})^{-n}\, e^{n\eta\left(\frac{\theta z}{1+\theta z}-\frac{\theta z^{-1}}{1+\theta z^{-1}}\right)} D_z f.$$

Quanto à ~~[illegible]~~ passagem de ~~x~~ para y ou para z, temos as relações directas.

§ 28) **Aplicação ao cálculo dos a_n a partir dos b_n** – Este problem é, entre os propostos, o mais importante. Por isso, vamos tratá-lo mais em de talhe. Somos levados a considerar a função de y

$$\varphi(y) = e^{\frac{\varepsilon}{2}(y-y^{-1})},$$

e a desenvolvê-la segundo as potências de y, positivas ou não. Poremos

$$\varphi(y) = \sum y^n J_n(t).$$

Se tivermos os $J_n(t)$, de facto, é fácil calcular os nossos a_n, a partir dos b_n. Na v dade a_n é o coeficiente de y^n no desenvolvimento segundo y de

$$\frac{1}{n} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} D_y f,$$

sendo $D_y f = \frac{df}{d(\log y)} = \frac{df}{dy} \cdot y = \sum n' b_{n'} y^{n'}$.

Então, visto que, $\frac{1}{n} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} = \frac{1}{n} \sum y^{n''} J_{n''}(n\varepsilon)$,

vem

$$a_n = \frac{1}{n} \sum n' b_{n'} J_{n''}(n\varepsilon) = \sum \frac{n'}{n} b_{n'} J_{n''}(n\varepsilon),$$

onde a soma é estendida a todos os valores positivos ou não de n' e de n'' cuja soma é igual a n. Mas, como se disse, êste resultado supõe $n \neq 0$.

Para se calcular a_0 (caso de $n=0$), temos de achar o termo constan do desenvolvimento de $\frac{r}{a} f$ segundo as potências de y. Mas

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos u = 1 - \varepsilon \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1}),$$

de sorte que

$$\frac{r}{a} f = f\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1})\right), \text{ e, portanto,}$$

$$a_0 = b_0 - \frac{\varepsilon}{2} b_{-1} - \frac{\varepsilon}{2} b_1 .$$

§ 29) <u>As funções de Bessel</u>. Estudemos, com certo detalhe, as fu ções $J_n(t)$, da variável real t, referidas no § anterior.

A função $\varphi(y)$ não se altera quando y muda em $-\frac{1}{y}$; ou quando t muda em - ao mesmo tempo que y muda em $-y$; ou quando t em $-t$ e y em $\frac{1}{y}$; pelo que será

$$\sum y^n J_n(t) = \sum (-1)^n y^{-n} J_n(t), \quad \text{e} \quad J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t);$$

$$\sum y^n J_n(t) = \sum (-1)^n y^n J_n(-t), \quad \text{e} \quad J_n(-t) = (-1)^n J_n(t);$$

$$\sum y^n J_n(t) = \sum y^{-n} J_n(-t), \quad \text{e} \quad J_{-n}(-t) = J_n(t).$$

Desta maneira, no estudo das funções $J_n(t)$, bastará considerar os valores positivos d n e os valores positivos de t. Quanto a $n=0$, tem-se $J_0(0) = 1$; sendo, para $n \neq 0$, $J_n(0) = 0$. Posto isto, escrevamos

$$\varphi(y) = e \times e .$$

Então sendo

$$e^{\frac{t}{2}y} = 1 + \frac{t}{2}y + \cdots + \frac{1}{n!}\,\frac{t^n}{2^n}\,y^n + \cdots ,$$

$$e^{-\frac{t}{2}y^{-1}} = 1 - \frac{t}{2}y^{-1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{t^n}{2^n}\,y^{-n} + \cdots ,$$

vê-se que é

$$J_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{1.(n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.(n+1)(n+2)}\left(\frac{t}{2}\right)^4 - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^6}{1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right.$$

Esta série é convergente qualquer que seja $\underline{t}$. E, se o número $\underline{n}$ é igual ou superior ao maior inteiro contido em $\frac{t^2}{4}$, sabemos que se tem

$$0 < J_n(t) < \left(\frac{t}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{1.2\ldots n}, \qquad (1')$$

sendo, para um certo valor de t, o último membro desta desigualdade tanto mais aproxi-
do de $J_n(t)$ quanto maior fôr $\underline{n}$.

Observando agora que é

$$D_y\,\varphi(y) = y\,\varphi(y)\,\frac{t}{2}\left(1 + y^{-2}\right) = \frac{t}{2}\left(y + y^{-1}/\varphi(y) = \sum n\,J_n(t)\,y^n ,\right.$$

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(y - y^{-1}\right)\varphi(y) = \sum y^n J'_n(t) ,$$

concluem-se as igualdades

$$\frac{t}{2}\left(y + y^{-1}\right)\sum y^n J_n(t) = \sum n\,J_n(t)\,y^n ,$$

$$\frac{1}{2}\left(y - y^{-1}\right)\sum y^n J_n(t) = \sum y^n J'_n(t) ,$$

e, pois, as relações

$$\begin{cases} \frac{t}{2}\,J_{n-1} + \frac{t}{2}\,J_{n+1} = n\,J_n \\ \frac{1}{2}\,J_{n-1} - \frac{1}{2}\,J_{n+1} = J'_n , \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}\,J_n(t) , \\ J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2\,J'_n(t) . \end{cases} \qquad (1)$$

Logo $J_{n-1}(t)$ e $J_{n+1}(t)$ podem exprimir-se como funções lineares e homogénea de $J_n(t)$ e $J'_n(t)$, o mesmo se dizendo de J_{n-2}, J_{n+2}, J_{n-3}, J_{n+3}, etc.

Ponhamos agora

$$\frac{J_n(t)}{J_{n-1}(t)} = k_n .$$

Então as relações (1) pode escrever-se

$$\frac{1}{k_n} + k_{n+1} = \frac{2n}{t} , \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{k_n} = \frac{2n}{t} - k_{n+1} . \qquad (2)$$

Sendo $k_{n+p} = \frac{J_{n+p}}{J_{n+p-1}}$, vê-se, atendendo à fórmula (1'), isto é substi- (71)
tuindo os JJ pelos últimos membros das desigualdades (1'), que k_{n+p} é sensivelmente igual a $\frac{t}{2(n+p)}$, por consequência muito pequeno se p é muito grande. E conclui-se que os $k_n, k_{n+1}, k_{n+2}, \dots$ são positivos e decrescentes e inferiores à unidade se se supõe $n \geq t$. Logo $J_n(t) < J_{n-1}(t)$, $J_{n+1}(t) < J_n(t)$, etc., isto é, os $J_{n-1}(t), J_n(t), J_{n+1}(t), \dots$ são ~~[illegible]~~ positivos e descrescentes.

Se se põe $y = e^{i\omega}$, é $\varphi(y) = e^{\frac{t}{2}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)} = e^{\frac{t}{2} 2i\,\mathrm{sen}\,\omega} = e^{ti\,\mathrm{sen}\,\omega}$,

de sorte que vem

$$\cos(t\,\mathrm{sen}\,\omega) + i\,\mathrm{sen}(t\,\mathrm{sen}\,\omega) = \sum J_n(t)\left(\cos n\omega + i\,\mathrm{sen}\,n\omega\right),$$

ou seja

$$\cos(t\,\mathrm{sen}\,\omega) = J_0(t) + \begin{matrix}J_1(t)\\ J_{-1}(t)\end{matrix}\cos\omega + \begin{matrix}J_2(t)\\ J_{-2}(t)\end{matrix}\cos 2\omega + \begin{matrix}J_3(t)\\ J_{-3}(t)\end{matrix}\cos 3\omega + \dots$$

$$\mathrm{sen}(t\,\mathrm{sen}\,\omega) = \begin{matrix}J_1(t)\\ -J_{-1}(t)\end{matrix}\mathrm{sen}\,\omega + \dots$$

ou, finalmente,

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(t\,\mathrm{sen}\,\omega) &= J_0(t) + 2J_2(t)\cos 2\omega + 2J_4(t)\cos 4\omega + \dots\\ \mathrm{sen}(t\,\mathrm{sen}\,\omega) &= 2J_1(t)\,\mathrm{sen}\,\omega + 2J_3(t)\,\mathrm{sen}\,3\omega + 2J_5(t)\,\mathrm{sen}\,5\omega + \dots\end{aligned}}$$

Tendo em vista, de resto, as expressões dos coeficientes de Fourier, vê-se q

$$2J_{2k}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(t\,\mathrm{sen}\,\omega)\cos 2k\omega\,d\omega,$$

pelo que $|J_{2k}(t)| < 1$, assim como, analogamente, $|J_{2k+1}(t)| < 1$.

§ 30) Estudo de desenvolvimentos tipo - Consideremos como função f a função seguinte

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^\rho y^\beta z^\gamma = \left(\frac{r}{a}\right)^\rho e^{i(\beta u + \gamma w)} = \left(\frac{r}{a}\right)^\rho\left[\cos(\beta u + \gamma w) + i\,\mathrm{sen}(\beta u + \gamma w)\right]$$

Pretendemos desenvolvê-la sob a forma

$$f = \sum a_n x^n = \sum b_n y^n = \sum c_n z^n.$$

Visto que se tem

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\rho = (1 - \varepsilon\cos u)^\rho$$

o expoente $\underline{\rho}$ é qualquer, o que não influi na periodicidade desejada. Também $\underline{\beta}$ e $\underline{\gamma}$ poderão ser quaisquer, desde que a sua soma seja um número inteiro. Esta última condição é exigida, a fim de que, quando um dos argumentos g, u, w aumente de 2π, a soma $\beta u + \gamma w$ aumente dum múltiplo de 2π, q mantendo, assim, que f é uma função periódica no sentido desejado. (72)

Tem-se aqui

$$f = \omega^{\rho}(1-\vartheta y)^{\rho}(1-\vartheta y^{-1})^{\rho} y^{\beta} z^{\gamma} = \omega^{\rho}(1-\vartheta y)^{\rho}(1-\vartheta y^{-1})^{\rho} y^{\beta}\, y^{\gamma}(1-\vartheta y^{-1})^{\gamma}(1-\vartheta y$$

$$= \omega^{\rho} y^{\beta+\gamma}(1-\vartheta y)^{\rho-\gamma}(1-\vartheta y^{-1})^{\rho+\gamma} =$$

$$= \omega'^{-\rho} z^{\beta+\gamma}(1+\vartheta z)^{-\rho-\beta}(1+\vartheta z^{-1})^{-\rho+\beta}.$$

Se se faz

$$(1-\vartheta y)^{p}(1-\vartheta y^{-1})^{q} = \sum K_n^{p,q} y^n,$$

vê-se imediatamente que é

$$\boxed{b_n = \omega^{\rho} K_{n-\beta-\gamma}^{\rho-\gamma,\rho+\gamma}, \quad c_n = (-1)^{n-\beta-\gamma}\omega'^{-\rho} K_{n-\beta-\gamma}^{-\rho-\beta,-\rho+\beta}}$$

e também

$$\boxed{\begin{cases} b_n = (-1)^{n-\beta-\gamma}\dfrac{\omega'^{-\rho-1}}{\eta} K_{n-\beta-\gamma}^{-\rho-\beta+n-1,\,-\rho+\beta-n-1}, \\ c_n = \eta\,\omega^{\rho-1} K_{n-\beta-\gamma}^{\rho-\gamma+n-1,\,\rho+\gamma-n-1}. \end{cases}}$$

Procuremos a expressão dos $K_n^{p,q}$. Tem-se

$$(1-\vartheta y)^{p} = 1 - p\vartheta y + \frac{p(p-1)}{1.2}\vartheta^2 y^2 - \dots + (-1)^n \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{1.2\dots n}\vartheta^n y^n + \dots$$

$$(1-\vartheta y^{-1})^{q} = 1 - q\vartheta y^{-1} + \frac{q(q-1)}{1.2}\vartheta^2 y^{-2} - \dots + (-1)^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{1.2\dots n}\vartheta^n y^{-n} + \dots,$$

$$K_n^{p,q} = (-1)^n\left[C_p^n C_q^0 \vartheta^n \vartheta^0 + C_q^1 C_p^{n+1}\vartheta\,\vartheta^{n+1} + \dots + C_q^n C_p^{2n}\vartheta^n \vartheta^{2n} + \dots\right],$$

onde $C_p^0 = 1$, $\quad C_p^m = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-m+1)}{1.2\dots m}$.

Podemos, assim, escrever

$$K_n^{p,q} = (-1)^n \sum \vartheta^{m'+m''} C_p^{m'} C_q^{m''},$$

onde a soma é estendida aos valores de m' e m'' tais que $m'-m''=n$, entendendo-se

é claro que, tanto m' como m'' são positivos. Os dois valores anteriormente encontrados para b_n (ou para c_n) mostram que se tem

$$\omega^{\rho} K_{n-\beta-\gamma}^{\rho-\gamma,\rho+\gamma} = (-1)^{n-\beta-\gamma}\frac{\omega'^{-\rho-1}}{\eta} K_{n-\beta-\gamma}^{-\rho-\beta+n-1,\,-\rho+\beta-n-1},$$

ou

$$K_{n-\beta-\gamma}^{\rho-\gamma,\rho+\gamma} = (-1)^{n-\beta-\gamma}\left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{2\rho+1} K_{n-\beta-\gamma}^{-\rho-\beta+n-1,\,-\rho+\beta-n-1},$$

pois $\omega' = \dfrac{\omega}{\eta^2}$, e $\dfrac{\omega'^{-\rho-1}}{\eta\,\omega^{\rho}} = \dfrac{\omega^{-\rho-1-\rho}}{\eta^{-2\rho-2+1}} = \left(\dfrac{\eta}{\omega}\right)^{2\rho+1}$.

Mudando $n \to 2n$, $\rho-\gamma = p$, $\rho+\gamma = q$, $\beta+\gamma = n$, vem

Então é, evidentemente,

$$b_n = H_n^p \;; \qquad c_n = (-1)^n \eta^{2p} H_n^{-p}.$$

Mas, se $\underline{n}$ é positivo ou nulo, tem-se

$$H_n^p = H_{-n}^p = (-1)^n \sum \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2m} C_p^{n+2m}\, C_{n+2m}^m \,, \qquad \text{(Vêr verso)}$$

onde a soma deve estender-se a todos os valores inteiros, não negativos, de $\underline{m}$.

Êste desenvolvimento é finito se p se reduz a um número inteiro, positivo ou nulo. Quando $n > p$, tem-se $H_n^p = 0$; quando $n = p$, tem-se $H_n^p = \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$.

Introduzindo os $K_n^{p,s}$, vem

$$H_n^p = \omega^p K_n^{p,p}.$$

No caso particular de ser $n = 0$,

$$H_0^p = \omega^p K_0^{p,p} = (-1)^0 \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{2p+1} \omega^p K_0^{-p-1,\,-p-1} = \eta^{2p+1} H_0^{-p-1}.$$

Daqui se conclui que o coeficiente H_0^p tem sempre um desenvolvimento finito, ainda que p não seja positivo, contanto que seja inteiro.

Suponhamos $p = -1$. Tem-se

$$H_n^{-1} = \omega^{-1} K_n^{-1,-1} \,, \quad \text{e como}$$

$$K_n^{-1,-1} = (-1)^n \sum \vartheta^{m'+m''} C_{-1}^{m'} C_{-1}^{m''} = (-1)^n \left((-\vartheta)^n + (-\vartheta)^{n+2} + (-\vartheta)^{n+4} + \cdots\right) = \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta^2} = \frac{\vartheta^n}{\frac{\eta}{\omega}} = \frac{\omega\vartheta^n}{\eta}.$$

vem

$$H_n^{-1} = \frac{\omega^{-1}\omega\,\vartheta^n}{\eta} \,, \quad \text{ou seja} \quad \boxed{\vartheta^n = \eta H_n^{-1}.}$$

Desta igualdade tiram-se alguns resultados interessantes. Sendo, com efeito,

$$\varepsilon = \operatorname{sen}\varphi, \quad \eta = \cos\varphi, \qquad \vartheta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \,,$$

é também

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \cos\varphi \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} \cdot 2 = \frac{2\cos\varphi}{\sec^2\frac{\varphi}{2}} \,,$$

$$\frac{\vartheta}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\varphi} \cdot \frac{2\cos\varphi}{\sec^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\cos\varphi \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \quad \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} \cdot 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \cos\varphi = \eta \,,$$

pelo que se tem

$$\vartheta^n = \frac{\vartheta}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} H_n^{-1} = \frac{\vartheta}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} (-1)^n \sum \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2m} C_{-1}^{n+2m}\, C_{n+2m}^m \,.$$

Ora sendo

$$C_{-1}^{n+2m} = (-1)^{n+2m} \,, \quad \text{vem} \qquad \vartheta^n = \frac{\vartheta}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \sum \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2m} C_{n+2m}^m \,,$$

onde a soma (não esqueçamos) se estende a todos os valores inteiros, não negativos, de $\underline{m}$.

Por integração obtem-se

$$\frac{\vartheta^n}{n} = \sum \frac{\varepsilon^{n+2m}}{n+2m} \cdot \frac{1}{2^{n+2m}}\, C_{n+2m}^m \,,$$

ou seja

$$\theta^n = \sum \frac{n}{n+2m} C_{n+2m}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2m}.$$

Vejamos, por outro lado, que se tem

$$\frac{1}{\eta} = \eta^{-1} = \theta^{-n} H_n^{-1}, \quad \frac{1}{\eta} = H_0^{-1} = \sum \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m} C_{2m}^{m}$$, pois não devemos esquecer que é $C_{-1}^{p} = (-1)^p$. Esta fórmula

$$\eta^{-1} = \sum C_{2m}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m},$$

é um caso particular da fórmula geral que dá η^n. De facto, tem-se

$$\eta^n = (1-\varepsilon^2)^{n/2} = 1 - \frac{n}{2}\varepsilon^2 + \dots + (-1)^m \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}-m+1\right)}{1.2\dots m} \varepsilon^{2m} + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^m \frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-2m+2)}{1.2\dots m} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m} 2^m =$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^m \frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-2m+2)}{1.3.5\dots(2m-1)} C_{2m}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m},$$

visto que

$$C_{2m}^{m} = \frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1.2\dots m} = \frac{(2m)!}{m!\ m!} = \frac{(2m)!\ 2^m}{m!\ 2^m\ m!} =$$

$$~~[illegible]~~ = \frac{1.2.3\dots 2m}{2.4.6\dots 2m} \frac{2^m}{m!} = \frac{2^m}{m!}(1.3.5\dots 2m-1)$$

e, portanto,

$$\frac{C_{2m}^{m}}{1.3.5\dots(2m-1)} = \frac{2^m}{m!}.$$

A fórmula anterior, que dá η^n, é válida qualquer que seja $\underline{n}$, dando, por exemplo

$$\eta = 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^m \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-m+1\right)}{1.2\dots m} \varepsilon^{2m} = -\sum \frac{C_{2m}^{m}}{2m-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m},$$

$$\eta^3 = \sum \frac{3.\ C_{2m}^{m}}{(2m-1)(2m-3)} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m}, \text{ etc.}$$

Passemos agora aos desenvolvimentos da função f segundo as potências de x. Sabemos, para isso, que a_n é o coeficiente b_n no desenvolvimento de

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho+1} y^{\rho} z^{\gamma} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} = \frac{r}{a} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} f$$

Assim

$$a_0 = \omega^{\rho+1} K_{-\rho-\gamma}^{\rho+1-\gamma,\ \rho+1+\gamma}$$; quanto a $\underline{a_n}$, procedamos do modo seguinte:

Temos

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho+1} y^{\rho} z^{\gamma} = \sum B_n y^n, \quad \text{com } B_n = \omega^{\rho+1} K_{n-\rho-\gamma}^{\rho+1-\gamma,\ \rho+1+\gamma},$$

$$e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} = \sum J_{n''}(n\varepsilon) y^{n''},$$

de sorte que o nosso $\underline{a_n}$ aparece sob a forma

$$a_n = \sum B_{n'} J_{n''}(n\varepsilon),$$

em que a soma se estende a todos os valores positivos ou não de $\underline{n'}$ e de $\underline{n''}$ cuja soma é $\underline{n}$. Sabe-se ainda que, pondo

$$D_y f = \sum b'_n y^n,$$

e excluindo o caso $n=0$, é ainda

$$a_n = \sum \frac{b'_{n'}}{n} J_{n''}(n\varepsilon), \qquad \left(\text{O } a_n \text{ de } f \text{ é o } \underline{b_n} \text{ de } \frac{1}{n} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} D_y f \right)$$

em que a soma se estende como na anterior.

Os coeficientes $\underline{a_n}$ não têem expressões simples a não ser em certos casos particulares, que vamos vêr. Suponhamos

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} y^\beta = \frac{a}{r} y^\beta = \sum a_n x^n.$$

Aqui $\underline{a_n}$ é igual ao coeficiente $\underline{b_n}$ no desenvolvimento de

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-1+1} y^\beta e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} = y^\beta \varphi(y) = \sum J_{n-\beta}(n\varepsilon) y^n,$$

de sorte que

$$\boxed{a_n = J_{n-\beta}(n\varepsilon)},$$

não esquecendo que β é inteiro, pois a soma $\beta+\gamma$ deve ser inteira e $\gamma = 0$.

Suponhamos

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^0 y^\beta = y^\beta = \sum a_n x^n;$$

então temos ~~[illegible]~~ que calcular o $\underline{b_n}$ de $\frac{1}{n} e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})} \beta y^\beta$, que é $b_n = \frac{\beta}{n} J_{n-\beta}(n\varepsilon)$, pelo que vem

$$~~[illegible]~~ \; y^\beta = a_0 + \sum{}' \frac{\beta}{n} J_{n-\beta}(n\varepsilon) x^n,$$

onde Σ' significa que $n=0$ se exclui da soma.

O termo constante $\underline{a_0}$ desta última fórmula (é o $\underline{b_0}$ de $\frac{r}{a} y^\beta$;) se $\beta = 0$, é igual à unidade. Se $\beta = \pm 1$, tem-se, por ex., $\frac{r}{a} y = \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(y+y^{-1})\right] y = -\frac{\varepsilon}{2} + \cdots$, $a_0 = -\frac{\varepsilon}{2}$, e se β tem outro valor qualquer, é $a_0 = 0$.

~~[illegible]~~

§ 31) <u>Aplicações</u> – Vimos que se tinham as relações

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{t} J_n(t); \qquad J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2 J'_n(t);$$

$$D_x y = x \frac{dy}{dx} = \frac{a}{r} y.$$

Mas é

$$\frac{a}{r} y = \frac{a}{r}(\cos u + i \sin u), ~~[illegible]~~$$

$$\frac{a}{r} y^{-1} = \frac{a}{r}(\cos u - i \sin u), \qquad \text{de sorte que}$$

$$\frac{a}{r} \cos u = \frac{a}{r} \frac{1}{2}(y + y^{-1}), \quad \frac{a}{r} i \sin u = \frac{a}{r} \frac{1}{2}(y - y^{-1}).$$

Assim temos

$$\frac{a}{r}\cos u = \sum x^n \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(n\varepsilon) + J_{n+1}(n\varepsilon)\right) = \sum x^n \frac{1}{2}\,\frac{2n}{n\varepsilon}\,J_n(n\varepsilon),$$

ou seja

$$\boxed{\frac{a}{r}\cos u = \frac{1}{\varepsilon}\sum{}' x^n J_n(n\varepsilon).}$$

Para se ver que não há termo conhecido, notemos que

$$J_{-1}(0) + J_{+1}(0) = 0.$$

Obtém-se analogamente

$$\boxed{\frac{a}{r}\, i \operatorname{sen} u = \sum{}' J_n'(n\varepsilon)\, x^n},$$

assim como se obtêem as igualdades

$$\begin{cases} \checkmark\ \cos u = -\frac{\varepsilon}{2} + \sum{}' \frac{J_n'(n\varepsilon)}{n}\, x^n, \\ \checkmark\ i \operatorname{sen} u = \frac{1}{\varepsilon}\sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n}\, x^n. \end{cases}$$

É fácil, recorrendo às fórmulas do movimento elítico, obter ainda outros desenvolvimentos. Assim

$$\begin{cases} \frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon\sum{}' \frac{J_n'(n\varepsilon)}{n}\, x^n, \\ i(u-g) = \varepsilon i \operatorname{sen} u = \sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n}\, x^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - \varepsilon \operatorname{sen} u = g \\ \frac{du}{dg}(1-\varepsilon\cos u) = 1 \\ e^{ig} = x, \quad ix = \frac{dx}{dg} \end{cases}$$

E, se tivermos em vista que é

$$D_x\left(\frac{r}{a}\right) = D_x(1-\varepsilon\cos u) = x\frac{d(1-\varepsilon\cos u)}{dx} = x\,\frac{d(-\varepsilon\cos u)}{du}\,\frac{du}{dg}\,\frac{dg}{dx} = -\varepsilon i \operatorname{sen} u\,\frac{a}{r},$$

$$x(\varepsilon \operatorname{sen} u)\frac{a}{r}\frac{1}{ix} =$$

$$D_x\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = -2\varepsilon i \operatorname{sen} u,$$

vem

$$\checkmark\ \frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} - 2\sum{}' \frac{J_n(n\varepsilon)}{n^2}\, x^n$$

Esta fórmula, que resulta por uma integração, tem, realmente, no segundo membro o termo constante $1+\frac{3\varepsilon^2}{2}$. De facto, o coeficiente $\underline{a_0}$ aqui é igual ao coeficiente ~~b_0~~ no desenvolvimento de $\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell+1}$, isto é, é igual a H_0^3.

Ora

$$H_0^3 = \sum\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2m} C_3^{2m}\, C_{2m}^{m} = 1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 2\cdot\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2}.$$

Deduz-se também a relação

$$\checkmark\ \frac{1}{2} D_{x^2}^2\left(\frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{a}{r} = 1.$$

<u>Consideremos</u> ainda os <u>exemplos seguintes</u>:

$$\frac{X}{a} = \frac{r\cos w}{a} = \cos u - \varepsilon = -\frac{3\varepsilon}{2} + \sum{}' \frac{J_n'(n\varepsilon)}{n}\, x^n;$$

[redacted] $i\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\text{sen}\,u = i\eta\,\text{sen}\,u = \frac{\eta}{\varepsilon}\sum{}'\frac{J_n(n\varepsilon)}{n}x^n$;

$$\cos w = \frac{a}{r}\cos u - \frac{a}{r}\varepsilon = -\varepsilon + \frac{\eta^2}{\varepsilon}\sum{}' J_n(n\varepsilon)x^n;$$

$$i\,\text{sen}\,w = \eta\frac{a}{r}\,i\,\text{sen}\,u = \eta\sum{}' J_n'(n\varepsilon)x^n;$$

$$\frac{a^3}{r^3}\frac{X}{a} = \frac{a^2}{r^2}\cos w = D_x^2\left(\frac{X}{a}\right) = \sum{}' n\,J_n'(n\varepsilon)\,x^n;$$

$$\frac{a^3}{r^3}\frac{iY}{a} = \frac{a^2}{r^2}\,i\,\text{sen}\,w = D_x^2\left(\frac{iY}{a}\right) = \frac{\eta}{\varepsilon}\sum{}' J_n(n\varepsilon)x^n.$$

Fixemos, ainda, as quatro igualdades seguintes:

$$\frac{a}{r}\cos 2u = \sum{}'\left[\frac{1+\eta^2}{\varepsilon^2}J_n(n\varepsilon) - \frac{2\,J_n'(n\varepsilon)}{n\varepsilon}\right]x^n;$$

$$\frac{a}{r}\,i\,\text{sen}\,2u = \sum{}'\left[\frac{2\,J_n'(n\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2\,J_n(n\varepsilon)}{n\varepsilon^2}\right]x^n;$$

$$\cos 2u = \sum{}'\left[\frac{4\,J_n'(n\varepsilon)}{n\varepsilon} - \frac{4\,J_n(n\varepsilon)}{n^2\varepsilon^2}\right]x^n;$$

$$i\,\text{sen}\,2u = \sum{}'\left[\frac{2(1+\eta^2)}{n\varepsilon^2}J_n(n\varepsilon) - \frac{4\,J_n'(n\varepsilon)}{n^2\varepsilon}\right]x^n.$$

Verifiquemos, por exemplo, a primeira. Tem-se

$$\frac{a}{r}\cos 2u = \frac{a}{r}\,\frac{e^{i2u}+e^{-i2u}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}y^2 + \frac{a}{r}y^{-2}\right) = \frac{1}{2}\sum\left[J_{n-2}(n\varepsilon) + J_{n+2}(n\varepsilon)\right]x^n;$$

mas, como se sabe, é

~~[illegible]~~

$$\left.\begin{aligned} J_{n-1}(t) &= \frac{n}{t}J_n(t) + J_n'(t) \\ J_{n+1}(t) &= \frac{n}{t}J_n(t) - J_n'(t) \end{aligned}\right\},$$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

e, portanto,

$$\begin{cases} J_{n-2}(t) + J_n(t) = \frac{2(n-1)}{t}J_{n-1}(t) = \frac{2(n-1)}{t}\left\{\frac{n}{t}J_n(t) + J_n'(t)\right\}, \\ J_n(t) + J_{n+2}(t) = \frac{2(n+1)}{t}\left\{\frac{n}{t}J_n(t) - J_n'(t)\right\}, \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} J_{n-2}(t) = \left(\frac{2n(n-1)}{t^2}-1\right)J_n(t) + \frac{2(n-1)}{t}J_n'(t), \\ J_{n+2}(t) = \left(\frac{2n(n+1)}{t^2}-1\right)J_n(t) - \frac{2(n+1)}{t}J_n'(t), \end{cases}$$

donde

$$J_{n-2}(t) + J_{n+2}(t) = 2J_n + 4\left\{\left(\frac{n^2}{t^2}-1\right)J_n - \frac{1}{t}J_n'(t)\right\}.$$

Substituindo aqui $\underline{t}$ por $\underline{n\varepsilon}$, tem-se

$$\frac{1}{2}\left[J_{n-2}(n\varepsilon)+J_{n+2}(n\varepsilon)\right]=J_n(n\varepsilon)+2\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)J_n-\frac{1}{n\varepsilon}J_n'(n\varepsilon)\right\}=$$

$$=\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}J_n-\frac{2}{n\varepsilon}J_n'=\frac{1+\eta^2}{\varepsilon^2}J_n-\frac{2}{n\varepsilon}J_n'.$$

Assim será

$$\frac{a}{r}\cos 2u=\sum{}'\left[\frac{1+\eta^2}{\varepsilon^2}J_n(n\varepsilon)-\frac{2J_n'(n\varepsilon)}{n\varepsilon}\right]x^n.$$

Não comparece termo constante pelo facto de ser $J_n(0)=0$, se $n\neq 0$.

Analogamente se obteriam os desenvolvimentos de $\cos(w-u)$ e $\operatorname{sen}(w-u)$. X

§ 32) Outra forma de desenvolvimento em série de x – Seja f uma função para qual se faz a hipótese do desenvolvimento possível em série ordenada segundo as potências inteiras e positivas de

$$y_1=\frac{\varepsilon}{2}y,\quad y_2=\frac{\varepsilon}{2}y^{-1},$$

isto é, para a qual se supõe

$$f=\sum b_{q_1,q_2}\,y_1^{q_1}y_2^{q_2}.$$

É evidente que f também se pode, então, escrever sob a forma

$$f=\sum a_{p_1,p_2}\,x_1^{p_1}x_2^{p_2},$$

pondo

$$x_1=\frac{\varepsilon}{2}x,\quad x_2=\frac{\varepsilon}{2}x^{-1},$$

e supondo $\underline{p_1}$ e $\underline{p_2}$ inteiros e positivos. Quando se escreve

$$f=\sum a_n x^n,$$

vê-se que

$$a_n=\sum a_{p_1,p_2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2},$$

onde a soma deve estender-se aos valores de $\underline{p_1}$ e de $\underline{p_2}$ tais que a diferença p_1-p_2 seja igual a $\underline{n}$.

Sabemos, por outro lado, que $\underline{a_n}$ é o coeficiente de y^n no desenvolvimento de

$$\frac{r}{a}\,f\,e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y\,[illegible]\,y^{-1})}.$$

[illegible]

Do mesmo modo que $\underline{a_n}$ se compara com o $\underline{b_n}$ dum certo desenvolvimento, trata-se agora de comparar os a_{p_1,p_2} com os b_{q_1,q_2} dum certo desenvolvimento.

