ÜBER DIE UNTERDIREKTEN MODULNSUMMEN .

VON

A. ALMEIDA COSTA (LISBOA)

1) **Einführung** — Der Begriff «direkte Summe» spielt in den Moduln-und Ringtheorien eine wichtige Rolle. In der Tat, wenn ein Modul (Ring) sich als direkte Summe von Untermoduln (Unterringen) ausdrückt, können die verschiedenen Sumanden eine einfachere Struktur als die des Ausgangsmoduls (Ringes) haben. Einen solchen Ausdruck erreicht man oft durch gewisse den betreffenden Moduln (Ringen) auferlegte Bedingungen, die mehr oder weniger allgemein sein dürften.

Der Begriff «unterdirekte Summe» bildet ein wichtiges Ausdehnungsmittel, wie wir sehen werden. Obwohl es nicht gänzlich vollkommen ist, erlaubt es bei einigen Einschränkungen ziemlich befriedigende Sätze zu erhalten.

Im allgemeinen werden wir in dieser Arbeit, die der Modulntheorie gewidmet ist, wiederum Gelegenheit haben das Interesse, das in der Übertragung verschiedener Überlegungen bezuglich der Ringe liegt, festzustellen. Z. B. machen wir nicht nur auf die Sätze bezuglich der unterdirekten Summen von Moduln aufmerksam, sondern auch auf die bezuglich der unterdirekten irreduziblen Moduln gemachten Betrachtungen.

In diesem Sinn bewegt sich hier fast alles um die Ergebnisse von N. H. McCoy und B. Brown-N. H. McCoy.

Das Literaturverzeichnis führt verschiedene Arbeiten an, die wir eine nach der anderen unterstehend angeben: [3] — T. Nakayama, *Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge,* «Proceedings of the Imperial Academy», Tokyo, Band xx, 1944, S. 61-66; [4] — N. Jacobson, *Structure theory of simple rings without finiteness assumptions,* «Transactions of the American Mathematical Society», Band 57, 1945, S. 228-245; [5] — N. Jacobson, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings,* «American Journal of Mathematics», Band 67, 1945, S. 299-320; [8] — N. Jacobson, *On the theory of primitive rings,* «Annals of Mathematics», Band 48, 1947, S. 8-21; [9] — T. Nakayama und G. Azumaya, *On irreducible rings,* «Annals of Mathematics», Band 48, 1947, S. 949-965; [10] — A. Almeida Costa, *Sobre os endomorfismos dos módulos,* «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band xxxiii, Nr. 1, 1948, S. 5-32; [11] — B. Brown und N. H. McCoy, *The radical of a ring,* «Duke Mathematical Journal», Band 15, 1948, S. 495-499; [13] — A. Almeida Costa, *Sobre nilideais e ideais quase-regulares,* «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band xxxiv, Nr. 2 und 3, 1949, S. 65-74 und 129-144; [14] — A. Almeida Costa, *Über Kontraktions- und Vernichtungsideale in der allgemeinen Modulntheorie,* in dieser Zeitschrift, Band i, 1951, S. 297-344; [15] — A. Almeida Costa, *Sobre anéis de endomorfismos,* «Gazeta de Matemática», Nr. 50, 1951, Lisboa; [16] — B. Brown und N. H. McCoy, *Radicals and subdirect sums,* «American Journal of Mathematics», Band 69, 1947, S. 46-58; [17] — N. H. McCoy, *Subdirect sums of rings,* «Bulletin of the American Mathematical Society», Band 53, 1947, S. 856-877; [18] — N. H. McCoy, *Subdirectly irreducible commutative rings,* «Duke Mathematical Journal», Band 12, 1945, S. 381-387; [19] — O. Goldman, *A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition,* «Bulletin of the American Mathematical Society», Band 52, 1946, S. 1021-1027; [20] — O. Goldman, *Addition to my note on semi-simple rings,* «Bulletin of the American Mathematical Society», Band 53, 1947, S. 956; [21] — O. Goldman, *Semi-simple extensions of rings,* «Bulletin of the American Mathematical Society», Band 52, 1946, S. 1028-1032; [23] — A. Almeida Costa, *Sobre a teoria dos anéis e ideais não comutativos,* Band I der «Akten des XIII portugiesisch-spanischen Kongresses für den Fortsckritt der Wissenschaften», 1950, Lissabon; [24] — A. Almeida Costa, *Sobre ideais de contracção e aniquiladores na teoria geral dos módulos,* «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band xxxv, Nr. 2, 1950-1951, S. 79-158; [25] — A. Almeida Costa, *Três lições sobre a teoria geral dos anéis* (*1.ª Lição:* Radical-G, Anti-radical, Ideal regular máximo dum anel), «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band xxxvi, Nr. 2, 1952, S. 65-83; [26] und [27] — A. Almeida Costa, *Três lições sobre a teoria geral dos anéis* (*2.ª lição:* Anéis primitivos; *3.ª lição:* Somas sub-directas de anéis, Anéis semi-simples), «Anais da Faculdade de Ciências do Porto», Band xxxvi, 1952; [I] — A. Almeida Costa, *Sistemas hiper-complexos e Representações,* «Centro de Estudos Matemáticos da Faculdade de Ciências do Porto», Nr. 19, 1948.

2) **Definitionen** — M ist irgend eine Menge von Elementen $\alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \cdots, \rho, \sigma, \cdots$. Wir fügen jedem $\mu \in M$ einen Modul $\mathfrak{m}_\mu$ zu. Eine Funktion $f = \{f(\mu)\}$ definiert man durch seine Werte $f(\mu) \in \mathfrak{m}_\mu$. Eine Summe von zwei solcher Funktionen definiert man durch die Beziehung $(f+g)(\mu) = f(\mu) + g(\mu)$, wenn $g(\mu)$ eine zweite Funktion ist. Die Menge der Funktionen bildet einen Modul $\mathfrak{M}$, der *direkte komplete* Summe der Moduln $\mathfrak{m}_\mu$, [5, 17, 24], heisst. Unter den Funktionen $\{f(\mu)\}$ können wir diejenigen unterscheiden, die, wie $\{h(\mu)\}$, den folgenden Bedingungen genügen: $h(\mu) = 0$, wenn $\mu \neq \alpha$; $h(\mu) = h(\alpha) \in \mathfrak{m}_\alpha$, wenn $\mu = \alpha$. Die Untermenge der Funktionen

$\{h(\mu)\}$ ist ein Untermodul $\bar{\mathfrak{m}}_\alpha$, von $\mathfrak{M}$, zu $\mathfrak{m}_\alpha$ isomorph. Es ist gleichgültig zusagen, dass $\mathfrak{M}$ eine direkte komplete Summe der $\mathfrak{m}_\mu$ oder der $\bar{\mathfrak{m}}_\mu$ ist.

Im besonderen Fall in dem M eine endliche Menge $\{1, 2, \cdots, n\}$ ist, erhält man die gewöhnliche Definition der direkten Summe.

Wenn man nur die Funktionen $\{f(\mu)\}$, die den Nullwert auf allen ausser einer endlichen Anzahl von Punkten annehmen, betrachtet, erhält man einen Untermodul $\mathfrak{M}_0$, von $\mathfrak{M}$, der noch alle $\mathfrak{m}_\mu$ enthält und *diskrete direkte* Summe dergleichen $\mathfrak{m}_\mu$ heisst. Indem man die Menge M als endlich annimmt, dann wird die diskrete direkte Summe der direkten kompleten Summe gleich.

Es sei jetzt $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ ein Untermodul von $\mathfrak{M}$. Durch den Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{m}_\mu$, wodurch man $f \rightarrow f(\mu)$ hat, erhält man einen Teil von $\mathfrak{m}_\mu$, der der Abbildung $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{n}_\mu \subseteq \subseteq \mathfrak{m}_\mu$ entspricht. Der Einfachheit halber benutzen wir fast immer kleine lateinische Buchstaben, um die Elemente der durch entsprechende gotische Buchstaben bezeichneten Mengen darzustellen. Z. B. wird man mit $m \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathfrak{N}$, $m \rightarrow m_\mu$, $n \rightarrow n_\mu$ die vorhergehende Auseinandersetzung ausdrücken.

Es stellt einen wichtigen Fall dar, wenn wir, für ein beliebiges μ, $\mathfrak{n}_\mu = \mathfrak{m}_\mu$ haben. In dieser Annahme sagen wir $\mathfrak{N}$ ist eine *unterdirekte* Summe der Moduln $\mathfrak{m}_\mu$. Aus den verschiedenen Definitionen geht unmittelbar hervor, dass sowohl die direkten kompleten als auch die diskreten Summen besondere Fälle von den unterdirekten sind.

Bei der Definition der unterdirekten Summe, empfiehlt es sich zu beobachten, dass wir im allgemeinen nicht behaupten können, dass zu dieser Summe ein bestimmtes Element von $\mathfrak{M}$ gehört. Im einzelnen gehören die eigenen $\mathfrak{m}_\mu$ nicht immer zu der unterdirekten Summe. Wenn, für beliebiges μ, $\mathfrak{m}_\mu \subseteq \mathfrak{N}$ ist, dann heisst die unterdirekte

Summe $\mathfrak{N}$ *spezielle unterdirekte* Summe, [17]. Beispiele dieser letzten erhält man durch die direkten kompleten und diskreten Summen.

Bemerkungen: — Wenn wir jedem $\mu \in M$ einen Ring $\mathfrak{A}_\mu$ anstatt einen Modul $\mathfrak{m}_\mu$ entsprechen lassen, können wir ein Produkt in die Menge der Funktionen $f = \{f(\mu)\}$, durch die Beziehung $fg(\mu) = f(\mu) \cdot g(\mu)$, einführen. Auf diese Weise erhält man eine direkte komplete Summe der Ringe $\mathfrak{A}_\mu$. Die anderen Definitionen sind auch analog, [5, 17].

Die Darstellung eines Moduls $\mathfrak{P}$ durch eine unterdirekte Summe ist sehr leicht. Es genügt dem festen Elemente $\alpha \in M$ den eigenen Modul $\mathfrak{P}$ und jedem $\lambda \in M$ verschieden von α den Modul (0) entsprechen zu lassen. Das ist eine triviale Darstellung. Eine andere triviale Darstellung wird folgendermassen erhalten: man lässt jedem $\mu \in M$ den eigenen $\mathfrak{P}$ entsprechen; in der so erklärten direkten kompleten Summe $\mathfrak{M}$, wird $\mathfrak{P}$ als unterdirekte Summe, durch die Abbildungen $p \rightarrow p = p_\mu \in \mathfrak{P}$, ($\mu$ beliebig), eingebettet.

Das Problem einen Modul durch eine unterdirekte Summe darzustellen wirft demnach zwei Fragen auf: 1.) Ist der Modul gegeben, muss man feststellen ob es Darstellungen gibt, die nicht trivial sind; 2.) Gleichgültig ob der Modul $\mathfrak{M}$ gegeben ist oder nicht, sucht man festzustellen welche Bedingungen $\mathfrak{M}$ erfüllen muss, damit $\mathfrak{M}$ eine Darstellung als unterdirekte Summen von Moduln gewisse Typen, [17], erfahren kann.

Mehrere der im Folgenden behandelten Sätze erleichtern die Beantwortung dieser beiden Fragen.