[illegible]

Ora pondo

$$\frac{r}{a}\,f\,e^{\frac{n\varepsilon}{2}(y-y^{-1})}=\sum b_n y^n=\sum b_{q_1,q_2}\,y_1^{q_1}y_2^{q_2},$$

é $\quad b_n=\sum b_{q_1,q_2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q_1+q_2}$, onde a soma se deve estender aos $\underline{q_1}$ e $\underline{q_2}$ tais que a sua diferença seja igual a $\underline{n}$. Então tem-se

$$a_n = \sum a_{p_1,p_2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2} = \sum b_{q_1,q_2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q_1+q_2}.$$

Sob esta forma vê-se que deve ser $a_{p_1,p_2} = b_{p_1,p_2}$. Assim, para se achar a_{p_1,p_2} do desenvolvimento de

$$f = \sum a_{p_1,p_2} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

deve achar-se o b_{p_1,p_2} do desenvolvimento de

$$(1-y_1-y_2)\, e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)} f,$$

pois $\frac{\wedge}{a} = 1-y_1-y_2$ e pois que $\underline{n}$ deve substituir-se por p_1-p_2, visto que p_1-p_2 é conhecido (p_1 e p_2 são dados) e representa $\underline{n}$

Desta maneira, ponhamos agora $e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)} = e^{(p_1-p_2)y_1} \cdot e^{-(p_1-p_2)y_2}$ e calculemos o coeficiente de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ no desenvolvimento de

$$y_1^{q_1} y_2^{q_2} \; e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)} \;.$$

Êsse coeficiente é

$$(-1)^{p_2-q_2} \frac{(p_1-p_2)^{p_1-q_1}}{(p_1-q_1)!} \cdot \frac{(p_1-p_2)^{p_2-q_2}}{(p_2-q_2)!}.$$

É claro que, nesta notação, $p!$ é o número factorial se $p>0$; é igual a $\underline{1}$, se $p=0$; mas, se p é negativo, se, por exemplo, $p_1 < q_1$, então, como o coeficiente respectivo tem de ser nulo, deverá fazer-se $p! = \infty$. E temos

$$(1-y_1-y_2)\, e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)} f =$$

$$= (1-y_1-y_2)\, e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)} \sum b_{q_1,q_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2},$$

de sorte que

$$a_{p_1,p_2} = \sum b_{q_1,q_2} (-1)^{p_2-q_2} \frac{(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-q_2}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2)!} = \sum b_{q_1,q_2} (-1)^{p_2-q_2} \frac{(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-1-q_2}}{(p_1-q_1-1)!\,(p_2-q_2)}$$

$$= \sum (-1)^{p_2-q_2-1} b_{q_1,q_2} \frac{(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-q_2-1}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2-1)!} =$$

$$= \sum b_{q_1,q_2} (-1)^{p_2-q_2} \frac{(q_1-q_2)\,(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-q_2-1}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2)!},$$

pois

$$(p_1-p_2) = (p_1-q_1) + (p_2-q_2) = (q_1-q_2).$$

Se supomos $p_1 = p_2 = p$, tem-se

$a_{p,p} = b_{p,p} - b_{p,p-1} - b_{p-1,p}$, como se vê notando que tem de procurar o b_{pp} de $(1-y_1-y_2)\, e^{(p-p)(y_1-y_2)} f = (1-y_1-y_2) \sum b_{q_1,q_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Chega-se à mesma expressão de a_{p_1,p_2} notando que é

$$D_y\left(y_1^{q_1} y_2^{q_2}\right) = y \frac{d}{dy}\left\{\left(\frac{\xi}{2} y\right)^{q_1}\left(\frac{\xi}{2} y^{-1}\right)^{q_2}\right\} =$$

$$= y\left\{ q_1\left(\frac{\xi}{2} y\right)^{q_1-1} \frac{\xi}{2}\left(\frac{\xi}{2} y^{-1}\right)^{q_2} + \left(\frac{\xi}{2} y\right)^{q_1} q_2\left(\frac{\xi}{2} y^{-1}\right)^{q_2-1}\left(-\frac{\xi}{2}\frac{1}{y^2}\right)\right\} =$$

$$= q_1 y_1^{q_1} y_2^{q_2} - q_2 y_1^{q_1} y_2^{q_2} = (q_1 - q_2)\, y_1^{q_1} y_2^{q_2},$$

e que $a_{p_1p_2}$ é o coeficiente de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ no desenvolvimento de

$$\frac{1}{p_1-p_2} D_y f\, e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)}$$

Suponhamos que pode encontrar-se fàcilmente o desenvolvimento

$$\frac{\xi}{a} f = \sum b'_{q_1,q_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2};$$

então a_{p_1,p_2} é o coeficiente de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ no desenvolvimento de

$$\sum b'_{q_1,q_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2} \cdot e^{(p_1-p_2)(y_1-y_2)}, \quad \text{ou seja, pois,}$$

$$a_{p_1,p_2} = \sum b'_{q_1,q_2} (-1)^{p_2-q_2} \frac{(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-q_2}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2)!}.$$

E, anàlogamente ao que anteriormente se disse, é

$$a_{p,p} = b'_{p,p}.$$

Para os casos mais simples, em que supomos $p_1+p_2 \leqq 4$, limitando-nos, entretanto, ao caso $p_1 > p_2$, encontram-se os seguintes resultados:

$a_{1,0} = b_{1,0} = b'_{0,0} + b'_{1,0}$;

$a_{2,1} = -b_{1,0} - 2\, b_{2,0} - \frac{1}{2} b_{0,1} + b_{2,1} = -\frac{1}{2} b'_{0,0} - b'_{1,0} - b'_{2,0} + \frac{1}{2} b'_{0,1} + b'_{1,1} + b'_{2,1}$;

$a_{2,0} = b_{1,0} + b_{2,0} = 2\, b'_{0,0} + 2\, b'_{1,0} + b'_{2,0}$;

$$a_{3,1} = -2b_{1,0} - 4b_{2,0} - 3b_{3,0} - \frac{2}{3}b_{0,1} + b_{2,1} + b_{3,1} =$$

$$= -\frac{8}{3}b'_{0,0} - 4b'_{1,0} - 4b'_{2,0} - 2b'_{3,0} + \frac{4}{3}b'_{0,1} + 2b'_{1,1} + 2b'_{2,1} + b'_{3,1};$$

$$a_{3,0} = \frac{3}{2}b_{1,0} + 2b_{2,0} + b_{3,0} = \frac{9}{2}b'_{0,0} + \frac{9}{2}b'_{1,0} + 3b'_{2,0} + b'_{3,0};$$

$$a_{4,0} = \frac{8}{3}b_{1,0} + 4b_{2,0} + 3b_{3,0} + b_{4,0} = \frac{32}{3}b'_{0,0} + \frac{32}{3}b'_{1,0} + 8b'_{2,0} + 4b'_{3,0} + b'_{4,0}.$$

Dissémos que considerávamos unicamente o caso em que $p_1 > p_2$, e isso pelo seguinte: se permutarmos $\underline{p_1}$ com $\underline{p_2}$ e $\underline{q_1}$ com $\underline{q_2}$, obtem-se a_{p_2,p_1} em função dos b_{q_2,q_1} e de coeficientes que são os mesmos que anteriormente. De facto o coeficiente de b_{q_2,q_1} é, então,

$$(-1)^{p_1-q_1} \frac{(q_2-q_1)(p_2-p_1)^{p_1+p_2-q_1-q_2-1}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2)!} =$$

$$= (-1)^{\cancel{p_1}-\cancel{q_1}\cancel{+1}+\cancel{p_1}+p_2-\cancel{q_1}-q_2-\cancel{1}} \frac{(q_1-q_2)(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-q_2-1}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2)!} =$$

$$= (-1)^{p_2-q_2} \frac{(q_1-q_2)(p_1-p_2)^{p_1+p_2-q_1-q_2-1}}{(p_1-q_1)!\,(p_2-q_2)!},$$

que é, precisamente, a expressão do coeficiente de b_{q_1,q_2} na expressão de a_{p_1,p_2}.

§ 33) Aplicações. Consideremos, como primeiro exemplo,

$$f = \log\frac{\lambda}{a} = \log(1-\eta_1-\eta_2).$$

Tem-se aqui

$$\log(1-\eta_1-\eta_2) = -(\eta_1+\eta_2) - \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)^2 - \dots -$$

$$- \frac{1}{n}(\eta_1+\eta_2)^n - \dots,$$

e, portanto,

$$b_{q_1,q_2} = -\frac{1}{q_1+q_2}\, C^{q_2}_{q_1+q_2}.$$

Tira-se, agora, imediatamente

$$\log\frac{r}{a} = x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 + \cdots - (x_1+x_2) + \frac{3}{2}(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + \cdots$$
$$- \frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2) + \frac{11}{3}(x_1^3x_2 + x_1x_2^3) + \cdots$$
$$- \frac{17}{6}(x_1^3+x_2^3) + \cdots$$
$$- \frac{71}{12}(x_1^4+x_2^4) + \cdots$$
$$- - - - - -$$

De facto é

$$\frac{r}{a}\log\frac{r}{a} = (1-y_1-y_2)\sum b_{q_1,q_2}\, y_1^{q_1}y_2^{q_2} = \sum b'_{q_1,q_2}\, y_1^{q_1}y_2^{q_2}.$$

logo o coeficiente de x_1x_2 é $a_{11} = b'_{11}$; o de $x_1^3x_2$, por exemplo, é $a_{3,1} = -\frac{8}{3}b'_{30} - 4b'_{21} \ldots$, como atrás se viu, etc. Mas b'_{11}, etc. tiram-se de

$$\frac{r}{a}\log\frac{r}{a} = (1-y_1-y_2)\sum(-1)\frac{C^{q_2}_{q_1+q_2}}{q_1+q_2}\,y_1^{q_1}y_2^{q_2}$$

sendo

$$b'_{11} = -\frac{C_2^1}{2} + \frac{C_1^1}{1} + \frac{C_1^0}{1} = -1+1+1 = 1, \text{ etc.}$$

§33) Continuação — Procuramos, como segundo exemplo, o desenvolvimento de $i(w-g) = \log\frac{z}{x}$, onde, como se sabe, $w-g$ se diz equação do centro. Como é

$$D_x\left(\log\frac{z}{x}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\log\frac{z}{x}\right) = x\cdot\frac{1}{\frac{z}{x}}\cdot\frac{\frac{dz}{dx}x - z}{x^2} = \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx}x - z\right) = \frac{x\,dz}{z\,dx} - 1 =$$
$$= \eta\frac{a^2}{r^2} - 1,$$

o nosso desenvolvimento de $i(w-g) = \log\frac{z}{x}$ em série ordenada segundo as potências de x_1 e de x_2 resulta das seguintes considerações. Se pomos

$$i(w-g) = \log\frac{z}{x} = \sum A_{p_1,p_2}\,x_1^{p_1}x_2^{p_2},$$

é $D_x\left(\log\frac{z}{x}\right) = \sum A_{p_1,p_2}\,D_x(x_1^{p_1}x_2^{p_2})$. Mas

$$D_x(x_1^{p_1}x_2^{p_2}) = \left(p_1x_1^{p_1-1}\frac{e}{2}\,x_2^{p_2} + p_2x_2^{p_2-1}\frac{e}{2}\,\frac{-1}{x^2}\,x_1^{p_1}\right)x =$$

$$= p_1 x_1^{p_1} x_2^{p_2} - p_2 x_2^{p_2} x_1^{p_1} = (p_1 - p_2)\, x_2^{p_2} x_1^{p_1},$$

de sorte que

$$D_x\left(\log \frac{z}{x}\right) = \sum A_{p_1,p_2}(p_1-p_2)\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} = \sum a_{p_1,p_2}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

pondo $a_{p_1,p_2} = A_{p_1,p_2}(p_1-p_2)$. Assim temos de achar o desenvolvimento, segundo as potências de $\underline{x_1}$ e de $\underline{x_2}$, de $D_x(\log \frac{z}{x})$, ou de

$$f = \eta \frac{a^2}{r^2}, \quad \text{pois} \quad D_x\left(\log \frac{z}{x}\right) = f - 1.$$

Relativamente a esta função f, o coeficiente a_{p_1,p_2} é o coeficiente b_{p_1,p_2} no desenvolvimento de

$$\frac{r}{a} f\, e^{(p_1-p_2)(\gamma_1-\gamma_2)},$$

mas é melhor exprimir os a_{p_1,p_2} nos coeficientes b'_{q_1,q_2} do desenvolvimento, segundo as potências de $\underline{y_1}$ e de y_2, da função

$$\frac{r}{a} f = \frac{r}{a}\eta \frac{a^2}{r^2} = \eta \frac{a}{r}.$$

Ora tem-se

$$\eta \frac{a}{r} = \eta \cdot \frac{1}{1-y_1-y_2} = \frac{(1-4y_1y_2)^{1/2}}{1-y_1-y_2},$$

visto que é

$$y_1 = \frac{\varepsilon}{2}\gamma, \quad y_2 = \frac{\varepsilon}{2}\gamma^{-1}, \qquad y_1 y_2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \quad 4y_1y_2 = \varepsilon^2,$$

$$(1-4y_1y_2)^{1/2} = (1-\varepsilon^2)^{1/2} = (1-\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2} = \cos\varphi = \eta.$$

Ora é também

$$(1-4y_1y_2)^{1/2} = \sum y_1^q y_2^q \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-q+1)}{1.2\cdots q}\, 2^{2q}(-1)^q =$$

$$= -\sum_{q=0}^{\infty} y_1^q y_2^q \cdot \frac{1.3\cdots(2q-3)}{1.2\cdots q}\, 2^q = -\sum_{q=0}^{\infty} y_1^q y_2^q \frac{C_{2q}^q}{2q-1},$$

pois, sendo

$$\frac{C_{2q}^q}{2q-1} = \frac{2q(2q-1)\cdots(q+1)}{1.2\cdots q}\cdot\frac{1}{2q-1} = \frac{(2q)!}{q!\,q!}\cdot\frac{1}{2q-1},$$

$$\frac{(2q)!}{q!\,2^q} = \frac{1.2.3\cdots 2q}{1.2\cdots q}\cdot\frac{1}{2.2\cdots 2} = \frac{1.2.3.4\cdots(2q-1)2q}{2.4\cdots 2q} = 1.3.5\cdots(2q-1),$$

vem

$$\frac{C_{2q}^q}{2q-1} = \frac{1}{q!}\cdot\frac{1}{2q-1}\cdot 2^q\cdot(1.3.5\cdots(2q-1)) = \frac{1.3\cdots(2q-3)}{1.2\cdots q}\, 2^q.$$

e, como

$$\frac{1}{1-(y_1+y_2)} = 1+(y_1+y_2)+(y_1+y_2)^2+\cdots = \sum y_1^{q_1} y_2^{q_2}\, C_{q_1+q_2}^{q_2},$$

tem-se

$$\eta\frac{a}{r} = -\sum_{q=0}^{\infty} y_1^q y_2^q \frac{C_{2q}^q}{2q-1} \cdot \sum y_1^{q_1} y_2^{q_2}\, C_{q_1+q_2}^{q_2}.$$

Vê-se que é

$$b'_{q_1,q_2} = -\sum_0^{\infty} \frac{C_{2q}^q\, C_{q_1+q_2-2q}^{q_2-q}}{2q-1}.$$

Quanto ao termo constante de ~~[illegible]~~ $\eta\frac{a}{r}$ é a unidade, como se conclui da expressão $\eta\frac{a}{r} = \frac{(1-4y_1y_2)^{1/2}}{1-y_1-y_2}$. Assim

$$\eta\frac{a}{r} = \sum b'_{q_1,q_2}\, y_1^{q_1} y_2^{q_2}, \quad \text{com } b'_{0,0}=1.$$

A expressão anterior dos $b'_{q_1 q_2}$ dá, além de $b'_{0,0}=1$,

(VÊ VERSO)

$$b'_{0,1}=1,\ b'_{1,0}=1,\ b'_{2,0}=1,\ b'_{3,0}=1,\ b'_{4,0}=1, \text{ etc.}$$

$$b'_{1,1}=0,\ b'_{2,1}=1,\ b'_{3,1}=2,\ b'_{2,2}=0, \text{ etc.}$$

Tem-se, agora,

$$a_{1,0} = 1+1=2, \qquad a_{0,1} = b'_{0,0}+b'_{0,1} = 1+1=2, \quad \text{etc.}$$

$$A_{1,0} = \frac{a_{10}}{1} = 2, \qquad A_{0,1} = \frac{2}{-1} = -2;$$

e, também,

$$a_{2,0} = 2b'_{0,0}+2b'_{1,0}+b'_{2,0} = 2+2+1=5,$$

$$A_{2,0} = \frac{5}{2}, \text{ etc.}$$

Vem, pois, como se quere,

$$\begin{aligned} i(w-g) = \log\frac{z}{x} = {} & 2(x_1-x_2) - (x_1^2x_2 - x_1x_2^2) + \cdots \\ & + \frac{5}{2}(x_1^2-x_2^2) - \frac{11}{3}(x_1^3x_2 - x_1x_2^3) + \cdots \\ & + \frac{13}{3}(x_1^3-x_2^3) + \cdots \\ & + \frac{103}{12}(x_1^4-x_2^4) + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Êste desenvolvimento sugere ainda algumas observações. O termo conhecido é igual a zero. De facto, ~~[illegible]~~ viu-se no capítulo anterior que $w-g$, considerada como série de Fourier, é uma série ímpar, o que exige que o termo constante seja nulo. Uma segunda ~~[illegible]~~ observação é a seguinte: O termo constante é, precisamente, o termo que se obtém ~~[illegible]~~ considerando os termos $x_1^q x_2^q$, nos quais o expoente de x_1 é igual ao expoente de x_2.

assim, não faremos que escrever tais ~~[illegible]~~ termos, não aparecendo ~~[illegible]~~ dificuldade na utilização da igualdade $A_{p_1,p_2} = \frac{a_{p_1,p_2}}{p_1-p_2}$, pois não tem que supôr-se $p_1=p_2$.

Uma terceira aplicação trata do desenvolvimento de $\left(\frac{r}{a}-1\right)^q$, onde q é um inteiro positivo. Para esta função tem-se imediatamente

$$b_{q_1,q_2}=(-1)^q\, C_q^{q_1}.$$

A soma q_1+q_2 é aqui necessàriamente igual a q. (Veja-se o final do verso)

§ 34) Observações - Utilizando os desenvolvimentos em séries de $\underline{y}$, $\underline{z}$ ou $\underline{x}$ referidos no § 32, encontra-se

$$\log\frac{r}{a}=\log\omega-\sum_1^\infty\frac{\theta^n}{n}(y^n+y^{-n})=$$
$$=-\theta^2+\frac{\theta^4}{2}-\frac{\theta^6}{3}+\frac{\theta^8}{4}-\cdots-\sum_1^\infty\frac{\theta^n}{n}(y^n+y^{-n})$$
$$=-\log\omega'+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\theta^n}{n}(z^n+z^{-n})$$
$$=-3\left(\theta^2+\frac{\theta^6}{3}+\cdots\right)-\left(\frac{\theta^4}{2}+\frac{\theta^8}{4}+\cdots\right)+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\theta^n}{n}(z^n+z^{-n});$$
$$i(w-u)=\log\frac{z}{y}=\sum_1^\infty\frac{\theta^n}{n}(y^n-y^{-n})=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{\theta^n}{n}(z^n-z^{-n});$$
$$i(u-g)=\log\frac{y}{x}=\frac{\varepsilon}{2}(y-y^{-1})=\eta\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\theta^n(z^n-z^{-n});$$
$$i(w-g)=\log\frac{z}{x}=\frac{\varepsilon}{2}(y-y^{-1})+\sum_1^\infty\frac{\theta^n}{n}(y^n-y^{-n})=$$ (Vêr o verso)
$$=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\left(\eta+\frac{1}{n}\right)\theta^n(z^n-z^{-n}).$$

Em $i(w-g)$ o coeficiente de $z-z^{-1}$ é $\underline{\varepsilon}$ e o coeficiente de $y-y^{-1}$ é $\varepsilon\left(1+\frac{\theta^2}{2}\right)\equiv$ ~~[illegible]~~ $\frac{\varepsilon}{2}+\theta=\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\varepsilon\left(1+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)$, pois $\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\theta^2}{2}$.

§ 35) Estudo doutro desenvolvimento importante - Na Mecânica Celeste é, ainda, importante o estudo do desenvolvimento segundo as potências de $\underline{x_1}$ e de $\underline{x_2}$ da função

$$X^{p,\tau}=\left(\frac{r}{a}\right)^p\left(\frac{z}{x}\right)^\tau,$$

sob a forma seguinte:

$$X^{\rho,\sigma} = \sum X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2}.$$

Para se fazer o cálculo dos coeficientes $X^{\rho,\sigma}_{p_1 p_2}$ duma maneira conveniente, vamos dar dos mesmos ~~uma~~ fórmula de recorrência.

Consideremos $\frac{r}{a}$ e $\frac{z}{x}$, assim como x_1 e x_2, como funções de $\underline{\varepsilon}$ e de $\underline{x}$. Tem-se, então,

$$D_\varepsilon X^{\rho,\sigma} = \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} X^{\rho,\sigma} = \varepsilon \left\{ \rho\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho-1}\frac{1}{a}\frac{dr}{d\varepsilon}\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma} + \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho}\sigma\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma-1}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{z}{x}\right)\right\} =$$

$$= \rho\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma}\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho}\frac{a}{r}\, D_\varepsilon\left(\frac{r}{a}\right) + \sigma\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho}\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma}\frac{x}{z}\, D_\varepsilon\left(\frac{z}{x}\right) =$$

$$= X^{\rho,\sigma}\left[\rho\frac{a}{r} D_\varepsilon\left(\frac{r}{a}\right) + \sigma\frac{x}{z} D_\varepsilon\left(\frac{z}{x}\right)\right]. \qquad (\alpha)$$

Por outro lado é

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u,$$

$$\frac{\partial\frac{r}{a}}{\partial\varepsilon} = -\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u \frac{\partial u}{\partial\varepsilon}, \qquad u - \varepsilon\operatorname{sen} u = g, \qquad \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} - \operatorname{sen} u - \varepsilon\cos u\frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\left(1-\varepsilon\cos u\right) = \operatorname{sen} u, \qquad \frac{\partial\frac{r}{a}}{\partial\varepsilon} = -\cos u + \varepsilon\operatorname{sen} u\,\frac{\operatorname{sen} u}{1-\varepsilon\cos u} = \frac{-\cos u + \varepsilon\cos^2 u + \varepsilon\operatorname{sen}^2 u}{1-\varepsilon\cos u} =$$

$$= \frac{\varepsilon - \cos u}{1-\varepsilon\cos u} = -\frac{\frac{r}{a}\cos w}{\frac{r}{a}} = -\cos w\,;$$

e verifica-se analogamente a relação

$$\frac{\partial w}{\partial\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen} w}{\eta^2}\left(1 + \eta^2\frac{a}{r}\right).$$

Então o valor $\frac{a}{r} D_\varepsilon\left(\frac{r}{a}\right)$, que figura em (α), é dado por

$$\frac{a}{r} D_\varepsilon\left(\frac{r}{a}\right) = -\frac{a}{r}\,\varepsilon\cos w = -\varepsilon\cos w \cdot \frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon^2} = \frac{1}{\eta^2}\left(-\varepsilon\cos w - \varepsilon^2\cos^2 w\right) =$$

$$= -\frac{1}{\eta^2}\left(\varepsilon\cos w + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2w\right).$$

Do mesmo modo se encontra o valor de $\frac{x}{z} D_\varepsilon\left(\frac{z}{x}\right)$, que também figura em (α). É

$$\frac{x}{z} D_\varepsilon\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{i}{\eta^2}\left(2\varepsilon\operatorname{sen} w + \frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{sen} 2w\right).$$

Assim será

$$\eta^2 D_\varepsilon X^{\rho,\sigma} = X^{\rho,\sigma}\left[-\rho\frac{\varepsilon^2}{2} - \rho\varepsilon\cos w + 2\sigma\varepsilon i\operatorname{sen} w - \rho\frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2w + \sigma\frac{\varepsilon^2}{2} i\operatorname{sen} 2w\right].$$

Até aqui tratámos com a variável independente ε. Agora vamos tratar com a variável independente g ou $\underline{x}$. Tem-se

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{a}\right)}{\partial g} = \varepsilon\operatorname{sen} u\frac{\partial u}{\partial g}, \qquad \frac{\partial u}{\partial g} - \varepsilon\cos u\frac{\partial u}{\partial g} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial g} = \frac{1}{1-\varepsilon\cos u} = \frac{a}{r},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{a}\right)}{\partial g} = \varepsilon\operatorname{sen} u\,\frac{a}{r} = \varepsilon\,\frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{\eta}\operatorname{sen} w.$$

Encontra-se analogamente

$e^{ig} = x$

$$\frac{\partial w}{\partial g} = \eta \frac{a^2}{r^2}.$$

$$= \frac{a}{r} x \frac{\partial \frac{r}{a}}{\partial x} = \frac{a}{r} x \frac{\partial \frac{r}{a}}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{a}{r} x \, \varepsilon \,\text{sen}\, u \frac{a}{r} \frac{1}{ix} = -i \varepsilon \,\text{sen}\, u \frac{a^2}{r^2} \quad (\text{Vêr o verso})$$

Então será

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{r} D_x\left(\frac{r}{a}\right) &= -\frac{i}{\eta^3}\left(\varepsilon \,\text{sen}\, w + \frac{\varepsilon^2}{2} \text{sen}\, 2w\right), \\ \frac{x}{z} D_x\left(\frac{z}{x}\right) &= -1 + \frac{1}{\eta^3}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon \cos w + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2w\right). \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Mas tendo-se

$$D_x X^{\rho,\sigma} = x\left\{ \rho\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho-1} \frac{d\left(\frac{r}{a}\right)}{dx}\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma} + \sigma\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho}\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma-1}\frac{d\left(\frac{z}{x}\right)}{dg}\right\} =$$

$$= \rho \frac{a}{r} X^{\rho,\sigma} D_x\left(\frac{r}{a}\right) + \sigma \frac{x}{z} D_x\left(\frac{z}{x}\right) X^{\rho,\sigma}$$

encontra-se a razão por que se calcularam as quantidades dos primeiros membros de (β), e tem-se

$$D_x X^{\rho,\sigma} = \rho X^{\rho,\sigma}\left\{-\frac{i}{\eta^3}\left(\varepsilon \,\text{sen}\, w + \frac{\varepsilon^2}{2}\text{sen}\, 2w\right)\right\} + \sigma X^{\rho,\sigma}\left\{-1 + \frac{1}{\eta^3}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon\cos w + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2w\right)\right.;$$

donde se tira

$$\eta^3\left[D_x X^{\rho,\sigma} + \sigma X^{\rho,\sigma}\right] = X^{\rho,\sigma}\left[\sigma + \sigma\frac{\varepsilon^2}{2} + 2\sigma\varepsilon\cos w - \rho\,\varepsilon\, i \,\text{sen}\, w + \sigma\frac{\varepsilon^2}{2}\cos 2w - \rho\frac{\varepsilon^2}{2} i\,\text{sen}\, 2w\right].$$

Tendo em vista que é

$$1 - 4x_1x_2 = 1 - 4\frac{\varepsilon}{2}x\frac{\varepsilon}{2}x^{-1} = 1 - \varepsilon^2 = 1 - \text{sen}^2\varphi = \cos^2\varphi = \eta^2,$$

vê-se que vem

$$\eta^3\left(D_x X^{\rho,\sigma} + \sigma X^{\rho,\sigma}\right) + (1 - 4x_1x_2) D_\varepsilon X^{\rho,\sigma} =$$

$$= X^{\rho,\sigma}\left[\sigma + (\sigma-\rho)\frac{\varepsilon^2}{2} + (2\sigma-\rho)\varepsilon z + (\sigma-\rho)\frac{\varepsilon^2}{2}z^2\right].$$

Substituindo aqui $\frac{\varepsilon^2}{2} = 2x_1x_2$, $\varepsilon z = 2x_1\frac{z}{x}$, $\frac{\varepsilon^2}{2}z^2 = 2x_1^2\frac{z^2}{x^2}$, tem-se ainda

$$\eta^3\left(D_x X^{\rho,\sigma} + \sigma X^{\rho,\sigma}\right) + (1 - 4x_1x_2) D_\varepsilon X^{\rho,\sigma} =$$

$$= \left[\sigma + 2(\sigma-\rho)x_1 x_2\right] X^{\rho,\sigma} + (2\sigma-\rho)\, 2x_1\frac{z}{x} X^{\rho,\sigma} + (\sigma-\rho) X^{\rho,\sigma}\cdot 2x_1^2\frac{z^2}{x^2} =$$

$$= \left[\sigma + 2(\sigma-\rho)x_1x_2\right] X^{\rho,\sigma} + 2(2\sigma-\rho)x_1 X^{\rho,\sigma+1} + 2(\sigma-\rho)x_1^2 X^{\rho,\sigma+2}.$$

Posto isto, tenhamos em conta as relações seguintes:

$$D_x f = D_{x_1} f - D_{x_2} f, \quad D_\varepsilon f = D_{x_1} f + D_{x_2} f,$$

das quais vamos ~~ver~~ verificar a segunda, por exemplo. É

~~[illegible] $D_{x_1} f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}$ [illegible]~~

$$f(\varepsilon, x) = f\left(2\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right),$$

e, portanto,

$$D_{x_1} f = x_1\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{2x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x_2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\right) = \frac{\partial f}{\partial \xi}\sqrt{x_1x_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\,,$$

$$D_{x_2} f = x_2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{2x_1}{2\sqrt{x_1x_2}} - \frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{x_1}\frac{1}{x_2}\frac{1}{2\sqrt{x_2}}\right) = \frac{\partial f}{\partial \xi}\sqrt{x_1x_2} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\,,$$

donde se tira

$$D_{x_1} f + D_{x_2} f = 2\frac{\partial f}{\partial \xi}\sqrt{x_1x_2} = \frac{\partial f}{\partial \xi}2\sqrt{\frac{\xi}{2}x\frac{\xi}{2}x^{-1}} = \xi\frac{\partial f}{\partial \xi} = D_\xi f,$$

como se queria demonstrar.

Se observarmos ainda que é

$$\eta^3 = (1-4x_1x_2)^{3/2} = \sum_{0}^{\infty}\frac{3\,C_{2p}^{p}}{(2p-1)(2p-3)}x_1^{p}x_2^{p} = 1-6x_1x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1^3x_2^3+6x_1^4x_2^4+\dots$$

vem

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{3\,C_{2p}^{p}}{(2p-1)(2p-3)}x_1^{p}x_2^{p}\left(\sum X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma}(p_1-p_2)x_1^{p_1}x_2^{p_2} + \sigma\sum X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\right) +$$

$$+ (1-4x_1x_2)\sum X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma}(p_1+p_2)x_1^{p_1}x_2^{p_2} = [\sigma + 2(\sigma-\rho)x_1x_2]\sum X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma}x_1^{p_1}x_2^{p_2} +$$

$$+ 2(2\sigma-\rho)x_1\sum X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma+1}x_1^{p_1}x_2^{p_2} + 2(\sigma-\rho)x_1^2\sum X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma+2}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\,,$$

donde, igualando os coeficientes de $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ em ambos os membros,

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{3\,C_{2p}^{p}\,(p_1-p_2)}{(2p-1)(2p-3)}X_{p_1-p,\,p_2-p}^{\rho,\sigma} + \sigma\sum X_{p_1-p,\,p_2-p}^{\rho,\sigma}\sum_{0}^{\infty}\frac{3\,C_{2p}^{p}}{2p-1(2p-3)} +$$

$$+(p_1+p_2)X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma} - 4(p_1+p_2-2)X_{p_1-1,\,p_2-1}^{\rho,\sigma} = \sigma X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma} +$$

$$+ 2(\sigma-\rho)X_{p_1-2,\,p_2}^{\rho,\sigma+2} + 2(2\sigma-\rho)X_{p_1-1,\,p_2}^{\rho,\sigma+1}$$

$$+ 2(\sigma-\rho)X_{p_1-1,\,p_2-1}^{\rho,\sigma}\,,$$

ou seja

$$-(p_1-p_2+\sigma)\sum_{2}^{\infty}\frac{3\,C_{2p}^{p}}{2(2p-1)(2p-3)}X_{p_1-p,\,p_2-p}^{\rho,\sigma} + (5p_1-p_2+4\sigma-\rho-4)X_{p_1-1,\,p_2-1}^{\rho,\sigma} +$$

$$+(\sigma-\rho)X_{p_1-2,\,p_2}^{\rho,\sigma+2} + (2\sigma-\rho)X_{p_1-1,\,p_2}^{\rho,\sigma+1} = p_1X_{p_1,p_2}^{\rho,\sigma}\,,$$

que voltaremos ainda a escrever, dentro dum momento, ao par duma outra que se obtem induzindo as expressões de $\eta^2 D_\xi X^{\rho,\sigma}$ e $\eta^3(D_x X^{\rho,\sigma} + \sigma X^{\rho,\sigma})$ e subtraindo membro a membro.

Em resumo, temos as duas fórmulas seguintes:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2} = (2\sigma-\rho) X^{\rho,\sigma+1}_{p_1-1,p_2} + (\sigma-\rho) X^{\rho,\sigma+2}_{p_1-2,p_2} + (5p_1-p_2+4\sigma-\rho-4) X^{\rho,\sigma}_{p_1-1,p_2-1} - \\ \qquad - (p_1-p_2+\sigma) \sum_2^{\infty} \frac{3\, C^{r}_{2p}}{2(2p-1)(2p-3)} X^{\rho,\sigma}_{p_1-r,p_2-r}, \\ p_2 X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2} = -(2\sigma+\rho) X^{\rho,\sigma-1}_{p_1,p_2-1} - (\sigma+\rho) X^{\rho,\sigma-2}_{p_1,p_2-2} - (p_1-5p_2+4\sigma+\rho+4) X^{\rho,\sigma}_{p_1-1,p_2-1} + \\ \qquad + (p_1-p_2+\sigma) \sum_2^{\infty} \frac{3\, C^{r}_{2p}}{2(2p-1)(2p-3)} X^{\rho,\sigma}_{p_1-r,p_2-r}. \end{array}\right.$$

Esta última relação é, ainda, consequência da relação

$$\boxed{X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2} = X^{\rho,-\sigma}_{p_2,p_1}.}$$

Partindo da relação evidente $X^{\rho,\sigma}_{0,0} = 1$, relação que resulta de se pôr $x_1=0, x_2=$ na expressão de $\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho}\left(\frac{z}{x}\right)^{\sigma}$, isto é, resulta de se supôr $\varepsilon=0$, e, consequentemente, $r=a$, $w=g$, $z=x$, obtêm-se as fórmulas seguintes:

$$X^{\rho,\sigma}_{1,0} = -\rho+2\sigma,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{2,0} = \frac{\rho^2}{2} - \rho\left(2\sigma+\frac{3}{2}\right) + 2\sigma^2 + \frac{5}{2}\sigma,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{1,1} = \rho^2+\rho-4\sigma^2,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{3,0} = -\frac{\rho^3}{6} + \rho^2\left(\sigma+\frac{3}{2}\right) - \rho\left(2\sigma^2+\frac{11}{2}\sigma+\frac{17}{6}\right) + \frac{4}{3}\sigma^3 + 5\sigma^2 + \frac{13}{3}\sigma,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{2,1} = -\frac{\rho^3}{2} + \rho^2\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) + \rho\left(2\sigma^2+\frac{5}{2}\sigma+\frac{2}{3}\right) - 4\sigma^3 - 5\sigma^2 - \sigma,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{4,0} = \frac{\rho^4}{24} - \rho^3\left(\frac{\sigma}{3}+\frac{3}{4}\right) + \rho^2\left(\sigma^2+\frac{17}{4}\sigma+\frac{95}{24}\right) - \rho\left(\frac{4}{3}\sigma^3+8\sigma^2+\frac{55}{4}\sigma+\frac{71}{12}\right) + \\ + \frac{2}{3}\sigma^4 + 5\sigma^3 + \frac{283}{24}\sigma^2 + \frac{103}{12}\sigma,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{3,1} = \frac{\rho^4}{6} - \rho^3\left(\frac{2}{3}\sigma+1\right) + \rho^2\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{6}\right) + \rho\left(\frac{8}{3}\sigma^3+8\sigma^2+\frac{47}{6}\sigma+\frac{11}{7}\right) \\ - \frac{8}{3}\sigma^4 - 10\sigma^3 - \frac{32}{3}\sigma^2 - \frac{11}{3}\sigma,$$

$$X^{\rho,\sigma}_{2,2} = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{2} - \rho^2\left(2\sigma^2+\frac{1}{4}\right) + \frac{\rho}{2} + 4\sigma^4 - \frac{9}{4}\sigma^2;$$

— — — — — — — — — —

Ao escrevermos estas fórmulas supusemos $p_1 \geq p_2$ e isso porque, sendo $p_1 < p_2$ servimo-nos da fórmula $X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2} = X^{\rho,-\sigma}_{p_2,p_1}$, como por ex:

$$X^{\rho,\sigma}_{0,1} = X^{\rho,-\sigma}_{1,0} = -\rho-2\sigma, \text{ etc.}$$

Fica assim tratado, duma maneira completa, o problema do desenvolvimento que nos propusemos no começo dêste §. Vamos passar agora a outro problema análogo. Trata-se do desenvolvimento da função

$$Y^{\rho,\sigma}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\rho}\left(\frac{z}{y}\right)^{\sigma},$$

em série ordenada segundo as potências inteiras e positivas de ξ_1 e ξ_2, ou seja de obter

$$Y^{\rho,\sigma}=\sum Y^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\,\xi_1^{q_1}\xi_2^{q_2}.$$

Na verdade, utilizaremos as duas variáveis equivalentes

$$\eta_1=\theta\gamma \;,\; \eta_2=\theta\gamma^{-1},$$

e trata-se de encontrar

$$Y^{\rho,\sigma}=\sum Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\,\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2}.$$

Ora é

$$Y^{\rho,\sigma}=\left(\omega\,(1-\theta\gamma)(1-\theta\gamma^{-1})\right)^{\rho}\cdot\left((1-\theta\gamma^{-1})(1-\theta\gamma)^{-1}\right)^{\sigma},$$

ou seja

$$Y^{\rho,\sigma}=(1+\eta_1\eta_2)^{-\rho}(1-\eta_1)^{\rho-\sigma}(1-\eta_2)^{\rho+\sigma},$$

pois

$$1+\eta_1\eta_2=1+\theta^2=1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\sec^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{1}{\omega}.$$

Vê-se, assim, que é:

$$Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}=(-1)^{q_1+q_2}\sum_{q=0}^{\infty}C^{q}_{-\rho}\,C^{q_1-q}_{\rho-\sigma}\,C^{q_2-q}_{\rho+\sigma}.$$

Ora sendo

$$D_{\eta_1}Y^{\rho,\sigma}=\eta_1\left\{(1-\eta_2)^{\rho+\sigma}\right\}\left\{-(1+\eta_1\eta_2)^{-\rho-1}\cdot\rho\cdot\eta_2\,(1-\eta_1)^{\rho-\sigma}-(1+\eta_1\eta_2)^{-\rho}(\rho-\sigma)\cdot(1-\eta_1)^{\rho-\sigma-1}\right\}=$$

$$=Y^{\rho,\sigma}\left[\frac{-\rho\,\eta_1\eta_2}{1+\eta_1\eta_2}+(\sigma-\rho)\frac{\eta_1}{1-\eta_1}\right],$$

tem-se

$$(1+\eta_1\eta_2)(1-\eta_1)\sum Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\,q_1\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2}=-\rho\,\eta_1\eta_2(1-\eta_1)\sum Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\,\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2}+$$

$$+(\sigma-\rho)\,\eta_1(1+\eta_1\eta_2)\sum Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\,\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2},$$

e, portanto,

$$q_1Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}=(q_1+\sigma-\rho-1)\,Y'^{\rho,\sigma}_{q_1-1,q_2}-(q_1+\rho-1)\,Y'^{\rho,\sigma}_{q_1-1,q_2-1}+$$

$$+(q_1+\sigma-2)\,Y'^{\rho,\sigma}_{q_1-2,q_2-1}.$$

Demonstra-se analogamente a relação

$$\boxed{q_2 Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2} = (q_2-\sigma-\rho-1)Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2-1} - (q_2+\rho-1)Y'^{\rho,\sigma}_{q_1-1,q_2-1} + + (q_2-\sigma-2)Y'^{\rho,\sigma}_{q_1-1,q_2-2}.}$$

Partamos de $Y'^{\rho,\sigma}_{0,0}$. O valor desta quantidade obtem-se pondo $\eta_1=\eta_2=0$ em $Y^{\rho,\sigma}$. Ora sendo $\eta_1=\eta_2=0$ é $\vartheta=0$, e, portanto, $\xi=0$, o que dá $x=a$, $z=y$ e $Y^{\rho,\sigma}=1$. Assim, tem-se $Y'^{\rho,\sigma}_{0,0}=1$. Obtêem-se, pois, as fórmulas

$$Y'^{\rho,\sigma}_{1,0} = \sigma-\rho,$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{2,0} = \frac{1}{2}(\sigma-\rho)(\sigma-\rho+1),$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{1,1} = -\sigma^2+\rho^2-\rho,$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{3,0} = \frac{1}{6}(\sigma-\rho)(\sigma-\rho+1)(\sigma-\rho+2),$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{2,1} = -\frac{1}{2}(\sigma-\rho)(\sigma^2-\rho^2+\sigma+3\rho),$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{4,0} = \frac{1}{24}(\sigma-\rho)(\sigma-\rho+1)(\sigma-\rho+2)(\sigma-\rho+3),$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{3,1} = -\frac{1}{6}(\sigma-\rho)(\sigma-\rho+1)(\sigma^2-\rho^2+2\sigma+5\rho),$$
$$Y'^{\rho,\sigma}_{2,2} = \frac{1}{4}\left[(\sigma^2-\rho^2)^2+(\sigma^2-\rho^2)(6\rho-1)+2\rho^2+2\rho\right],$$

Como anteriormente, supõe-se aqui $p_1 \geqq p_2$, visto que se tem também

$$Y'^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2} = Y'^{\rho,-\sigma}_{p_2,p_1}.$$

Passa-se agora facilmente aos coeficientes $Y^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}$. Basta ter em vista que é

$$\gamma_1 = \frac{\xi}{2}y = \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,y = \text{[illegible]} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,y = \frac{\vartheta y}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\eta_1}{1+\eta_1\eta_2},$$

$\gamma_2 = \frac{\eta_2}{1+\eta_1\eta_2}$. Então tem-se imediatamente

$$Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2} = Y^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2} + C^1_{2-q_1-q_2}Y^{\rho,\sigma}_{q_1-1,q_2-1} + C^2_{4-q_1-q_2}Y^{\rho,\sigma}_{q_1-2,q_2-2} + \cdots,$$

pois que

$$\sum Y^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\gamma_1^{q_1}\gamma_2^{q_2} = \sum Y^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2}(1+\eta_1\eta_2)^{-q_1-q_2} = \sum Y'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}\eta_1^{q_1}\eta_2^{q_2}.$$

De facto tem-se

$$(1+\eta_1\eta_2)^{-(q_1+q_2)} = 1-(q_1+q_2)\eta_1\eta_2 + \frac{-(q_1+q_2)\cdot-(q_1+q_2+1)}{1\cdot 2}\eta_1^2\eta_2^2+\cdots$$

$$+ C^{q}_{-q_1-q_2}\eta_1^q\eta_2^q+\cdots,$$ → Vêr o verso 1)

pelo que se observa imediatamente a igualdade que dá $\gamma'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}$. Para que um $\gamma'^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}$ seja diferente de $\gamma^{\rho,\sigma}_{q_1,q_2}$ é preciso que seja uma das quantidades q_1 ou q_2 superior à unidade. Mantêm-se, assim, (Vêr o verso 2))

$$\gamma^{\rho,\sigma}_{2,1} = \gamma'^{\rho,\sigma}_{2,1} + \gamma'^{\rho,\sigma}_{1,0},$$

$$\gamma^{\rho,\sigma}_{3,1} = \gamma'^{\rho,\sigma}_{3,1} + 2\gamma'^{\rho,\sigma}_{2,0},$$

$$\gamma^{\rho,\sigma}_{2,2} = \gamma'^{\rho,\sigma}_{2,2} + 2\gamma'^{\rho,\sigma}_{1,1},$$

Resta-nos tratar, neste capítulo, um último desenvolvimento. Trata-se de encontrar $\left(\frac{r}{a}\right)^\rho$ em série ordenada segundo as potências de z_1 e z_2, tais que

$$z_1 = \frac{\varepsilon}{2}z, \quad z_2 = \frac{\varepsilon}{2}z^{-1}.$$

O novo desenvolvimento será, pois,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\rho = \sum Z^{\rho}_{n_1,n_2}z_1^{n_1}z_2^{n_2}.$$

Se partirmos de

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\rho = \frac{1}{\eta^{-2\rho}}\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(z+z^{-1})\right]^{-\rho} = \eta^{2\rho}\left[1+z_1+z_2\right]^{-\rho} =$$

$$=(1-4z_1z_2)^\rho(1+z_1+z_2)^{-\rho},$$

o desenvolvimento é fácil de obter. Não esqueçamos que

$$1-4z_1z_2 = 1-4\frac{\varepsilon^2}{4} = 1-\varepsilon^2 = 1-\sin^2\varphi = \cos^2\varphi = \eta^2.$$

Tem-se, então, (→ Vêr o verso)

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\rho = \eta^{2\rho}\sum_{q=0}^{\infty}C^q_{-\rho}(z_1+z_2)^q = \sum_{s=0}^{\infty}C^s_\rho(-4)^s z_1^s z_2^s\cdot\sum_{q=0}^{\infty}C^q_{-\rho}(z_1+z_2)^q =$$

$$= \sum z_1^{n_1}z_2^{n_2}\left(\sum(-4)^s C^s_\rho\, C^{n_1+n_2-2s}_{-\rho}\, C^{n_2-s}_{n_1+n_2-2s}\right),$$

pelo que vem

$$Z^{\rho}_{n_1,n_2} = \sum_{s=0}^{\infty}(-4)^s C^s_\rho\, C^{n_1+n_2-2s}_{-\rho}\, C^{n_2-s}_{n_1+n_2-2s}.$$

Uma diferenciação em ordem a z_1 leva a

$$D_{z_1}\left(\frac{r}{a}\right)^\rho = z_1\,\rho\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho-1}\cdot\frac{-4z_2(1+z_1+z_2)-(1-4z_1z_2)}{(1+z_1+z_2)^2}$$

ou seja ~~[illegible]~~

$$(1-4z_1z_2)D_{z_1}\left(\frac{r}{a}\right)^\rho = -4\rho z_1 z_2\left(\frac{r}{a}\right)^\rho - \rho z_1\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho+1}$$

Daqui se tira a lei de recorrência $(n_1 Z^\rho_{n_1,n_2} - 4n_1 Z^\rho_{n_1-1,n_2-1}) = -4\rho Z^\rho_{n_1-1,n_2-1} - \rho Z^{\rho+1}_{n_1-1,n_2}$, ou

$$n_1 Z^\rho_{n_1,n_2} = 4(n_1-\rho-1) Z^\rho_{n_1-1,n_2-1} - \rho Z^{\rho+1}_{n_1-1,n_2},$$

na qual se podem permutar os índices n_1 e n_2.

Partindo, como sempre, de $Z^\rho_{0,0}=1$, vem

$$Z^\rho_{1,0} = -\rho,$$
$$Z^\rho_{2,0} = \frac{1}{2}\rho(\rho+1),$$
$$Z^\rho_{1,1} = \rho(\rho-3),$$
$$Z^\rho_{3,0} = -\frac{1}{6}\rho(\rho+1)(\rho+2),$$
$$Z^\rho_{2,1} = -\frac{\rho}{2}(\rho^2-5\rho+2),$$
$$Z^\rho_{4,0} = \frac{1}{24}\rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3),$$
$$Z^\rho_{3,1} = \frac{1}{6}\rho(\rho+1)(\rho-1)(\rho-6),$$
$$Z^\rho_{2,2} = \frac{\rho}{4}(\rho^3-10\rho^2+27\rho-26),$$

Supomos $n_1 \geqq n_2$ porque se tem $Z^\rho_{n_1,n_2} = Z^\rho_{n_2,n_1}$.

Capítulo IV

Desenvolvimento analítico da função perturbadora

§ 36) Generalidades – Os resultados do capítulo anterior são fundamentais para o problema que vamos tratar. Dados dois planetas, vamos definir a função perturbadora relativa à atracção dos mesmos. No capítulo I da Mecânica Celeste definimos a função de fôrça para o movimento do centro de gravidade dum planeta (salvo o caso da Terra), pondo

$$U_p = f(m_0+m_p)\frac{1}{r_p} + \sum_q f m_q\left(\frac{1}{\Delta_{pq}} - \frac{r_p}{r_q^2}\cos H_{pq}\right).$$

Modificando as notações e tomando a massa do Sol como unidade de massa, poremos

$$U = \frac{f(1+m)}{r} + V,$$

onde $\underline{U}$ substitui U_p e V é a função perturbadora. Neste capítulo serão $M, M', \ldots$ os centros de gravidade dos sistemas planeta-satélite, $P, P', \ldots$; $m, m', \ldots$ serão as massas dos mesmos sistemas; $r, r', \ldots$ são as distâncias $OM, OM', \ldots$ ao centro de gravidade do Sol. A função perturbadora é uma soma de termos da forma

$$f.m'\left(\frac{1}{\overline{MM'}} - \frac{r}{r'^2}\cos M\hat{O}M'\right),$$

como se viu do significado das letras no 1.º capítulo. A soma é estendida aos pontos $M', M'', \ldots$, havendo, no caso da Terra, ainda um termo complementar, o qual não será tido em conta.

Somos levados, pois, ao estudo de

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H\,, \quad \text{com} \quad \Delta = \overline{MM'}\,, \quad H = M\hat{O}M'.$$

É esta função $\underline{R}$ que, na verdade, se chama geralmente <u>função perturbadora</u>. Pondo de parte o factor $\underline{fm'}$, define a influência do planeta M' sôbre o movimento relativo do planeta M, à volta do Sol.

Façamos

$$R_0 = \frac{1}{\Delta}\,, \qquad R_1 = -\frac{r}{r'^2}\cos H\,,$$

de sorte que se tem

$$R = R_0 + R_1.$$

R_0 é a <u>primeira</u> parte da função perturbadora e R_1 a <u>segunda</u>. Vamos estudar $\underline{R_0}$, e, mais adiante, $\underline{R_1}$.

Em face da simetria de $\underline{R_0}$ com respeito aos dois planetas $\underline{M}$ e $\underline{M'}$, vê-se que $\underline{R_0}$ é igualmente a primeira parte da função perturbadora $\underline{R'}$ relativa à acção do planeta M sôbre o movimento relativo do planeta M'. Mas a segunda parte de R' é $R'_1 = -\frac{r'}{r^2}\cos H$.

Trata-se, pois, de estudar a função

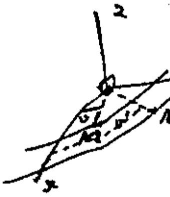
$$R_0 = \frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H)^{-1/2}.$$

O desenvolvimento em série que se pretende obter para $\underline{R_0}$ deve permitir integrar com facilidade as equações do movimento.

§ 37) <u>Os elementos osculadores</u> - No capítulo do nosso Curso consagrado

...a questão de Astronomia falámos no que se entendia por <u>órbita osculadora</u> da órbita real e por <u>elementos osculadores</u> dos elementos da órbita. Repitamos, em duas palavras. Se não houvesse perturbações, o movimento estudado no Capítulo III de Mecânica Celeste seria um movimento kepleriano elítico, movimento efectuado sôbre uma órbita, para a qual se definiram, de diferentes maneiras, 6 elementos. Na verdade, o movimento é perturbado, de sorte que nas equações reais do movimento far-se-ão a mudança de variáveis que consiste em substituir às coordenadas do centro do sistema e às componentes da sua velocidade as ~~constantes~~ constantes (ou equivalentes) da integração do sistema não perturbado. Estas constantes passarão a ser, então, funções determinadas do tempo, que dão, em cada instante, uma órbita chamada órbita osculadora da órbita real; e os elementos, ou valores das constantes, dizem-se os elementos osculadores da órbita real.

Desta maneira, as coordenadas dos planetas <u>m</u> e <u>m'</u> exprimem-se, em cada instante, por meio dos elementos osculadores nêsse instante. Sejam, então, <u>v</u> e <u>v'</u> as longitudes nas órbitas. Se as inclinações das duas órbitas fôssem nulas, o ângulo H era dado por



$$H = \varphi = v' - v.$$

Não sucede assim, mas, no caso dos grandes planetas, que temos agora em vista, as órbitas são pouco inclinadas sôbre o plano da eclítica, pelo que se porá

$$\cos H = \cos\varphi + \frac{\eta}{2},$$

sabendo-se, assim, que η é uma quantidade pequena. Vem, desta maneira,

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi - 2rr'\frac{\eta}{2},$$

ou seja

$$\Delta^2 = D^2 - rr'\eta,$$

com

$$D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi.$$

Tem-se agora

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D}\left(1 - \frac{rr'\eta}{D^2}\right)^{-1/2},$$

de sorte que é

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{rr'\eta}{D^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{r^2r'^2\eta^2}{D^4} + \dots\right),$$ que escrevemos

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D} + \frac{1}{2}\frac{rr'}{D^3}\eta + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2r'^2}{D^5}\eta^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{r^3r'^3}{D^7}\eta^3 + \dots$$

Esta série converge quando η é suficientemente pequeno.

Vê-se que somos levados ao estudo das funções

$$\frac{(rr')^q}{D^{2q+1}} = (rr')^q D^{-(2q+1)}$$

Se pômos $1+2q = 2p$, somos levados ao estudo das funções

$$(rr')^{p-\frac{1}{2}} D^{-2p},$$

onde $\underline{p}$ toma os valores $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, etc.

As excentricidades das duas órbitas são também pequenas. Colocar-nos-hemos, em princípio, na hipótese de serem nulas, e, em seguida, teremos em conta os seus valores. Designando com $\underline{a}$ e $\underline{a'}$ os semi-eixos maiores, ponhamos

$$d^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\varphi .$$

Então têem de ser estudadas as funções

$$(aa')^{p-\frac{1}{2}} d^{-2p} = \frac{1}{\sqrt{aa'}}\left(\frac{aa'}{d^2}\right)^p .$$

Deixemos de lado o factor $\frac{1}{\sqrt{aa'}}$, e ponhamos $\alpha = \frac{a}{a'}$ se $a < a'$, e $\alpha = \frac{a'}{a}$ se $a' < a$. Então aparecem-nos, em última análise, as funções

$$F^p = \left(\frac{aa'}{d^2}\right)^p = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi}\right)^p .$$

Vamos desenvolver F^p em série de Fourier de argumento φ, ou em série equivalente, de argumento $e^{i\varphi} = t$, sob a forma

$$F^p = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^p \cos n\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^p t^n . \qquad (1)$$

Reparemos que é

$$F^p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\varphi = \sum_0^{\infty} B_n \frac{e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}}{2} = \sum_0^{\infty} B_n \frac{t^n+t^{-n}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{B_n}{2}t^n ,$$

supondo $B_n = B_{-n}$. Quando se põe F^p sob a forma (1), supõe-se, pois

$$\frac{B_n}{2} = b_n^p , \quad \frac{B_{-n}}{2} = b_{-n}^p \quad \text{e, portanto,} \quad b_n^p = +b_{-n}^p \text{ e}$$

Assim, no desenvolvimento (1) bastará considerar os valores positivos de $\underline{n}$. Ora sendo

$$1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi = 1+\alpha^2-2\alpha\frac{t+t^{-1}}{2} = 1+\alpha^2-\alpha(t+t^{-1}) = (1-\alpha t)(1-\alpha t^{-1}),$$

tem-se

$$F^p = \alpha^p (1-\alpha t)^{-p} (1-\alpha t^{-1})^{-p}, \qquad (2)$$

pelo que será, tendo em vista a definição dos $K_n^{p,q}$ dada no capítulo anterior,

$$b_n^p = \alpha^p K_n^{-p,-p}.$$

Como $n \geqq 0$, tem-se, então,

$$b_n^p = \alpha^p (-1)^n \sum \alpha^{m'+m''} C_{-p}^{m'} C_{p}^{m''} = \qquad (m'-m''=n)$$

$$= \alpha^p (-1)^n \left[\alpha^n \cdot \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{1.2\cdots n} + \alpha^{n+2} \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-n)}{1.2\cdots(n+1)} \cdot \frac{-p}{1} + \cdots \right]$$

$$= \alpha^{n+p} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{1.2\cdots n} \times \left[1 + \alpha^2 \frac{p}{1} \cdot \frac{n+p}{n+1} + \frac{p(p+1)}{1.2} \cdot \frac{(n+p)(n+p+1)}{(n+1)(n+2)} \alpha^4 + \cdots \right].$$

Pelo facto de ser $\alpha < 1$ a série que dá b_n^p é convergente quaisquer que sejam p e n. Quando $n=0$, pretende-se b_0^p que tem, igualmente, a forma anterior, mas carecendo-se determinar o coeficiente que figura antes do parêntesis recto. Se tivermos em vista (2), vê-se que êsse coeficiente é ~~a unidade~~ α^p. Os números b_n^p dizem-se coeficientes de Laplace. Para os cálculos precisamos, não apenas dos coeficientes b_n^p, mas ainda das suas derivadas sucessivas relativamente a α, ou, melhor, relativamente a $\log \alpha$. Assim

$$D\, b_n^p = \frac{d\, b_n^p}{d \log \alpha} = \alpha \frac{d\, b_n^p}{d\alpha}, \quad D^2 b_n^p = \alpha \left(\frac{d\, b_n^p}{d\alpha} + \alpha \frac{d^2 b_n^p}{d\alpha^2} \right) =$$

$$= D(D b_n^p), \cdots.$$

Dêste modo é, pondo,

$$b_n^p = \sum A_k \alpha^{n+p+2k},$$

$$D b_n^p = \alpha \sum A_k (n+p+2k) \alpha^{n+p+2k-1} = \sum A_k (n+p+2k) \alpha^{n+p+2k},$$

$$D^2 b_n^p = \alpha \sum A_k (n+p+2k)^2 \alpha^{n+p+2k-1} = \sum A_k (n+p+2k)^2 \alpha^{n+p+2k},$$

etc.

Logo, para se calcular $D^k b_n^p$, temos de ir à série que dá b_n^p e multiplicar os termos da mesma série sucessivamente por $(n+p)^k$, $(n+p+2)^k$, $(n+p+4)^k$, etc. Como diz H. Andoyer, a pgs. 407, há necessidade de se conhecerem as diferentes quantidades $D^K b_n^p$ para os valores de $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, em seguida com $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$, e com $k = 1, 2, \ldots, 7 - 2p + 1$. Tal cálculo, é claro, pode fazer-se pelas séries que dão os b_n^p, mas, no geral, tais séries são lentamente convergentes, de sorte que a aplicação dêsse método é difícil. É necessário, assim, recorrer a outros métodos, aos quais vamos referir-nos.

Conhecemos a relação

$$K_n^{-p,-p} = (-1)^n (1-\alpha^2)^{-2p+1} K_n^{n+p-1,\,-n+p-1}$$

de sorte que

$$b_n^p = \alpha^p (-1)^n (1-\alpha^2)^{-2p+1} K_n^{n+p-1,\,-n+p-1} =$$

(A)

$$= (-1)^n \alpha^p (1-\alpha^2)^{-2p+1} (-1)^n \sum \alpha^{m'+m''} C_{n+p-1}^{m'} C_{-n+p-1}^{m''} =$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha^2)^{2p-1}} \cdot \alpha^{n+p} \cdot \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \times \left[1 + \frac{1-p}{1} \, \frac{n+1-p}{n+1} \alpha^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-p)(2-p)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+1-p)(n+2-p)}{(n+1)(n+2)} \alpha^4 + \cdots \right].$$

§ 38) Continuação do estudo das quantidades b_n^p e $D^K b_n^p$ –

Na série anterior, que encontrámos para b_n^p, a partir de certa ordem os termos têem todos o mesmo sinal. A razão dum termo para o anterior é da forma

$$\frac{n+r-p}{n+r} \cdot \frac{r-p}{r} \alpha^2,$$

de sorte que tal razão tende para α^2 quando r tende para infinito, mas essa tendência faz-se por valores crescentes inferiores a α^2. Podemos calcular o êrro que se comete, quando nos detemos num certo termo. Sejam u_1 e u_2 os dois primeiros termos desprezados; o êrro é inferior a $u_1 + u_2 + u_2\alpha^2 + u_2\alpha^4 + \cdots$ ou seja a

$$u_1 + \frac{u_2}{1-\alpha^2}$$

mas é superior a

$$u_1 + \frac{u_2}{u_1} u_1 + \frac{u_2^2}{u_1^2} u_1 + \frac{u_2^3}{u_1^3} u_1 + \cdots = \frac{u_1}{1 - \frac{u_2}{u_1}}$$

pois que $\frac{u_3}{u_2} > \frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_4}{u_3} > \frac{u_3}{u_2}$ etc., pelo que se poderá' escrever

$$u_1+u_2+u_3+\cdots > u_1+\frac{u_2}{u_1}u_1+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2u_1+\cdots = u_1\frac{1}{1-\frac{u_2}{u_1}},$$

visto ser

$$u_3=\frac{u_3}{u_2}u_2=\frac{u_3}{u_2}\frac{u_2}{u_1}u_1>\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2u_1,\quad u_4=\frac{u_4}{u_3}\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}u_1>\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3u_1, \text{ etc.}$$

Em resumo: o uso da série (A), salvo para o caso $p=\frac{1}{2}$ em que coincide com a série anterior dada para b_n^p, é mais vantajoso que o uso da série anterior, sendo o êrro $\underline{\varepsilon}$ do tipo

$$\frac{u_1}{1-\frac{u_2}{u_1}}<\varepsilon<\frac{u_2}{1-\alpha^2}+u_1$$

Se nos lembrarmos da fórmula

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\lambda}\varphi\,\mathrm{sen}^{2\mu}\varphi\,d\varphi=\frac{[1.3.5\cdots(2\lambda-1)][1.3.5\cdots(2\mu-1)]}{2.4.6\cdots(2\lambda+2\mu)},$$

onde, é claro, os casos $\lambda=0$ e $\mu=0$ obrigam à substituição dos factoriais, que não têm sentido pela unidade, e se tivermos em vista o desenvolvimento

$$(1-\alpha^2\cos^2\varphi)^{p-1}=1+\frac{1-p}{1}\alpha^2\cos^2\varphi+\frac{(1-p)(2-p)}{1.2}\alpha^4\cos^4\varphi+\cdots,$$

vêmos que a nossa fórmula (A) pode escrever-se

$$\text{(B)}\qquad b_n^p=\frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}}\,\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)\cdots[4n^2-(2p-2)^2]}{[1.3.5\cdots(2p-2)]^2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\alpha^2\cos^2\varphi)^{p-1}\cos^{2n-2p+1}\varphi\,\mathrm{sen}^{2p-1}\varphi\,d\varphi.$$

Façamos a verificação. Tem-se

$$b_n^p=\Delta\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\frac{1-p}{1}\alpha^2\cos^2\varphi+\frac{(1-p)(2-p)}{1.2}\alpha^4\cos^4\varphi+\cdots\right]\cos^{2n-2p+1}\varphi\,\mathrm{sen}^{2p-1}\varphi\,d\varphi,$$

onde Δ é um coeficiente cujo valor imediatamente se reconhece. Vem agora

$$b_n^p=\Delta\left\{\frac{[1.3.5\cdots(2n-2p)][1.3.5\cdots(2p-2)]}{2.4.6\cdots(2n)}+\right.$$
$$+\frac{1-p}{1}\alpha^2\frac{[1.3.5\cdots(2n-2p+2)][1.3.5\cdots(2p-2)]}{2.4.6\cdots(2n+2)}+$$
$$\left.+\frac{(1-p)(2-p)}{1.2}\alpha^4\frac{[1.3.5\cdots(2n-2p+4)][1.3.5\cdots(2p-2)]}{2.4.6\cdots(2n+4)}+\cdots\right\}=$$

$$=\frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}}\,\frac{(2n-1)(2n+1)(2n-3)(2n+3)\cdots[2n-(2p-2)][2n+(2p-2)]}{1.3.5\cdots(2p-2).1.3.5\cdots(2p-2)}\cdot\frac{1.3.5\cdots(2n-2p).1.3.5\cdots(2p-2)}{2.4.6\cdots2n}+\cdots$$

$$= \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)(2n-3)(2n+3)\cdots[2n-(2p-2)]\,[2n+(2p-2)]}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-2)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \left(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-2p+\ldots)\right)+\cdots$$

$$= \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots[2n+2p-2]}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-2)} \cdot \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + \cdots =$$

$$= \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}} \cdot \frac{2p\cdot(2p+2)\cdots(2n+2p-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + \cdots = \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}} \cdot \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,2^n + \cdots$$

$$= \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^{2p-1}} \cdot \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \cdots$$

Do mesmo modo que se faz a verificação para o primeiro termo se faria a verificação para os restantes. A fórmula (B) está, assim, justificada, mas precisamos das duas observações seguintes: 1.º → temos de supor $n \geqq p-\frac{1}{2}$, a fim de que não possa haver $\cos\psi$ com expoente negativo; 2.º → o factor numérico que entra em (B) antes de $\frac{2}{\pi}$ deve substituir-se pela unidade, se fôr $p=\frac{1}{2}$..

Se pômos ainda

$$\alpha'^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad \text{podemos escrever}$$

$$1-\alpha^2\cos^2\psi = 1-(1-\alpha^2)\,\alpha'^2\cos^2\psi = 1-(1-\alpha^2)\,\alpha'^2(1-\operatorname{sen}^2\psi) =$$

$$= 1-\alpha'^2(1-\alpha^2)+\alpha'^2(1-\alpha^2)\operatorname{sen}^2\psi =$$

$$= (1-\alpha^2)\left[\frac{1}{1-\alpha^2}-\alpha'^2+\alpha'^2\operatorname{sen}^2\psi\right] = (1-\alpha^2)(1+\alpha'^2\operatorname{sen}^2\psi),$$

de sorte que tem igualmente lugar a relação

$$(B') \qquad b_n^p = \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^p} \cdot \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)\cdots[4n^2-(2p-2)^2]}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-2)]^2} \times \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\alpha'^2\operatorname{sen}^2\psi)^{p-1}\cos^{2n-2p+1}\psi\,\operatorname{sen}^{2p-1}\psi\,d\psi .$$

Se desenvolvermos aqui em série a quantidade $(1+\alpha'^2\operatorname{sen}^2\psi)^{p-1}$, e, em seguida, substituirmos os integrais pelos seus valores, chega-se a nova expressão de b_n^p:

$$(b) \qquad b_n^p = \frac{\alpha^{n+p}}{(1-\alpha^2)^p}\,\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} \times \left[1+\frac{p-1}{1}\cdot\frac{p}{n+1}\,\alpha'^2+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{p(p+1)}{(n+1)(n+2)}\,\alpha'^4+\cdots\right.$$

Pode verificar-se que esta fórmula é válida ainda no caso $n < p-\frac{1}{2}$.