3) **Unterdirekte Summen** — Hierbei handelt es sich um eine erste Verlautbarung:

Satz 1: — *Dann und nur dann ist ein Modul $\mathfrak{M}$ einer unterdirekten Summe von Moduln $\mathfrak{m}_\mu$ isomorph, wenn die Homomorphismen $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{m}_\mu$ gelten,* $(\mu \in M)$, *und wenn für jedes $m \neq 0$, $(m \in \mathfrak{M})$, mindestens ein $\lambda \in M$ existiert für das $m \to m_\lambda \neq 0$.* Die Durchführung des Beweises, die wie bei Ringen erfolgt, lässt man ausfallen, [17, S. 859]. Der Satz kann diese andere Fassung annehmen:

Satz 1_a: — *Dann und nur dann ist ein Modul zu einer unterdirekten Summe von Moduln $\mathfrak{m}_\mu$ isomorph, wenn jedem μ ein Untermodul $\mathfrak{M}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ entspricht, sodass $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\mu \cong \mathfrak{m}_\mu$, mit $\Pi\, \mathfrak{M}_\mu = (0)$.*

Indem wir die Frage der trivialen Darstellungen erklären, stellen wir fest, dass, wenn unter den homomorphen Abbildungen $\mathfrak{m}_\lambda$ von $\mathfrak{M}$ eine isomorph existiert, dann wird die Darstellung von $\mathfrak{M}$ als unterdirekte Summe noch für trivial gehalten. Wir stellen auch fest, dass die vorhergehenden Definitionen und Sätze bestehen bleiben im Fall $\mathfrak{M}$ ein Operatorbereich Ω zulässt, vorausgesetzt, dass die anwesenden Homo- oder die Isomorphismen operatorisch in bezug auf Ω sind.

4) **Spezielle unterdirekte Summen** — Stellen wir als Hilfssätze einige Ergebnisse auf, auf denen einige Sätze bezuglich der speziellen unterdirekten Summen beruhen. Hierzu benutzen wir [14], [15] und [17].

$\mathfrak{M}$ ist ein Modul und $\mathfrak{A}$ sein Endomorphismenring [Vgl. I, S. 215 und folgende]. Ω ist eine Untermenge von $\mathfrak{A}$, sodass $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul ist. Der Kommutator von Ω in $\mathfrak{A}$ wird mit $\overline{\Omega}$ bezeichnet. Wenn $\mathfrak{U}$ ein Ω-Untermodul von $\mathfrak{M}$ ist bezeichnen wir als *Kontraktionsideal* in $\mathfrak{U}$ die Menge $\mathfrak{e}$ der Ω-Endomorphismen, die $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$ abbilden. Es handelt sich dabei um ein Linksideal von $\overline{\Omega}$. Die Menge der Ω-Endomorphismen, die $\mathfrak{U}$ annulieren heisst *Vernichtungsideal* von $\mathfrak{U}$. Es handelt sich dabei um ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$ von $\overline{\Omega}$. Es gelten folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 1: *Wenn $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = (0)$ ist, dann genügen die entsprechenden Kontraktionsideale der Gleichheit $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$ als direkte Summe verstanden.* In der Tat nehmen wir $B \in \mathfrak{e}$ an, sodass $\mathfrak{M}B \subseteq \mathfrak{U}$. Ist $m \in \mathfrak{M}$ gegeben, setzen wir $mB = n_1 + n_2$ mit $n_i \in \mathfrak{U}_i$, $(i = 1, 2)$. Die Abbildung $m \to n_i$ ist ein Ω-Endomorphismus von $\mathfrak{M}$, den wir mit A_i bezeichnen. Aus den Beziehungen $B = A_1 + A_2$, $\mathfrak{M}A_i \subseteq \mathfrak{U}_i$ entnehmen wir $B \in (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$, und deswegen $\mathfrak{e} = (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$, da $\mathfrak{e} \supseteq (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ ist. Diese Summe ist direkt, wie aus der Tatsache folgt, dass $A_1 + A_2 = 0$ die Gleichheiten $A_1 = A_2 = 0$ ergibt.

Korollar 1: *Wenn $\mathfrak{M} = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = (0)$ ist, dann hat man $\overline{\Omega} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$.*

Hilfssatz 1': *Wenn $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ und $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2) = \mathfrak{M}$ ist, dann genügen die entsprechenden Vernichtungsideale der Gleichheit $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$, als direkte Summe verstanden.* Es ist klar, dass man $\mathfrak{r} \supseteq (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$ hat. Nehmen wir $B \in \mathfrak{r}$ an und ferner sei $m \in \mathfrak{M}$. Indem wir m auf zwei verschiedene Weisen $m = n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$ $(n_1, n_1' \in \mathfrak{U}_1;\ n_2, n_2' \in \mathfrak{U}_2)$ zerlegen, sieht man, dass $n_1 - n_1' = n_2' - n_2 \in \mathfrak{U}$, sodass man $n_1 B = n_1' B$, $n_2 B = n_2' B$ erhält. Man schliesst daraus, dass man bei einem gegebenem $m \in \mathfrak{M}$ Ω-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ durch die folgenden Abbildungen $m \to n_1 B = m A_2'$, $m \to n_2 B = m A_1'$ erhält. Angenommen $m = n_1 = n_1 + 0 \in \mathfrak{U}_1$, so sieht man, dass $n_1 \to n_1 A_1' = 0$, wodurch $\mathfrak{U}_1 A_1' = (0)$, $A_1' \in \mathfrak{r}_1$. Ganz analog ist $A_2' \in \mathfrak{r}_2$. Und da $m = n_1 + n_2$, $mB = n_1 B + n_2 B = m A_2' + m A_1' = m(A_2' + A_1')$ ist, schliesst man $B = A_1' + A_2'$. So ist $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$. Diese Summe ist jedoch direkt, da $\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2 = (0)$ ist, weil ein Endomorphismus der zu jenem Durchschnitt gehört $\mathfrak{M}$ annuliert. Der Hilfssatz ist hiermit bewiesen.

Korollar 1′: *Nimmt man* $(0)=\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$ *und* $(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)=\mathfrak{M}$, so hat man $\overline{\Omega}=\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2$.

Hilfssatz 2: *Wenn* $E\in\overline{\Omega}$ *ein Idempotent ist, und wir* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}E+\mathfrak{M}(1-E)$ *nehmen, wobei* $1\in\Omega$ *der identische Endomorphismus ist, dann setzt sich das Kontraktionsideal in* $\mathfrak{M}E$ *aus allen* Ω*-Endomorphismen, wie* A, *zusammen, die der Gleichung* $A=AE$ [*oder* $A(1-E)=0$] *genügen, und das Vernichtungsideal von* $\mathfrak{M}(1-E)$ *setzt sich aus allen Elementen* $B\in\overline{\Omega}$ *zusammen, für die* $E=EB$ [*oder* $(1-E)B=0$] *gilt.* Es sei $m\in\mathfrak{M}$ gegeben; wenn, für beliebig m, $mA\in\mathfrak{M}E$, dann hat man $mA=m'E$ für ein bestimmtes $m'\in\mathfrak{M}$, welches von m abhängt. Dann ist $mAE=m'E=mA$, wodurch $AE=A$. Umgekehrt, nimmt mann $AE=A$ an, dann ist $\mathfrak{M}A=\mathfrak{M}AE\subseteq\mathfrak{M}E$. Bezuglich des Vernichtungsideal von $\mathfrak{M}(1-E)$, ist zu bemerken, dass jeder Ω-Endomorphismus der Form $B=EB$ zu dem Vernichtungsideal gehört. Nimmt man umgekehrt, für beliebig $m\in\mathfrak{M}$, $m(1-E)C=0$ an, dann ist $(1-E)C=0$, oder $C=EC$. Hierdurch ist der Beweis des Hilfssatzes erbracht.

Hilfssatz 3: *Wenn* $\mathfrak{S}$ *ein Ring mit Nullannihilator ist und ausserdem* $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_2$ *zwei Paar zweiseitiger Ideale sind, für welche* $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2=(0)$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}_2+\mathfrak{b}_2$, *dann ist nötigerweise* $\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2\subseteq\mathfrak{b}_1$, [17, S. 871, Hilfssatz 1]. Als Annihilator von $\mathfrak{S}$ muss man das zweiseitige Ideal von $\mathfrak{S}$ verstehen, welches die Menge der Elemente x, für die $x\mathfrak{S}=\mathfrak{S}x=(0)$ ist, enthält.

Hilfssatz 4: *Wenn* $\mathfrak{M}$ *ein* Ω*-Modul ist, der in den Formen* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}_1=\mathfrak{M}_2+\mathfrak{N}_2$, *wobei* $\mathfrak{M}_i,\mathfrak{N}_i,(i=1,2)$, $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Modul angenommen sind und* $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2=(0)$ *ist, geschrieben werden kann, dann hat man* $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{N}_2,\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{N}_1$. Wir wissen, dass $\overline{\Omega}=\mathfrak{s}_1+\mathfrak{r}_1=\mathfrak{s}_2+\mathfrak{r}_2$ ist, wobei die $\mathfrak{s}_i$ und die $\mathfrak{r}_i,(i=1,2)$, beziehungsweise die Vernichtungsideale der $\mathfrak{M}_i$ und der $\mathfrak{N}_i$ darstellen. Da es sich um $(\Omega,\overline{\Omega})$-Moduln handelt, sind diese Ideale zweiseitig, wie man sofort feststellen kann, [23, § 3, Satz 6′]. Wir wissen auch, dass, wenn man $\mathfrak{M}_i=\mathfrak{M}E_i,\mathfrak{N}_i=\mathfrak{M}(1-E_i),(i=1,2)$, nimmt, so hat man

$$\mathfrak{r}_i=E_i\overline{\Omega}=\overline{\Omega}E_i,\qquad \mathfrak{s}_i=(1-E_i)\overline{\Omega}=\overline{\Omega}(1-E_i).$$

Der Annahme $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2=(0)$ folgt $[\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2]=(0)$, da die $\mathfrak{r}_i$ Kontraktionsideale in den $\mathfrak{M}_i$ sind, und das Kontraktionsideal in einem Durchschnitt von zwei Ω-Untermoduln der Durchschnitt der entsprechenden Kontraktionsideale ist, [23, § 2]. Nach Hilfssatz 3, ist somit $\mathfrak{r}_1\subseteq\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{r}_2\subseteq\mathfrak{s}_1$. Bei gegebenem $m_1\in\mathfrak{M}_1$, schreiben wir $m_1=m_2+n_2$. Man erhält $m_1=m_1E_1=m_2E_1+n_2E_1=n_2E_1\in\mathfrak{N}_2$, wie erwünscht.

Korollar 2: *Wenn, unter den Hilfssatzbedingungen,* $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}_2$ *ist, dann hat man nötigerweise* $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_2$.

Von den beiden nun folgenden Sätzen wendet nur Satz Nr. 3 die soeben gemachten Betrachtungen an.

Satz 2: *Damit der Modul* $\mathfrak{M}$, *mit Operatorbereich* Ω, Ω*-isomorph zu einer speziellen unterdirekten Summe der Moduln* $\mathfrak{m}_\mu$ *(alle, wie* $\mathfrak{M}$, *als* Ω*-Moduln betrachtet) ist, ist es notwendig, dass es in* $\mathfrak{M}$ *ein System von Untermoduln* $\mathfrak{M}_\mu$ *gibt, die den* $\mathfrak{m}_\mu$ *durch den fraglichen Isomorphismus entsprechen, und ein zweites System von Untermoduln* $\mathfrak{N}_\mu$, *ebenfalls* Ω*-Moduln, unter den folgenden Bedingungen:* 1·) $\mathfrak{M}_\mu\cap\mathfrak{M}_\nu=(0)$, *falls* $\mu\neq\nu$; 2·) $\mathfrak{M}_\mu+\mathfrak{N}_\mu=\mathfrak{M}$; 3·) $\prod\mathfrak{N}_\mu=(0)$, [17, S. 871].