Esta nova série (b) pode trazer vantagem no cálculo de b_n^p. Vê-se

Que, se fôr n muito grande, os termos dentro do parêntesis recto decrescem muito rápidamente, de sorte que, em tal hipótese, há evidentemente vantagem no emprêgo de (b). A série (b) é, porém, apenas convergente quando $\alpha'^2 < 1$, ou seja $\alpha^2 < 1-\alpha^2$ ou, ainda, $2\alpha^2 < 1$, $\alpha < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

As relações (A) e (B), calculando, segundo elas, $D^k b_n^p$, permitem levar a estas últimas quantidades. Os resultados são, todavia, complicados. Para $p=\frac{1}{2}$, obtem-se

$$D\, b_n^{1/2} = D\left\{ \alpha^{n+1/2} \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\alpha^2\cos^2\psi)^{-1/2} \cos^{2n}\psi \operatorname{sen}^0\psi\, d\psi \right\} =$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right) b_n^{1/2} + \alpha^{n+\frac{1}{2}} \alpha \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{-1}{2}\left(1-\alpha^2\cos^2\psi\right)^{-3/2} \cdot \frac{-2\alpha\cos^2\psi}{1} \cos^{2n}\psi \operatorname{sen}^0\psi\, d\psi =$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right) b_n^{1/2} + \alpha^{n+\frac{5}{2}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\alpha^2\cos^2\psi)^{-3/2} \cos^{2n+2}\psi\, d\psi =$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right) b_n^{1/2} + \alpha^{n+5/2} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\alpha^2)^{-3/2} \left(1+\alpha'^2\operatorname{sen}^2\psi\right)^{-3/2} \cos^{2n+2}\psi\, d\psi$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right) b_n^{1/2} + \frac{\alpha^{n+5/2}}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(1+\alpha'^2\operatorname{sen}^2\psi\right)^{-3/2} \cos^{2n+2}\psi\, d\psi =$$

$$= \left(n+1/2\right) b_n^{1/2} + \frac{\alpha^{n+5/2}}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \frac{1.3 \ldots (2n+1)}{2.4 \ldots (2n+2)} \left[1 - \frac{1.3}{2(2n+4)}\alpha'^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.3.5}{2.4.(2n+4)(2n+6)}\alpha'^4 - \ldots \right].$$

§ 39) <u>Emprêgo das funções elíticas</u> — Consideremos os integrais elíticos de módulo α:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\psi}}, \qquad E = \int_0^{\pi/2} d\psi \sqrt{1-\alpha^2\cos^2\psi}.$$

Vê-se que é

$$b_0^{1/2} = \frac{2}{\pi}\alpha^{1/2}\int_0^{\pi/2} (1-\alpha^2\cos^2\psi)^{-1/2} d\psi = \alpha^{1/2}\frac{2K}{\pi},$$

$$b_1^{1/2} = \frac{\alpha^{3/2}}{(1-\alpha^2)^0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\alpha^2\cos^2\psi)^{-1/2} \cos^2\psi\, d\psi = \alpha^{-1/2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\alpha^2\cos^2\psi)^{-1/2} (\alpha^2\cos^2\psi)\, d\psi =$$

$$= \alpha^{-1/2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{-1+\alpha^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\psi}}\, d\psi + \alpha^{-1/2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\psi}}.$$

Assim tem-se

$$b_1^{1/2} = \alpha^{-1/2} \cdot \frac{2}{\pi} \left(K - E \right).$$

Do desenvolvimento em série conhecido de K e de E, tira-se agora

$$b_0^{1/2} = \alpha^{1/2} \left(\frac{2}{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}} \right)^2 \left(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots \right)^2,$$

$$b_1^{1/2} = \frac{1}{2} \alpha b_0^{1/2} + \frac{16}{b_0^{1/2}} \left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^{10}}{(1-q^{10})^2} + \dots \right),$$

onde

$$q = \beta + 2\beta^5 + 15\beta^9 + 150\beta^{13} + \dots,$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}.$$

As séries acima dadas, salvo o caso excepcional de ser α vizinho da unidade, são muito convergentes.

§ 40) Outro processo de cálculo dos b_n^p e $D'^k b_n^p$. Quando se trate de calcular vários quantidades b_n^p e $D^k b_n^p$ convém usar fórmulas de recorrência, que vamos deduzir. Façamos $t = e^{i\varphi}$ e introduzamos o símbolo

$$D' = \frac{\partial}{\partial(\lg t)} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial(\lg t)} = t \frac{\partial}{\partial t},$$

análogo ao símbolo $D = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$. E, para abreviar, ponhamos $\beta = \frac{1}{\alpha} + \alpha$, $\gamma = \frac{1}{\alpha} - \alpha$. Vem imediatamente

$$D\beta = \alpha\left(-\frac{1}{\alpha^2} + 1\right) = \alpha - \frac{1}{\alpha} = -\gamma;$$

$$D\gamma = \alpha\left(-\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = -\beta.$$

Por outro lado tem-se

$$F^p = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi} \right)^p = \alpha^p (1-\alpha t)^{-p} (1-\alpha t^{-1})^{-p} =$$

$$= \text{[illegible]} = \alpha^p \left(1 - \alpha(t+t^{-1}) + \alpha^2\right)^{-p} = (\beta - t - t^{-1})^{-p}, \quad \text{[illegible]}$$

donde se tira

$$\begin{cases} F^{(p)} = (\beta - t - t^{-1}) F^{p+1} & \longrightarrow (e) \\ D'(F^p) = p(t - t^{-1}) F^{p+1}, & \longrightarrow (f) \\ D(F^p) = p\gamma F^{p+1}. & \longrightarrow (a) \end{cases}$$

Verifiquemos a segunda:

$$D'(F^p) = t(-p)(\beta - t - t^{-1})^{-(p+1)} \left(-1 + \frac{1}{t^2}\right) =$$

$$= p(t - t^{-1}) F^{p+1}.$$

Deduz-se também

$$D^2(F^r) = r(r+1)\gamma^2 F^{r+2} - r\beta F^{r+1},$$

$$D'^2(F^r) = r(r+1)(t-t^{-1})^2 F^{r+2} + r(t+t^{-1}) F^{r+1},$$

e, consequentemente,

$$D^2(F^r) - D'^2(F^r) - 2r D'(F^r) - r^2 F^r = 4r^2 t^{-1} F^{r+1} +$$
$$+ r(r+1)[\gamma^2 - (t-t^{-1})^2] F^{r+2} - r(r+1)(\beta + t + t^{-1}) F^{r+1},$$

Ora, tendo em vista a relação,

$$\gamma^2 - (t-t^{-1})^2 = \beta^2 - (t+t^{-1})^2 = \frac{\beta + t + t^{-1}}{F},$$

se transforma em

$$D^2(F^r) - D'^2(F^r) - 2r D'(F^r) - r^2 F^r = 4r^2 t^{-1} F^{r+1}. \longrightarrow (b)$$

Substituindo na relação (a) F^r e F^{r+1} pelos seus desenvolvimentos em série, tem-se

$$D(\Sigma b_n^r t^n) = r\gamma \sum b_n^{r+1} t^n = \sum D b_n^r t^n,$$

e, portanto,

$$b_n^{r+1} = \frac{D b_n^r}{r\gamma}, \longrightarrow (d)$$

donde, por diferenciação,

$$D b_n^{r+1} = \frac{1}{r\gamma} D^2 b_n^r + \frac{-1}{r\gamma^2} \alpha \left(-\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) D b_n^r =$$
$$= \frac{1}{r\gamma}\left(\frac{\beta}{\gamma} D b_n^r + D^2 b_n^r\right). \longrightarrow (c')$$

Tratemos agora (b) da mesma maneira. Vem, sucessivamente:

$$D^2 \sum b_n^r t^n - D'^2 \sum b_n^r t^n - 2r D' \sum b_n^r t^n - r^2 \sum b_n^r t^n = 4r^2 t^{-1} \sum b_n^{r+1} t^n,$$

$$\sum D^2 b_n^r . t^n - \sum n^2 b_n^r t^n - 2r \sum n b_n^r t^n - r^2 \sum b_n^r t^n = 4r^2 \sum b_n^{r+1} t^{n-1},$$

$$D^2 b_n^r = n^2 b_n^r + 2rn b_n^r + r^2 b_n^r + 4r^2 b_{n+1}^{r+1}.$$

Ora sendo $b_n^r = b_{-n}^r$, vem ainda

$$\left.\begin{aligned} D^2 b_n^r &= (n+r)^2 b_n^r + 4r^2 b_{n+1}^{r+1} \\ D^2 b_n^r &= (n-r)^2 b_n^r + 4r^2 b_{n-1}^{r+1} \end{aligned}\right\} (c)$$

e também ,

em que esta última se tira da anterior mudando $\underline{n}$ em $\underline{-n}$ e substituindo b_n^r por b_n^r e b_{-n+1}^{r+1} por b_{n-1}^{r+1}. fizermos k diferenciações de (c) obtem-se:

$$D^{k+2} b_n^p = (n \pm p)^2 D^k b_n^p + 4p^2 D^k b_{n\pm 1}^{p+1} , \longrightarrow \qquad (j)$$

ou, decompondo,

$$D^{k+2} b_n^p = (n+p)^2 D^k b_n^p + 4p^2 D^k b_{n+1}^{p+1} ,$$
$$D^{k+2} b_n^p = (n-p)^2 D^k b_n^p + 4p^2 D^k b_{n-1}^{p+1} ,$$

donde se tira $\quad D^k b_{n-1}^{p+1} - D^k b_{n+1}^{p+1} = \frac{n}{p} D^k b_n^p .$

Fazendo aqui k=1 e mudando p em $p-1$, tem-se

$$D b_{n-1}^p - D b_{n+1}^p = \frac{n}{p-1} D b_n^{p-1} ,$$

e, tendo em vista (d),

$$D b_{n-1}^p - D b_{n+1}^p = \frac{n}{p-1} (p-1)\gamma\, b_n^p = n\gamma\, b_n^p .$$

Eliminemos agora F^{p+1} entre (e) e (f). Vem

$$p(t-t^{-1}) F^p = (\beta - t - t^{-1}) D' F^p ,$$

e a substituição por séries leva aqui a

$$n\beta\, b_n^p = (n+p-1) b_{n-1}^p + (n-p+1) b_{n+1}^p . \xrightarrow{\qquad} (k)$$

Mudando agora p em $p+1$ e tendo em conta (d), vem

$$n\beta \frac{1}{p\gamma} D b_n^p = (n+p) \frac{1}{p\gamma} D b_{n-1}^p + (n-p) \frac{1}{p\gamma} D b_{n+1}^p ,$$

ou seja $\quad n\beta\, D b_n^p = (n+p) D b_{n-1}^p + (n-p) D b_{n+1}^p .$

De (a), (e), (f) deduz-se ainda

$$F^p(\beta + 2t^{-1}) + \frac{1}{p} D'(F^p)(\beta - 2t^{-1}) = (\beta^2-4) F^{p+1} = \gamma^2 F^{p+1} = \frac{\gamma}{p} D(F^p) . \rightarrow (g)$$

Verifiquemos, por exemplo, a primeira igualdade. Tem-se sucessivamente:

$$F^p(\beta + 2t^{-1}) + \frac{1}{p} D'(F^p)(\beta - 2t^{-1}) = (\beta - t - t^{-1})(\beta + 2t^{-1}) F^{p+1}$$
$$+ \frac{1}{p}(\beta - 2t^{-1})\, p(t-t^{-1})\, F^{p+1} =$$
$$= (\beta^2 + \cancel{2\beta t^{-1}} - \cancel{\beta t} - 2 - \cancel{\beta t^{-1}} - \cancel{2t^{-2}} + \cancel{\beta t} - \cancel{\beta t^{-1}} - 2 + \cancel{2t^{-2}}) F^{p+1} =$$
$$= (\beta^2 - 4) F^{p+1} .$$

As relações (g) dão agora

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma D b_n^p &= \beta(n+p) b_n^p - 2(n-p+1) b_{n+1}^p = \\ &= 2(n+p-1) b_{n-1}^p - \beta(n-p) b_n^p , \end{aligned} \right. \qquad (h)$$

resultando esta última igualdade do modo seguinte: mudando n em $-n$ na penúltima, tem-se

$$\gamma D b_{-n}^p = \beta(-n+p)\, b_{-n}^p - 2(-n-p+1)\, b_{-n+1}^p ,$$

e, portanto

$$\gamma D b_n^p = 2(n+p-1)\, b_{n-1}^p - \beta(n-p)\, b_n^p .$$

Das duas relações (k) que dão Db_n^p tira-se ainda

$$n\gamma D b_n^p = (n+p)(n+p-1)\, b_{n-1}^p - (n-p)(n-p+1)\, b_{n+1}^p . \qquad (l)$$

Às diferentes relações entre os b_n^p e os $D^k b_n^p$ que acabam de deduzir-se, podemos juntar muitas mais. Todas elas poderão ser utilizadas para o cálculo, seguindo, para isso, as indicações que os próprios cálculos numéricos sugeriram.

Um método que pode seguir-se é o seguinte: suponhamos conhecidos as quantidades $b_n^{1/2}$ e $Db_n^{1/2}$ para diferentes valores de n; então a relação (d) dá imediatamente os $b_n^{3/2}$; em seguida (c) dá os $D^2 b_n^{1/2}$ e (i) dá os $D b_n^{3/2}$. E, conhecidos agora os $b_n^{3/2}$ e os $Db_n^{3/2}$, passamos, do mesmo modo, aos $b_n^{5/2}$, $D^2 b_n^{3/2}$, $D b_n^{5/2}$, e assim sucessivamente. O uso de (j) dá sucessivamente, também, os $D^3 b_n^p$, $D^4 b_n^p$, $D^5 b_n^p$, etc., pois que o método anterior leva apenas aos $D^2 b_n^p$. É a fórmula (j) que, partindo dos Db_n^p, dá $D^3 b_n^p$, e, partindo dos $D^2 b_n^p$, dá os $D^4 b_n^p$, e, assim sucessivamente.

Não foram utilizadas tôdas as relações de recorrência escrita. As restantes, porém, serviram para verificações.

Supusemos conhecidos os $b_n^{1/2}$ e os $D b_n^{1/2}$. Torna-se, assim, necessário determiná-los. Teòricamente, a relação (k) mostra bastar que se conheça $b_0^{1/2}$ e $b_1^{1/2}$ para que se fiquem a conhecer todos os $b_n^{1/2}$. Na verdade, na prática, tem de proceder-se doutra maneira, a fim de evitar perdas de precisão. Mas, colocando-nos no ponto de vista teórico, os valores de $b_0^{1/2}$ e $b_1^{1/2}$ foram dados no § anterior (39). Relativamente aos $D b_n^{1/2}$, temos a relação (l).

Para os Astrónomos calculadores, haveria ainda muito que detalhar. O nosso Curso é, porém, um Curso teórico, e mantemo-nos essencialmente nessas condições (Vêr Andoyer, pgs. 416 e seguintes do tomo I).

§41) Regresso ao estudo do desenvolvimento da função perturbadora, supondo que a excentricidade e a inclinação não são nulas. – Não esqueçamos que se trata do desenvolvimento de

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H = R_0 + R_1,$$

estando nós a tratar de $R_0 = \frac{1}{\Delta}$. Viu-se que era

$$R_0 = \frac{1}{\Delta} = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H)^{-1/2},$$

e que, pondo $\cos H = \cos\varphi + \frac{\eta}{2}$, se tinha

$$\Delta^2 = D^2 - rr'\eta\,, \quad \text{com} \quad D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi.$$

Assim

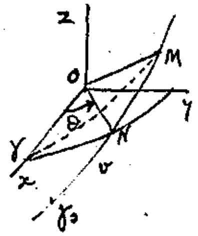
$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D} + \frac{1}{2}\frac{rr'}{D^3}\eta + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2r'^2}{D^5}\eta^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{r^3r'^3}{D^7}\eta^3 + \cdots$$

Determinemos, primeiramente, a quantidade

$$\eta = 2(\cos H - \cos\varphi).$$

Sejam j e j' as inclinações das duas órbitas sôbre o plano fundamental xy e sejam $\underline{\vartheta}$ e $\underline{\vartheta}'$ as longitudes dos nodos ascendentes. Os cosenos directores da recta OM (tirada do centro de gravidade do Sol para o centro de gravidade do sistema P) são fáceis de encontrar. Por ex:

$$\cos\alpha = \cos\vartheta\cos(v-\vartheta) - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}(v-\vartheta)\cos j,$$



ou seja

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(v-2\vartheta) \text{[illegible]} 2\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}(v-\vartheta)\cos^2\frac{j}{2}\,, \\ \cos\alpha = \cos v + 2\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}(v-\vartheta)\operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\,, \end{cases}$$

e, portanto, multiplicando a primeira por $\operatorname{sen}^2\frac{j}{2}$, a segunda por $\cos^2\frac{j}{2}$ e somando,

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{j}{2}\cos v + \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\cos(v-2\vartheta)$$

Da mesma maneira se encontram os outros dois cosenos directores. Serão, em resumo,

$$\cos^2\frac{j}{2}\cos v + \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\cos(v-2\vartheta)\,; \quad \cos^2\frac{j}{2}\operatorname{sen} v - \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\operatorname{sen}(v-2\vartheta)\,;$$

$$\operatorname{sen} j\operatorname{sen}(v-\vartheta).$$

Assim será

$$\frac{1}{2}\eta = \left(\cos^2\frac{j}{2}\cos v + \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\cos(v-2\vartheta)\right)\left(\cos^2\frac{j'}{2}\cos v' + \operatorname{sen}^2\frac{j'}{2}\cos(v'-2\vartheta)\right) +$$
$$+ \left(\cos^2\frac{j}{2}\operatorname{sen} v - \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\operatorname{sen}(v-2\vartheta)\right)\left(\cos^2\frac{j'}{2}\operatorname{sen} v' - \operatorname{sen}^2\frac{j'}{2}\operatorname{sen}(v'-2\vartheta')\right) +$$
$$+ \operatorname{sen} j\operatorname{sen}(v-\vartheta).\operatorname{sen} j'\operatorname{sen}(v'-\vartheta') - \cos(v-v'),$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\eta = \left(-\operatorname{sen}^2\frac{j}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{j'}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\operatorname{sen}^2\frac{j'}{2}\right)\cos(v-v') +$$

$$+ \operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\operatorname{sen}^2\frac{j'}{2}\cos(v-v'-2\vartheta+2\vartheta') +$$

$$+ \cos^2\frac{j'}{2}\operatorname{sen}^2\frac{j}{2}\cos(v+v'-2\vartheta) + \operatorname{sen}^2\frac{j'}{2}\cos^2\frac{j}{2}\cos(v+v'-2\vartheta')$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{sen}j\operatorname{sen}j'\cos(v-v'-\vartheta+\vartheta') - \frac{1}{2}\operatorname{sen}j\operatorname{sen}j'\cos(v+v'-\vartheta-\vartheta').$$

Façamos aqui

$$\gamma = 2\operatorname{sen}\frac{j}{2}, \quad \gamma' = 2\operatorname{sen}\frac{j'}{2},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma e^{-i\vartheta}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma e^{i\vartheta}, \quad \gamma'_1 = \frac{1}{2}\gamma' e^{-i\vartheta'}, \quad \gamma'_2 = \frac{1}{2}\gamma' e^{i\vartheta'},$$

em seguida façamos

$$\sigma_1 = \gamma_1\gamma'_2\left(2\cos\frac{j}{2}\cos\frac{j'}{2} + \gamma_1\gamma'_2 + \gamma_2\gamma'_1\right) - \gamma_1\gamma_2 - \gamma'_1\gamma'_2,$$

$$\sigma_2 = \gamma_2\gamma'_1\left(2\cos\frac{j}{2}\cos\frac{j'}{2} + \gamma_1\gamma'_2 + \gamma_2\gamma'_1\right) - \gamma_1\gamma_2 - \gamma'_1\gamma'_2,$$

$$\sigma'_1 = -\gamma_1\gamma'_1\left(2\cos\frac{j}{2}\cos\frac{j'}{2} + \gamma_1\gamma'_2 + \gamma_2\gamma'_1\right) + \gamma_1^2 + \gamma_1'^2,$$

$$\sigma'_2 = -\gamma_2\gamma'_2\left(2\cos\frac{j}{2}\cos\frac{j'}{2} + \gamma_1\gamma'_2 + \gamma_2\gamma'_1\right) + \gamma_2^2 + \gamma_2'^2.$$

Quando se trocam os papéis de M e de M'

$$\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$$

$$\sigma'_1 \rightleftarrows \sigma'_2$$

Então vem

$$\eta = \sigma_1 e^{i(v-v')} + \sigma_2 e^{-i(v-v')} + \sigma'_1 e^{i(v+v')} + \sigma'_2 e^{-i(v+v')}.$$

O parêntesis comum que figura nos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2$ pode escrever-se sob a forma de desenvolvimento

$$2\cos\frac{j}{2}\cos\frac{j'}{2} + \gamma_1\gamma'_2 + \gamma_2\gamma'_1 = 2 - (\gamma_1-\gamma'_1)(\gamma_2-\gamma'_2) + \frac{1}{4}(\gamma_1\gamma_2 - \gamma'_1\gamma'_2)^2 +$$

$$- \frac{1}{8}(\gamma_1\gamma_2 + \gamma'_1\gamma'_2)(\gamma_1\gamma_2 - \gamma'_1\gamma'_2)^2 + \cdots$$

de modo que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2$ têem desenvolvimentos em série das potências de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$, sendo, limitando-nos aos termos que não excedam a 4ª ordem,

$$\sigma_1 = (\gamma_1-\gamma'_1)\gamma'_2 - \gamma_1(\gamma_2-\gamma'_2) - \gamma_1\gamma'_2(\gamma_1-\gamma'_1)(\gamma_2-\gamma'_2) + \cdots$$

$$\sigma_2 = (\gamma_2-\gamma'_2)\gamma'_1 - \gamma_2(\gamma_1-\gamma'_1) - \gamma_2\gamma'_1(\gamma_1-\gamma'_1)(\gamma_2-\gamma'_2) + \cdots$$

$$\sigma'_1 = (\gamma_1-\gamma'_1)^2 + \gamma_1\gamma'_1(\gamma_1-\gamma'_1)(\gamma_2-\gamma'_2) + \cdots$$

$$\sigma'_2 = (\gamma_2-\gamma'_2)^2 + \gamma_2\gamma'_2(\gamma_1-\gamma'_1)(\gamma_2-\gamma'_2) + \cdots.$$

Continuando a desprezar as excentricidades, vejamos agora em que se torna a nossa função

$$R_0 = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{aa'}}\sum \frac{1.3.5\ldots(2p-2)}{2.4.6\ldots(2p-1)} \cdot \frac{(aa')^p}{d^{2p}}\eta^{p-\frac{1}{2}},$$

na qual se devem substituir η e as suas potências sucessivas pela expressão acima dada e pelos que dela se deduzem. Ao mesmo tempo deve ter-se em vista o desenvolvimento encontrado para $\left(\frac{aa'}{d^2}\right)^p = \sum b_n^p \cos n\varphi = \sum b_n^p \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2} = \sum b_n^p e^{in\varphi} = \sum b_n^p e^{in(v-v')}$

Virá

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{aa'}} \sum A \frac{1.3.5\ldots(2p-2)}{2.4.6\ldots(2p+1)} b_n^p e^{in(v-v')} \sigma_1^{q_1} \sigma_2^{q_2} \sigma_1'^{q_1'} \sigma_2'^{q_2'} e^{i(q_1-q_2)(v-v')} \cdot e^{i(q_1'-q_2')(v+v')},$$

onde a soma se estende a p, a n, e a q_1, q_2, q_1', q_2', êstes últimos sendo tais que

$$q_1+q_2+q_1'+q_2' = p+\frac{1}{2}.$$

Voltando a pôr $p+\frac{1}{2} = q$, ou $2p+1 = 2q$, tem-se

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{aa'}} \sum A \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.5\ldots(2q)} \sigma_1^{q_1} \sigma_2^{q_2} \sigma_1'^{q_1'} \sigma_2'^{q_2'} b_n^{q+\frac{1}{2}} e^{i(n+q_1-q_2)(v-v') + i(q_1'-q_2')(v+v')}.$$

Aqui deverá ser

$$q_1+q_2+q_1'+q_2' = q, \qquad n = \text{inteiro positivo e negativo.}$$
$$q = \text{inteiro positivo ou nulo,}$$

*) Quando $q=0$, o factor numérico que entra em R_0 é igual à unidade.

Podemos pôr ainda

$$A \cdot \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots(2q)} = \frac{q!}{q_1!(q-q_1)!} \cdot \frac{(q-q_1)!}{q_2!(q-q_1-q_2)!} \cdot \frac{(q-q_1-q_2)!}{q_1'!(q-q_1-q_2-q_1')!} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots(2q)} =$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2^q q_1! q_2! q_1'! q_2'!}, \qquad \text{de sorte que}$$

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{aa'}} \sum \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2^q q_1! q_2! q_1'! q_2'!} \sigma_1^{q_1} \sigma_2^{q_2} \sigma_1'^{q_1'} \sigma_2'^{q_2'} b_n^{q+\frac{1}{2}} e^{i(n+q_1-q_2)(v-v') + i(q_1'-q_2')(v+v')},$$

onde, repita-se:
$$\begin{cases} q = \text{inteiro, positivo ou nulo} \\ n = \text{inteiro, positivo e negativo e nulo} \\ q_1+q_2+q_1'+q_2' = q. \end{cases}$$

Ponhamos aqui $n+q_1-q_2 = s$, $q_1'-q_2' = q'$, pelo que s e q' são números inteiros quaisquer. Então, pondo ainda,

$$B_s^{q'} = \sum \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2^q \cdot q_1! q_2! q_1'! q_2'!} \sigma_1^{q_1} \sigma_2^{q_2} \sigma_1'^{q_1'} \sigma_2'^{q_2'} b_{s-q_1+q_2}^{q+1/2},$$

virá

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{aa'}} \sum e^{is(v-v') + iq'(v+v')} B_s^{q'}$$

Aqui, em R_0, a soma é estendida a todos os valores inteiros de s e de q'; em $B_s^{q'}$, a soma é estendida sendo
$$\begin{cases} q = \text{inteiro, positivo ou nulo} \\ q_1+q_2+q_1'+q_2' = q, \quad q_1'-q_2' = q'. \end{cases}$$

As quantidades $B_s^{q'}$ são determinadas, em virtude da sua expressão, quando são dados s e q'. Dependem de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1', \sigma_2'$, isto é, dependem das inclinações das duas órbitas e das longitudes θ, θ' dos dois nodos. Além disso, dependem ainda, linearmente, dos coficientes de Laplace b_n^p.

Para passarmos ao resultado final, precisamos introduzir agora as excentricidad isto é introduzir r, r' em vez de a, a', tanto em $\frac{1}{\sqrt{aa'}}$ como em b_n^p. Antes diss porém, introduzamos as longitudes médias l, l', ou, melhor, exprimamos r e v em l e r', v' em l'. Temos

$$\frac{1}{\sqrt{aa'}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{rr'}} = \frac{1}{\sqrt{aa'}}\sqrt{aa'}\,\frac{1}{\sqrt{rr'}} = \frac{1}{\sqrt{aa'}}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-1/2}$$

Quanto a b_n^p, imaginemos $a<a'$. Então $\alpha = \frac{a}{a'}$ é substituído pelo cociente $\frac{r}{r'}$, nós

x) $$b_n^p \longrightarrow b_n^p + \frac{D b_n^p}{1}\left(\log\frac{r}{a}\frac{a'}{r'}\right) + \frac{D^2 b_n^p}{1.2}\left(\log\frac{r}{a}\frac{a'}{r'}\right)^2 + \dots$$

Este resultado pode escrever-se simbòlicamente

$$e^{D\log\left(\frac{r}{a}\frac{a'}{r}\right)}\, b_n^p \quad \text{ou} \quad \left(\frac{r}{a}\right)^D\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-D} b_n^p,$$

onde se convenciona desenvolver segundo as potências de D e onde $D^\kappa \times b_n^p$ se deve substituir por $D^\kappa b_n^p$.

Se fosse $a>a'$ os resultados seriam os mesmos, depois de mudar D em $-D$. Esta observação é válida em toda a teoria posterior. Por isso, continuaremos a supor $a<a'$. Ora, sabemos que é

$$v = \theta + \text{distância periélia} + w = \varpi + w, \quad \text{e, portanto,}$$

$$v = \varpi + g - g + w = l + w - g$$

$$v' = l' + w' - g'.$$

Assim é

$$e^{iv} = \frac{z}{x}\, e^{il}, \qquad e^{iv'} = \frac{z'}{x'}\, e^{il'},$$

e, pondo

$$\lambda = e^{il}, \qquad \lambda' = e^{il'}, \qquad \text{tem-se}$$

$$R\sqrt{aa'} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-1/2}\sum\left(\frac{z}{x}\right)^s\lambda^s\left(\frac{z'}{x'}\right)^{-s}(\lambda')^{-s}\left(\frac{z}{x}\right)^{q'}\lambda^{q'}\left(\frac{z'}{x'}\right)^{q'}(\lambda')^{q'}$$
$$\times\left(\frac{r}{a}\right)^D\left(\frac{r'}{a'}\right)^D$$

ou seja
$$R_0\sqrt{aa'} = \sum \lambda^{\nu+q'} \lambda'^{-\nu+q'} A_\nu^{q'} B_\nu^{q'}, \longrightarrow \text{&c.}$$

onde
$$A_\nu^{q'} = \left(\frac{r}{a}\right)^{D-\frac{1}{2}} \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-D-1/2} \left(\frac{z}{x}\right)^{\nu+q'} \left(\frac{z'}{x'}\right)^{-\nu+q'},$$

ou
$$A_\nu^{q'} = \left\{\left(\frac{r}{a}\right)^{D-1/2}\left(\frac{z}{x}\right)^{\nu+q'}\right\} \cdot \left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-D-1/2}\left(\frac{z'}{x'}\right)^{-\nu+q'}\right\}.$$

Estas últimas quantidades $A_\nu^{q'}$ aparecem como produtos de duas partes cujos desenvolvimentos fôram estudados no capítulo anterior (des. $X^{p,\sigma}$).

Sejam agora ε, ε' as excentricidades, ϖ e ϖ' as longitudes periélias e ponhamos
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\varpi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{i\varpi}, \quad \varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{-i\varpi'}, \quad \varepsilon'_2 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{i\varpi'},$$

de modo que
$$x_1 = \frac{\varepsilon}{2} x = \frac{\varepsilon}{2} e^{ig} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\varpi} e^{i\varpi} e^{ig} = \varepsilon_1 e^{i(\varpi+g)} = \varepsilon_1 \lambda,$$

pois
$$\varpi + g = \theta + \text{dist. periélia} + g = l.$$

Em resumo: pôr-se-há
$$x_1 = \varepsilon_1 \lambda, \quad x_2 = \varepsilon_2 \lambda^{-1}, \quad x'_1 = \varepsilon'_1 \lambda', \quad x'_2 = \varepsilon'_2 \lambda'^{-1}$$

Ora
$$*A_\nu^{q'} = X^{D-1/2,\, \nu+q'} \cdot X^{-D-\frac{1}{2},\, -\nu+q'} =$$
$$= \sum X_{p_1,p_2}^{D-\frac{1}{2},\, \nu+q'} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdot \sum X_{p'_1,p'_2}^{-D-\frac{1}{2},\, -\nu+q'} x_1'^{p'_1} x_2'^{p'_2}$$

Introduziremos a notação
$$X_{p_1,p_2}^{D-\frac{1}{2},\, \sigma} = N_{p_1,p_2}^{\sigma}, \quad X_{p_1,p_2}^{-D-\frac{1}{2},\, \sigma} = N'^{\sigma}_{p_1,p_2},$$

pelo que vira
$$A_\nu^{q'} = \sum x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_1'^{p'_1} x_2'^{p'_2} N_{p_1,p_2}^{\nu+q'} N'^{-\nu+q'}_{p'_1,p'_2},$$

onde p_1, p_2, p'_1, p'_2 são inteiros não negativos quaisquer.

A igualdade
$$R_0\sqrt{aa'} = \sum \lambda^{\nu+q'} \lambda'^{-\nu+q'} A_\nu^{q'} B_\nu^{q'},$$
na qual os $A_\nu^{q'}$ dependem das excentricidades e não das inclinações, e os $B_\nu^{q'}$ dependem

§41) <u>Continuação</u> - pelo contrário, das inclinações e não das excentricidades, dá uma expressão simbólica simples do desenvolvimento de R_0. É o desenvolvimento de <u>Newcomb</u>. As quantidades $N^{\sigma}_{p_1,p_2}$, $N'^{\sigma}_{p_1,p_2}$ dizem-se <u>operadores de Newcomb</u>. Carecemos, é claro, da sua expressão, para o que recorreremos à teoria desenvolvida no capítulo anterior, a propósito das quantidades $X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2}$. Se tivermos em vista que

$$\frac{C_{2p}^{p}}{2(2p-1)(2p-3)} = \frac{2p(2p-1)(2p-2)\cdots(2p-p+1)}{1\cdot 2\cdots p\cdot 2(2p-1)(2p-3)} =$$

$$= \frac{(2p-2)(2p-3)\cdots(p+1)p}{1\cdot 2\cdots(p-1)\cdot p}\cdot\frac{\cancel{2p(2p-1)}}{\cancel{2p}}\cdot\frac{1}{\cancel{(2p-1)}(2p-3)} =$$

$$= \frac{C_{2p-2}^{p-1}}{p(2p-3)},$$ as relações de recorrência do § 35 dão

$$\left\{\begin{aligned} p_1 N^{\sigma}_{p_1,p_2} &= \left(2\sigma+\tfrac{1}{2}-D\right) N^{\sigma+1}_{p_1-1,p_2} + \left(\sigma+\tfrac{1}{2}-D\right) N^{\sigma+2}_{p_1-2,p_2} + \\ &\quad + \left(4\sigma+5p_1-p_2-\tfrac{7}{2}-D\right) N^{\sigma}_{p_1-1,p_2-1} - \\ &\quad - 3(\sigma+p_1-p_2)\sum_{2}^{\infty}\frac{C_{2p-2}^{p-1}}{p(2p-3)} N^{\sigma}_{p_1-p,p_2-p}, \\ p_2 N^{\sigma}_{p_1,p_2} &= \left(-2\sigma+\tfrac{1}{2}-D\right) N^{\sigma-1}_{p_1,p_2-1} + \left(-\sigma+\tfrac{1}{2}-D\right) N^{\sigma-2}_{p_1,p_2-2} + \\ &\quad + \left(-4\sigma-p_1+5p_2-\tfrac{7}{2}-D\right) N^{\sigma}_{p_1-1,p_2-1} + \\ &\quad + 3(\sigma+p_1-p_2)\sum_{2}^{\infty}\frac{C_{2p-2}^{p-1}}{p(2p-3)} N^{-\sigma}_{p_1-p,p_2-p}, \end{aligned}\right.$$

sendo ainda, como no referido §,

$$N^{\sigma}_{p_1,p_2} = N^{-\sigma}_{p_2,p_1}, \quad N^{\sigma}_{0,0} = 1.$$

Os operadores $N'^{\sigma}_{p_1,p_2}$ deduzem-se dos anteriores mudando D em $-D$.

Isto feito, regressemos à última expressão encontrada para $R_0\sqrt{aa'}$. Podemos pôr

$$R_0\sqrt{aa'} = \sum C\lambda^{s+q'}\lambda'^{-s+q'} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_1'^{p_1'} x_2'^{p_2'} \sigma_1^{q_1}\sigma_2^{q_2}\sigma_1'^{q_1'}\sigma_2'^{q_2'} =$$

$$= \sum A\lambda^{s}\lambda'^{s'} \varepsilon_1^{p_1}\varepsilon_2^{p_2}\varepsilon_1'^{p_1'}\varepsilon_2'^{p_2'}\gamma_1^{r_1}\gamma_2^{r_2}\gamma_1'^{r_1'}\gamma_2'^{r_2'}. \qquad (9)$$

Nesta igualdade <u>s</u> e <u>s</u>' são inteiros quaisquer (positivos ou negativos), $p_1, p_2, p_1', p_2', r_1, r_2, r_1', r_2'$ são inteiros não negativos. Observando que os desenvolvimentos de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1', \sigma_2'$ em séries inteiras dos $\gamma\gamma$ só contêm termos pares, vê-se que a soma $r_1+r_2+r_1'+r_2'$

é par. Relativamente aos coeficientes $\underline{A}$, trata-se de funções lineares e homogéneas dos b_n^p e dos $D^k b_n^p$.

Imaginemos que recuamos a origem das longitudes, no plano fundamental, dum ângulo fixo $\underline{\omega}$. Então $\lambda = e^{il}$ torna-se em $e^{i(l+\omega)}$, λ' torna-se em $e^{i(l'+\omega)}$, ε_1 torna-se $\varepsilon_1 \cdot e^{-i\omega}$, etc., pelo que o termo geral do desenvolvimento anterior (φ) nos aparecerá multiplicado por

$$e^{i\omega(s+s'-p_1+p_2-p'_1+p'_2-r_1+r_2-r'_1+r'_2)}.$$

Tendo em vista que a expressão de $\underline{R_0}$, em face do seu significado, não se modifica com tal mudança, deve ser $s+s'-p_1+p_2-p'_1+p'_2-r_1+r_2-r'_1+r'_2=0$, ou seja

$$s+s' = p_1-p_2+p'_1-p'_2+r_1-r_2+r'_1-r'_2.$$

Exprimimo-nos ainda melhor dizendo que a expressão de $\underline{R_0}$, com a nova origem, é a mesma que a anterior, figurando as novas longitudes em vez das antigas. Essa circunstância acarreta a igualdade anterior.

O termo geral de $\underline{R_0}$ é do grau $p_1+p_2+p'_1+p'_2+r_1+r_2+r'_1+r'_2$ relativamente às quantidades $\varepsilon\varepsilon$ e $\gamma\gamma$ ou seja relativamente a $\varepsilon, \varepsilon', \gamma, \gamma'$. Assim êste grau é, pelo menos, igual ao $s+s'$ e sempre da mesma paridade de $s+s'$, visto que

$$s+s' = (p_1+p_2+p'_1+p'_2+r_1+r_2+r'_1+r'_2) - 2p'_2 - 2p_2 - 2r'_2 - 2r_2.$$

Como a função $\underline{R_0}$ é uma função $\underline{\text{real}}$, vamos escrevê-la sob forma $\underline{\text{real}}$. Virá

$$(x)\quad R_0\sqrt{aa'} = \sum A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2}\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{p'_1+p'_2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{r_1+r_2}\left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{r'_1+r'_2}\times$$
$$\times\cos\left[sl+s'l'+(p_2-p_1)\varpi+(p'_2-p'_1)\varpi'+(r_2-r_1)\theta+(r'_2-r'_1)\theta'\right].$$

Os quatro números r_1+r_2, $r'_1+r'_2$, r_2-r_1, $r'_2-r'_1$ são da mesma paridade, porque a soma $r_1+r_2+r'_1+r'_2$ é par.

§42) <u>Desenvolvimento da segunda parte da função perturbadora</u> — Para se ter o desenvolvimento da função perturbadora completa, carecemos de ter ainda o desenvolvimento da parte complementar

$$R_1 = -\frac{r}{r'^2}\cos H = -\frac{1}{\sqrt{rr'}}\left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2}\cos H.$$

Efectuando cálculos semelhantes aos efectuados para R_0, chega-se ao resultado seguinte:

$$R_1 = -\frac{a}{2a'^2}\sum x_1^{p_1}x_2^{p_2}x_1'^{p'_1}x_2'^{p'_2}\cdot\left[(1+\sigma_1)\lambda\lambda'^{-1}X^{1,1}_{p_1,p_2}X'^{-2,-1}_{p'_1,p'_2}+\sigma'_1\lambda\lambda' X^{1,1}_{p_1,p_2}X'^{-2,1}_{p'_1,p'_2}+\right.$$
$$\left.+(1+\sigma_2)\lambda^{-1}\lambda' X^{1,-1}_{p_1,p_2}X'^{-2,1}_{p'_1,p'_2}+\sigma'_2\lambda^{-1}\lambda'^{-1}X^{1,-1}_{p_1,p_2}X'^{-2,-1}_{p'_1,p'_2}\right].$$

Quanto aos X_{p_1,p_2} que aqui figuram, as relações deduzidas no capítulo anterior dão

$$X^{1,1}_{0,0}=1,\quad X^{1,1}_{2,0}=\frac{3}{2},\quad X^{1,1}_{3,0}=\frac{8}{3},\quad X^{1,1}_{4,0}=\frac{125}{24},$$

$$X^{1,1}_{1,0}=1,\quad X^{1,1}_{1,1}=-2,\quad X^{1,1}_{2,1}=-3,\quad X^{1,1}_{3,1}=-6,$$

$$X^{1,1}_{0,1}=-3,\quad X^{1,1}_{0,2}=\frac{1}{2},\quad X^{1,1}_{1,2}=0,\quad X^{1,1}_{2,2}=-\frac{1}{4},$$

$$X^{1,1}_{0,3}=\frac{1}{3},\quad X^{1,1}_{1,3}=\frac{2}{3},$$

$$X^{1,1}_{0,4}=\frac{3}{8},\ \text{etc.}$$

, se tivermos em vista as igualdades

$$D^2_{x^2}\left(\frac{r}{a}z\right)=\frac{a^2}{r^2}z,\quad e\quad \frac{r}{a}z=\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{z}{x}\right)\cdot x,\quad \frac{a^2}{r^2}z=\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\frac{z}{x}\cdot x$$

deduz-se fàcilmente

$$X^{-2,1}_{\mu_1,\mu_2}=(\mu_1-\mu_2+1)^2\,X^{1,1}_{\mu_1,\mu_2}.\qquad \text{(X)}$$

Tira-se daqui, em particular, que os coeficientes $X^{-2,1}_{\mu_1,\mu_2}$ para os quais fôr $\mu_1-\mu_2+1=0$ são nulos. E conclui-se que, desenvolvendo R_1 sob a forma

$$R_1=\sum B\,\lambda^{s}\lambda'^{s'}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}\varepsilon_1'^{\mu_1'}\varepsilon_2'^{\mu_2'}\gamma_1^{\nu_1}\gamma_2^{\nu_2}\gamma_1'^{\nu_1'}\gamma_2'^{\nu_2'},$$

não pode haver em R_1 termo independente de λ'. Suponhamos, com efeito, que um termo independente de λ' provinha de $x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}x_1'^{\mu_1'}x_2'^{\mu_2'}(1+\sigma_1)\lambda\lambda'^{-1}X^{1,1}_{\mu_1,\mu_2}X^{-2,-1}_{\mu_1',\mu_2'}$. O expoente de λ' em tal termo é $\mu_1'-\mu_2'-1$, e, no seu coeficiente figura $X^{-2,-1}_{\mu_1',\mu_2'}=X^{-2,1}_{\mu_2',\mu_1'}$. Ora, sendo $\mu_1'-\mu_2'-1=0$ é $X^{-2,1}_{\mu_2',\mu_1'}=(\mu_2'-\mu_1'+1)X^{1,1}_{\mu_2',\mu_1'}=0$, pelo que desaparece o termo que não contém λ'.

Sôbre o desenvolvimento supra de R_1, façamos ainda as seguintes observações.

Tem-se

$$s=\mu_1-\mu_2\pm 1,\qquad s'=\mu_1'-\mu_2'\pm 1,$$

e, portanto,

$$\mu_1+\mu_2\geqq |s|-1,\qquad \mu_1'+\mu_2'\geqq |s'|-1.$$

O grau do coeficiente de $\lambda^s\lambda'^{s'}$ com respeito a $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\varepsilon}'$ é, portanto, igual, pelo menos ao $|s|+|s'|-2$ e sempre da mesma paridade dêste último número ou seja da de $|s|+|s'|$ ou da de $s+s'$.

§ 43) **Desenvolvimento explícito de R_0** – Escrevamos explicitamente o desenvolvimento de R_0, não passando, porém, além dos termos que são da quarta ordem relativamente às quantidades $\varepsilon,\varepsilon',\gamma,\gamma'$. Da expressão

$$R_0\sqrt{aa'}=\sum\lambda^{s+q'}\lambda'^{-s+q'}A_s^{q'}B_s^{q'},$$

onde s e q' são inteiros quaisquer, tira-se

$$R_0\sqrt{aa'}=\sum\left(\lambda^{s}\lambda'^{-s}A_s^{0}B_s^{0}+\lambda^{s+1}\lambda'^{-s+1}A_s^{1}B_s^{1}+\lambda^{s-1}\lambda'^{-s-1}A_s^{-1}B_s^{-1}+\right.$$

$$+ \lambda^{s+2} \lambda'^{-s+2} A_s^2 B_s^2 + \lambda^{s-2} \lambda'^{-s-2} A_s^{-2} B_s^{-2} + \cdots \Big),$$

sendo aqui

$$B_s^0 = b_s^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 b_{s-1}^{3/2} + \sigma_2 b_{s+1}^{3/2}\right) + \frac{3}{8}\left(\sigma_1^2 b_{s-2}^{5/2} + \sigma_2^2 b_{s+2}^{5/2}\right) + \frac{3}{4}\left(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1' \sigma_2'\right) b_s^{5/2} + \cdots ,$$

$$\frac{B_s^1}{\sigma_1'} = \frac{B_s^{-1}}{\sigma_2'} = \frac{1}{2} b_s^{3/2} + \frac{3}{4}\left(\sigma_1 b_{s-1}^{5/2} + \sigma_2 b_{s+1}^{5/2}\right) + \cdots ,$$

$$\frac{B_s^2}{\sigma_1'^2} = \frac{B_s^{-2}}{\sigma_2'^2} = \frac{3}{8} b_s^{5/2} + \cdots$$

$$- \ - \ - \ - \ — \quad ,$$

sem necessidade, no grau de aproximação considerado, de serem escritos mais termos.

Antes de passarmos a dar as expressões explícitas dos $A_s^{q'}$, vamos definir aqui um grupo simples que nos será útil nessas expressões. O grupo compõe-se das 3 substituições seguintes:

Veja-se o verso

1.º) S = substituição que troca os planetas entre si e que, portanto, permuta x_1 com x_1', x_2 com x_2', ao mesmo tempo que muda $\underline{s}$ em $-\underline{s}$ e $\underline{D}$ em $-\underline{D}$ (a-fim-de manter a expressão dos $A_s^{q'}$, visto que $\underline{R_0}$ se mantém);

2.º) S' = substituição pela qual cada termo é substituído pelo seu conjugado (a qual mantém principalmente R_0) e que consiste em trocar $\underline{x_1}$ com $\underline{x_2}$ e $\underline{x_1'}$ com $\underline{x_2'}$ e $\underline{s}$ com $\underline{-s}$;

3.º) S'' = produto das duas substituições precedentes, que troca $\underline{x_1}$ com $\underline{x_1'}$ e $\underline{x_2}$ com $\underline{x_2'}$, ao mesmo tempo que muda o sinal de D.

A substituição S deixa invariante as funções $A_s^{q'}$; a substituição S', assim como S'', muda $A_s^{q'}$ em $A_s^{-q'}$, deixando, em particular, invariante A_s^0.

Basta pois escrever as funções A_s^0, A_s^1, A_s^2, ..., visto que, pela substituição S' ou pela substituição S'', se obtêem A_s^{-1}, A_s^{-2}, ...

Em segundo lugar, basta dar certos termos de A_s^0, A_s^1, A_s^2, ... visto ~~que~~ os que faltam serão conhecidos em consequência da substituição S, se se trata de A_s^1, A_s^2, ..., tendo o cuidado de não dobrar os termos que ficam invariantes, em face de S. Quanto a A_s^0, devemos operar todas as substituições S, S', S'', visto que todas elas deixam A_s^0 invariante.

Assim, escrever-se-há

Faculdade de Ciências do Pôrto
SECRETARIA

(4) → (115a)

Consideremos como S a operação

$$\left\{\begin{array}{ll} s \rightarrow -s & x_1 \rightarrow x'_1 \\ D \rightarrow -D & x_2 \rightarrow x'_2 \end{array}\right.$$

esta operação mantém $A_s^{q'}$. Com efeito

$$A_s^{q'} = \sum x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_1'^{\mu'_1} x_2'^{\mu'_2} N_{\mu_1,\mu_2}^{s+q'} N'^{-s+q'}_{\mu'_1,\mu'_2}$$

$$S(A_s^{q'}) = \sum x_1'^{\mu_1} x_2'^{\mu_2} x_1^{\mu'_1} x_2^{\mu'_2} N_{\mu_1,\mu_2}^{-s+q'} N_{\mu'_1,\mu'_2}^{s+q'} =$$

$$= \sum x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_1'^{\mu'_1} x_2'^{\mu'_2} N_{\mu_1,\mu_2}^{s+q'} N'^{-s+q'}_{\mu'_1,\mu'_2}$$

Substituição S':

$$A_s^{q'} = \sum x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_1'^{\mu'_1} x_2'^{\mu'_2} N_{\mu_1,\mu_2}^{s+q'} N'^{-s+q'}_{\mu'_1,\mu'_2}$$

$x_1 \rightarrow x_2$
$x'_1 \rightarrow x'_2$
$s \rightarrow -s$

$$S'(A_s^{q'}) = \sum x_2^{\mu_1} x_1^{\mu_2} x_2'^{\mu'_1} x_1'^{\mu'_2} N_{\mu_1,\mu_2}^{-s+q'} N'^{s+q'}_{\mu'_1,\mu'_2} =$$

$$= \sum x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_1'^{\mu'_1} x_2'^{\mu'_2} N_{\mu_2,\mu_1}^{-s+q'} N'^{s+q'}_{\mu'_2,\mu'_1} \leftarrow$$

$$= \sum x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_1'^{\mu'_1} x_2'^{\mu'_2} N_{\mu_1,\mu_2}^{s-q'} N'^{-s-q'}_{\mu'_1,\mu'_2} = A_s^{-q'}$$

Substituição S'':

$$S'' = S'S$$

$$S''(A_s^{q'}) = S'(SA_s^{q'}) = S'(A_s^{q'}) = A_s^{-q'}$$

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^{3/2} \quad \left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2} = \left(\frac{a}{a'}\right)^{3/2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} \left(\frac{\pi'}{a'}\right)^{-3/2}$$

$$A_n^0 = 1 + x_1 N_{1,0}^{n} + x_1^2 N_{2,0}^{n} + x_1 x_2 N_{1,1}^{n} + x_1 x_1' N_{1,0}^{n} N_{1,0}^{1-n} + x_1 x_2' N_{1,0}^{n} N_{0,1}^{1-n} +$$

$$+ x_1^3 N_{3,0}^{n} + x_1^2 x_2 N_{2,1}^{n} + x_1^2 x_1' N_{2,0}^{n} N_{1,0}^{1-n} + x_1^2 x_2' N_{2,0}^{n} N_{0,1}^{1-n} + x_1 x_2 x_1' N_{1,1}^{n} N_{1,0}^{1-n} +$$

$$+ x_1^4 N_{4,0}^{n} + x_1^3 x_2 N_{3,1}^{n} + x_1^2 x_2^2 N_{2,2}^{n} +$$

$$+ x_1^3 x_1' N_{3,0}^{n} N_{1,0}^{1-n} + x_1^3 x_2' N_{3,0}^{n} N_{0,1}^{1-n} + x_1^2 x_2 x_1' N_{2,1}^{n} N_{1,0}^{1-n} + x_1^2 x_2 x_2' N_{2,1}^{n} N_{0,1}^{1-n} +$$

$$+ x_1^2 x_1'^2 N_{2,0}^{n} N_{2,0}^{1-n} + x_1^2 x_1' x_2' N_{2,0}^{n} N_{1,1}^{1-n} +$$

$$+ x_1^2 x_2'^2 N_{2,0}^{n} N_{0,2}^{1-n} + x_1 x_2 x_1' x_2' N_{1,1}^{n} N_{1,1}^{1-n}$$

$$+ - \text{———}$$

$$A_n^1 = 1 + x_1 N_{1,0}^{n+1} + x_2 N_{0,1}^{n+1} + x_1^2 N_{2,0}^{n+1} + x_1 x_2 N_{1,1}^{n+1} + x_2^2 N_{0,2}^{n+1} +$$

$$+ x_1 x_1' N_{1,0}^{n+1} N_{1,0}^{1-n+1} + x_1 x_2' N_{1,0}^{n+1} N_{0,1}^{1-n+1} + x_2 x_1' N_{0,1}^{n+1} N_{0,1}^{1-n+1} + \ldots$$

$$A_n^2 = 1 + \ldots$$

Os operadores de Newcomb aqui utilizados têem, de resto, as seguintes expressões:

$$N_{1,0}^{n} = 2n + \frac{1}{2} - D,$$

$$N_{2,0}^{n} = 2n^2 + \frac{7}{2} n + \frac{7}{8} - (2n+2) D + \frac{1}{2} D^2,$$

$$N_{1,1}^{n} = -4n^2 - \frac{1}{4} + D^2,$$

$$N_{3,0}^{n} = \frac{4}{3} n^3 + 6n^2 + \frac{22}{3} n + \frac{29}{16} - \left(2n^2 + \frac{13}{2} n + \frac{107}{24}\right) D + \left(n + \frac{7}{4}\right) D^2 - \frac{1}{6} D^3,$$

$$N_{2,1}^{n} = -4n^3 - 6n^2 - 2n - \frac{9}{16} + \left(2n^2 + \frac{3}{2} n + \frac{5}{8}\right) D + \left(n + \frac{5}{4}\right) D^2 - \frac{1}{2} D^3,$$

$$N_{4,0}^{n} = \frac{2}{3} n^4 + \frac{17}{3} n^3 + \frac{385}{24} n^2 + \frac{265}{16} n + \frac{1553}{384} - \left(\frac{4}{3} n^3 + 9n^2 + \frac{73}{4} n + \frac{251}{24}\right) D +$$
$$+ \left(n^2 + \frac{19}{4} n + \frac{247}{48}\right) D^2 - \left(\frac{1}{3} n + \frac{5}{6}\right) D^3 + \frac{1}{24} D^4,$$

$$N_{3,1}^{n} = -\frac{8}{3} n^4 - \frac{34}{3} n^3 - \frac{44}{3} n^2 - \frac{59}{8} n - \frac{167}{96} + \left(\frac{8}{3} n^3 + 8n^2 + \frac{41}{6} n + 3\right) D +$$
$$+ \left(\frac{3}{2} n + \frac{19}{12}\right) D^2 - \left(\frac{2}{3} n + \frac{4}{3}\right) D^3 + \frac{1}{6} D^4,$$

$$N_{2,2}^{?} = 4\nu^4 - \frac{11}{4}\nu^2 - \frac{15}{64} + (2\nu^2 + \frac{1}{4})D + (-2\nu^2 + \frac{7}{8})D^2 - D^3 + \frac{1}{4}D^4, \&c$$

---

§ 43) <u>Continuação</u> – Os resultados anteriores permitem-nos exprimir duma maneira explícita as quantidades $A_\nu^{q'}$. Não escrevendo senão quantidades até à 3ª ordem nas excentricidades e nas inclinações, teremos

$$\begin{aligned}
A_\nu^0 = {} & 1 + x_1\left(2\nu + \frac{1}{2} - D\right) + x_1^2\left[2\nu^2 + \frac{7}{2}\nu + \frac{9}{8} - (2\nu+2)D + \frac{1}{2}D^2\right] + \\
& + x_1x_2\left[-4\nu^2 - \frac{1}{4} + D^2\right] + x_1x_1'\left[-4\nu^2 + \frac{1}{4} + 4\nu D - D^2\right] + \\
& + x_1x_2'\left[4\nu^2 + 2\nu + \frac{1}{4} - D^2\right] + \\
& + x_1^3\left[\frac{4}{3}\nu^3 + 6\nu^2 + \frac{22}{3}\nu + \frac{29}{16} - \left(2\nu^2 + \frac{13}{2}\nu + \frac{107}{24}\right)D + \left(\nu + \frac{7}{4}\right)D^2 - \frac{1}{6}D^3\right] + \\
& + x_1^2x_2\left[-4\nu^3 - 6\nu^2 - 2\nu - \frac{9}{16} + \left(2\nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \frac{5}{8}\right)D + \left(\nu + \frac{5}{4}\right)D^2 - \frac{1}{2}D^3\right] + \\
& + x_1^2x_1'\left[-4\nu^3 - 6\nu^2 + \frac{7}{16} + \left(6\nu^2 + \frac{13}{2}\nu - \frac{1}{8}\right)D - \left(3\nu + \frac{7}{4}\right)D^2 + \frac{1}{2}D^3\right] + \\
& + x_1^2x_2'\left[4\nu^3 + 8\nu^2 + \frac{7}{2}\nu + \frac{7}{16} - \left(2\nu^2 + \frac{3}{2}\nu + \frac{1}{8}\right)D - \left(\nu + \frac{7}{4}\right)D^2 + \frac{1}{2}D^3\right] + \\
& + x_1x_2x_1'\left[8\nu^3 - 2\nu^2 + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{8} - \left(4\nu^2 + \frac{1}{4}\right)D + \left(-2\nu + \frac{1}{2}\right)D^2 + D^3\right] + \cdots,
\end{aligned}$$

$$A_\nu^1 = 1 + x_1\left(2\nu + \frac{5}{2} - D\right) + x_2\left(-2\nu - \frac{3}{2} - D\right) + x_1^2\left[2\nu^2 + 4\nu + 2 + \frac{7}{2}\nu + \cdots\right] +$$

$$+ \cdots$$

Posto isto, voltando ao desenvolvimento

$$R_0\sqrt{aa'} = \sum \lambda^{\nu+q'}\lambda'^{-\nu+q'}A_\nu^{q'}B_\nu^{q'},$$

escrevamos, em particular, o desenvolvimento explícito da <u>parte secular</u> R_{00} de R_0, isto é, da parte de R_0 que não depende das longitudes médias <u>l</u> e <u>l'</u>, ou, por outras palavras, que não depende de λ, λ'. Tendo em vista o que se disse acerca das substituições S, S', S'' vem, escrevendo <u>todos</u> os termos

$$\begin{aligned}
R_{00}\sqrt{aa'} = {} & \left(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 N_{1,1}^0 + \varepsilon_1'\varepsilon_2' N'^{\,0}_{1,1} + \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 N_{2,2}^0 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_1'\varepsilon_2' N_{1,1}^0 N'^{\,0}_{1,1} + \varepsilon_1'^2\varepsilon_2'^2 N'^{\,0}_{2,2} + \cdots\right)B_0^0 + \\
& + \left(N_{0,1}^1 N'^{\,-1}_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 N'_{1,2} N'^{\,-1}_{1,0} + \varepsilon_1'\varepsilon_2' N'_{0,1} N'^{\,-1}_{2,1} + \cdots\right)\left(\varepsilon_1\varepsilon_2' B_{-1}^0 + \varepsilon_2\varepsilon_1' B_1^0\right) +
\end{aligned}$$

$$+ (N_{0,2}^{2} N'^{-2}_{2,0} + \dots)(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2'^2 B_{-2}^{0} + \varepsilon_2^2 \varepsilon_1'^2 B_2^{0}) + \dots$$

$$+ (N_{0,1}^{1} N'^{1}_{0,1} + \dots)(\varepsilon_1 \varepsilon_1' B_0^{-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_2' B_0^{1}) + \dots$$

$$+ (N_{0,2}^{2} + \dots)(\varepsilon_1^2 B_{-1}^{-1} + \varepsilon_2^2 B_1^{1}) + \dots + (N'^{2}_{0,2} + \dots)(\varepsilon_1'^2 B_1^{-1} + \varepsilon_2'^2 B_{-1}^{1}) + \dots,$$

onde, de resto, se tem, como se sabe,

$$N_{1,1}^{0} = N'^{0}_{1,1} = -\frac{1}{4} + D^2, \quad N_{1,1}^{0} N'^{0}_{1,1} = \left(-\frac{1}{4} + D^2\right)^2,$$

$$N_{2,2}^{0} = \left(-\frac{1}{4} + D^2\right)\left(\frac{15}{16} - D + \frac{1}{4} D^2\right),$$

$$N'^{0}_{2,2} = \left(-\frac{1}{4} + D^2\right)\left(\frac{15}{16} + D + \frac{1}{4} D^2\right),$$

$$N_{0,1}^{1} N'^{-1}_{1,0} = N_{0,1}^{1} N'^{1}_{0,1} = \frac{9}{4} - D^2,$$

$$N_{1,2}^{1} N'^{-1}_{1,0} = \left(\frac{9}{4} - D^2\right)\left(\frac{3}{8} - D + \frac{1}{2} D^2\right),$$

$$N_{0,1}^{1} N'^{1}_{2,1} = \left(\frac{9}{4} - D^2\right)\left(\frac{3}{8} + D + \frac{1}{2} D^2\right),$$

$$N_{0,2}^{2} N'^{-2}_{2,0} = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4} - D^2\right)\left(\frac{25}{4} - D^2\right),$$

$$N_{0,2}^{2} = \frac{15}{8} + 2D + \frac{1}{2} D^2, \quad N'^{2}_{0,2} = \frac{15}{8} - 2D + \frac{1}{2} D^2,$$

Recordando-nos agora da relação

$$D^2 b_n^{p} = (n \pm p)^2 b_n^{p} + 4p^2 b_{n \pm 1}^{p+1},$$

vê-se que as potências de $\underline{D}$ superiores à primeira se podem eliminar. Então deverá pôr-se

$$\left(D^2 - \frac{1}{4}\right) b_0^{1/2} = b_1^{3/2}, \quad \left(D^2 - \frac{9}{4}\right) b_0^{3/2} = 9 b_1^{5/2},$$

$$\left(D^2 - \frac{9}{4}\right) b_1^{1/2} = b_2^{3/2}, \quad \left(D^2 - \frac{1}{4}\right) b_1^{3/2} = 9 b_0^{5/2},$$

$$\left(D^2 - \frac{25}{4}\right) b_2^{1/2} = b_3^{3/2}, \quad \left(D^2 - \frac{1}{4}\right) b_2^{3/2} = 9 b_1^{5/2},$$

$$\left(D^2 - \frac{9}{4}\right) b_3^{3/2} = 9 b_2^{7/2},$$

---

pelo que, indo apenas até à 4ª ordem nos $\underline{\varepsilon\varepsilon}$ e nos $\underline{\gamma\gamma'}$ já se escreverá

$$R_{00}\sqrt{aa'} = b_0^{1/2} + \left(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1'\varepsilon_2' + \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\right) b_1^{3/2} - \left(\varepsilon_1\varepsilon_2' + \varepsilon_2\varepsilon_1'\right) b_2^{3/2} + \tag{119}$$

$$+ \left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + \sigma_1'\varepsilon_2'^2 + \sigma_2'\varepsilon_1'^2\right)\left(b_1^{3/2} + \frac{9}{4} b_0^{5/2} - D b_1^{3/2}\right) +$$

$$+ \left(\varepsilon_1'^2\varepsilon_2'^2 + \sigma_1'\varepsilon_2^2 + \sigma_2'\varepsilon_1^2\right)\left(b_1^{3/2} + \frac{9}{4} b_0^{5/2} + D b_1^{3/2}\right) -$$

$$- \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\varepsilon_1\varepsilon_2' + \varepsilon_2\varepsilon_1'\right)\left(\frac{1}{2} b_2^{3/2} + \frac{9}{2} b_1^{5/2} - D b_2^{3/2}\right) -$$

$$- \varepsilon_1'\varepsilon_2'\left(\varepsilon_1\varepsilon_2' + \varepsilon_2\varepsilon_1'\right)\left(\frac{1}{2} b_2^{3/2} + \frac{9}{2} b_1^{5/2} + D b_2^{3/2}\right) +$$

$$+ 9\left[\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_1'\varepsilon_2' + \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1'\varepsilon_2') + \frac{1}{12}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1'\sigma_2')\right] b_0^{5/2} +$$

$$+ \frac{9}{4}\left[\varepsilon_1^2\varepsilon_2'^2 + \varepsilon_2^2\varepsilon_1'^2 + \frac{1}{6}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right] b_2^{5/2}$$

$$- \frac{9}{2}\left[\sigma_1\varepsilon_2\varepsilon_1' + \sigma_2\varepsilon_1\varepsilon_2' + \sigma_1'\varepsilon_2\varepsilon_2' + \sigma_2'\varepsilon_1\varepsilon_1'\right] b_1^{5/2} +$$

$$+ \left(\sigma_1\varepsilon_1\varepsilon_2' + \sigma_2\varepsilon_2\varepsilon_1'\right)\left(b_2^{3/2} - \frac{9}{2} b_1^{5/2}\right) + \cdots .$$

Relativamente à parte complementar, R_1, da função perturbadora, viu-se que não havia termo independente de λ'. Pode ver-se directamente que não contém parte secular.

§ 44) Substituição das longitudes médias – Em vez de $\underline{l}$ e de $\underline{l}'$, no desenvolvimento de R_0, poderíamos ter conservado $\underline{v}$ e $\underline{v}'$. Mas vamos aqui vêr como se podem substituir $\underline{l}$ e $\underline{l}'$ pelas longitudes excêntricas $\underline{l_1}$ e $\underline{l_1'}$, as quais são assim definidas. Tem-se

$$l_1 = u + \varpi = \text{anomalia excêntrica} + \varpi ,$$

pelo que

$$v = w + \varpi = w - u + u + \varpi = l_1 + w - u ,$$

e substituir-se-ia do mesmo modo l_1', mas pode, para o 2.º planeta, conservar-se l'. Substituindo, pois, únicamente $\underline{l}$ por $\underline{l_1}$, tem-se

$$e^{iv} = e^{il_1} e^{i(w-u)} = e^{il_1}\frac{x}{y} = \lambda_1 \frac{x}{y} ,$$

pondo $\lambda_1 = e^{il_1}$.