Satz 3: $\mathfrak{M}$ *sei als* Ω*-Modul angenommen und* $\mathfrak{m}_\mu$ *sei gleichfalls* Ω*-Modul, dann ist hinreichend dafür, dass* $\mathfrak{M}$ *zu einer speziellen unterdirekten Summe der* $\mathfrak{m}_\mu$ Ω*-isomorph* *ist, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:* 1·) *es bestehen in* $\mathfrak{M}$ *Untermoduln* $\mathfrak{M}_\nu$ *die zu den* $\mathfrak{m}_\nu$ *Ω-isomorph und ausserdem* $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Untermoduln sind;* 2·) *es gelte* $\mathfrak{M}_\mu \cap$ $\cap\, \mathfrak{M}_\nu = (0)$, *wenn* $\mu \neq \nu$; 3·) *es sei* $\mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{U}_\mu = \mathfrak{M}$, *für gewisse* $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Untermoduln mit* $\mathfrak{U}_\mu$ *bezeichnet;* 4·) *es bestehe die Gleichheit* $\Pi\, \mathfrak{U}_\mu = (0)$. Es ist klar, dass, bei $\Pi\, \mathfrak{U}_\mu = (0)$, $\mathfrak{M}$ Ω-isomorph zu einer unterdirekten Summe der Moduln $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}_\mu$ ist. Aber aus den Gleichheiten $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{U}_\mu$ leitet man $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}_\mu \simeq \mathfrak{M}_\mu$ ab, sodass $\mathfrak{M}$ auch Ω-isomorph zu einer unterdirekten Summe $\mathfrak{T}_1$ der Moduln $\mathfrak{M}_\nu$ ist. Übrigens kann man dasselbe direkt sehen, indem man folgende Überlegung anstellt. Wir nehmen $m \in \mathfrak{M}$ und schreiben $m = m_\nu + n_\nu$, $(m_\nu \in \mathfrak{M}_\nu,\ n_\nu \in \mathfrak{U}_\nu)$. Die Abbildung $m \to m_\nu$ (ν beliebig) ist ein Homomorphismus. Falls $m \neq 0$, dann $m \notin \Pi\, \mathfrak{U}_\nu$, wodurch z.B. $m \notin \mathfrak{U}_\lambda$. Indem wir $m = m_\lambda + n_\lambda$ setzen, hat man $m_\lambda \neq 0$. Der Satz 1 ergibt nun das Erwünschte. Es bleibt zu beweisen, dass $\mathfrak{T}_1$ eine spezielle unterdirekte Summe ist. Nehmen wir $m'_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda$. Wenn wir die Gleichheiten $m'_\lambda = m_\lambda + 0$, $m'_\lambda = 0 + n_\nu$, mit $m_\lambda = m'_\lambda$, $n_\nu = m'_\lambda$ (falls $\nu \neq \lambda$), welche letzteren aus $\mathfrak{M}_\lambda \subseteq \mathfrak{U}_\nu$ nach Hilfssatz 4 hervorgehen, berücksichtigen, sieht man, dass $\mathfrak{M}$ tatsächlich in $\mathfrak{T}_1$ enthalten ist. Man geht darauf zu der speziellen unterdirekten Summe der $\mathfrak{m}_\mu$ über.

Hilfssatz 5: *Wenn* $\mathfrak{M}$ *ein Ω-Modul und* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M}$ *ist* [$\mathfrak{U}$ *als* $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Modul angenommen*] *und wenn wir* $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}E$, *wobei* E *Einselement von* $\overline{\Omega}E$ *ist, annehmen, dann ist bei der Zerlegung* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1-E)$ *der zweite Summand gleichfalls ein* $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Untermodul.* Es handelt sich darum zu beweisen, dass für jedes $A \in \overline{\Omega}$ man $\mathfrak{M}(1-E)A \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{M}(1-E)$ erhält. Dies aber folgt aus $\mathfrak{M}(1-E)AE =$ $= \mathfrak{M}(1-E)\cdot EAE = (0)$.

Der Satz zu dem wir übergehen benutzt nur den weiten Teil des vorhergehenden Hilfssatzes. Wir bezeichnen weiterhin mit $\mathfrak{T}$ eine unterdirekte Summe der Moduln $\mathfrak{m}_\mu$, alle Ω-Moduln angenommen, und wir stellen mit $\overline{\overline{\Omega}}$ den Ring der Ω-Endomorphismen von $\mathfrak{T}$ dar. Es gilt:

Satz 4: *Es sei* $\mathfrak{T}$ *eine spezielle unterdirekte Summe der Moduln* $\mathfrak{m}_\mu$, *unter folgenden Bedingungen:* 1·) *die* $\mathfrak{m}_\mu$ *sind einfache* $(\Omega,\overline{\overline{\Omega}})$*-Moduln;* 2·) *jeder von ihnen ist homomorphe Abbildung von* $\mathfrak{T}$ *der Form* $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{T}\overline{E}_\mu$, *wobei* $\overline{E}_\mu \in \overline{\overline{\Omega}}$ *Einselement von* $\overline{\overline{\Omega}}E_\mu$ *ist; dann ist es notwendig und hinreichend damit* $\mathfrak{M}$, *als Ω-Modul angenommen, zu* $\mathfrak{T}$ *isomorph ist, dass jeder* $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Untermodul von* $\mathfrak{M}$ *einen einfachen* $(\Omega,\overline{\Omega})$*-Untermodul enthält, gleichfalls homomorphe Abbildung von* $\mathfrak{M}$, *durch ein Idempotent, welches Einselement des entsprechenden Kontraktionsideal ist, definiert.*

Die Bedingung ist *notwendig:* Gehen wir von dem Isomorphismus $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{T}$ aus und ist $(0) \neq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M}$, wobei man $\mathfrak{U}$ als $(\Omega,\overline{\Omega})$-Modul annimmt. Durch den Isomorphismus geht man von $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}$ über, wobei $\mathfrak{T}_1 \neq (0)$ ein $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermodul ist. Nehmen wir dann $0 \neq t_1 \in \mathfrak{T}_1$. Durch $\mathfrak{T} \sim \mathfrak{m}_\mu$ entspricht dem t_1, wenn z.B. $\mu = \lambda$ ist, ein Element $m_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$, mit $m_\lambda \neq 0$. Da man $\mathfrak{T}\overline{E}_\lambda = \mathfrak{m}_\lambda$ hat, ist $\mathfrak{T}_1\overline{E}_\lambda \subseteq \mathfrak{m}_\lambda$. Der Tatsache $t_1 \to t_1\overline{E}_\lambda = m_\lambda \neq 0$ folgt $(0) \neq$ $\neq \mathfrak{T}_1\overline{E}_\lambda \subseteq \mathfrak{T}_1$. Hieraus schliesst man $(0) \neq \mathfrak{m}_\lambda \cap \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{m}_\lambda$, wie erwünscht.

Die Bedingung ist *hinreichend:* $\mathfrak{M}$ ist gegeben, dann betrachten wir die Menge $\{\mathfrak{M}_\nu\}$ der einfachen $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermoduln, durch idempotente Elemente, welche Einselemente der entsprechenden Kontraktionsideale sind, definiert: $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M}E_\nu$. Die Bedingungen 1) und 2) des Satzes 3 sind erfüllt. Die Bedingung 3) desgleichen Satzes ist eine Folge des Hilfssatzes 5). Es bleibt deshalb zu zeigen, dass man, bei den Zerlegungen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\nu + \mathfrak{N}_\nu$, $\Pi \mathfrak{N}_\nu = (0)$ hat. Wenn das nicht wäre, dann bestünde ein $\mathfrak{M}_\lambda$ im Durchschnitt enthalten; und der Endomorphismus E_λ musste dann $(0) = \mathfrak{N}_\lambda E_\lambda \supseteq \Pi \mathfrak{N}_\lambda \cdot E_\lambda \neq (0)$ ergeben, was ein Absurdum ist. Der Beweis ist hiermit vollbracht.

Die letzte Behauptung, die wir über unterdirekte spezielle Summen beweisen wollen beruht auf den Hilfssätzen, die wir sogleich behandeln und die an sich auch von Interesse sind, [Vgl. 24, §§ 5, 6 und 17, sowie I, S. 49-51].

Hilfssatz 6: *Für einen einfachen Ω-Untermodul $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$, dessen Kontraktionsideal $\mathfrak{k}$ Nilideal ist, erhält man entweder $\mathfrak{k} = (0)$ oder $\mathfrak{k}^2 = (0)$.* In der Tat nehmen wir $\mathfrak{k} \neq (0)$ an. Wenn $0 \neq A \in \mathfrak{k}$, dann ist $\mathfrak{M}A = \mathfrak{N}$. Danach ist $\mathfrak{M}A^2 = (0)$, weil man andernfalls $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}A = \mathfrak{M}A^2 = \cdots$ haben würde und A potent wäre. Sodann, wenn $T \in \mathfrak{k}$, erhält man $\mathfrak{M}AT = \mathfrak{N}T \subseteq \mathfrak{N}$. Wäre die Gleichheit $\mathfrak{N}T = \mathfrak{N}$ gültig, so wäre T potent. Also ist $\mathfrak{M}AT = (0)$ und $AT = 0$ wie behauptet wurde.

$\mathfrak{N}$ als Ω-Untermodul von $\mathfrak{M}$ angenommen heisst *regulärer* Untermodul, wenn er homomorphe nicht nilpotente Abbildungen von $\mathfrak{M}$ enthält. Wir können folgende Behauptungen aussprechen:

Hilfssatz 7: *Für einen einfachen Ω-Untermodul $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$, dessen Kontraktionsideal $\mathfrak{k} \neq (0)$ ist, hat man $\mathfrak{k}^2 = (0)$, sonst muss $\mathfrak{N}$ regulär sein.*

Hilfssatz 8: *Wenn $\mathfrak{N}$ ein einfacher regulärer Ω-Untermodul ist, dann besteht ein Idempotent $E \in \mathfrak{k}$ für welches $\mathfrak{M}E = \mathfrak{N}$.* Setzen wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}A$, wobei man den Endomorphismus A als nicht nilpotent annimmt. Dann ist $\mathfrak{N}A = \mathfrak{N}$. Es sei $m \in \mathfrak{M}$ gegeben; dann gelangt man durch A zu $mA = n \in \mathfrak{N}$, und da $\mathfrak{N}A = \mathfrak{N}$ ein Automorphismus ist, bezeichnet man mit $n' \in \mathfrak{M}$ das Element für welches $n'A = n$. Die Abbildung $m \to n'$ ist ein Endomorphismus B von $\mathfrak{M}$, für den ausser $\mathfrak{M}B = \mathfrak{N}$ noch die Beziehung $BA = A$ gilt. Von hier leitet man $(B^2 - B)A = 0$ ab. Falls $B^2 - B = 0$, dann ist B das gesuchte Idempotent. Wenn das nicht so wäre, hätte man $\mathfrak{M}(B^2 - B)A = (0)$, $\mathfrak{M}(B^2 - B) = \mathfrak{N}$. Diese letzte Gleichheit ist ein Absurdum, da sie $\mathfrak{N}A = (0)$ ergibt. Somit erhalten wir mit $B = E$ das Gewünschte.

Hilfssatz 9: *Es sei $\mathfrak{M}$ als Ω-Modul angenommen gegeben, und es sei $\mathfrak{N}$ ein Ω-Untermodul unter den folgenden Bedingungen: 1·) Das Kontraktionsideal in $\mathfrak{N}$ hat kein Nilideal; 2·) jeder Nichtnulluntermodul in $\mathfrak{N}$ enthalten hat ein Kontraktionsideal $\neq (0)$; 3·) es gilt in $\mathfrak{N}$ die Minimalbedingung für die Ω-Untermoduln, die es enthält; dann, angenommen $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}E \subset \mathfrak{N}$, existiert Idempotent $G \in \overline{\Omega}$ für welches $\mathfrak{M}E \subset \mathfrak{M}G = \mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{N}$.* Aus $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1 - E)$ entnehmen wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}(1 - E)$. Nach Bedingung 3) existiert Minimaluntermodul in $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}(1 - E)$, welcher nach 1) und 2), angesichts des Hilfssatzes 8, die Form $\mathfrak{M}E'$ hat, mit $0 \neq E' \neq E$. Da die Gleichheit $E'E = 0$ gilt, sieht man, wenn wir $E_1 = E$, $E_2 = E' - EE'$ setzen, dass $E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$, $E_2^2 = E_2$, wodurch das Idempotent $G = E_1 + E_2$ hiermit $\mathfrak{P}' = \mathfrak{M}G = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E_2 \supset \mathfrak{M}E$ ergibt.

Hilfssatz 10: *Der Untermodul $\mathfrak{N}$ des vorhergehenden Hilfssatzes ist direkte Summe von einfachen Ω-Untermoduln von $\mathfrak{M}$.* Wir nehmen in $\mathfrak{N}$ einen Minimaluntermodul $\mathfrak{N}_1 \neq (0)$. Es existiert Idempotent E_1 für welches $\mathfrak{M}E_1 = \mathfrak{N}_1$, was zu $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}(1 - E_1)$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}E_1 + {}+ \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}(1 - E_1)$ führt. Wenn dieser Durchschnitt kein einfacher Ω-Modul ist, suchen wir einen seinen Untermoduln $\mathfrak{N}_2$, der minimal sein muss. Falls E_2 ein Idempotent für welches $\mathfrak{M}E_2 = \mathfrak{N}_2$ ist, erhält man $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E_2 +$

$+\mathfrak{M}(1-E_2)$, $E_2^2=E_2$, $E_2E_1=0$, $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}(1-E_1)=\mathfrak{M}E_2+$ $+\mathfrak{M}(1-E_2)\cap\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}(1-E_1)$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}E_1+\mathfrak{M}E_2+\mathfrak{N}\cap$ $\cap\mathfrak{M}(1-E_1)\cap\mathfrak{M}(1-E_2)$. In diesem letzten Durchschnitt nimmt man einen Minimaluntermodul $\mathfrak{N}_3=\mathfrak{M}E_3$, falls er es nicht ist. Danach erhält man $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}E_3+\mathfrak{M}(1-E_3)$, $E_3^2=E_3$, $E_3E_1=E_3E_2=0$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}E_1+\mathfrak{M}E_2+\mathfrak{M}E_3+$ $+\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}(1-E_1)\cap\mathfrak{M}(1-E_2)\cap\mathfrak{M}(1-E_3)$. Man setzt die Überlegung fort. Wir kommen zu der angegebenen Zerlegung, da $\mathfrak{N}$ die Minimal bedingung erfüllt.

Hilfssatz 11: *Unter den Bedingungen von Hilfssatz 9, ist $\mathfrak{N}$ eine durch Idempotent definiert homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$.* In der Tat, ist die fortlaufende Konstruktion von $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \cdots$, die $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}''\subset\cdots$ erfüllt, nötigerweise beschränkt, da $\mathfrak{N}$ vollkommen reduzibel ist und so eine Kompositionsreihe von endlicher Länge besitzt.

Hilfssatz 12: *Unter denselben Annahmen setzen wir weiter voraus, dass $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}E$ ein $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermodul ist: dann ist E Einselement von $\overline{\Omega}E$.* Tatsächlich ist $\overline{\Omega}E$ ein zweiseitiges Ideal. Wir schreiben $\overline{\Omega}=E\overline{\Omega}+(1-E)\overline{\Omega}$, und da $E\overline{\Omega}\subseteq\overline{\Omega}E$ ist, dann kann man $\overline{\Omega}E=E\overline{\Omega}+\overline{\Omega}E\cap$ $\cap(1-E)\overline{\Omega}$ setzen. Wenn wir diesen letzten Durchschnitt mit $\mathfrak{s}$ bzeichnen, der ein Rechtsideal von $\overline{\Omega}$ in $\overline{\Omega}E$ enthalten ist, erhält man $\mathfrak{s}^2=\mathfrak{s}E\cdot\mathfrak{s}=\mathfrak{s}\cdot E\mathfrak{s}=(0)$. Die Bedingung 1) von Hilfssatz 9 ergibt $\mathfrak{s}=(0)$, $\overline{\Omega}E=E\overline{\Omega}$, was der Hilfssatz beweist.

Hiermit stellen wir die im Vorhergehenden angeführte Behauptung auf:

Satz 5: *Es sei $\mathfrak{T}$ eine spezielle unterdirekte Summe der Moduln $\mathfrak{m}_\mu$ unter folgenden Bedingungen: 1·) die $\mathfrak{m}_\mu$ sind einfache $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermoduln; 2·) jeder von ihnen ist homomorphe Abbildung von $\mathfrak{T}$ der Form $\mathfrak{m}_\mu=\mathfrak{T}\overline{E}_\mu$, wobei $\overline{E}_\mu\in\overline{\Omega}$ Einselement von $\overline{\Omega}\overline{E}_\mu$ ist; 3·) die $\mathfrak{m}_\mu$ sind direkte*

Summen von einfachen Ω-Moduln und die entsprechenden Kontraktionsideale besitzen kein Nilideal: dann und nur dann ist $\mathfrak{M}$, als Ω-Modul angenommen, zu $\mathfrak{T}$ isomorph, wenn jedes $\mathfrak{N}\neq(0)$, als $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermodul von $\mathfrak{M}$ angenommen, einen einfachen $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermoduln unter folgenden Bedingungen enthält: a) *wenn $\mathfrak{P}$ der angeführte Untermodul ist, hat sein Kontraktionsideal kein Nilideal;* b) *jeder in $\mathfrak{P}$ enthaltene Untermodul besitzt ein Kontraktionsideal $\neq(0)$;* c) *es gilt in $\mathfrak{P}$ die Minimalbedingung für die Ω-Untermoduln.* Die Bedingung ist *notwendig:* Vom Isomorphismus $\mathfrak{M}=\mathfrak{T}$ ausgehend, sei $0\neq\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{N}$ $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermodul ist. Da die Bedingungen vom Satze 4 erfüllt sind, gibt es in $\mathfrak{N}$ einen einfachen $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermodul, der durch Idempotent, welches Einselement des entsprechenden Kontraktionsideal ist, definiert wird. Wir können sogar besagen, dass dieser einfache Untermodul $\mathfrak{P}$ zu einem gewissen $\mathfrak{m}_\lambda$ isomorph ist, wodurch, nach 3), das Kontraktionsideal in $\mathfrak{P}$ kein Nilideal besitzt und in $\mathfrak{P}$ die Minimalbedingung für Ω-Untermoduln gilt. Als letztes besteht auch b), da jeder in $\mathfrak{P}$ enthaltene Ω-Untermodul direkte Summe von Untermoduln ist, von denen jeder eine durch Idempotent definierte Abbildung von $\mathfrak{M}$ ist.

Die Bedingung ist *hinreichend:* Wenn $\mathfrak{M}$ gegeben ist, betrachten wir die Menge $\{\mathfrak{M}_\nu\}$ seiner einfachen $(\Omega,\overline{\Omega})$-Untermoduln, die die Bedingungen a), b), c) des obigen Wortlautes erfüllen. Die Hilfssätze 9-12 sind anwendbar, sodass jedes $\mathfrak{M}_\nu$ nicht nur die Bedingung 1) erfüllt, sondern auch durch die Hilfssätze 11 und 12 die Form $\mathfrak{M}_\nu=\mathfrak{M}E_\nu$ hat, wobei E_ν das Einselement von $\overline{\Omega}E_\nu$ ist, sodass die Bedingung 2) ebenfalls gilt. Was die Bedingung 3) betrifft, genügt es Hilfssatz 10 und die Annahme a) in Betrachtung zu ziehen, um daraus ihre Gültigkeit zu schliessen. Der Satz wird somit bewiesen, da, nach Satz 4, $\mathfrak{M}$ eine spezielle unterdirekte Summe der $\mathfrak{M}_\nu$ ist.

5) **Diskrete direkte Summen** — Angesichts der Definition der direkten diskreten Summe, ist folgende Behauptung evident:

SATZ 6: *Dann und nur dann ist* $\mathfrak{M}$, *als ein* Ω-*Modul, zu einer direkten diskreten Summe der Moduln* $\mathfrak{m}_\mu$ Ω-*isomorph, wenn in* $\mathfrak{M}$ *folgende Eigenschaften gelten:* 1·) *jedem* $\mathfrak{m}_\mu$ *entspricht ein Untermodul* $\mathfrak{M}_\mu$, *zu jenem* Ω-*isomorph und in* $\mathfrak{M}$ *enthalten;* 2·) *die Untermoduln* $\mathfrak{M}_\mu$ *erzeugen* $\mathfrak{M}$; 3·) *es ist* $\mathfrak{M}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\lambda = (0)$, *wobei* $\mathfrak{N}_\lambda$ *der durch die* $\mathfrak{M}_\mu$, *ausser* $\mathfrak{M}_\lambda$, *erzeugte* Ω-*Untermodul ist.*

Neues Kriterium einer direkten diskreten Summe besteht darin:

SATZ 7: $\mathfrak{T}$ *sei eine direkte diskrete Summe von Moduln* $\mathfrak{m}_\mu$ *unter folgenden Bedingungen:* 1·) *die* $\mathfrak{m}_\mu$ *sind einfache* $(\Omega, \overline{\Omega})$-*Moduln;* 2·) *jeder von ihnen ist homomorphe Abbildung von* $\mathfrak{T}$ *der Form* $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{T}\overline{E}_\mu$, *wobei* $\overline{E}_\mu \in \overline{\Omega}$ *Einselement von* $\overline{\Omega}\,\overline{E}_\mu$ *ist; dann und nur dann ist* $\mathfrak{M}$, *als* Ω-*Modul angenommen, zu* $\mathfrak{T}$ *isomorph, wenn* $\mathfrak{M}$ *von seinem einfachen* $(\Omega, \overline{\Omega})$-*Moduln erzeugt wird, von denen jeder homomorphe Abbildung von* $\mathfrak{M}$ *ist, die, durch Idempotent, das Einselement des entsprechenden Kontraktionsideal ist, definiert wird.* Die Bedingung ist *notwendig:* Dies ist eine triviale Behauptung.

Die Bedingung ist *hinreichend:* Wenn $\mathfrak{M}$ von seinen einfachen $(\Omega, \overline{\Omega})$-Moduln $\{\mathfrak{M}_\nu\}$ erzeugt wird, von welchen jeder eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ der Form $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M}E_\nu$ ist, wobei E_ν das Einselement von $\overline{\Omega}E_\nu$ ist, hat man $\mathfrak{M}_\mu \cap \mathfrak{M}_\nu = (0)$, $(\mu \neq \nu)$, so wie auch $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{N}_\mu$, wobei $\mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{M}(1 - E_\mu)$ auch $(\Omega, \overline{\Omega})$-Modul ist, [Hilfssatz 5]. Wir nehmen $m_\mu \in \mathfrak{M}_\mu$. Da wir $m_\mu E_\nu \in \mathfrak{M}_\mu \cap \mathfrak{M}_\nu$ haben, schliessen wir auf $m_\mu E_\nu = 0$, falls $\mu \neq \nu$. Gemäss Hilfssatz 4 ist $\mathfrak{M}_\mu \subseteq \mathfrak{N}_\nu$, auch bei $\mu \neq \nu$. Auf dieser Weise sei $m \in \Pi\, \mathfrak{N}_\mu$;

wenn man $m = m_\alpha + m_\beta + \cdots + m_\lambda$ setzt, ersieht man, dass man $mE_\alpha = m_\alpha \in \Pi\, \mathfrak{N}_\mu \subseteq \mathfrak{N}_\alpha$ hat. Da ebenfalls $m_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, ist $mE_\alpha = m_\alpha = 0$. Dasselbe gilt für $m_\beta, \cdots, m_\lambda$, wodurch $m = 0$, $\Pi\, \mathfrak{N}_\mu = (0)$ ist. Angesichts des Satzes 3 ist $\mathfrak{M}$ zu einer unterdirekten speziellen Summe der $\mathfrak{M}_\mu$ isomorph. Das System $\{m_\nu\}$ der dem $m \in \mathfrak{M}$ entsprechenden Element bestimmt man durch die Zerlegungen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\alpha + \mathfrak{N}_\alpha$, indem man $m = m_\alpha + n_\alpha$ schreibet und $m \to m_\alpha$ setzt. Auf diese Weise sieht man, dass $m \to m_\rho = 0$ ist, wenn $\rho \neq \alpha, \beta, \cdots, \lambda$ und wenn man $m = m_\alpha + m_\beta + \cdots + m_\lambda$ annimmt. Die spezielle Summe ist direkte diskrete Summe, wie der Satz behauptet.