Vê-se que a quantidade $e^{iv} = e^{il} e^{i(w-g)} = \lambda \frac{r}{x} = e^{if} \frac{r}{x}$ se deve ⑫⓪

substituir por $\lambda_1 \frac{r}{y}$. Isto significa que aparece $\underline{\lambda_1}$ em vez de $\underline{\lambda}$ e que aparece $\frac{r}{y}$ em vez de $\frac{r}{x}$. Então a função $X^{\rho,\sigma}$ é substituída pela função $Y^{\rho,\sigma}$, os coeficientes $X^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2}$ são substituídos pelos coeficientes $Y^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2}$. Emprega-se a notação análoga à que foi introduzida com os operadores de Newcomb. Assim

$$Y^{D-\frac{1}{2},\sigma}_{p_1,p_2} = \mathcal{P}^{\sigma}_{p_1,p_2}.$$

Bastará, pois, em tudo o que se disse anteriormente fazer as substituições:

$$\begin{aligned} \lambda &\to \lambda_1 \\ x_1 &\to y_1 \qquad N^{\sigma}_{p_1,p_2} \to \mathcal{P}^{\sigma}_{p_1,p_2}. \\ x_2 &\to y_2 \end{aligned}$$

Se, em vez de desenvolvermos $\left(\frac{r}{a}\right)^{\rho}\left(\frac{r}{y}\right)^{\sigma}$ em série de y_1, y_2 o fizermos em série de η_1, η_2, os coeficientes são $Y'^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2}$ em vez de $Y^{\rho,\sigma}_{p_1,p_2}$. Logo podemos fazer a substituição seguinte, em tudo quanto se disse anteriormente:

$$\begin{aligned} \lambda &\to \lambda_1, \\ x_1 &\to \eta_1, \qquad Y'^{D-\frac{1}{2},\sigma}_{p_1,p_2} = \mathcal{Q}^{\sigma}_{p_1,p_2} \leftarrow N^{\sigma}_{p_1,p_2}. \\ x_2 &\to \eta_2, \end{aligned}$$

Os operadores $\mathcal{Q}^{\sigma}_{p_1,p_2}$ que aqui figuram têm as expressões seguintes:

$$\mathcal{Q}^{\sigma}_{0,0} = 1,$$

$$\mathcal{Q}^{\sigma}_{1,0} = \sigma + \frac{1}{2} - D,$$

$$\mathcal{Q}^{\sigma}_{2,0} = \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma + \frac{3}{8} - (\sigma+1)D + \frac{1}{2}D^2,$$

$$\mathcal{Q}^{\sigma}_{1,1} = -\sigma^2 + \frac{3}{4} - 2D + D^2,$$

$$\mathcal{Q}^{\sigma}_{3,0} = \frac{\sigma^3}{6} + \frac{3}{4}\sigma^2 + \frac{23}{24}\sigma + \frac{5}{16} - \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{3}{2}\sigma + \frac{23}{24}\right)D + \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{3}{4}\right)D^2 - \frac{1}{6}D^3,$$

$$\mathcal{Q}^{\sigma}_{2,1} = -\frac{\sigma^3}{2} - \frac{3}{4}\sigma^2 + \frac{5}{8}\sigma + \frac{7}{16} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{3}{2}\sigma - \frac{15}{8}\right)D + \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{9}{4}\right)D^2 - \frac{1}{2}D^3,$$

(121)

$$Q^{s}_{4,0} = \frac{s^4}{24} + \frac{s^3}{3} + \frac{43}{48}s^2 + \frac{11}{12}s + \frac{35}{128} - \left(\frac{s^3}{6} + s^2 + \frac{43}{24}s + \frac{11}{12}\right)D +$$
$$+ \left(\frac{s^2}{4} + s + \frac{43}{48}\right)D^2 - \left(\frac{s}{6} + \frac{1}{3}\right)D^3 + \frac{1}{24}D^4,$$
$$Q^{s}_{3,1} = -\frac{s^4}{6} - \frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{11}{32} + \left(\frac{s^3}{3} - \frac{9}{4}s - \frac{5}{3}\right)D +$$
$$+ \left(2s + \frac{31}{12}\right)D^2 - \left(\frac{s}{3} + \frac{4}{3}\right)D^3 + \frac{1}{6}D^4,$$
$$Q^{s}_{2,2} = \frac{s^4}{4} - \frac{9}{8}s^2 + \frac{9}{64} + \left(2s^2 - \frac{3}{2}\right)D - \left(\frac{s^2}{2} - \frac{27}{8}\right)D^2 - 2D^3 + \frac{1}{4}D^4,$$

— — — — — — — — — — — —

Trata-se do mesmo modo o caso de se conservar a longitude verdadeira $\underline{v}$. Interessa admitamos que deixamos $\underline{v}$ e $\underline{l}'$. Pondo $\lambda_2 = e^{iv}$, vê-se que devem fazer-se as substituições seguintes:

$$\lambda \to \lambda_2,\quad x_1 \to z_1,\quad x_2 \to z_2,\quad N^{0}_{\mu_1,\mu_2} \to R_{\mu_1,\mu_2},$$

com

$$\lambda_2 = e^{iv},\quad Z^{D-1/2}_{\mu_1,\mu_2} = R_{\mu_1,\mu_2}$$

e é, como se sabe,

$$R_{0,0} = 1,$$
$$R_{1,0} = \frac{1}{2} - D,$$
$$R_{2,0} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}D^2,$$
$$R_{1,1} = \frac{7}{4} - 4D + D^2,$$
$$R_{3,0} = \frac{1}{16} + \frac{1}{24}D - \frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{6}D^3,$$
$$R_{2,1} = \frac{19}{16} - \frac{31}{8}D + \frac{13}{4}D^2 - \frac{1}{2}D^3,$$
$$R_{4,0} = -\frac{5}{128} - \frac{1}{24}D + \frac{7}{48}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \frac{1}{24}D^4,$$
$$R_{3,1} = -\frac{13}{32} + \frac{1}{3}D + \frac{19}{12}D^2 - \frac{4}{3}D^3 + \frac{1}{6}D^4,$$
$$R_{2,2} = \frac{337}{64} - \frac{61}{4}D + \frac{87}{8}D^2 - 3D^3 + \frac{1}{4}D^4.$$

Para as substituições análogas a operar no segundo planeta, se se quiserem, procede-se da mesma maneira. Temos de acentuar as letras nas diferentes igualdades anteriormente escritas e mudar D em −D nas expressões dos operadores.

Capítulo V

Equações do movimento dos planetas

§ 45) Memorial e generalidades - Sabemos que o movimento relativo do centro de gravidade dum planeta (ou dum sistema planeta-satélites) deriva duma função de fôrça

$$U = \frac{f(1+m)}{r} + V,$$

em que a função perturbadora V é da forma

$$V = \sum f m' R,$$

sendo $\underline{R}$ uma função que foi tratada desenvolvidamente no capítulo anterior.

Conforme o método de Lagrange, o movimento relativo estuda-se como um movimento kepleriano cujos elementos osculadores são

$$\underline{\theta}, \underline{j}, \underline{\varpi}, \underline{a}, \underline{\varepsilon}, \underline{l},$$

juntando-se-lhe o movimento médio $\underline{n}$ tal que $n^2a^3 = f(1+m)$.

Quando se introduzem as variáveis

$$A = n a^2 = a^{1/2} \sqrt{f(1+m)},$$
$$B = A(\cos\varphi - 1),$$
$$C = (A+B)(\cos j - 1),$$

têem-se as equações

$$(1) \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial V}{\partial l}, \qquad \frac{dl}{dt} = n - \frac{\partial V}{\partial A},$$
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \varpi}, \qquad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial B},$$
$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \theta}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial C},$$

como se viu no Capítulo II. Nêsse mesmo capítulo se viu que o sistema anterior resultava dum sistema canónico de função característica

$$H = F - V = -\frac{f^2(1+m)^2}{2A^2} - V = -\left(\frac{f^2(1+m)^2}{2A^2} + V\right).$$

Inversamente, substituindo V por $-\left(\frac{f^2(1+m)^2}{2A^2} + H\right)$ regressa-se ao sistema canónico.

Vamos transformar ainda (1). Poremos

$$B_1 = \sqrt{-B}\, e^{-i\varpi}, \quad B_2 = \sqrt{-B}\, e^{i\varpi}, \quad C_1 = \sqrt{-C}\, e^{-i\theta}, \quad C_2 = \sqrt{-C}\, e^{i\theta}.$$

Vem imediatamente o sistema

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{dA}{idt}=\frac{\partial V}{\partial(il)}, && \frac{d(il)}{idt}=n-\frac{\partial V}{\partial A},\\ &\frac{dB_2}{idt}=\frac{\partial V}{\partial B_1}, && \frac{dB_1}{idt}=-\frac{\partial V}{\partial B_2},\\ &\frac{dC_2}{idt}=\frac{\partial V}{\partial C_1}, && \frac{dC_1}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial C_2}. \end{aligned}$$

A verificação é fácil. Por exemplo, tem-se

$$\frac{dB_2}{dt}=\frac{-1}{2\sqrt{-B}}\frac{dB}{dt}e^{+i\varpi}+\sqrt{-B}\,e^{i\varpi}i\frac{d\varpi}{dt}=-\frac{1}{2B_1}\frac{\partial V}{\partial\varpi}-B_2\,i\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

sendo

$$\frac{\partial V}{\partial B_1}=\frac{\partial V}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial B_1}+\frac{\partial V}{\partial\varpi}\frac{\partial\varpi}{\partial B_1}\overset{(\text{Nota})}{=}\text{[illegible]}$$

$$=\text{[illegible]}\left(\frac{\partial V}{\partial\varpi}\frac{1}{2B_1}-iB_2\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{i}\frac{dB_2}{dt}$$

Nota: Tem-se

$$1=\frac{-1}{2\sqrt{-B}}e^{i\varpi}\frac{\partial B}{\partial B_1}-\sqrt{-B}\,e^{-i\varpi}i\frac{\partial\varpi}{\partial B_1},$$

$$0=\frac{-1}{2\sqrt{-B}}e^{i\varpi}\frac{\partial B}{\partial B_1}+\sqrt{-B}\,e^{i\varpi}i\frac{\partial\varpi}{\partial B_1}$$

donde se tiram $\frac{\partial B}{\partial B_1}$ e $\frac{\partial\varpi}{\partial B_1}$ a substituir em $\frac{\partial V}{\partial B_1}$.

Sob o ponto de vista teórico convêem o emprêgo dos sistemas (1) e (2). Convém, porém, em muitos casos, pôr em evidência a excentricidade e a inclinação. Em vez de $\sqrt{\frac{A}{B}}$ e de $\underline{C}$, no sistema (1), utilizaremos, ao lado de l, ϖ, θ, as 3 variáveis seguintes

$$\log a \ (\text{ou } \underline{n}),\qquad \varepsilon=\operatorname{sen}\varphi,\qquad \gamma=2\operatorname{sen}\frac{J}{2}.$$

Vem, então, o sistema seguinte:

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} \frac{d\log a}{dt}&=\frac{2}{na^2}\frac{\partial V}{\partial l},\quad\left(\text{ou }\frac{dn}{dt}=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial V}{\partial l}\right)\\ \frac{dl}{dt}&=n-\frac{2}{na^2}\left(a\frac{\partial V}{\partial a}\right)+\frac{\varepsilon\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}+\frac{\gamma\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\gamma},\\ \frac{d\varepsilon}{dt}&=-\frac{\cos\varphi}{na^2\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial\varpi}-\frac{\varepsilon\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial l},\\ \frac{d\varpi}{dt}&=\frac{\cos\varphi}{na^2\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}+\frac{\gamma\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\gamma},\\ \frac{d\gamma}{dt}&=-\frac{\sec\varphi}{na^2\gamma}\frac{\partial V}{\partial\theta}-\frac{\gamma\sec\varphi}{2na^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\varpi}+\frac{\partial V}{\partial l}\right),\\ \frac{d\theta}{dt}&=\frac{\sec\varphi}{na^2\gamma}\frac{\partial V}{\partial\gamma}, \end{aligned}\right.$$

que se deduz directamente do sistema (1).

Também podemos utilizar, em vez de ε, ϖ, γ, θ, as quantidades

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}e^{-i\varpi},\quad \varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}e^{i\varpi},\quad \gamma_1=\frac{\gamma}{2}e^{-i\theta},\quad \gamma_2=\frac{\gamma}{2}e^{i\theta}.$$

Um pequeno cálculo directo leva imediatamente ao sistema

$$
(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d(\lg a)}{i\,dt} &= \frac{2}{na^2}\frac{\partial V}{\partial(il)}, \quad \left(\text{ou } \frac{dn}{i\,dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial V}{\partial(il)}\right),\\
\frac{d(il)}{i\,dt} &= n - \frac{2}{na^2}\left(a\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \frac{\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\left(\varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_2}\right) + \frac{\sec\varphi}{2na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial V}{\partial\gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial\gamma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_1}{i\,dt} &= -\frac{\cos\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial(il)} - \frac{\varepsilon_1\sec\varphi}{2na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial V}{\partial\gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial\gamma_2}\right),\\
\frac{d\varepsilon_2}{i\,dt} &= \frac{\cos\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial(il)} + \frac{\varepsilon_2\sec\varphi}{2na^2}\left(\gamma_1\frac{\partial V}{\partial\gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial\gamma_2}\right),\\
\frac{d\gamma_1}{i\,dt} &= -\frac{\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\gamma_2} - \frac{\gamma_1\sec\varphi}{2na^2}\left(\frac{\partial V}{\partial(il)} - \varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_2}\right),\\
\frac{d\gamma_2}{i\,dt} &= \frac{\sec\varphi}{2na^2}\frac{\partial V}{\partial\gamma_1} - \frac{\gamma_2\sec\varphi}{2na^2}\left(\frac{\partial V}{\partial(il)} - \varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_2}\right).
\end{aligned}\right.
$$

A função V é uma soma de termos da forma $fm'R$, tendo a função $\underline{R}$ um desenvolvimento que estudámos no capítulo anterior, segundo as potências de $\lambda, \lambda', \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$. Vamos verificar que os segundos membros das equações anteriores (4) têm desenvolvimentos análogos, à parte o factor $\frac{1}{na^2}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{a^2}\right)$. Para isso, observemos o seguinte.

1.º) Visto que $R_0\sqrt{aa'} = \sum \cdots$

$$R_1 = -\frac{a}{2a'^2}\sum\cdots$$

em que os coeficientes que figuram nas séries não escritas dependem da quantidade $\alpha = \frac{a}{a'}$ ou $\frac{a'}{a}$, vê-se que

$$R = R_0 + R_1 = (aa')^{-1/2}\left[\sum\cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^{3/2}\sum\cdots\right]$$

é o produto de $(aa')^{-1/2}$ por uma função de (α). Suponhamos $\alpha = \frac{a}{a'}$; então

$$R = (aa')^{-1/2}F\left(\frac{a}{a'}\right) = \frac{1}{\sqrt{aa'}}F(\alpha),$$

e

$$a\frac{\partial R}{\partial a} = [illegible] = a\left\{-\frac{1}{2}(aa')^{-3/2}\cdot a'\,F\left(\frac{a}{a'}\right) + (aa')^{-1/2}\frac{\partial F}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{a'}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}(aa')^{-1/2}F\left(\frac{a}{a'}\right) + (aa')^{-1/2}\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2}R + (aa')^{-1/2}DF = \left(D - \frac{1}{2}\right)R,$$

e, se supusermos $\alpha = \frac{a'}{a}$, vem

$$a\frac{\partial R}{\partial a} = \left(-D - \frac{1}{2}\right)R.$$

Êste resultado mostra-nos que, sendo $\underline{R}$ uma soma de termos da forma

~~[illegible]~~

$$\frac{1}{\sqrt{aa'}}\left[A\,D^{K} b_n^{p} + B\,\alpha^{3/2}\right],$$

$a\dfrac{\partial K}{\partial a}$ e' da forma $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{aa'}}\left[\pm D - \frac{1}{2}\right]\left(A\,D^{K} b_n^{p} + B\,\alpha^{3/2}\right) =$

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{aa'}}\left[\pm A\,D^{K+1} b_n^{p} - \frac{A}{2}\,D^{K} b_n^{p} \pm B_1\,\alpha^{3/2}\right],$$

ou seja tem a forma de R.

2°) Tem-se $\dfrac{\partial V}{\partial(il)} = \dfrac{\partial V}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial(il)} = \lambda\dfrac{\partial V}{\partial\lambda}$,

mantendo-se a forma de V.

3°) Quanto a $\dfrac{\partial V}{\partial\varepsilon_1}, \dfrac{\partial V}{\partial\gamma_1}, \ldots$ não se introduz qualquer dificuldade.

4°) Resta-nos tratar os coeficientes $\cos\varphi$, $\sec\varphi$, $\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2}$. Ora e

$$\cos\varphi = \left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{1/2} = \left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2} = \left(1-4\,\varepsilon_1\varepsilon_2\right)^{1/2} = 1 - \sum_0^{\infty}\frac{2}{\mu+1}\,C_{2\mu}^{\mu}\,\varepsilon_1^{\mu+1}\varepsilon_2^{\mu+1} =$$

$$= 1 - 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 4\,\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 - \cdots;$$

$$\sec\varphi = \left(1-4\,\varepsilon_1\varepsilon_2\right)^{-1/2} = 1 + \sum_1^{\infty} C_{2\mu}^{\mu}\,\varepsilon_1^{\mu}\varepsilon_2^{\mu} = 1 + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2 + 6\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 20\,\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 + \cdots;$$

$$\cos\varphi\sec^2\frac{\varphi}{2} = 2 + \frac{\cos\varphi - 1}{2\,\varepsilon_1\varepsilon_2} = 1 - \sum_1^{\infty}\frac{1}{\mu+1}\,C_{2\mu}^{\mu}\,\varepsilon_1^{\mu}\varepsilon_2^{\mu} = 1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\,\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 5\,\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 - \cdots.$$

Os segundos membros do sistema (4) ficam, pois, desenvolvidos em série, a partir do desenvolvimento de R.

Se quizermos os segundos membros do sistema (3), devemos ter em vista que é

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\varepsilon} = \varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1} + \varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_2}, \qquad \gamma\frac{\partial V}{\partial\gamma} = \gamma_1\frac{\partial V}{\partial\gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial V}{\partial\gamma_2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varpi} = i\left(\varepsilon_2\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_2} - \varepsilon_1\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_1}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial\theta} = i\left(\gamma_2\frac{\partial V}{\partial\gamma_2} - \gamma_1\frac{\partial V}{\partial\gamma_1}\right).$$

Vê-se, então, que se pode dar forma apropriada a cada um dos segundos membros do sistema (3), o que, de resto, se poderia deduzir de R escrito sob forma real.

Se quizermos tratar com o sistema (2), devemos ter em vista as relações

$$\varepsilon_1 = \frac{B_1}{2A}\sqrt{2A - B_1B_2}, \qquad \gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2(A - B_1B_2)}}, \qquad a = \frac{A^2}{f(1+m)},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B_2}{2A}\cdot\sqrt{2A - B_1B_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2(A - B_1B_2)}},$$

os quais permitem obter o segundo membro de (2) expresso, sob forma conveniente, nas variáveis A, B_2, C_2, B_1, C_1. De facto, podemos tratar directamente com a função V, que passará a ficar desenvolvida, tendo apenas em conta os elementos de M, segundo as potências inteiras (positivas ou não) de λ e segundo as potências inteiras e positivas de B_1, B_2, C_1, C_2, com coeficientes que são certas funções de A.

Finalmente, quanto ao sistema (1), devemos ter em conta as relações

$$\mathfrak{B}\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{B}} = \frac{1}{2}\left(B_1\frac{\partial V}{\partial B_1} + B_2\frac{\partial V}{\partial B_2}\right), \qquad \mathfrak{C}\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{C}} = \frac{1}{2}\left(C_1\frac{\partial V}{\partial C_1} + C_2\frac{\partial V}{\partial C_2}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varpi} = i\left(B_2\frac{\partial V}{\partial B_2} - B_1\frac{\partial V}{\partial B_1}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = i\left(C_2\frac{\partial V}{\partial C_2} - C_1\frac{\partial V}{\partial C_1}\right).$$

§ 46) Integração aproximada - Acabamos de ver que era fácil escrever as equações diferenciais que dão os elementos osculadores, em função do tempo, do movimento de cada planeta. A integração é difícil, ou mesmo impossível. Torna-se, por isso, recorrer a um método de aproximações sucessivas, baseado no facto de serem pequenas as massas $m, m', m'', \dots$ dos diferentes planetas, em comparação com a massa unidade do Sol.

A solução assim obtida, não sendo válida para todo o intervalo de tempo, vale, entretanto, para um intervalo de tempo suficientemente grande.

Seja μ uma quantidade pequena, da ordem de $m, m', m'', \dots$. Escolhamos como elementos do movimento dos planetas $M, M', \dots$ os movimentos médios $n, n', n'', \dots$, as longitudes médias $l, l', l'', \dots$ e, em seguida os elementos

$$\varepsilon, \gamma, \vartheta, \varpi;\ \varepsilon', \gamma', \dots;\ \dots,$$

que designaremos, agora, com $h, h', \dots$. Isto significa que h é um qualquer daqueles 4 elementos $\varepsilon, \gamma, \vartheta, \varpi$ (ou equivalentes), que h' é um qualquer dos elementos $\varepsilon', \gamma', \vartheta', \varpi'$ (ou equivalentes), etc.

As equações diferenciais são do tipo

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{dn}{dt} = \mu N, & \frac{dl}{dt} = n + \mu L, & \frac{dh}{dt} = \mu H, \\ \frac{dn'}{dt} = \mu N', & \frac{dl'}{dt} = n' + \mu L', & \frac{dh'}{dt} = \mu H', \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

Se nos lembrarmos da forma do desenvolvimento encontrada para R, podemos dizer que $N, N', \dots, L, L', \dots, H, H', \dots$ são séries da forma $\sum A e^{i(\nu l + \nu' l' + \dots)}$, onde os coeficientes A são funções de $n, n', \ldots, h, h', \ldots$, não esquecendo que $s, s', \ldots$ são inteiros quaisquer, positivos ou negativos. Dois dos inteiros $s, s', \ldots$ não são nulos, havendo ainda outras particularidades às quais, oportunamente, nos referimos.

Trata-se de integrar o sistema (5) por meio de séries ordenadas segundo as potências de μ. Se $\mu = 0$, as incógnitas $n, n', \ldots, h, h', \ldots$ seriam constantes e $l, l', \ldots$ seriam funções lineares do tempo. Se designarmos com $n_0, n'_0, \ldots, \nu_0, \nu'_0, \ldots, h_0, h'_0, \ldots, l_{00}, l'_{00}, \ldots$ constantes e com $l_0, l'_0, \ldots$ os argumentos $\nu_0 t + l_{00}, \nu'_0 t + l'_{00}, \ldots$, e se $\nu_1, \nu_2, \ldots$ são novas constantes, suponhamos que é

$$n_0 = \nu_0 + \mu \nu_1 + \mu^2 \nu_2 + \cdots, \quad n = n_0 + \mu n_1 + \mu^2 n_2 + \cdots,$$
$$l = l_0 + \mu l_1 + \mu^2 l_2 + \cdots, \quad h = h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \cdots.$$

Substituindo êstes valores de n, l, h (mas não $n_0, n'_0, \ldots$) em $N, L, H, \ldots$ tem-se

$$N = N_0 + \mu N_1 + \mu^2 N_2 + \cdots,$$
$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \cdots,$$
$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \cdots.$$

As relações dadas pelas aproximações sucessivas são então

$$\frac{dn_1}{dt} = N_0, \quad \frac{dl_1}{dt} = \nu_1 + n_1 + L_0, \quad \frac{dh_1}{dt} = H_0, \quad \ldots$$
$$\frac{dn_2}{dt} = N_1, \quad \frac{dl_2}{dt} = \nu_2 + n_2 + L_1, \quad \frac{dh_2}{dt} = H_1, \quad \ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Trata-se dum verdadeiro método de aproximações porque $N_p, L_p, H_p, \ldots$ são conhecidos logo que se tenham $n_p, l_p, h_p, \ldots$, obtendo-se depois, por quadraturas, n_{p+1}, $l_{p+1}, h_{p+1} \ldots$ As quantidades $\mu^p n_p, \mu^p l_p, \mu^p h_p, \ldots$ dizem-se perturbações ou desigualdades de ordem p dos elementos $n, l, h, \ldots$

É estas desigualdades que vamos estudar mais em detalhe. Para isso, suponhamos que as funções $N, N', \ldots$ sob a forma $\sum A e^{i(sl + s'l' + \cdots)}$ são tais que não há termo independente de $l, l', \ldots$, ou, por outras palavras, são tais que não pode ser simultaneamente $s = s' = s'' = \cdots = 0$. Nos sistemas (3) e (4) esta condição é, de facto, verificada. Com efeito, tem-se

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Então, como l figura no expoente da exponencial, e sòmente assim, todos os termos que contêm $\underline{l}$ em V dos termos que contêm $\underline{l}$ na equação, e os que não contêm $\underline{l}$ em V nenhum termo dão em $\frac{\partial V}{\partial l}$.

Uma outra hipótese que também fazemos é a seguinte: as constantes $\nu_0, \nu'_0, \dots$ supõem-se tais que não existe entre elas uma relação linear e homogénea com coeficientes inteiros, isto é, supomos que não é possível ser

$$s\nu_0+s'\nu'_0+\dots=0.$$

Então os argumentos $sl_0+s'l'_0+\dots$ não poderão ser independentes do tempo, a não ser que se tenha simultaneamente $s=s'=\dots=0$.

As funções $N_0, L_0, H_0, \dots$ são, então, somas da forma $\sum Be^{i(sl_0+s'l'_0+\dots)}$, onde $\underline{B}$ é uma constante que depende de $\underline{n_0}, \underline{h_0}, \dots$. Os termos que são, realmente, desta forma, não podem reduzir-se a uma constante; são termos *periódicos*. Em virtude da hipótese feita quanto às funções $N, N', \dots$, as quantidades $N_0, N'_0, \dots$ são somas de termos *todos* periódicos. Mas, é claro, em $L_0, H_0, \dots$ pode haver termos constantes.

Vamos adoptar a terminologia seguinte: Consideremos o termo geral

$$Ct^pe^{i(sl_0+s'l'_0+\dots)}$$

onde $\underline{C}$ é uma constante e p é um inteiro não negativo. Quando $\underline{p=0}$, obtém-se um termo *periódico*, e designaremos, duma maneira geral, com $\underline{P}$, um termo periódico; quando $p>0$ e $s=s'=\dots=0$, o termo diz-se *secular* de *ordem* p, e será representado com S_p; quando $p>0$, não sendo nulos todos os $s, s', \dots$, obtém-se um termo *misto* de *ordem* p, que representaremos com M_p.

Posto isto, observemos ainda as igualdades seguintes:

$$\int t^p dt=\frac{t^{p+1}}{p+1}+c, \qquad \int e^{\omega t}dt=\frac{e^{\omega t}}{\omega}+c,$$

$$\int t^pe^{\omega t}dt=\frac{t^pe^{\omega t}}{\omega}-\frac{pt^{p-1}e^{\omega t}}{\omega^2}+\frac{p(p-1)t^{p-2}e^{\omega t}}{\omega^3}-\frac{p(p-1)(p-2)t^{p-3}e^{\omega t}}{\omega^4}+\dots+c.$$

Estas igualdades mostram que a integração dum termo secular leva a termos seculares ou constantes; a integração dum termo periódico leva a termos periódicos ou constantes e a integração dum termo misto leva a termos mistos, periódicos e constantes.

Então representemos as nossas equações diferenciais das aproximações sucessivas. Quando se integram $\frac{dn_1}{dt}=N_0$, $\frac{dn'_1}{dt}=N'_0, \dots$, vê-se, em face da forma de $N_0, N'_0, \dots$, que se tem

$$n_1=c+\sum P, \quad n'_1=c'+\sum P, \text{ etc.}$$

Mas as equações $\frac{dl_1}{dt}=\nu_1+n_1+L_0$, $\frac{dh_1}{dt}=H_0, \dots$ mostram que

$l_1, h_1, \ldots$ contêem termos seculares, S_1, e periódicos.

Formemos, em seguida, as quantidades $N_1, L_1, H_1, \ldots$ Se observarmos que é, por exemplo,

$$L = f(n_0 + \mu n_1 + \mu^2 n_2 + \cdots,\ l_0 + \mu l_1 + \mu^2 l_2 + \cdots,\ h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \cdots, \ldots),$$

vêmos que

$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \cdots = f(n_0, l_0, h_0, \ldots) + \mu n_1 \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{n_0} + \mu l_1 \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{l_0} + \mu h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_{h_0} + \cdots,$$

e que, portanto,

$$L_1 = n_1 \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{n_0} + l_1 \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{l_0} + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_{h_0} + \cdots$$

ou seja ainda

$$L_1 = n_1 \frac{\partial K_0}{\partial n_0} + l_1 \frac{\partial K_0}{\partial l_0} + h_1 \frac{\partial K_0}{\partial h_0} + \cdots \qquad L_0$$

O mesmo se diz da H_1, N_1, etc. Como $\frac{\partial N_0}{\partial n_0}, \frac{\partial N_0}{\partial l_0}, \ldots$ têem a mesma forma que N_0, vê-se que $N_1, N'_1, \ldots$ são da forma

$$C + \Sigma\, l + \Sigma\, M_1,$$

mas $L_1, H_1, L'_1, H'_1, \ldots$ contêem ainda termos seculares, porque em $L_0, H_0, \ldots$ pode haver termos em que não entra a exponencial $e^{i(cl_0 + n(l_0 + \cdots))}$, o que não sucede em $N_0, N'_0, \ldots$.

Deste modo as quantidades $n_2, n'_2, \ldots$ são da forma

$$c + S_1 + \Sigma\, l + \Sigma\, M_1,$$

enquanto que $l_2, h_2, \ldots$ são da forma

$$c + S_1 + S_2 + \Sigma\, l + \Sigma\, M_1.$$

Vê-se, em seguida, que $N_2, N'_2, \ldots$ são da forma $C + S_1 + \Sigma(l + M_1 + M_1$

e que os $L_2, H_2, \ldots$ contêem, ainda, termos em S_2. Portanto,

$$\left.\begin{matrix} n_3 \\ n'_3 \\ \vdots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + \Sigma(l + M_1 + M_2)$$

$$\left.\begin{matrix} l_3 \\ h_3 \\ \vdots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + S_3 + \Sigma(l + M_1 + M_2).$$

Duma maneira geral

$$\left.\begin{matrix} n_p \\ n'_p \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + \cdots + S_{p-1} + \Sigma(l + M_1 + M_2 + \cdots + M_{p-1}),$$

$$\left.\begin{matrix} l_p \\ h_p \\ \vdots \end{matrix}\right\} = c + S_1 + S_2 + \cdots + S_p + \Sigma(l + M_1 + M_2 + \cdots + M_{p-1}).$$

Assim: as perturbações de ordem p dos elementos $l, h, \dots$ contêem uma constante arbitrária, termos periódicos, termos seculares até à ordem p e termos mistos até à ordem $p-1$. Mas os elementos $n, n', \dots$ só levam, nas perturbações de ordem p, os termos seculares até à ordem $p-1$.

Dum modo mais geral, se f é uma função qualquer dos elementos $n, l, h, \dots$, com a condição de ser periódica nos $l, l', \dots$ (isto é, com a condição de ser do tipo $\sum A e^{i(sl+s'l'+\dots}$, ter-se-há

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots,$$

com

$$f_1 = n_1 \frac{\partial f_0}{\partial n_0} + l_1 \frac{\partial f_0}{\partial l_0} + h_1 \frac{\partial f_0}{\partial h_0} + \cdots, \text{ etc.}$$

Portanto, as perturbações de ordem p da função f compreendem um termo constante, termos periódicos, e termos seculares e mistos até à ordem p. Se a função f não contém elementos independentes dos $\underline{l}$, as derivadas parciais não contêem termo constante, e os termos seculares de $\underline{f_p}$ só vão até à ordem $p-1$; se f é independente dos $\underline{l l'}$, são os termos mistos que não vão além da ordem $p-1$; se f só depende dos $\underline{n n'}$, os termos seculares e os termos mistos detêem-se na ordem $p-1$.

§) 47 Aplicação – É claro que o que se diz para $\underline{n}, \underline{n'}, \dots$ diz-se igualmente para $\underline{a}, \underline{a'}, \dots$ O teorema da invariabilidade dos eixos maiores é precisamente o teorema que nos diz que os semi-eixos maiores não têem perturbações seculares de ordem p senão até à ordem $p-1$. Este teorema, reconhecido, em parte, por Laplace, foi enunciado por Lagrange dizendo que os semi-eixos maiores não tinham perturbações seculares de 1ª ordem

Com Poisson, é possível demonstrar, mesmo, o teorema seguinte: os termos seculares de $n_p, n'_p, \dots$ não vão além da ordem $p-2$.

Portanto, os semi-eixos maiores não têem perturbações seculares de primeira e de 2ª ordem, o que é uma forma limitada de enunciar os teoremas de Laplace e de Poisson.

§ (48) Observações – As constantes arbitrárias $\underline{c}$ que são introduzidas pelas aproximações sucessivas indicadas têem de juntar-se às constantes $n_0, l_0, h_0, v_1, v_2, \dots$. São em número superabundante. Se há, apenas, q equações diferenciais, é claro que há sòmente 9 constantes arbitrárias. Estas constantes arbitrárias deverão ser determinadas depois pela condição de, num instante t determinado, que pode tomar-se como origem do tempo, darem para $n, l, h, \ldots$ os valores que lhes cabem como elementos osculadores na origem do tempo.

Em particular, os valores de $\underline{n}, \underline{l}, \underline{h}, \ldots$ na origem do tempo diferem de quantidades da ordem de μ dos valores das constantes $n_0, l_{00}, h_0, \ldots$

§ 49) Limitações dos desenvolvimentos. Os desenvolvimentos em série que foram obtidos para as incógnitas $n, l, h, \ldots$ devem, para um certo grau de aproximação fixado *a priori*, ser reduzidos a um número finito de termos. Isso exige, pois, que, a essa certa aproximação, corresponda, de facto, um desenvolvimento limitado.

Isso sucede no problema em causa por várias razões. Em primeiro lugar, visto que as excentricidades e as inclinações das órbitas dos grandes planetas são pequenas, podemos limitar os termos do desenvolvimento da função perturbadora V aos termos cujo grau, relativamente àquelas quantidades, não excede um certo número, dado *a priori*.

Em segundo lugar, a integração dum termo da forma $Ce^{i(sl_0+s'l_0'+\cdots)}$ reproduz êste termo pois

$$\int C e^{i(sl_0+s'l_0'+\cdots)}\,dt = \frac{C}{i}\,\frac{e^{i(sl_0+s'l_0'+\cdots)}}{s\nu_0+s'\nu_0'+\cdots},$$

aparecendo, em divisor, a quantidade $s\nu_0+s'\nu_0'+\cdots$

Quando se integra um termo misto $Ct^{p}e^{i(sl_0+s'l_0'+\cdots)}$ aparecem, ainda, potências do referido divisor nos denominadores. Dêste modo, bastará considerar os termos dos diferentes desenvolvimentos para os quais êstes divisores não excedem um certo limite.

Em terceiro e último lugar, as massas dos planetas são pequenas relativamente à massa do Sol, o que torna insensíveis as perturbações de ordem elevada. Finalmente limitamo-nos a considerar as perturbações de primeira ordem, juntando-lhe alguns termos de 2.ª ordem.

Por estes diferentes razões, o número de termos a tomar nos diferentes desenvolvimentos é limitado. Bem entendido, como já se salientou, o facto do aparecimento dos termos seculares obriga a tratar a solução como válida unicamente num intervalo de tempo limitado.

§50) Desigualdades de longo período – Quando os divisores introduzidos pelas integrações e referidos no § anterior são grandes, e, por consequência, os argumentos $s(\nu_0 t + l_{00}) + s'(\nu'_0 t + l'_{00}) + \dots$ são de período curto, o seu efeito é introduzir a diminuição das perturbações periódicas ou mistas correspondentes; mas, pelo contrário, torna-se necessário examinar, de mais perto, o caso dos argumentos de período longo. E isto tem um interesse ainda mais acentuado no caso das longitudes médias. De facto as aproximações sucessivas para êstes elementos dão

$$\underline{\frac{dl_1}{dt} = \nu_1 + n_1 + L_0}, \quad \underline{\frac{dl_2}{dt} = \nu_2 + n_2 + L_1}, \dots$$

de modo que o seu cálculo obriga a integrar duas vezes, uma para o cálculo de $n_1, n_2, \dots$, a seguinte para o cálculo, respectivamente, de $l_1, l_2, \dots$

São precisamente as desigualdades de longo período que obrigam à consideração de termos de ordem superior ou de grau elevado relativamente às excentricidades e às inclinações.

No caso dos grandes planetas, a solução que acabamos de indicar, com as observações feitas, tem valor prático suficiente.

§51) Modificação das equações do movimento dos planetas – A fim de chegarmos ao resultado já referido no tocante à precisão o teorema geral do qual se concluiu teorema de Poisson, temos necessidade de modificar convenientemente as equações do movimento dos planetas.

A função de força do movimento de $\underline{M}$ é

$$\frac{f(1+m)}{r} + V' + V'' + V''' + \cdots,$$

onde V' é a função perturbadora relativa ao planeta M', $\underline{V}''$ corresponde a M'', etc

É claro que, no movimento de $M', M'', \ldots$, carece-se de função perturbador

V, relativa ao planeta $\underline{M}$.

Disse-se já, no começo do Curso, que importava remediar o incon

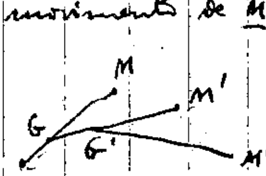
veniente resultante de serem diferentes as funções $V, V', V'' \ldots$ Para isso, em ve

de considerarmos os movimentos de $M, M', M'' \ldots$ com respeito ao Sol, vam

considerar os seguintes: 1º) movimento de $\underline{M}$ com respeito ao Sol, $\underline{O}$; 2º) m

vimento de $\underline{M}'$ com respeito ao centro de gravidade $\underline{G}$ de $\underline{O}$ e $\underline{M}$; 3º

movimento de $\underline{M}''$ com respeito ao centro de gravidade $\underline{G}'$, de O, M, M', et



Conforme se viu no princípio do Curso, o movimento em

questão são movimentos de massas

$$\frac{m}{1+m},\quad m'\frac{1+m}{1+m+m'},\quad m''\frac{1+m+m'}{1+m+m'+m''},\ \cdots$$

sob a acção da funçal de fôrça única

$$F = \frac{fm}{\overline{OM}} + \frac{fm'}{\overline{OM'}} + \frac{fm''}{\overline{OM''}} + \cdots + \frac{fmm'}{\overline{MM'}} + \frac{fmm''}{\overline{MM''}} + \cdots + \frac{fm'm''}{\overline{M'M''}} +$$

Chamamos $r, r', r'', \ldots$ os vectores $\overline{OM}$, $\overline{GM'}$, $\overline{G'M''}$, etc., e x, y, z; x', y', z

x'', y'', z'', etc. as suas projecções sobre os eixos. Então, temos:

$$\text{projecções de } \overline{OM'} \left\{ \begin{array}{l} x' + \frac{m}{1+m}x, \\ y' + \frac{m}{1+m}y, \end{array} \right. \quad z' + \frac{m}{1+m}z;$$

$$\text{projecções de } \overline{OM''} \left\{ \begin{array}{l} x'' + \frac{m'}{1+m+m'}x' + \frac{m}{1+m}x, \\ y'' + \frac{m'}{1+m+m'}y' + \frac{m}{1+m}y, \\ z'' + \frac{m'}{1+m+m'}z' + \frac{m}{1+m}z; \end{array} \right.$$

$$\text{projecções de } \overline{MM'} \left\{ \begin{array}{l} x' - \frac{x'}{1+m}, \\ y' - \frac{y'}{1+m}, \\ z' - \frac{z'}{1+m}, \end{array} \right. \qquad \text{projecções de } \overline{MM''} \left\{ \begin{array}{l} x'' + \frac{m'}{1+m+m'} x' - \frac{x}{1+m}, \\ y'' + \frac{m'}{1+m+m'} y' - \frac{y}{1+m}, \\ z'' + \frac{m'}{1+m+m'} z' - \frac{z}{1+m}, \end{array} \right.$$

$$\text{projecções de } \overline{M'M''} \left\{ \begin{array}{l} x'' - \frac{1+m}{1+m+m'} x', \\ y'' - \frac{1+m}{1+m+m'} y', \\ z'' - \frac{1+m}{1+m+m'} z'; \end{array} \right. \qquad \text{etc.}$$

Ponhamos agora, por definição,

$$F = \frac{fm}{r} + \frac{fm'}{r'} \frac{(1+m')(1+m)}{1+m+m'} + \frac{fm''}{r''} \frac{(1+m'')(1+m+m')}{1+m+m'+m''} + \dots + \Phi,$$

$$V = \Phi \frac{1+m}{m}, \quad V' = \Phi \frac{1+m+m'}{m'(1+m)}, \quad V'' = \Phi \frac{1+m+m'+m''}{m''(1+m+m')}, \dots .$$

Vê-se facilmente que os movimentos em causa se podem considerar como movimentos keplerianos perturbados de massas iguais à unidade, sob a acção de funções de fôrça das formas

$$f \frac{1+m}{r}, \; f \frac{1+m'}{r'}, \; f \frac{1+m''}{r''}, \dots$$

às quais se deverão adicionar as funções perturbadoras $V, V', V'', \dots$

Importante é observar que estas funções perturbadoras só diferem entre si por factores constantes.

Comparando os dois valores anteriormente dados para F, vê-se imediatamente que Φ é de 2.ª ordem nas massas, e que, portanto, $V, V', V'', \dots$ são de primeira ordem, ou sejá da ordem de μ.

O livro de Andoyer (pgs. 14 do tomo 2º) faz aqui as observações seguintes:

1ª) Se se escrevem, na verdade, as equações do movimento, por ex. $\frac{m}{1+m}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial x}, \dots$, ou $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1+m}{\cancel{m}}\frac{\partial F}{\partial x}, \dots$, fácil é constatar que não aparece a dificuldade das pequenas massas em denominador, como à primeira vista se poderia julgar;

2ª) As funções V, V', ... são susceptíveis de desenvolvimentos que gozam das propriedades do desenvolvimento da função perturbadora tratado no Cap. anter.

3ª) O movimento relativo do planeta M, com respeito ao Sol O, pode considerar-se como fazendo parte do conjunto dos movimentos referidos de M, M', M'', ..., movimentos para os quais as funções perturbadoras só diferem por factores constantes;

4ª) Os actuais movimentos de M', M'', ... só diferem dos movimentos de M', M'', ..., com respeito ao Sol por quantidades de 1ª ordem (da ordem de m, m', m'', ...), visto que os movimentos seriam rigorosamente os mesmos se as massas m', m'', ... fôssem nulas.

Posto isto, notemos que se afirma já serem movimentos keplerianos perturbados os movimentos que estamos tratando. Designando, então, com l, l', ... as longitudes médias, com A, A', ... os seus elementos conjugados, com (B, C), (B', C'), ... os restantes pares de variáveis conjugados, as equações do nosso problema poderão escrever-se

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \alpha\frac{\partial V}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} = n - \alpha\frac{\partial V}{\partial A}, & \frac{dB}{dt} = \beta\frac{\partial V}{\partial C}, & \frac{dC}{dt} = -\beta\frac{\partial V}{\partial B}, \\ \frac{dA'}{dt} = \alpha'\frac{\partial V}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} = n' - \alpha'\frac{\partial V}{\partial A'}, & \frac{dB'}{dt} = \beta'\frac{\partial V}{\partial C'}, & \frac{dC'}{dt} = -\beta'\frac{\partial V}{\partial B'}, \\ - - - - & - - - - & - - - - & - - - - \end{cases},$$

onde $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \ldots$ são constantes, pois, repitamos, se uma função perturbad
e' V, outra e' o produto de V por uma constante.

Nestas equações V e' da ordem de μ e $n, n', \ldots$ são funções conhecidas d
A, de A', ..., respectivamente.

§ 52) Integração aproximada – Suponhamos, mais geralmente ainda, q
os movimentos médios $n, n', \ldots$ dependem do conjunto dos $A, A', \ldots$ e ponhamos

$$l = \lambda + \varepsilon, \quad l' = \lambda' + \varepsilon', \ldots,$$

onde $\lambda, \varepsilon, \lambda', \varepsilon', \ldots$ são novas variáveis determinadas pelas equações

$$\frac{d\lambda}{dt} = n, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha\frac{\partial V}{\partial A}, \ldots .$$

O nosso sistema de equações a integrar pode então escrever-se

$$\frac{dA_p}{dt} = \alpha_p\frac{\partial V}{\partial l_p}, \quad \frac{d\varepsilon_p}{dt} = -\alpha_p\frac{\partial V}{\partial A_p}, \quad \frac{dB_q}{dt} = \beta_q\frac{\partial V}{\partial C_q}, \quad \frac{dC_q}{dt} = -\beta_q\frac{\partial V}{\partial B_q},$$

$$\frac{d\lambda_p}{dt} = n_p, \quad l_p = \lambda_p + \varepsilon_p,$$

onde se pôz $A_p, B_q, \ldots$ em vez de $A, A', B, B', \ldots$

Ainda para facilidade, designemos com $x_1, x_2, \ldots$ o conjunto das variávei
$A_p, \varepsilon_p, B_q, C_q$ e observemos que e' $\frac{\partial V}{\partial l_p} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_p}$. As nossas equações pode
ainda escrever-se

(α) $$\frac{dx_j}{dt} = \sum \alpha_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad \frac{d\lambda_p}{dt} = n_p = \varphi_p(A_1, A_2, \dots), \quad l_p = \lambda_p + \varepsilon_p,$$

Contanto que se façam as convenções seguintes:

quando $x_j = A_p$, $x_k = \varepsilon_p$, supõe-se $\alpha_{jk} = \alpha_p$,

" $x_j = \varepsilon_p$, $x_k = A_p$, " " $\alpha_{jk} = -\alpha_p$,

" $x_j = B_q$, $x_k = C_q$, " " $\alpha_{jk} = \beta_q$,

" $x_j = C_q$, $x_k = B_q$, " " $\alpha_{jk} = -\beta_q$,

nos outros casos $\alpha_{jk} = 0$.

Verifica-se que é sempre $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 0$. Se, por ex.,

$x_j = B_q$, $x_k = C_q$ $\alpha_{jk} = \beta_q$; mas então

$x_k = C_q$, $x_j = B_q$ $\alpha_{kj} = -\beta_q$, e, portanto, $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 0$.

Como se disse, a função V, e bem assim as suas derivadas parciais, são d forma

$$\sum C e^{i(s_1 l_1 + s_2 l_2 + \dots)},$$

onde os coeficientes C dependem de A_p, B_q, C_q, ... e $s_1, s_2, \dots$ são inteiros.

Para integrarmos as equações, chamaremos A_p, B_q, ... os valores de primeira aproximação, obtidos supondo $\mu = 0$. Vem

$$A_p \to A_p + \delta A_p + \delta^2 A_p + \dots$$
$$B_q \to B_q + \delta B_q + \delta^2 B_q + \dots$$

É claro que A_p, B_q, C_q, ε_p são constantes. O mesmo sucede, na referida 1ª ap ximação, às quantidades $n_p = \varphi_p(A_1, A_2, \dots)$. Então vem $\lambda_p = n_p t$ e $l_p = n_p t + \varepsilon_p$. Suporemos, como sempre, que não há entre os n_p uma relação linear homogénea com coeficientes constantes, isto é, suporemos que uma relação $s_1 l_1 + s_2 l_2 + \dots +$ [illegible] $= (s_1 n_1 + s_2 n_2 + \dots) t + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots = \text{Const.}$ só é possível se fôrem $s_1 = s_2 = \dots = 0$. Nessas condições, uma derivada $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_p}$ é necessàriamente periódica.

Por substituição nas equações (α), tira-se

$$\frac{d(x_j + \delta x_j + \delta^2 x_j + \dots)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \delta x_m + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q} \delta \lambda_q + \dots \right),$$

sendo muito fácil estabelecer as igualdades

$$\frac{d(\delta x_j)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad \frac{d(\delta \lambda_p)}{dt} = \sum \frac{\partial n_p}{\partial A_q} \delta A_q,$$

$$\frac{d(\delta^2 x_j)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q} \delta \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \delta x_m \right),$$

$$\frac{d(\delta^2 \lambda_p)}{dt} = \sum \left(\frac{\partial n_p}{\partial A_q} \delta^2 A_q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n_p}{\partial A_q \partial A_r} \delta A_q \delta A_r \right),$$

$$\frac{d(\delta^2 x_j)}{dt} = \sum \alpha_{jk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q} \delta^2 \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m} \delta^2 x_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q \partial \varepsilon_r} \delta \lambda_q \delta \lambda_r + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial \varepsilon_q \partial x_m} \delta \lambda_q \delta x_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n} \delta x_m \delta x_n \right),$$

onde os somatórios dos segundos membros se estendem a todos os índices que não seja o que figura no respectivo 1° membro.

No que vai seguir-se, supôr-se-ão nulas as constantes de integração provenentes de integrais do tipo $\int t^p dt$, $\int e^{\omega t} dt$, $\int t^p e^{\omega t} dt$, o que pode justificar-se d modo seguinte: ao efectuar-se a integração que leva a δA_p, a constante de integração, que será certamente da ordem de δA_p, ou seja da ordem de μ, pode supor nula, contanto que o valor adoptado para a constante A_p na primeira aproximação (a de ordem zero) se suponha calculado <u>sem êrro da ordem de μ</u>, por sort que o valor final da constante, em vez de ser escrito sob a forma $A_p + \mu A'_p + \cdots$, seja logo valor tomado na primeira aproximação.

Em particular tem-se

$$\frac{d(\delta A_p)}{dt} = \alpha_p \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_p},$$

o que mostra que $\underline{\delta A_p}$, como já se viu, não contém termo secular.

Passemos a $\delta^2 A_p$. É

$$\frac{d(\delta^2 A_p)}{dt} = \sum \alpha_p \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q} \delta \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j} \delta x_j \right),$$

ou ainda

$$\frac{d(\delta^2 A_p)}{dt} = \sum \alpha_p \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q} \sum \frac{\partial n_q}{\partial A_r} \alpha_r \iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r} dt^2 + \sum \alpha_p \alpha_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} d$$

$$= \sum \alpha_p \alpha_r \frac{\partial n_q}{\partial A_r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q} \iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r} dt^2 + \sum \alpha_p \alpha_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j} \cdot \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt = S_1 +$$

O segundo membro não contém termo secular de 1.ª ordem. Pode ver-se que também não contém termo constante. Estudemos S_1, relativo, no membro anterior, ao 1.º termo. Tenhamos

$$V = \sum \mathcal{C} e^{i\omega} = \sum \mathcal{C}' e^{i\omega'},$$

onde $\omega = s_1 l_1 + s_2 l_2 + \cdots$ e $\underline{\mathcal{C}'}$ e $\underline{\omega'}$ são análogos a $\underline{\mathcal{C}}$ [illegible] e $\underline{\omega}$. Tem

$$S_1 = \sum \alpha_p \alpha_r \frac{\partial n_q}{\partial A_r} \mathcal{C}\, i^2 s_p s_q e^{i\omega} \iint \mathcal{C}' i\, e^{i\omega'} s'_r\, dt^2$$

$$= \sum \alpha_p \alpha_r \frac{\partial n_q}{\partial A_r} \mathcal{C}\, i^2 s_p s_q e^{i\omega} \frac{\mathcal{C}' i\, e^{i\omega'} s'_r}{i^2 N'^2}$$

$$= \sum \frac{i}{2} \alpha_p \alpha_r \frac{\partial n_q}{\partial A_r} \mathcal{C} \mathcal{C}' e^{i(\omega + \omega')} \left(\frac{s_p s_q s'_r}{N'^2} + \frac{s'_p s'_q s_r}{N^2} \right),$$

onde a soma é estendida a $\underline{q}$ e a $\underline{r}$ e a todos os argumentos $\underline{\omega}$ e ω' que não sejam nulos. Conclui-se daqui que na expressão de S_1 é per dica, sem termo constante, pois que, se se supõe $\omega + \omega' = 0$, é

$$s_p + s'_p = 0, \quad s_q + s'_q = 0, \quad s_r + s'_r = 0, \quad N + N' = 0,$$

o que dando $S_1 = 0$. Isto significa que desaparecem os termos que poderiam ser constantes.

Passemos a S_2. Permutando os índices j e $\underline{k}$, vem

$$S_2 = \sum \frac{1}{2} \alpha_p \alpha_{jk} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j} \int \frac{\partial V}{\partial x_k} dt - \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_k} \int \frac{\partial V}{\partial x_j} dt \right),$$

pois que $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 0$. Sendo, como anteriormente,

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \sum C e^{i\omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_k} = \sum C' e^{i\omega'},$$

vem, se $\underline{\omega}$ e $\underline{\omega}'$ são diferentes de zero.

$$S_2 = \sum \frac{1}{2} \alpha_p \alpha_{jk} C C' e^{i(\omega+\omega')} \left(\frac{s_p}{N'} - \frac{s'_p}{N} \right),$$

resultado que é periódico pois que, como acima, desapareceram os termos que poderiam ser constantes. Se um dos ω, ω' se supõe igual a zero, aparecem termos complementares mistos de 1ª ordem.

É aqui que está contido o teorema de Poisson: a expressão de $\underline{\delta^2 A_p}$ não contém termos secular, mas apenas termos periódicos e termos mistos de 1ª ordem.

Este resultado pode generalizar-se. Tem-se

$$\frac{d(\delta^3 A_p)}{dt} = \sum \alpha_p \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \xi_q} \delta^2 \lambda_q + \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j} \delta^2 x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial \xi_q \partial \xi_s} \delta \lambda_q \delta \lambda_s + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial \xi_q \partial x_j} \delta \lambda_q \delta x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j \cdot \partial x_m} \delta x_j \cdot \delta x_m \right),$$

e, por consequência,

$$\frac{d(\delta^3 A_p)}{dt} = \sum \tfrac{1}{2}\alpha_p\alpha_r\alpha_s \frac{\partial^2 x_q}{\partial A_r \partial A_s}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q} \int\left[\int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r}dt \times \int \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_s}dt\right]dt$$

$$+\sum \tfrac{1}{2}\alpha_p\alpha_r\alpha_t \frac{\partial x_q}{\partial A_r}\frac{\partial x_s}{\partial A_t}\left(2\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q}\iint \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_r \partial \varepsilon_s}dt^2 \iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_t}dt^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q \partial \varepsilon_s}\iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r}dt^2 \times \iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_t}dt^2\right)$$

$$+\sum \alpha_p\alpha_r\alpha_{jk}\frac{\partial x_q}{\partial A_r}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q}\iint \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_r \partial x_j}dt^2 \int \frac{\partial V}{\partial x_k}dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j}\int \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_q \partial x_k}dt \iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r}dt^2 + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q \partial x_j}\iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r}dt^2 \times \int \frac{\partial V}{\partial x_k}dt\right]$$

$$+\sum \tfrac{1}{2}\alpha_p\alpha_{jk}\alpha_{mu}\left[2\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j}\int \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_m}dt \int \frac{\partial V}{\partial x_u}dt + \frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial x_j \partial x_m}\int \frac{\partial V}{\partial x_k}dt \times \int \frac{\partial V}{\partial x_u}d\right.$$

Se procuramos os termos seculares das duas primeiras somas, verificamos que nenhum delos existe. Quanto aos outros, representemos com $\bar F$ a parte constante duma função periódica F; então, encontramos na 3ª soma os seguintes termos de 1ª ordem

$$+\sum \alpha_p\alpha_r\alpha_{jk}\frac{\partial x_q}{\partial A_r}\,\overline{\frac{\partial V}{\partial x_k}}\left[\overline{\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q}\iint \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_r \partial x_j}dt^2} + \overline{\frac{\partial^3 V}{\partial \varepsilon_p \partial \varepsilon_q \partial x_j}\iint \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_r}dt^2}\right]$$

mas êles, de facto, desaparecerão como se reconhece pelo método a teriormente empregado para S_1, pondo

$$V = \sum C e^{i\omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_j} = \sum C' e^{i\omega'}$$

Passemos à última soma. Trocando no 1º termo os índices j, k, e permutando j e m, k e u, êsse 3º termo é

$$\sum \frac{1}{2}\alpha_p\alpha_{jk}\alpha_{mn}\left[\frac{\partial^3 V}{\partial\varepsilon_p\partial x_j\partial x_m}\int\frac{\partial V}{\partial x_k}dt \times \int\frac{\partial V}{\partial x_n}dt - \frac{\partial^2 V}{\partial\varepsilon_p\partial x_k}\int\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\partial x_m}dt\int\frac{\partial V}{\partial x_n}dt\right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 V}{\partial\varepsilon_p\partial x_n}\int\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\partial x_m}dt\int\frac{\partial V}{\partial x_k}dt\right].$$

Aparecem aqui termos seculares de 1.ª ordem correspondentes às partes constantes de $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ e $\frac{\partial V}{\partial x_n}$, que se podem reünir sob a forma

$$t\sum\alpha_p\alpha_{jk}\alpha_{mn}\overline{\frac{\partial V}{\partial x_k}}\left[\overline{\frac{\partial^3 V}{\partial\varepsilon_p\partial x_j\partial x_m}\int\frac{\partial V}{\partial x_n}dt} - \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\varepsilon_p\partial x_n}\int\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\partial x_m}dt}\right].$$

Mas sendo $$\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\partial x_m}=\sum C e^{i\omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = \sum C' e^{i\omega'},$$ verifica-se que os termos em causa desaparecem, tal como anteriormente acontecem com a soma S_2.

Assim: $\delta^3 A_p$ não contém termos seculares de ordem superior a 1 e, mais geralmente, $\delta^n A_p$ não contém termos seculares de ordem superior a $n-2$. O mesmo acontece com ~~uma~~ uma função qualquer dos $\underline{A_p}$.

É este enunciado que se diz o teorema de Poisson generaliz

Compreende-se que possam encontrar-se ainda resultados mais precisos, se se tiverem em conta outras circunstâncias que sã verificadas pelas equações do movimento dos planetas, dadas no come do Capítulo. Vê-se, todavia, que os cálculos se tornam comp xos e, mesmo, bastante confusos.

Efeito de Doppler-Fizeau

(em Optica)

1) Definição de caminho óptico - Suponhamos que uma fonte luminosa monocromática emite radiações com o período T. Essas radiações, depois de atravessarem vários meios de índices de refracção $n_1, n_2, \ldots, n_p$, chegam, finalmente, ao observador A. Se $l_1, l_2, \ldots, l_p$ são os caminhos geométricos percorridos nos diferentes meios, o caminho óptico é

$$L = n_1 l_1 + n_2 l_2 + \cdots + n_p l_p .$$

A duração do trajecto é τ, dada por

$$\tau = \frac{l_1}{c/n_1} + \frac{l_2}{c/n_2} + \cdots + \frac{l_p}{c/n_p} = \frac{L}{c},$$

onde $\underline{c}$, bem entendido, é a velocidade de propagação da luz no vazio.

2) Princípio de Doppler-Fizeau - Se a fonte luminosa e o observador, e bem assim os diferentes meios em que as radiações se propagam, se conservam invariàvelmente ligados uns aos outros, o observador atribui às radiações o período $\underline{T}$ e um certo comprimento de onda $\underline{\lambda}$. Nêsse caso $\underline{L}$ e $\underline{\tau}$ conservam-se constantes.

Coloquemo-nos no caso simples dum único meio entre a fonte luminosa e o observador, seja V a velocidade da luz nêsse meio, e admitamos que o observador se aproxima da fonte com a velocidade $\underline{v}$. Transportando para a Optica o resultado encontrado em Acústica, a nova frequência $\underline{\nu_b}$ é diferente da antiga ν_q, tendo-se $\nu_b = \nu_q \left(1 + \frac{v}{V}\right).$

Então o comprimento de onda agora percebido é

$$\lambda+\delta\lambda=\frac{V}{\nu_b}=\frac{V}{\nu_q\left(1+\frac{v}{V}\right)}=\lambda\frac{1}{1+\frac{v}{V}}=\lambda\left(1-\frac{v}{V}+\cdots\right),$$

ou seja

$$\delta\lambda=-\lambda\frac{v}{V}+\cdots, \quad \text{ou ainda} \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda}=-\frac{v}{V}=-\frac{v}{c/n}=-\frac{nv}{c}.$$

Ora $-nv=+n\frac{dl}{dt}=+\frac{d(nl)}{dt}=\frac{dL}{dt}$ é a variação de caminho óptico na unidade de tempo. O princípio de Doppler-Fizeau em Optica traduz-se pois, no caso concreto apontado, pela relação

$$\boxed{\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{1}{c}\frac{dL}{dt}.}$$

Admitimos que o princípio é válido para as diferentes hipóteses, o que é fácil de reconhecer nos casos simples. Ao princípio pode, de resto, dar-se outras formas. Como $L=c\tau$, $\frac{1}{c}\frac{dL}{dt}=\frac{d\tau}{dt}$, e, pois

$$\boxed{\frac{d\tau}{dt}=\frac{\delta\lambda}{\lambda}.}$$

Introduzindo o período verdadeiro T e o período aparente T', tem-se

$$\lambda+\delta\lambda=VT', \quad \lambda=VT,$$

$$V(T'-T)=\delta\lambda, \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{V}{\lambda}(T'-T)=\frac{V}{VT}(T'-T),$$

donde

$$\boxed{\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{T'-T}{T}.}$$

Pode ainda escrever-se

$$\boxed{\delta\lambda=\frac{1}{n}T\,\frac{dL}{dt}.}$$

A justificação que se dá em Acústica é, digamos, de natureza cinemática, sendo de fazer reserva ~~quanto~~ ao seu transporte para a Optica.

Vamos dar uma justificação óptica simples. Suponhamos que a variação $\frac{d\tau}{dt} = \rho$ é constante (ela é, de resto, pequena, em face da unidade). Então tem-se $\tau = \tau_0 + \rho t$. Se supomos que a propagação se faz por ondas planas ao longo de Ox, podemos imaginar o estado da vibração luminosa, em cada ponto de abcissa x, dado pela igualdade

$$\zeta = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

supondo, bem entendido, que, no ponto $x = 0$, se pode supor ζ_0 dado pela relação $\zeta_0 = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$. Como $\frac{x}{V} = \tau$ (o observador ocupa o ponto de abcissa x, encontrando-se em movimento em direcção à fonte) vem

$$\zeta = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t - \tau),$$

ou

$$\zeta = a \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \rho\frac{t}{T} - \frac{\tau_0}{T}\right) = a \operatorname{sen} 2\pi\left[t\left(\frac{1}{T} - \frac{\rho}{T}\right) - \frac{\tau_0}{T}\right].$$

Assim, no ponto de abcissa x o período é T', dado por

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} - \frac{\rho}{T}, \quad \text{donde} \quad \frac{\rho}{T} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \frac{T' - T}{TT'},$$

$$\rho = \frac{T' - T}{T'} = (T' - T)\left(\frac{1}{T} - \frac{\rho}{T}\right) = \frac{T' - T}{T}(1 - \rho).$$

Como ρ e $\frac{T' - T}{T}$ são quantidades de primeira ordem, o seu produto é de 2ª ordem, vindo

$$\rho = \frac{T' - T}{T}, \text{ ou seja } \frac{d\tau}{dt} = \frac{T' - T}{T},$$

como se deseja.

Se fôr a fonte luminosa que se move com respeito ao observador, o resultado da Acústica traduz-se pela relação,

$$\nu_b = \nu_f \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{V}},$$

se se supõe que a fonte se aproxima do observador.

Como as quantidades de 2ª ordem relativamente a $\frac{v}{V}$ são desprezáveis, segue-se que

$$\nu_b = \nu_q \left(1+\frac{v}{V}+\frac{v^2}{V^2}+\cdots\right) = \nu_q\left(1+\frac{v}{V}\right),$$

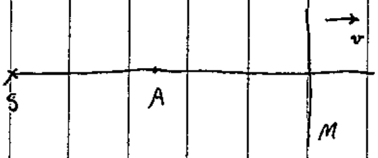
tal como anteriormente. A justificação óptica faz-se da mesma maneira. Podemos supôr, com efeito, que a origem das coordenadas acompanha o movimento da fonte.

3) Verificação experimental de Stark - Stark observou o deslocamento dos riscos emitidos pelas partículas carregadas positivamente que, animadas de velocidades de alguns milhares de quilómetros por segundo, formam os raios canais de Goldstein. Encontrou o deslocamento de acôrdo com os resultados do princípio de Doppler-Fizeau.

4) Conclusões - Como se disse admite-se o princípio de Doppler com a forma $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dt}$ para as diferentes hipóteses que podem apresentar-se. Imaginemos, então, que o observador e a fonte se encontram em frente um do outro no vazio, sem interposição de meio refringente, de espelho, etc., e móveis um em respeito ao outro, com velocidades pequenas em face da velocidade da luz. A variação do caminho óptico é dada pela velocidade relativa $\vec{v_r}$ do observador com respeito à fonte. Se a distância cresce, ou $v_r > 0$, $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} > 0$, pelo que haverá deslocamento de riscas para o vermelho. Se, pelo contrário, $v_r < 0$, há deslocamento de riscas para o violeta.

Consideremos, por exemplo, uma radiação de $\lambda = 0{,}^{\mu}6 = 6\times10^{-5}$ cm $=$ $= 6\times10^{-5}\times10^{8}$ angströms $= 6\,000$ angströms. Para uma velocidade de cêrca de 3^{km} por segundo, tem-se $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\lambda}{6000} = \frac{v}{c} = \frac{3}{300000} = 10^{-5}$, ou seja $\delta\lambda = 6\times10^{3}\times10^{-5} = 6\times10^{-2} = \frac{6}{100}$. Ora, nos grandes espectroscópios, o milésimo do angström é susceptível de medida, de sorte que um êrro de 0,001 em 0,06 é um êrro relativo de $\frac{0,001}{0,06} = \frac{0,1}{6} = \frac{1}{60}$. Uma velocidade de 3 kilómetros mede-se, assim, com um êrro relativo da ordem de $\frac{1}{60}$, ou com um êrro absoluto ε, dado por $\frac{\varepsilon}{3000} = \frac{1}{60}$, ou $\varepsilon = \frac{3000}{60} = \frac{300}{6} = 50^m$. E colocámo-nos em condições bastante desvantajosas.