Wie bisher sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Elementen $\alpha, \beta, \cdots \cdots, \lambda, \mu, \nu, \cdots$ von denen man jedem einen Modul entsprechen lässt: $\mu \to \mathfrak{m}_\mu$. Wir nehmen an, dass das Bereich Ω der den $\mathfrak{m}_\mu$ gemeinsamen Operatoren ein Ring $\mathfrak{R}$ ist, der nicht in den verschiedenen Endomorphismenringen eingebettet zu sein braucht, der jedoch in diesen Ringen ringhomomorphe Abbildungen besitzt, [I, S. 231 und folgende]. Man gibt einen dem Satz 6 ähnlichen Wortlaut, wenn Ω durch den Ring $\mathfrak{R}$ ersetzt.

Im Folgenden wenden wir uns neben der direkten diskreten Summe $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\nu$ dem Ring $\mathfrak{J}_{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}$ seiner $\mathfrak{R}$-Endomorphismen zu.

Wir ziehen aus $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Menge $\{A_\sigma\}$ heraus. Die betreffende Menge heisst *summierbar,* [9], wenn man für jedes $x \in \mathfrak{M}$ die Beziehung $xA_\sigma = 0$ hat, ausser für eine endliche Anzahl von $A_\sigma A_\sigma$.

Wir gehen dann von der oben erwähnten diskreten Summe aus. Bei gegebenem $x \in \mathfrak{M}$ schreiben wir $x = m_\lambda + + \cdots + m_\rho$, wobei $m_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$, usw. Jedes x zerfällt in eine endliche Zahl von Summanden. Die Abbildung $x \to m_\lambda$ ist ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus $E_\lambda = E_{\lambda\lambda} \in \overline{\mathfrak{R}}$. Jeder Endomorphismus E_μ ist Idempotent und die Produkte $E_\mu E_\nu$, $(\mu \neq \nu)$, sind null. Der identische Endomorphismus $1 \in \bar{\mathfrak{R}}$ erlaubt folgende Zerlegung: $1 = \Sigma E_\varrho$. In der Tat ist die Menge $\{E_\sigma\}$ summierbar. Die Summe ΣE_σ hat einen Sinn; sie definiert den Endomorphismus $1: x \to x \Sigma E_\sigma = x$. Im allgemeinen, wenn die Menge $\{A_\sigma\}$ summierbar ist, dann existiert ΣA_σ und die distributiven Gleichheiten $(\Sigma A_\sigma) B = \Sigma A_\sigma B$, $B(\Sigma A_\sigma) = \Sigma B A_\sigma$ sind gültig. Es besteht folgender

Satz 8: *Der Ring $\bar{\mathfrak{R}}$ der $\mathfrak{R}$-Endomorphismen der direkten diskreten Summe $\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{m}_\mu$ der Moduln $\mathfrak{m}_\mu$ (alle als $\mathfrak{R}$-Modul angenommen), falls $1 = \Sigma E_\varrho$, ist direkte komplete Summe der Rechtsideale $E_\varrho \bar{\mathfrak{R}}$ (oder der Linksideale $\bar{\mathfrak{R}} E_\varrho$).* Jedes Element $A \in \bar{\mathfrak{R}}$ erscheint als Summe einer summierbaren Menge: $A = \Sigma E_\varrho A$. Wenn man andererseits $A = \sum\limits_\varrho E_\varrho A_\varrho$, wobei $A_\varrho \in \bar{\mathfrak{R}}$, setzt, sieht man, dass $E_\lambda A = E_\lambda A_\lambda$ für beliebiges λ ist, sodass A eine bestimmte Darstellung der Form $A = \Sigma E_\varrho A_\varrho$ besitzt.

Bemerkungen: Im Wortlaute des Satzes ist die betrachtete Summe von Idealen ausschliesslich eine komplete Summe von Moduln. Beim Niederschreiben der Gleichheiten $1 = \Sigma E_\varrho$, $A = \Sigma E_\varrho A$ empfiehlt es sich ausserdem zu beobachten, dass die $\Sigma\, \Sigma$, die keine endliche Zahl von Summanden besitzen, möglicherweise nicht ganz korrekt angewandt sind, wenn wir sie mit den $\Sigma\, \Sigma$ der direkten diskreten Summen $\Sigma \mathfrak{m}_\mu$ vergleichen.

Folgende Sätze sind gültig (man findet die entsprechenden Beweise bei [24]):

Satz 9: *Der Ring $\bar{\mathfrak{R}}$ des Satzes 8 ist eine direkte komplete Summe der Ringe $\bar{\mathfrak{R}}_{\alpha\beta} = E_\alpha \bar{\mathfrak{R}} E_\beta$. Im besonderen ist $E_\varrho \bar{\mathfrak{R}}$ direkte komplete Summe der Ringe $E_\varrho \bar{\mathfrak{R}} E_\sigma$, ($\sigma$ bebiebig).* Im Sinn des Satzes schreiben wir, für jedes $S \in \bar{\mathfrak{R}}$,

$$S = \sum_{\varrho, \sigma \in M} S_{\varrho\sigma} = \sum_{\varrho, \sigma} E_\varrho S E_\sigma, \qquad (S_{\varrho\sigma} = E_\varrho S E_\sigma).$$

Satz 10: *$\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{m}_\mu$ sei die direkte diskrete Summe des Satzes 8; der Ring $\bar{\mathfrak{R}}_{\alpha\alpha} = E_\alpha \bar{\mathfrak{R}} E_\alpha$ ist zu dem Ring der $\mathfrak{R}$-Endomorphismen des Untermoduls $\mathfrak{m}_\alpha$ isomorph.*

Satz 11: *$\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{m}_\mu$ sei die direkte diskrete Summe der $\mathfrak{R}$-Moduln $\mathfrak{m}_\mu$, die zu einem festen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{R}$-isomorph sind; dann ist der Ring $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{R}}$ der $\mathfrak{R}$-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ zu dem Ringe aller (unendlichen) M-dimensionalen Matrizen isomorph, welche von summierbaren Linien von $\mathfrak{R}$-Endomorphismen gebildet werden. Diese Endomorphismen gehören zu dem Kommutator $\bar{\mathfrak{R}}'$ von $\mathfrak{R}$ im Ringe der Endomorphismen von $\mathfrak{m}$,* [9].

Der Beweis beruht auf folgenden Hilfssätzen:

Hilfssatz 13: *Die Summe und das Produkt zweier Matrizen von summierbaren Linien mit Elementen von $\bar{\mathfrak{R}}'$ sind Matrizes summierbarer Linien mit Elementen von $\bar{\mathfrak{R}}'$.*

Hilfssatz 14: *Unter den Bedingungen von Satz 11 besitzt der Ring $\bar{\mathfrak{R}}$ ein System von Matrizeneinheiten $E_{\lambda\mu}$:* $E_{\lambda\varrho} E_{\varrho\mu} = E_{\lambda\mu}$; $E_{\lambda\varrho} E_{\sigma\mu} = 0$, falls $\varrho \neq \sigma$.

Hilfssatz 15: *Indem wir, wie im allgemeinen, unter den Bedingungen von Satz 11, $S = \Sigma S_{\mu\nu}$ schreiben, erhalten wir $S_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} S'_{\nu\nu}$ mit $S'_{\mu\nu} = \sum\limits_{\varkappa \in M} E_{\varkappa\mu} S E_{\nu\varkappa}$.*

Hilfssatz 16: *Die Menge der Elemente $S'_{\mu\nu}$ bildet einen von Indices μ und ν unabhängigen Ring, welcher zu $\bar{\mathfrak{R}}'$ oder $E_\alpha \bar{\mathfrak{R}} E_\alpha$ isomorph ist (α beliebig).*

Satz 12: *Der Ring d.r $\mathfrak{R}$-Endomorphismen von Modul $\mathfrak{M}$, der im Satze 11 auftritt ist zu dem Ring der $\mathfrak{R}'$-Endomorphismen von Modul $\mathfrak{m}$ isomorph, welcher ebenfalls im gleichen Satz auftritt* [9].

Satz 13: *In der Summe $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$ von isomorphen Moduln, die im Satze 11 auftretten, gibt es einen eineindeutigen Zusammenhang zwischen den $\mathfrak{R}$-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ und den $\mathfrak{R}'$-Untermoduln von $\mathfrak{m}$.*

6) **Unterdirekte irreduzible Moduln** — Nach Birkhoff sagen wir ein Modul $\mathfrak{M}$ ist unterdirekt irreduzibel, wenn bei eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{M}$ als unterdirekte Summe von Moduln $\mathfrak{m}_\mu$ einige Homomorphismen $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{m}_\mu$ Isomorphismen werden. Dann werden beim Niederschreiben von $\mathfrak{m}_\mu \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\mu$ gewisse $\mathfrak{M}_\mu$ (mindestens einer) null; und man stellt wie im allgemeinen fest, dass $\Pi\, \mathfrak{M}_\mu = (0)$ ist. Jedoch kann der Durchschnitt der nicht null Untermoduln von $\mathfrak{M}$ nicht null sein, da man sonst eine Darstellung von $\mathfrak{M}$ als unterdirekte Summe gewänne, ohne dass irgend ein $\mathfrak{M}_\mu$ null wäre. Es gilt:

Satz 14: *Dann und nur dann ist ein Modul $\mathfrak{M} \neq (0)$ unterdirekt irreduzibel, wenn der Durchschnitt seiner nicht null Untermoduln $\neq (0)$ ist.*

Es ist auch bekannt:

Satz 15: *Jeder Modul $\mathfrak{M}$ ist zu einer unterdirekten Summe von unterdirekten irreduziblen Moduln isomorph* (Birkhoff).

Wenn $\mathfrak{M}$ ein Ω-Modul mit endlicher Charakteristik q ist, wissen wir, dass $\mathfrak{M}$ die direkte Summe der Ω-Untermoduln ist, deren Charakteristiken die Potenzen von Primzahlen sind, welche bei der Zerlegung von q auftreten. Nimmt man $\mathfrak{M}$ als unterdirekt irreduzibel an, so hat man:

Satz 16: *Ein unterdirekt irreduzibler Ω-Modul hat entweder die Charakteristik gleich Null oder gleich der Potenz einer Primzahl.*

Andere Eigenschaften der unterdirekt irreduziblen Moduln werden durch folgende Behauptungen ausgedrückt. Betrachten wir den Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ von $\mathfrak{M}$ und bezeichnen wir das betreffende Kontraktionsideal mit $\mathfrak{c}$. Die Annahme $\mathfrak{c}^2 \neq (0)$ hat die Regularität von $\mathfrak{c}$ und das Vorhandensein eines Idempotenten $E \in \bar{\Omega}$ für welches $\mathfrak{M}E = \mathfrak{L}$ zur Folge. Da nicht $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E + \mathfrak{M}(1 - E)$ sein kann, ausser im Fall $1 - E = 0$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E = \mathfrak{L}$, schliesst man daraus $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{M}$ einfach ist, ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{c}^2 \neq (0)$. Somit gilt:

Satz 17: *Es ist notwendig und hinreichend dafür, dass ein unterdirekt irreduzibler Ω-Modul nicht einfach ist, dass das Kontraktionsideal $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{M}$ in seinem Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ nilpotent ist (mit Exponenten höchstens $= 2$).*

Nehmen wir sodann $\mathfrak{c}^2 = (0)$ mit $\mathfrak{c} \neq (0)$ an. Wenn $0 \neq A \in \bar{\Omega}$ ein Rechtsnullteiler ist, erhält man z. B. $BA = 0$ mit $B \neq 0$. Es ist $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}B$, $\mathfrak{L}A = (0)$. Wenn A kein Rechtsnullteiler ist kann man nicht $\mathfrak{L}A = (0)$ haben, da sonst $\mathfrak{M}\mathfrak{c} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{c}A = \mathfrak{L}A = (0)$, $\mathfrak{c}A = (0)$ wäre, entgegen der Annahme über A. Auf diese Weise gilt der

Satz 18: *Das Vernichtungsideal von $\mathfrak{L}$ setzt sich aus den Rechtsnullteilern von Ring $\bar{\Omega}$ zusammen, angenommen $\mathfrak{c}^2 = (0)$, $\mathfrak{c} \neq (0)$.*

Wir können noch folgende Bemerkungen machen: 1·) wenn $\mathfrak{r} \neq (0)$ existiert stets $A \in \overline{\Omega}$ für welches $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}A$; 2·) wenn $\mathfrak{r} = (0)$ hat man, für jedes $A \in \overline{\Omega}$, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}A$; 3·) wenn $\mathfrak{r} \neq (0)$, dann ist das Vernichtungsideal $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{L}$ dasselbe wie das Rechtsannihilatorideal von $\mathfrak{r}$ in $\overline{\Omega}$; 4·) der Ω-Modul, Annihilator von $\mathfrak{D}$, besitzt ein Kontraktionsideal gleich dem Linksideal, das $\mathfrak{D}$ links annihiliert.

Wir könnten für die Theorie der unterdirekt irreduziblen Moduln die von N. H. McCoy [18] gemachte Überlegungen übertragen, die sich auf kommutative unterdirekt irreduzible Ring beziehen. Unter der Annahme $\mathfrak{M}$ sei ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul, dessen Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ $\mathfrak{S}$-trivial ist, d. h. $\mathfrak{L}$ wird von irgend einem Element des kommutativen Ringes $\mathfrak{S}$ annuliert, es gelten folgende Sätze:

Satz 19: *Es sei $\mathfrak{M}$ ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul und wir nehmen $\mathfrak{S}$ kommutativ solcher Art, dass der Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ von $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{S}$-trivial ist; dann ist $\mathfrak{L}$ endlich und hat eine Charakteristik, die einer Primzahl gleich ist.* Wir setzen, für ein bestimmtes $x_0 \in \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} = \{mx_0\}$, m = ganze Zahl.

Satz 20: *Es sei $\mathfrak{M}$ ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul und wir nehmen $\mathfrak{S}$ kommutativ solcher Art, dass der Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ von $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{S}$-trivial ist; dann nehmen wir ferner an, dass $0 \neq x \in \mathfrak{M}$ solcher Art ist, dass $x\mathfrak{S} = (0)$ gilt; es gibt eine feste ganze Primzahl (die Charakteristik von $\mathfrak{L} \neq (0)$ und eine ganze Zahl ϱ, eine Funktion von x, die die Gleichheit $p^{\varrho}x = 0$ erfüllen.*

Satz 21: *Wenn $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{S}$-Modul unter den Bedingungen der Sätze 19 und 20 ist; dann und nur dann ist $y \in \mathfrak{L}$, wenn die beiden Beziehungen $y\mathfrak{S} = (0)$, $py = 0$ bestehen.*

Satz 22: *Wenn $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{S}$-Modul unter den Bedingungen der Sätze 19 und 20 ist; dann existiert für jedes x, für welches $0 \neq x \in \mathfrak{M}$, $x\mathfrak{S} \neq (0)$ ist, ein $A \in \mathfrak{S}$, welches die Beziehung $xA = x_0$ erfüllt.*

Die in den Sätzen 19 bis 22 ausgedrückt Eigenschaften sind kennzeichnend wie folgender Wortlaut zeigt:

Satz 23: *Es sei $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{S}$-Modul und wir nehmen $\mathfrak{S}$ kommutativ an; es ist hinreichend dafür, dass $\mathfrak{M}$ unterdirekt irreduzibel ist, dass $\mathfrak{M}$ folgende Eigenschaften besitzt: 1·) es besteht ein Untermodul der Form $\mathfrak{L} = \{mx_0\} \neq 0$ für welches $\mathfrak{L}\mathfrak{S} = (0)$; 2·) für jedes $0 \neq x \in \mathfrak{M}$, für welches $x\mathfrak{S} = (0)$, bestehen eine feste Primzahl p und eine ganze Zahl ϱ die die Gleichung $p^{\varrho}x = 0$ erfüllen; 3·) jedesmal wenn $x\mathfrak{S} = (0)$, $px = 0$ und nur dann ist $x \in \mathfrak{L}$; 4·) nimmt man $x\mathfrak{S} \neq (0)$ an, dann besteht $A \in \mathfrak{S}$ für welches $xA = x_0$.* Den Beweis liefert man, indem man zeigt, dass $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$ gilt, falls $\mathfrak{N} \neq (0)$ ein $\mathfrak{S}$-Untermodul ist. Wir nehmen $0 \neq x \in \mathfrak{N}$. Man hat $\{mx + x\mathfrak{S}\} \subseteq \mathfrak{N}$. Wenn $x\mathfrak{S} \neq (0)$ ist, besteht nach 4) $A \in \mathfrak{S}$ für welches $xA = x_0$. Es ist dann $\mathfrak{L} = \{mx_0\} \subseteq \{mx + x\mathfrak{S}\} \subseteq \mathfrak{N}$. Wenn $x\mathfrak{S} = (0)$ ist, hat man nach 2) $p^{\varrho}x = 0$ und man kann $y = p^{\varrho-1}x \neq 0$ annehmen. In diesem Fall ist $y\mathfrak{S} = (0)$, $py = 0$, wodurch nach 3) $y \in \mathfrak{L}$. Da man nach 3) und 1) $px_0 = 0$ hat, kann man $\mathfrak{L} = \{0, x_0, 2x_0, \cdots, (p-1)x_0\}$, $y = kx_0$, mit $0 < k \leq p-1$, schreiben. Danach entnimmt man aus $k\sigma + p\varrho = 1$ (σ, ϱ ganze bestimmte Zahlen) $k\sigma x_0 = x_0$, oder $\sigma y = x_0$, was noch $\{mx_0\} \subseteq \mathfrak{N}$ hervorbringt. Der Beweis ist erbracht.

Nach dem wir den Fall untersucht haben in dem der Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ $\mathfrak{S}$-trivial ist gehen wir zu der Hypothese über, dass in $\mathfrak{S}$ gewisse Elemente existieren, die $\mathfrak{L}$ nicht annulieren. Hiermit sei ein erster Wortlaut gegeben:

Satz 24: *Wenn $\mathfrak{S}$ kommutativ und $\mathfrak{M}$ ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul ist, nehmen wir an, dass der Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ von $\mathfrak{M}$ einen Annihilator $\Delta = (0)$ besitzt, dann ist $\mathfrak{S}$ ein Körper und $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{S}$-einfach.* Wir schreiben $\mathfrak{L} = \{mx_0 + x_0\mathfrak{S}\}$ wobei $0 \neq x_0 \in \mathfrak{L}$ und m die ganzen Zahlen durchlaüft. Es ist einleuchtend, dass der Annihilator von x_0 $\Delta = 0$ ist und dass $\mathfrak{S}$ ein irreduzibler Ring ist, der sich als Endomorphismenring von $\mathfrak{L}$ verwirklicht. Ein in [26, § 2] bewiesener Satz behauptet, dass $\mathfrak{S}$ Körper ist. Man erkennt diese Tatsache direkt auf folgende Weise. Der Kommutator von $\mathfrak{S}$ in Endomorphismenring von $\mathfrak{L}$ ist ein Divisionsring $\bar{\mathfrak{S}} \supseteq \mathfrak{S}$. Wenn wir $0 \neq C, A \in \mathfrak{S}$ nehmen, dann ist die Gleichung $CX = A$ in $\mathfrak{S}$ lösbar, denn, da $x_0 C \neq 0, x_0 C\mathfrak{S} = \mathfrak{L}$ ist, existiert $X \in \mathfrak{S}$ für welches $x_0 CX = x_0 A \neq 0$. Hieraus schliesst man wie gewünscht $x_0(CX - A) = 0$, $CX = A$.

Beweisen wir jetzt, dass $\mathfrak{M}$ einfach ist. Wenn $0 \neq x \in \mathfrak{M}$, da $\mathfrak{L} \subseteq \{mx + x\mathfrak{S}\}$ ist, entnimmt man daraus, dass der Annihilator von x Null ist. Es ergibt sich $\mathfrak{L} \subseteq x\mathfrak{S}$ und so existiert $B \in \mathfrak{S}$ für welches $xB = x_0$. Das Element $1 \in \mathfrak{S}$ ist notwendigerweise unitärer Moduloperator, denn aus $x - x \cdot 1 \neq 0$ leiten wir $(x - x \cdot 1)A \neq 0$ ab, wenn $A \neq 0$, was ein Absurdum ist. Deswegen hat man $xBB^{-1} = x = x_0 B^{-1} \in \mathfrak{L}$, und somit $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$. Der Satze ist vollkomen bewiesen.

Hierauf tritt der Fall auf, dass $\mathfrak{L}$ nicht $\mathfrak{S}$-trivial und sein Annihilator $\Delta \neq (0)$ ist. Es gelten folgende Sätze:

Satz 25: *Wenn $\mathfrak{S}$ kommutativ und $\mathfrak{M}$ ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul ist, nehmen wir an, dass der Minimaluntermodul $\mathfrak{L} \neq (0)$ von $\mathfrak{M}$ einen Annihilator $\Delta \neq (0)$ hat aber nicht trivial ist, dann ist $\mathfrak{S}/\Delta$ ein Körper, dessen Einselement ein unitärer Operator von $\mathfrak{L}$ ist.*

Satz 26: *Unter den Bedingungen voriger Satzes sind $\mathfrak{L}$ und Δ reziproke Annihilatoren.*

Satz 27: *Unter den Bedingungen des Satzes 25 leitet man für jedes $x \notin \mathfrak{L}$ das Vorhandensein von $D_1 \in \Delta$ für welches $xD_1 = x_0$ ab.*

Die in Sätzen 25 bis 27 ausgedrückten Eigenschaften sind kennzeichnend wie folgender Worlaut zeigt:

Satz 28: *Es sei $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{S}$-Modul und wir nehmen $\mathfrak{S}$ kommutativ an; es ist hinreichend dafür, dass $\mathfrak{M}$ unterdirekt irreduzibler sei, dass folgende Eigenschaften bestehen: 1.) es existiert ein $\mathfrak{S}$-Untermodul der form $\mathfrak{L} = \{mx_0 + x_0\mathfrak{S}\} \neq (0)$ mit einem Annihilator $\Delta \neq \mathfrak{S}$; 2.) $\mathfrak{S}/\Delta$ ist ein Körper dessen Einselement ein unitärer Operator ist; 3.) $\mathfrak{L}$ und Δ sind reziproke Annihilatoren; 4.) für jedes $x \notin \mathfrak{L}$ existiert $D_1 \in \Delta$ für welches $xD_1 = x_0$.* Angesichts der vier vorhandenen Eigenschaften beweisen wir, dass bei $0 \neq x \in \mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{L} \subseteq (x) = \{mx + x\mathfrak{S}\}$ ist. Wenn $x \notin \mathfrak{L}$ nach 4) hat man $xD_1 = x_0$, $\mathfrak{L} \subseteq x\mathfrak{S} \subseteq (x)$. Wenn $x \in \mathfrak{L}$ nach 3) hat man $x\Delta = (0)$. Wir heben dann zwei Fälle hervor. Es ist einerlei ob $F \notin \Delta$ für welches $xF \neq 0$ existiert oder nicht. Im letzeteren Fall erhielten wir $x\mathfrak{S} = (0)$, $x\mathfrak{S}/\Delta = (0)$ was 2) zuwiderläuft. So muss $xF \neq 0$ für ein gewisses $F \notin \Delta$ sein. Wenn wir $x = x_0 B + nx_0$ schreiben, wobei $B \in \mathfrak{S}$ und n ganze Zahl ist, leiten wir $xF = x_0 BF + nx_0 F \neq 0$ ab. Dann ist $BF + nF \notin \Delta$, was zu einer Gleichheit der Form $(BF + nF + \Delta)(G + \Delta) = \bar{1} \in \mathfrak{S}/\Delta$, und folglich zu $x_0(BF + nF)G = x_0$, oder $xFG = x_0$, führt. Man hat somit $\mathfrak{L} \subseteq (x)$ w. z. b. w.

Bemerkung: In der Annahme $\Delta = (0)$ bei der entsprechenden Ausschliessung der Eigenschaft 4) beweist man nur, dass $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{S}$-irreduzibel ist. Man beweist nicht, dass $\mathfrak{M}$

unterdirekt irreduzibel ist. Wie wir dagegen bei der Theorie der halbeinfachen Moduln [§ 8] sehen werden, ist $\mathfrak{L}$ ein Summand einer direkten Summe gleich $\mathfrak{M}$.