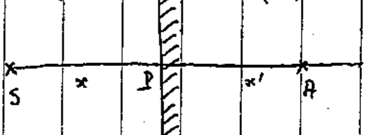
5) Caso duma reflexão - Imaginemos que a fonte luminosa $\underline{S}$ e o observador $\underline{A}$, colocados no vazio, são imóveis; que a luz monocromática, emitida pela fonte S, incide sôbre um espelho colocado em $\underline{M}$, e que, só depois da reflexão, é recebida em $\underline{A}$. O espelho desloca-se com a velocidade $\underline{v}$ no sentido indicado pela flecha. O caminho óptico



$\overline{SM} + \overline{MA}$ aumenta de $\underline{2v\,dt}$ no tempo $\underline{dt}$. Logo

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c}\,2v = 2\frac{v}{c}.$$

6) Caso duma refracção - Na figura têem-se dois meios de índices de refracção $\underline{n}$ e $\underline{n'}$, separados pelo plano $\underline{\Pi}$. Ponhamos $\overline{SP} = x$, $\overline{PA} = x'$ e



$$x + x' = D.$$

O caminho óptico é $L = nx + n'x' = (n-n')x + n'(x+x') =$
$= (n-n')x + n'D.$

- Suponhamos que a fonte e o observador se encontram imóveis e que o plano Π (conservando-se sempre normal à linha SA) se move com a velocidade $\frac{dx}{dt} = v$. Então

$$\frac{1}{c}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{c}(n-n')\frac{dx}{dt} = \frac{n-n'}{c}v = (n-n')\frac{v}{c}.$$

- Suponhamos que é a fonte que se desloca com a velocidade $\frac{dx}{dt} = v$; então

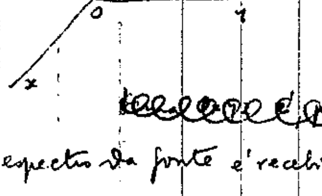
$dL = -nv\,dt$

e, portanto,

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dt} = -n\frac{v}{c}$$

– Por último, suponhamos que S, A, II estão fixos, mas que um dos índices n e n' ou ambos variam em função do tempo. Produz-se ainda uma variação de comprimento de onda para o observador colocado em A, aplicando-se sempre a fórmula $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dt}$.

7) Medida da velocidade radial das estrelas



– Seja um sistema de eixos com origem na Terra, Oxyz. Estes eixos serão os eixos eclíticos duma certa época por exemplo. São, por consequência, é paralelos a eixos ligados às fixas. Nesses eixos, ou noutros quaisquer, o observador e uma fonte luminosa à superfície da Terra encontram-se em repouso um com respeito ao outro. O espectro da fonte é recebido pelo observador e vai ser comparado ao spectro, de riscos brilhantes ou negros emitido pela estrela. O movimento da estrela no sistema em causa é uma translação de velocidade SS'. Esta velocidade pode supôr-se a resultante duma velocidade radial ST e duma velocidade perpendicular ao raio vector, TS'. A diferença de caminho optico é, evidentemente, dada por TS'. Isto significa que devemos por $\frac{dL}{dt} = TS' =$ $=$ velocidade radial $= v$, na fórmula de Doppler:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}.$$

Da medida dos desvios $\delta\lambda$ resulta o conhecimento de v. $\delta\lambda$ corresponde à distância entre duas linhas análogas dos spectros comparados: por ex., a linha $H\alpha$ do hidrogénio, se êste gaz se encontra na estrela em estudo.

Têem-se medido, por êste processo muitos velocidades radiais de estrelas. Encontram-se números que são da ordem do quilómetro ou da dezena de quilómetros. Entretanto, conhecem-se várias estrelas e várias nebulosas cujas velocidades radiais estão entre 100^{km} e 400^{km}. Há mesmo um caso de 1100^{km}, por segundo. Para muitas nebulosas as velocidades radiais são da ordem de 280^{km}

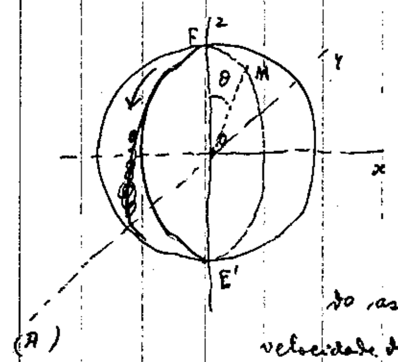
8) O Apex - Quando falámos das leis da Mecânica dissémos que elas eram válidas num sistema de eixos ligados ao Sol e dirigidos para as estrelas infinitamente afastadas ou, então, num sistema em translação rectilínea e uniforme com respeito a êsse. A existência de movimentos próprios para as estrelas (movimentos revelados em ângulo pela luneta e em raio pelo princípio de Doppler-Fizeau) dá-nos exemplos de sistemas materiais em translação com respeito ao sistema ligado ao Sol nas condições indicadas. Inversamente, o Sol tem uma translação com respeito a êsses sistemas. Pregunta-se mesmo se, em relação ás estrelas mais afastadas (infinitamente afastadas) não haverá uma translação do sistema solar? Antecipando a resposta, é-se levado a concluir que sim e que o Sol se dirige para um ponto determinado da esfera celeste, que se chama *apex*. O ponto diametralmente oposto diz-se *anti-apex*.

Para se chegar à conclusão do movimento citado do sistema solar, raciocina-se do modo seguinte: é natural supôr que os movimentos das estrelas com respeito ás estrelas infinitamente afastadas se distribuem ao acaso, e que, por consequência, as somas das projecções das velocidades das estrelas (que podemos chamar absolutas) sobre um eixo ligado a tais estrelas infinitamente afastadas é igual a zero. Ora, operando em relação ao sistema ligado ao Sol com um grande número de estrelas, não se encontra igual a zero uma tal soma. Há um eixo previlegiado *A* tal que, para uma direcção perpendicular a êsse eixo, a projecção é nula. Para o próprio eixo, a soma em referência é máxima e igual a *−V*. Interpreta-se êsse resultado dizendo que as estrelas vêem de encontro ao Sol com uma velocidade *V* ou que o Sol vai de encontro ás estrelas com essa velocidade. Assim aparece a noção de *apex*. Encontra-se que o valor de *V* é de cêrca de *17* a *19* km por segundo e que o apex é vizinho da *α* da *Lira* (Vega).

A média das melhores determinações dá para o $\underline{apex}$ as coordenadas

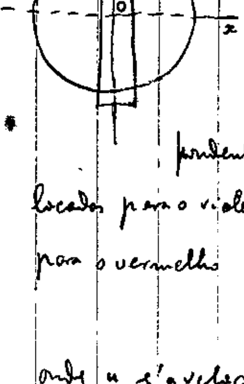
$$\alpha = 272^\circ, \quad \delta = 34^\circ.$$

§ 9) <u>Medida da velocidade angular de rotação dum astro de diâmetro aparente notável.</u> – Seja um astro que <u>emite luz</u>, com um diâmetro aparente notável e animado dum movimento de rotação em volta dum eixo $\underline{Ox}$. O plano yOz é o plano do equador do astro. Imaginemos que o observador terrestre, muito afastado, se encontra em $\underline{A}$, sôbre o eixo $\underline{Oy}$. As <u>velocidades radiais</u> dos diversos pontos do equador são as velocidades projectadas sôbre o eixo $\underline{Oy}$. Se se designa com $\underline{r}$ o raio do astro e com $\underline{\omega}$ a velocidade angular, a projecção sôbre Oy da velocidade do ponto E é $-\underline{\omega r}$, se se supõe que o sentido da rotação é o sentido indicado pela flecha. No ponto $\underline{E}'$ a projecção é $\underline{\omega r}$. Para qualquer outro ponto, a projecção é da forma $-\underline{\omega z}$, em que $\underline{z}$ é a cota do ponto do equador em questão. No ponto $\underline{M}$, por exemplo, se fôr $\underline{\theta}$ o ângulo da figura, tem-se, para projecção, com efeito,



$$-\omega r \cos\theta = -\omega z.$$

A imagem do astro, é projectada, por meio duma objectiva astronómica, na fenda dum espectroscópico. Podem, então, usar-se dois modos de observação. Um deles usa apenas uma pequena parte da imagem do astro, iluminando a fenda sucessivamente com as imagens dos pontos que são vizinhos de E, depois do centro, depois dos pontos $\underline{E}'$. <u>Escolhendo como spectro de comparação o espectro emitido pelo ponto O</u> verifica-se que as riscas fornecidas por $\underline{E}$ (correspondentes a uma velocidade radial que aproxima o ponto E do observador) estão deslocados para o violeta $\left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\omega r}{c}\right)$ enquanto que as riscas fornecidas por $\underline{E}'$ estão deslocados para o vermelho $\left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\omega r}{c}\right)$. A distância entre as linhas correspondentes a E e E' dá



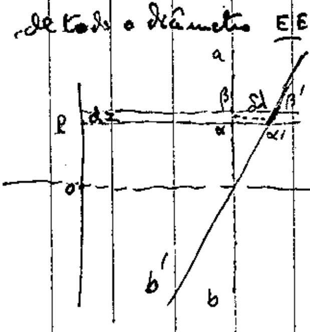
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\,\frac{\omega r}{c} = 2\,\frac{u}{c},$$

onde $\underline{u}$ é a velocidade linear dos pontos E e E'. Tira-se $u = \frac{c}{2}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. E, conhecido o raio do astro, determina-se $\underline{\omega}$, como se quere.

Para o caso do Sol, sendo $r = 695500^{km}$, encontra-se u^{2k} por segundo, no equador.

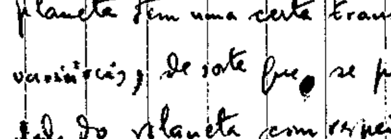
No segundo método de observação a fenda do espectroscópio é iluminada pela imagem de todo o diâmetro $\underline{EE'}$ do astro. Como para cada ponto de cota $\underline{z}$ se tem

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\omega z}{c}$$



segue-se que, um ponto (ou, melhor, um elemento do diâmetro de altura $\underline{dz}$) de cota $\underline{z}$, que deveria dar a uma certa risca a posição vertical da figura indicada em $\underline{\alpha\beta}$, lhe dá, realmente, a posição $\alpha'\beta'$, deslocada de $\underline{\delta\lambda}$ e inclinada. Em vez de se encontrar para uma risca determinada a posição normal $\underline{ab}$, encontra-se a <u>posição inclinada</u> $\underline{a'b'}$. <u>Da medida da inclinação das riscas obtidas deduz-se o valor de ω.</u> Ao mesmo tempo deduz-se a velocidade radial do centro do astro do deslocamento global da risca inclinada (ou, melhor, do deslocamento global da sua posição normal $\underline{ab}$), tomado relativamente à risca correspondente duma ponte terrestre. Este método, que é devido a <u>Deslandres</u>, é aplicável aos diferentes paralelos do astro.

§ 10) <u>Caso dos planetas</u> – Num sistema de eixos de direcções invariáveis com origem ~~ligados~~ na Terra, o centro de gravidade do Sol tem uma certa translação, o centro de gravidade do planeta tem uma certa translação com respeito a eixos ligados ao Sol de direcções invariáveis, de sorte que se pode conhecer assim a translação do centro de gravidade do planeta com respeito aos eixos com origem na Terra. Em seguida há que considerar a rotação do planeta nêstes últimos eixos. Para o estudo desta última escolhe-se a época de oposição com respeito ao Sol. Então, como se sabe, em virtude de ser luz reflectida a que chega à Terra, vinda do planeta, não apenas o deslocamento global da risca inclinada é duplo do que seria para a mesma velocidade radial no caso do planeta emitir luz, mas ainda a inclinação é dupla para a risca inclinada referida no caso do Sol.



Quando se aplica a um planeta o método indicado encontram-se as riscas solares de Fraunhofer inclinadas dum ângulo duplo do que seria observado se o planeta emitisse luz idêntica à do Sol. É claro que, no tocante às riscas de absorpção (riscas negras correspondentes às radiações absorvidas pelo planeta), o planeta funciona como se fôsse emissor.

Este método foi aplicado ao planeta Saturno com grande sucesso. Por meio do spectroscópio foi medida a velocidade angular do planeta e a dos bordos do anel. E verificou-se, então, êste resultado singular: a velocidade linear dum ponto do anel situado à distância r do eixo de rotação era tanto maior quanto menor fôsse r. Êste facto não é compatível com a ideia de que um anel constitui um corpo sólido; ele é formado por um grande número de asteroides distintos.

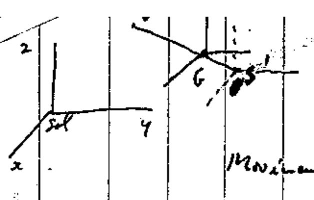
§ 11) Indicações gerais sôbre as estrelas duplas – A aplicação do princípio de Doppler-Fizeau ao estudo spectroscópico das estrelas duplas é a aplicação mais importante do princípio. Como se sabe, um binário optico de duas estrelas é um conjunto de duas estrelas que, para um observador terrestre, se projectam em pontos quasi coincidentes, mas que, na verdade, se encontram muito afastadas uma da outra, não havendo entre elas qualquer atracção. Pelo contrário, se o binário é, verdadeiramente, um binário orbital, isto é, se se trata de estrelas vizinhas que giram uma à volta da outra, diz-se que se tem uma êstrela dupla.

Muito dos binários orbitais têem sido estudados ùnicamente por meio de telescópios potentes. Foi-se, assim, levado à conclusão de que o movimento do companheiro à volta do astro principal tem lugar segundo leis de Kepler, valendo no sistema a lei de atracção de Newton. A distância angular dos dois astros, nos diferentes sistemas assim estudados, varia entre algumas décimas de segundo e alguns minutos; os períodos, que se reduzem a alguns anos em certos casos, vão a séculos noutros. As excentricidades vão de valores muito pequenos a valores próximos 0,8. Relativamente às inclinações das órbitas sôbre a linha de vista, encontram-se igualmente valores muito variados.

Por meio do princípio de Doppler puderam resolver-se certos binários, inacessíveis à observação telescópica. Os espectros de tais binários são espectros duplos; as riscas espectrais relativas ao astro principal não coincidem com as que são relativas ao companheiro; o deslocamento do espectro dêste último relativamente ao do astro principal é dado por uma função do tempo que varia muito rápidamente segundo uma lei periódica com períodos que são, nalguns casos, de menos de dois dias, e vão a anos noutros casos.

Nas observações dos binários resolúveis pelo spectroscópio usam-se dois métodos: um dêles emprega únicamente o spectroscópio, o outro utiliza simultaneamente o spectroscópio e o telescópio.

§ 12) Leis do movimento nas estrelas duplas - Sejam S e S' (Vêja-se a fig.) dois astros de massas M e M' da mesma ordem de grandeza, que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton e que estão subtraídos a toda a acção exterior. Pondo de parte o deslocamento comum do seu centro de gravidade e dos dois astros, vamos tratar aqui o problema do movimento relativo dum com respeito ao outro. Na verdade os dois astros descrevem à volta do seu centro de gravidade elipses situadas plano, que é fixo (acompanha o movimento comum dos três astros). Desde, porém, que o spectro de comparação (relativo ao de S') é o do astro S, não temos que preocupar-nos com o movimento comum dos três astros, que seria, aliás, revelado por comparação com o spectro duma fonte terrestre. Designemos com S' o astro reputado fixo e com S o astro móvel à volta de S'. É claro que o movimento de S é o movimento dum ponto de massa M atraído para um centro fixo segundo a lei de Newton (a massa de S' é uma massa fictícia M+M'). Para o ver basta atentar na figura junta e nas equações do movimento, que são escritas sem grandes explicações.



$S \left\{ \begin{array}{l} \text{coordenadas} \\ X, Y, Z \\ \text{nos eixos absolutos} \end{array} \right.$ $S' \left\{ \begin{array}{l} \text{coordenadas} \\ X', Y', Z' \\ \text{nos eixos absolutos.} \end{array} \right.$

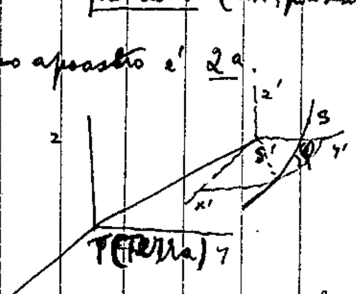
Movimento de S: $\left\{ m\dfrac{d^2X}{dt^2} = mM'\dfrac{X'-X}{r^3} \right.$, $r^2 = (X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')$

Mov. de S': $\left\{ M'\dfrac{d^2X'}{dt^2} = MM'\dfrac{X-X'}{r^3} \right.$.

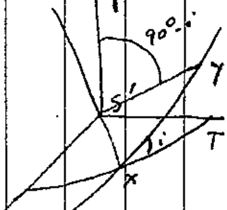
Movimento de S com respeito a S': $\left\{ \dfrac{d^2(X-X')}{dt^2} = (M'+M)\dfrac{X'-X}{r^3} \right.$ $\left\{ m\dfrac{d^2(X-X')}{dt^2} = m(M'+m)\dfrac{X'-X}{r^3} \right.$

Ora estas últimas equações são, de facto, as do movimento dum ponto de massa m [illegible] atraído para um centro fixo, conforme a lei de Newton, havendo no ponto fixo a massa fictícia M+m.

O astro S' ocupa um dos focos da elipse. As extremidades do eixo maior da elipse dizem-se periastro (correspondente à distância mínima) e apoastro. A distância do periastro ao apoastro é 2a. Na figura abaixo, os eixos de direcção invariável também são dados como ligados à Terra. A órbita de S à volta de S' tem uma inclinação φ sôbre o plano T'x'y', mas não é essa que nos interessa. Pelo contrário, tomemos um plano perpendicular à linha de vista em S', plano que será tangente à esfera celeste nêsse ponto.



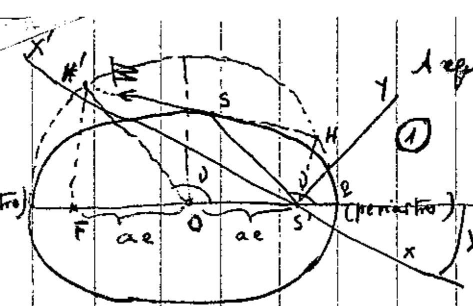
Tal plano tangente, dado que TS' varia pouco angularmente, pode supôr-se fixo nos eixos Txyz. A inclinação i da órbita será referida a êsse plano, e a linha dos nodos é também a linha de intersecção do plano da órbita com o plano tangente à esfera celeste. A linha de vista OS' projectada sôbre o plano da órbita dará S'Y e o ângulo de TS' com êsse plano (ou com S'Y) é igual a 90°-i. Quanto às notações a utilizar quanto à elipse descrita por S, serão as notações vulgares. Assim



$b = a(1-e^2) \left\{ \begin{array}{l} e = \text{excentricidade;} \\ b = \text{semi-eixo menor;} \end{array} \right.$

$S'S = \rho =$ distância dos astros;

$v =$ anomalia verdadeira;



A equação da órbita é

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta} \quad (1), \quad \text{com} \quad a(1-e^2) = \frac{b^2}{a} = \frac{\cancel{a^2(1-e^2)}}{a}.$$

A equação das áreas dem lugar, pelo que será

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\vartheta}{dt} = C = \text{constante das áreas} = \frac{\pi a b}{T},$$

onde T = período do movimento.

Tem-se, pois:

$$\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi a b}{T} \quad \text{ou} \quad \rho^2\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2\pi a b}{T}. \quad (2)$$

O movimento é completamente definido pela equação das áreas (2) e pela equação da órbita (1).

A velocidade de S na órbita, ou velocidade orbital, designa-se com $\underline{W}$.

§ 13) Velocidade radial orbital – Designemos com $\underline{V}$ a projecção de W sôbre a linha de vista. $\underline{V}$ é, precisamente, a velocidade radial orbital. É a velocidade que o espectroscópio permite medir pela aplicação do princípio de Doppler-Fizeau (No geral o sistema de referência é um sistema de eixos de direcção invariável ligado ao Sol, devendo, por isso, passar-se do valor determinado relativo à Terra para aquele). Convém decompor $\underline{W}$ em 2 direcções: a linha nodal $\underline{X'S'X}$, e a outra perpendicular a esta ou seja $\underline{S'Y}$, pois $\underline{W}$ está no mesmo plano daquelas duas direcções. A componente segundo a linha nodal não dá projecção sôbre a linha de vista, pelo que restará a projecção da componente segundo $\underline{S'Y}$ sôbre $\underline{S'T}$ (sem esquecer que é igual a $90^\circ - i$ o ângulo de S'Y com S'T). Ora prolonguemos $\underline{W}$ para os dois lados até encontrar o círculo principal da elipse nos dois pontos $\underline{H}$ e H'. Pode mostrar-se que os ângulos $F\hat{H'}H$ e $S'\hat{H}H'$ são rectos e que os ângulos $2\hat{S'}S$ e $2\hat{O}H'$ representam ambos a anomalia verdadeira. Se pusermos $FH' = h$, $S'H = h'$, pode ver-se que é $hh' = b^2$. No tempo $\underline{dt}$, como S se desloca ao longo da sua velocidade, o raio vector $\underline{S'S}$ descreve uma área cujo valor é $\frac{1}{2}h'Wdt$. Por outro lado, essa mesma área é dada por $Cdt = \frac{\pi a b}{T}$, de modo que vem

$$W = \frac{2\pi a b}{h' T} = \frac{2\pi a b}{T b^2}h = \frac{2\pi a}{b T}h.$$

Sob o ponto de vista numérico, $\overline{W}$ é o produto de $\underline{h}$ por uma constante, $\frac{2\pi a}{bT}$. Tomando sôbre $\overline{FH'}$ um comprimento igual a $\frac{2\pi a}{bT}h$, a projecção do vector assim obtido sôbre uma linha perpendicular a $S'Y$ (portanto sôbre a linha nodal) é igual à projecção de $\overline{W}$ sôbre $S'Y$, visto que o ângulo $F\hat{H}H'$ é um ângulo recto. Ora

$$\text{proj}\ \overline{FH'} = \text{proj}\ \overline{FO} + \text{proj}\ \overline{OH'}$$

ou seja, designando com $\underline{\lambda}$ o ângulo da linha $\overline{OS'}$ com a linha nodal $\overline{S'X}$,

$$\text{proj}\ \overline{FH} = a\,e\cos\lambda + a\cos(\lambda+\upsilon)$$

Dêste modo o valor de $\underline{V}$ procurado será

$$V = \frac{2\pi a}{bT} \operatorname{sen} i \left[a\,e\cos\lambda + a\cos(\lambda+\upsilon) \right],$$

ou seja

$$V = \frac{2\pi a \operatorname{sen} i}{T\sqrt{1-e^2}} \left[e\cos\lambda + \cos(\lambda+\upsilon) \right],$$

sem esquecer que esta projecção é contada positivamente no sentido $\overline{S'Y}$.

O espectroscópio mede, visto que, quando a projecção é positiva, pelo facto de $\overline{S'Y}$ estar dirigido para o lado do observador, há diminuição de $\underline{\lambda}$, o valor de $-\underline{V}$:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{V}{c}$$

O máximo valor de $\underline{V}$ tem lugar para $\cos(\lambda+\upsilon)=1$, ou $\lambda+\upsilon=0$. O astro S passa, então, no nodo de referência para a medida de $\underline{i}$. É nesse momento que o deslocamento das riscas espectrais de S, relativamente às de S', estão no máximo deslocadas para o violeta. A quantidade V_1 (em quilómetros por segundo)

$$V_1 = \frac{2\pi a \operatorname{sen} i}{T\sqrt{1-e^2}} (1 + e\cos\lambda),$$

fica, assim, determinada. O mínimo de V tem lugar para $\cos(\lambda+\upsilon)=-1$, ou seja quando o astro passa no outro nodo. Nesse momento o deslocamento das riscas é máximo para o vermelho. A quantidade V_2 (em quilómetros por segundo)

$$V_2 = \frac{2\pi a \operatorname{sen} i}{T\sqrt{1-e^2}} (-1 + e\cos\lambda),$$

fica, assim, determinada. Quando o ângulo $\lambda+\upsilon=\frac{\pi}{2}$ (passagem de $\underline{S}$ na linha perpendicular à linha dos nodos) o valor de V é

$$\frac{2\pi a \operatorname{sen} i}{T\sqrt{1-e^2}}\, e\cos\lambda = \frac{1}{2}(V_1 + V_2).$$

O deslocamento das linhas espectrais de S com respeito a S' será nulo quando o astro S passa nos pontos da sua órbita para os quais a tangente é paralela à linha dos nodos.

§ 14) *Interpretação de resultados* – Imaginemos que, estudando o espectro do binário, se verifica que o mesmo é uma mistura de dois espectros, observando a dupla existência das linhas do hidrogénio, do hélio, do cálcio, etc., deslocadas relativamente à sua posição normal fornecida por uma fonte luminosa terrestre. Diz-se que um dos espectros é do astro S', outro do astro S. Do estudo do deslocamento do segundo espectro relativamente ao primeiro, em face do princípio de *Doppler-Fizeau*, pode concluir-se $V = f(t)$, onde $f(t)$ é uma função periódica, da medida do período da qual se tira o período T. A velocidade radial do conjunto resulta, de resto, do estudo dos riscos de S' nas suas posições relativas aos riscos duma fonte luminosa terrestre.

Há outros casos em que se vê apenas um espectro, cujos riscos oscilam segundo uma lei periódica, em volta duma posição média. O binário em causa será constituído por uma estrela brilhante e outra obscura. Foi o que sucedeu com a estrela β da constelação das Perseides (Algol). O período T é referido à posição média. É ainda o período desejado.

No caso de *Algol* dá-se a circunstância seguinte: o companheiro obscuro que circula em volta da estrela brilhante move-se num plano que passa perto da Terra, de sorte que, durante um certo intervalo de tempo da sua revolução completa (de cerca de $2^{dias},87$), e com um período igual ao período T, a estrela brilhante é encoberta em parte pelo companheiro, o que provoca uma diminuição considerável do brilho da estrela.

Construído um gráfico com a curva $V = f(t)$ para um dado binário, as *épocas das passagens nos nodos* são dadas pelos diâmetros das arcadas da curva, pois correspondem aos seus máximos e mínimos.

§ 15) Constantes da órbita – Já vimos como se determinava T. Vimos igualmente como se determinavam V_1 e V_2. Escrevendo

$$\frac{4\pi a \,\mathrm{sen}\, i}{T\sqrt{1-e^2}}\, e \cos\lambda = V_1+V_2, \qquad \frac{4\pi a \,\mathrm{sen}\, i}{T\sqrt{1-e^2}} = V_1-V_2,$$

tem-se

$$\frac{a\,\mathrm{sen}\, i}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{T}{4\pi}(V_1-V_2) = l = \text{quantidade conhecida expressa em quilómetros}$$

$$e\cos\lambda = \frac{V_1+V_2}{V_1-V_2} = q = \text{quantidade conhecida (que é um número)}.$$

A equação que dá V pode então escrever-se

$$V = \frac{2\pi}{T}\, l \left[q + \cos(\lambda+v) \right],$$

pelo que a função $\cos(\lambda+v)$ é uma função conhecida do tempo. O mesmo se diz de $\frac{dv}{dt}$. Representaremos com Φ esta última função. Das equações

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \qquad \rho^2\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi ab}{T},$$

por eliminação de ρ, tira-se sucessivamente

$$\Phi = \frac{2\pi ab}{T}\cdot\frac{(1+e\cos v)^2}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{2\pi}{T}(1-e^2)^{-3/2}(1+e\cos v)^2.$$

O máximo e o mínimo de Φ são as quantidades conhecidas seguintes:

$$\Phi_1 = \Phi_{max.} = \frac{2\pi}{T}(1-e^2)^{-3/2}(1+e)^2; \quad \Phi_{min.} = \frac{2\pi}{T}(1-e^2)^{-3/2}(1-e)^2 = \Phi_2,$$

dos quais se tira

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2.$$

Desta equação tira-se o valor da excentricidade e. Como $q = e\cos\lambda$ é também conhecido, segue-se que λ é conhecido. Daqui segue-se que se sabe qual a disposição da órbita no seu plano, relativamente à linha nodal. Pelo facto de conhecermos $l = \frac{a\,\mathrm{sen}\, i}{\sqrt{1-e^2}}$, fica-se conhecendo $a\,\mathrm{sen}\, i$, expresso em quilómetros. No entanto, os valores de a e de i não são conhecidos separadamente. É claro que no caso duma estrela variável, cujo plano orbital passa perto da Terra (estrela com eclipses), sabemos que o ângulo i é visinho de 90°. Então, confundindo $\underline{\text{sen } i}$ com a unidade, ficamos conhecendo $\underline{a}$ em quilómetros. Supondo, pois, desenhada a linha nodal no plano da órbita (linha de intersecção do plano da órbita com o plano tangente à esfera celeste), conhecendo λ, e, $a \text{ sen } i$, ou, se $i = \frac{\pi}{2}$, conhecemos λ, e, a, podendo (neste último caso) traçar-se a órbita.

§ 16) Emprego simultâneo do espectroscópio e da luneta – Por meio do método telescópico, quando tal método pode empregar-se na resolução de binários, determina-se a órbita ou a curva simétrica relativamente ao plano perpendicular à linha de vista, ou, por outras palavras, determina-se $\underline{i}$ pelo seu coseno. O método, porém, falha se $\underline{i}$ é nulo caso em que o spectroscópio faz todas as determinações. Como o valor de $\underline{a \text{ sen } i}$ é conhecido também em sinal, por via do spectroscópio, segue-se que há possibilidade de determinar completamente as órbitas pelo emprego combinado do telescópio e do spectroscópio. O valor de $\underline{a}$, uma vez determinado em quilómetros, pelo facto de se poder medir o ângulo das duas estrelas (por hipótese), serve para se determinar a distância da estrela à Terra. Encontram-se, como se sabe, valores correspondentes a muitos anos de luz.

§ 17) As fórmulas respeitantes às massas – Se $\underline{M}$ e $\underline{M}'$ são as massas, $\underline{f}$ é a constante de atracção universal, $\underline{a}$ o semi-eixo da órbita, T o período, sabe-se que

$$\frac{4\pi^2}{T^2}a^3 = f(M+M'), \text{ ou } \frac{M+M'}{a^3} = \frac{4\pi^2}{T^2 f} = \delta,$$

em que $\underline{\delta}$ é uma quantidade conhecida. O nosso objectivo é determinar $\underline{M+M'}$ e a razão $k = \frac{M}{M'}$. Quanto a $\underline{M+M'}$, se, porventura se pode empregar o método misto indicado no § anterior, como $\underline{a}$ é conhecido, fica imediatamente conhecido.

Se se trata dum binário com eclipses, para o qual o método espectroscópico, por si só, dá o valor de $\underline{a}$, tem-se igualmente $M+M'$. Também se a paralaxe da estrela é conhecida (ou seja, se a distância à estrela é conhecida), e se o telescópio pode resolver o binário, pode determinar-se $\underline{a}$, e, portanto, $M+M'$.

Os valores geralmente encontrados dão para $M+M'$ resultados que raramente excedem muito o valor de 10 vezes a massa do Sol. Quanto a $\underline{a}$, é raro que o seu valor seja muito maior que o semi-eixo maior da órbita de Neptuno.

Relativamente às determinações de $\frac{M}{M'}$, notemos que as medidas espectroscópicas das velocidades radiais separadas $V_{S'}$ e V_S das duas estrelas (referidas a um sistema de direcções invariáveis passando pela Terra) estão relacionadas com a velocidade radial V_G do conjunto (velocidade radial do centro de gravidade) consoante as relações

$$\left\{\begin{array}{l} V_G = \frac{M}{M+M'} \cdot V_S + \frac{M'}{M+M'} \cdot V_{S'}, \text{ ou} \\ V_G = \frac{V_S}{1+\frac{M'}{M}} + \text{[illegible]} + \frac{\frac{M'}{M} V_{S'}}{1+\frac{M'}{M}} \end{array}\right\} \text{ ou } \left(1+\frac{M'}{M}\right) V_G = V_S + \frac{M'}{M} V_{S'}.$$

Por outro lado tem-se $\left\{\begin{array}{l} V_S = V_G + V_{RSG} \\ V_{S'} = V_G + V_{RS'G} \end{array}\right\}$ onde V_{RSG} e $V_{RS'G}$ são as velocidades radiais de S' e de S no seu movimento à volta de G.

Ora $\frac{V_{RSG}}{V_{RS'G}} = \frac{M'}{M}$, de sorte que se tem

$$\frac{V_S - V_G}{V_{S'} - V_G} = \frac{V_{RSG}}{V_{RS'G}} = \frac{M'}{M}.$$

Esta equação e a anterior dão $\frac{M'}{M}$ e V_G.

Os valores encontrados para $\frac{M}{M'}$ não são grandes nem pequenos, pelo que as massas são da mesma ordem de grandeza. É claro que se o companheiro fosse, de facto, muito mais pequeno que o astro principal, não chegaria a revelar-se.

Do conhecimento de $M+M'$ e do de $\frac{M}{M'}$, deduzem-se, depois, as massas $\underline{M}$ e $\underline{M'}$, que serão expressas em toneladas.