7) **Über den J-Radikal** (1) — In diesem § nimmt man $\mathfrak{H}$ als nicht kommutativen Ring (im allgemeinen) und $\mathfrak{M}$ als $\mathfrak{H}$-Modul an. Wenn wir von Untermoduln von $\mathfrak{M}$ sprechen, handelt es sich um $\mathfrak{H}$-Untermoduln.

Nehmen wir $\mathfrak{H}$ als von seinem J-Radikal verschieden an [$\mathfrak{H}$ ist kein Radikalring]. Es existiert ein Modul $\mathfrak{M} \neq (0)$, der ein Maximaluntermodul $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$ hat. In der Tat genügt es zu beobachten, dass es in $\mathfrak{H}$ ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{J}$ gibt, [5, § 9]. Dann können wir $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}$ nehmen, unter vorheriger Annahme von $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{H}$-Modul.

Bei beliebigen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ nehmen wir einen Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$. Die Menge der Elemente von $\mathfrak{H}$ die $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$ abbilden nennt man *Kontraktor* von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$. Er ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{H}$.

Für jeden Untermodul $\mathfrak{U}$ ist der Differenzmodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ noch $\mathfrak{H}$-Modul. Die Nebenklasse $x + \mathfrak{U}$ wobei $x \in \mathfrak{M}$ wird mit $\bar{x}$ bezeichnet. Wenn $A \in \mathfrak{H}$ ist die Abbildung $\bar{x} \to \bar{x}A$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$. Wenn wir ihn durch $\bar{A}$ darstellen, ist die Menge der Endomorphismen $\bar{A}$ ein Ring $\bar{\mathfrak{H}}$ und man erhält $\mathfrak{H} \sim \bar{\mathfrak{H}} \simeq \mathfrak{H}/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ gerade der Kontraktor von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$ ist.

$\mathfrak{M} \neq (0)$ neunt man *primitiven* $\mathfrak{H}$-Modul falls die folgenden Eigenschaften vorhanden sind: 1.) es existiert ein Untermodul $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$ maximal in $\mathfrak{M}$; 2.) der Kontraktor von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}$ ist das Nullideal.

Man sieht sofort dass unter der Annahme $\mathfrak{M} \neq (0)$ $\mathfrak{H}$-primitiv, dieser Ring irreduzibel ist und sich als

(1) J-Radikal bedeutet Radikal im Sinn von N. Jacobson.

Endomorphismenring von $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ verwirklicht. Wenn umgekehrt $\mathfrak{H} \neq (0)$ ein irreduzibler oder primitiver Ring ist, [5, § 10], dann existiert ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$, für welches der Quotient $(\mathfrak{J} : \mathfrak{H})$ Null ist (1), [5, §§ 8 und 10].

$\mathfrak{H}$ ist unter diesen Bedingungen ein primitiver $\mathfrak{H}$-Modul, denn das zweiseitige Ideal $(\mathfrak{J} : \mathfrak{H})$ der Kontraktor von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{J}$ ist.

Unter der Annahme $\mathfrak{H} = (0)$ ist das Vorhandensein des primitiven $\mathfrak{H}$-Moduls anschaulich. Deswegen folgt:

Satz 29: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{H}$ ein primitiver Ring, wenn ein Modul $\mathfrak{M} \neq (0)$ besteht, welcher als $\mathfrak{H}$-Modul betrachtet $\mathfrak{H}$-primitiv ist.*

Dann ist $\mathfrak{M}$ ein treuer Modul.

Wenn der Begriff des primitiven Ringes den des primitiven Moduls eingibt, dann gibt auch der Begriff des halbeinfachen Ringes (im Sinn von Jacobson) den des *fast halbeinfachen* $\mathfrak{H}$-Moduls ein.

Man nennt $\mathfrak{M} \neq (0)$ einen solchen Modul, wenn die beiden folgenden Eigenschaften bestehen: 1.) es gibt in $\mathfrak{M}$ maximale Untermoduln $\mathfrak{L}_\mu \neq \mathfrak{M}$; 2.) die Kontraktoren $\mathfrak{b}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}_\mu$ genügen der Gleichheit $\Pi \mathfrak{b}_\mu = (0)$.

Wenn $\mathfrak{M} \neq (0)$ fast halbeinfachen $\mathfrak{H}$-Modul ist, dann sind die Moduln $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}_\mu$ $\mathfrak{H}$-einfach. Der Ring $\mathfrak{H}$ induziert Endomorphismen in den Differenzmoduln und man erhält $\mathfrak{H} \sim \bar{\mathfrak{H}} \simeq \mathfrak{H}/\mathfrak{b}_\mu$, $\Pi \mathfrak{b}_\mu = (0)$. Da die $\mathfrak{H}/\mathfrak{b}_\mu$ primitive Ringe sind, geht aus einem Jacobsonschensatze hervor, [5, § 11], dass $\mathfrak{H}$ ein halbeinfacher Ring ist. Im übrigen ist klar, dass $\mathfrak{M}$

(1) Ein Element $A \in \mathfrak{H}$ wird zu dem Quotientenideal gehören, falls $\mathfrak{H}A \subseteq \mathfrak{J}$ ist. Für alle Behauptungen, welche sich mit der Theorie des J-Radikals befassen, kann man ausser [5] unsere Veröffentlichung [23] nachschlagen. Jedesmal wenn wir das Symbol $\mathfrak{R}_{**}$ anwenden, meinen wir damit J-Radikal.

$\mathfrak{S}$-treu ist. Umgekehrt gibt es maximale Rechtsideale $\mathfrak{J}_\mu \neq \mathfrak{S}$, für welche $\Pi(\mathfrak{J}_\mu : \mathfrak{S}) = (0)$, wenn $\mathfrak{S} \neq (0)$ ein halbeinfacher Ring ist. $\mathfrak{S}$ als $\mathfrak{S}$-Modul betrachtet ist fast halbeinfach.

Unter der Annahme $\mathfrak{S} = (0)$ ist das Vorhandensein eines treuen fast halbeinfachen $\mathfrak{S}$-Modul anschaulich. Somit gilt:

Satz 30: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S}$ ein halbeinfacher Ring, wenn ein Modul $\mathfrak{M} \neq (0)$ besteht, welcher als $\mathfrak{S}$-Modul betrachtet fast halbeinfach ist.* Dann ist $\mathfrak{M}$ ein treuer Modul.

Dieses Ergebnis kann man einer neuen Definition des J-Radikals verbinden.

In einem beliebigen Ring $\mathfrak{S}$ nennt man ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{b}$ *primitiv*, falls $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$ irreduzibler Ring ist, [Vgl. 20]. Es gilt folgender

Satz 31: *Wenn $\mathfrak{S}$ kein Radikalring ist, dann ist der J-Radikal von $\mathfrak{S}$ der Durchschnitt seiner zweiseitigen primitiven Ideals $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$.* Zuerst geht man von einem maximalen Rechtsideal $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{S}$ zu einem zweiseitigen Ideal $(\mathfrak{J} : \mathfrak{S})$ über, welches primitiv ist. Aus der Tatsache, dass $\mathfrak{R}_{..} = \Pi(\mathfrak{J} : \mathfrak{S})$ ist, schliessen wir auf $\Pi\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{R}_{..}$. Andererseits geht aus dem Studium der Homomorphismen $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{b}$ hervor, dass der J-Radikal in jenem Durchschnitt enthalten ist, wodurch $\mathfrak{R}_{..} = \Pi\mathfrak{b}$ wird.

Wenn wir beobachten, dass der Durchschnitt $\Pi\mathfrak{b}$ sich mit der Einschliessung der primitiven Ideale gleich $\mathfrak{S}$ nich ändert, und dass, falls $\mathfrak{S}$ als Radikalring angenommen, jedes primitive Ideal gleich dem Ring ist, können wir folgende allgemeine Behauptung aufstellen:

Satz 32: *Der J-Radikal eines Ringes ist der Durchschnitt seiner primitiven Ideale.*

$\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ sein ein primitives Ideal. Dann ist $\mathfrak{S}/\mathfrak{b} = \mathfrak{S}' \neq (0)$ irreduzibel. In $\mathfrak{S}'$ existiert ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{J}'$ für welches $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}'/\mathfrak{J}' \neq (0)$ $\mathfrak{S}'$-irreduzibel und $(\mathfrak{J}' : \mathfrak{S}') = (0)$ ist. Indem man $\mathfrak{S}'$ auf anschauliche Weise als $\mathfrak{S}$-Modul definiert, ist $\mathfrak{J}'$ ein in $\mathfrak{S}'$ maximaler $\mathfrak{S}$-Untermodul. Wir suchen den betreffenden Kontraktor. Wenn für $A \in \mathfrak{S}$ $\mathfrak{S}'A \subseteq \mathfrak{J}'$ ist dann entspricht A im $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$ Homomorphismus ein Element A' für welches $\mathfrak{S}'A \subseteq \mathfrak{J}'$, wodurch $A' \in (\mathfrak{J}' : \mathfrak{S}')$ und man erhält $A' = 0$, $A \in \mathfrak{b}$. So wird $\mathfrak{b}$ als Kontraktor von $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{J}'$ definiert, da man für $A \in \mathfrak{b}$ $\mathfrak{S}'A = \mathfrak{S}'A' = (0) \subseteq \mathfrak{J}'$ hat. Wenn $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ Kontraktor eines Moduls $\mathfrak{M} \neq (0)$ in einem maximalen Untermodul $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$ ist, dann ist umgekehrt der Modul $\mathfrak{M}/\mathfrak{L} \neq (0)$ $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$-irreduzibel. So erhalten wir:

Satz 33: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ primitives zweiseitiges Ideal, wenn $\mathfrak{b}$ Kontraktor eines Moduls $\mathfrak{M} \neq (0)$ in einem maximalen Untermodul $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}$ ist.*

Korollar 3: *Der J-Radikal eines vom Radikal verschiedenen Ringes $\mathfrak{S}$ ist der Durchschnitt von allen zweiseitigen Idealen $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$, welche Kontraktoren von nicht null $\mathfrak{S}$-Moduln in maximalen von denjenigen Moduln verschieden $\mathfrak{S}$-Untermoduln sind.*

Der Unstand, dass die Quotientenringe $\mathfrak{S}/\mathfrak{b} \neq (0)$ unter den Bedingungen des vorhergehenden Korollars primitiv sind hat das Vorhandensein von primitiven $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$-Moduln zur Folge. Wir können besagen:

Satz 34: *Wenn $\mathfrak{S}$ kein Radikalring ist, dann ist sein J-Radikal der Durchschnitt aller zweiseitigen $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}$ für welche primitive $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}$-Moduln $\mathfrak{M} \neq (0)$ bestehen.*

Aus den obigen Betrachtungen entnimmt man folgenden

Satz 35: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S}$ ein Radikalring, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1.) bei einem mit einem maximalen $\mathfrak{S}$-Untermodul vom Modul verschieden gegeben $\mathfrak{S}$-Modul, ist der Kontraktor im Untermodul der Ring selbst; 2.) es existiert kein $\mathfrak{S}$-Modul mit einem maximalen $\mathfrak{S}$-Untermodul von Modul verschieden.*

Zu der Definition eines fast halbeinfachen Modul $\mathfrak{M} \neq (0)$ gehören zweiseitige Ideale $\mathfrak{b}_\mu$ von $\mathfrak{S}$, die nicht alle gleich $\mathfrak{S}$ sein können. Der Ring ist kein Radikalring und da die $\mathfrak{b}_\mu \neq \mathfrak{S}$ primitiv sind, folgt $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}} = (0)$.

Bei beliebigen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ nehmen wir einen Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$. Die Menge der Elemente von $\mathfrak{S}$, die $\mathfrak{U}$ annulieren nennt mann *Annihilator* von $\mathfrak{U}$. Er ist ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{S}$.

Wenn $\mathfrak{M} \neq (0)$ einen minimalen Untermodul $\mathfrak{Q} \neq (0)$ mit null Annihilator hat, ist die Behauptung, dass $\mathfrak{S}$ ein irreduzibler oder primitiver Ring sei eine Trivialität. Wenn $\mathfrak{S}$ irreduzibel ist dann existiert umgekehrt laut Definition ein nicht null minimaler $\mathfrak{S}$-Modul mit einem null Annihilator.

Bezüglich der primitiven Ideal gilt die im folgenden Wortlaut ausgedrückte Kennzeichnung:

Satz 33': *Dann und nur dann ist $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ primitives zweiseitiges Ideal, wenn $\mathfrak{a}$ Annihilator eines einfachen Moduls $\mathfrak{M} \neq (0)$ ist.*

Korollar 3': *Der J-Radikal eines vom Radikal verschieden Ringes $\mathfrak{S}$ ist der Durchschnitt aller zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ die Annihilatoren von einfachen $\mathfrak{S}$-Moduln $\neq (0)$ sind* [19 und 20]. Bei [19] wird eine Definition des Radikals gegeben, die diesen genau als den im Korollar beschriebenen Durchschnitt betrachtet. Die Identifizierung mit dem *J*-Radikal, die wir soeben verzeichneten verdanken wir Jacobson, [Vgl. 20].

Wenn der Ring $\mathfrak{S}$ solcher Art ist, dass jeder einfachen $\mathfrak{S}$-Modul $\neq (0)$ einen Annihilator $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$ (trivialer $\mathfrak{S}$-Modul) hat, ergibt sich aus dem vorhergehenden Korollar, dass $\mathfrak{S}$ ein Radikalring ist. Wenn umgekehrt bei gegebenem $\mathfrak{M} \neq (0)$ $\mathfrak{S}$-einfach, $\mathfrak{S}$ Radikalring angenommen wird, dann dürfen wir nicht $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ als Annihilator von $\mathfrak{M}$ annehmen, denn nach Korollar 3' wäre $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$. So gilt

Satz 35': *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S}$ Radikalring, wenn jeder einfache nicht null $\mathfrak{S}$-Modul ein trivialer $\mathfrak{S}$-Modul ist.*

Es ist klar, dass das Vorhandensein einfacher trivialer $\mathfrak{S}$-Moduln in allen Fällen eine banale Tatsache ist.

Wir nehmen $\mathfrak{S} \neq (0)$ als halbeinfachen Ring an. Wenn wir gemäss Korollar 3 alle zweiseitigen Ideale $\mathfrak{b}_\mu \neq \mathfrak{S}$, welche die verschiedenen Moduln $\mathfrak{M}_\mu$ in maximale Untermoduln $\mathfrak{L}_\mu \neq \mathfrak{M}_\mu$ zusammenziehen betrachten, dann ist die diskrete direkte Summe der Moduln $\mathfrak{M}_\mu \ \mathfrak{L}_\mu$ aus folgendem Grunde ein treuer $\mathfrak{S}$-Modul: falls $0 \neq A \in \mathfrak{S}$ kann man nicht $\mathfrak{M}_\mu A \subseteq \mathfrak{L}_\mu$ für jedes μ erhalten, da sonst $A \in \Pi \mathfrak{b}_\mu$ wäre und deshalb wäre auch $A = 0$, weil $\Pi \mathfrak{b}_\mu = (0)$ ist. Es gibt mithin wenigstens einen Summanden der direkten diskreten Summe, der nicht von A annuliert wird. Gehen wir umgekehrt von der Annahme aus, dass $\mathfrak{S} \neq (0)$ einen treuen $\mathfrak{S}$-Modul des Typus einer direkten diskreten Modulnsumme von $\mathfrak{M}_\mu / \mathfrak{L}_\mu$ zulässt, wie wir soeben angegeben haben, dann ist die diskrete direkte Summe ein nicht treuer trivialer $\mathfrak{S}$-Modul, wenn für alle $\mathfrak{M}_\mu$ $\mathfrak{M}_\mu \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{L}_\mu$ wäre. Es gibt folglich Kontraktoren von gewissen $\mathfrak{M}_\mu$ in den entsprechenden $\mathfrak{L}_\mu$ für welche $\mathfrak{b}_\mu \neq \mathfrak{S}$. Der Durchschnitt dieser $\mathfrak{b}_\mu$ kann nicht $\neq (0)$ sein, da ein Element gleichen Durchschnitts die diskrete Summe annuliert. Somit ist $\mathfrak{S}$ halbeinfach und es gilt

Satz 36: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S} \neq (0)$ halbeinfach, wenn es einen treuen zu einer direkten diskreten Summe von*

Moduln $\mathfrak{M}_\mu/\mathfrak{L}_\mu$ isomorph $\mathfrak{S}$-Modul gibt, wobei die $\mathfrak{L}_\mu \neq \mathfrak{M}_\mu$ maximale Untermoduln in den $\mathfrak{M}_\mu$ sind. Und auch

Satz 36′: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S} \neq (0)$ halbeinfach, wenn ein treuer zu einer direkten diskreten Summe von einfachen $\mathfrak{S}$-Moduln $\neq (0)$ isomorpher Modul existiert,* [19].

8) **Halbeinfache Moduln.** Ein Modul $\mathfrak{M}$ mit Operatorenbereich $\mathfrak{R}$ (welches in diesem § kein Ring zu sein braucht) heisst *halbeinfach*, wenn er von seinen einfachen $\mathfrak{R}$-Untermoduln erzeugt wird. Aus den Endergebnissen des letzten § schliesst man, dass für jeden halbeinfachen Ring $\mathfrak{S} \neq (0)$ ein halbeinfacher $\mathfrak{S}$-Modul besteht. Wir beweisen die Umkehrung, sodass folgender Satz entsteht:

Satz 37: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S} \neq (0)$ ein halbeinfacher Ring, wenn ein halbeinfacher treuer $\mathfrak{S}$-Modul existiert.* Dass diese Bedingung hinreichend ist, geht aus Folgendem hervor:

Hilfssatz 17: *Dann und nur dann sind halbeinfach jene Moduln, welche als direkte diskrete Summe von einfachen Untermoduln $\mathfrak{m}_\mu$ die Form $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$ annehmen können.*

Wir beginnen mit der Annahme, dass $\mathfrak{M}$ halbeinfach ist. Nach dem Axiom von Zermelo nehmen wir die Menge der einfachen Untermoduln $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{M}$ als wohlgeordnet an. Jedem $\mathfrak{Q}_\lambda \subseteq \mathfrak{M}$ lassen wir einen Untermodul $\mathfrak{M}_\lambda$ entsprechen, den wir auf folgende Weise definieren: Wenn $\mathfrak{Q}_\lambda \subseteq \mathfrak{M}_\rho$, wobei ρ λ voraufgeht $(\rho < \lambda)$, dann ist $\mathfrak{M}_\lambda$ die vereinte Menge der $\mathfrak{M}_\mu$ mit $\mu < \lambda$; falls $\mathfrak{Q}_\lambda \not\subseteq \mathfrak{M}_\rho$ bei beliebigem $\rho < \lambda$ dann ist $\mathfrak{M}_\lambda$ die Menge der Elemente der Form $m_\mu + q_\lambda$, wobei $m_\mu \in \mathfrak{M}_\mu (\mu < \lambda)$ und $q_\lambda \in \mathfrak{Q}_\lambda$. Die Methode der transfiniten Induktion führt zu dem Schluss, dass $\mathfrak{M}$ eine direkte diskrete Summe der Form $\mathfrak{M} = \sum_{\nu \in M} \mathfrak{Q}_\nu$

ist, wobei M eine bestimmte Menge ist. Der Teil des Hilfssatzes, der die Umkehrung behandelt ist trivial.

Wir gehen nun zum zweiten Teil von Satz 37 über. Bei gegebenem $\mathfrak{S} \neq (0)$ nehmen wir $\mathfrak{M}$ als halbeinfachen treuen Modul an. Schreiben wir laut Hilfssatz $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$; dann führt Satz 36′ zu dem gewünschten Schlusse.

Hier folgt ein anderer für halbeinfache Moduln charakteristicher Satz.

Satz 38: *Die halbeinfachen Moduln werden durch folgende Eigenschaft bestimmt: jeder Untermodul $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ ist direkter Summand einer Summe der Form $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$.*

$\mathfrak{M}$ sei halbeinfach. Wir setzen $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{M}$ und betrachten die nicht in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Untermoduln $\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{m}_\beta, \cdots$ von $\mathfrak{M}$. Wir nehmen sodann an, dass $\{\alpha, \beta, \cdots\}$ eine wohlgeordnete Menge ist. Wir gehen von $\mathfrak{N} + \mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'_\alpha = \mathfrak{N}_\alpha$ $(\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{N}'_\alpha)$ aus und lassen jedem λ eine direkte Summe $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda$ entsprechen, die folgendermassen definiert wird: wenn $\mathfrak{m}_\lambda \subseteq \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'_\rho = \mathfrak{N}_\rho$, wobei $\rho < \lambda$, dann ist $\mathfrak{N}_\lambda$ die vereinte Menge der $\mathfrak{N}_\rho$; sonst ist $\mathfrak{N}_\lambda$ die Menge der Elemente der Form $n_\rho + m_\lambda$, wobei $n_\rho \in \mathfrak{N}_\rho$ und $m_\lambda \in \mathfrak{m}_\lambda$. Auf diese Weise kommt man zu $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$. Gehen wir nun zur Umkehrung über. Wir wissen erstens dass, wenn $\mathfrak{M}$ gegeben ist, dieses stets isomorph zu einer unterdirekten Summe von unterdirekt irreduziblen Moduln $\mathfrak{m}_\mu$ ist. Wir schliessen sodann aus den Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{m}_\mu$ auf $\mathfrak{m}_\mu \simeq \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\mu$ und aus der im Obigen $\mathfrak{M}$ zugesprochenen Eigenschaft leiten wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{M}'_\mu$ ab. Die untermoduln $\mathfrak{M}'_\mu$ sind unterdirekt irreduzibel und da sie die gleiche Eigenschaft besitzen, sind sie einfach. Betrachten wir nun die direkte Summe $\mathfrak{M}'$ von allen einfachen Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Man wird $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ erhalten. Der Untermodul $\mathfrak{M}''$ ist null, da er keine $\neq (0)$

einfachen Untermoduln enthält und trotzdem die $\mathfrak{M}$ zugesprochene Eigenschaft besitzt.

Bemerkung: Der Gedankengang des ersten Teils des vorstehenden Satzes führt zum Folgenden:

Korollar 4: *Wenn der halbeinfache Modul $\mathfrak{M}$ die Form der direkten diskreten Summe $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$ hat, wobei die $\mathfrak{m}_\mu$ einfach sind, bei einem von $\mathfrak{M}$ gegebenen Untermodul $\mathfrak{U}$, ist der Untermodul $\mathfrak{U}'$ der Summe $\mathfrak{M} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}'$ eine direkte diskrete Summe von gewissen Moduln $\mathfrak{m}_\mu$.*

Von hier ausgehend schreiben wir, wie in dem soeben angeführten Korollar, $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$; danach betrachten wir die einfachen isomorphen Untermoduln, die wir getrennt summieren; man kann

$$\mathfrak{M} = \sum_{\nu' \in M'} \mathfrak{L}_{\nu'}, \qquad M' = \{\alpha', \beta', \cdots, \nu', \cdots\}, \tag{4}$$

erhalten, wobei jedes $\mathfrak{L}_{\nu'}$ direkte diskrete Summe von einfachen isomorphen Untermoduln ist, jedoch nicht isomorph zu einfachen Untermoduln, die bei einem anderen $\mathfrak{L}_{\mu'}$, $(\mu' \neq \nu')$, auftreten. Im Übrigen kann man beobachten, dass bei den $\mathfrak{m}_\mu$ isomorphe Untermoduln von einem *beliebigen* einfachen Untermoduln von $\mathfrak{M}$ auftreten. Denn, falls $\mathfrak{m}$ ein solcher einfacher Untermodul ist, bei gegebenem $m \in \mathfrak{m}$, wenn man $0 \neq m_\alpha \in \mathfrak{m}_\alpha$ als Element in der Darstellung von m annimmt, erhält man notwendigerweise $\mathfrak{m}_\alpha \simeq \mathfrak{m}$. Wenn wir so für zwei Summanden der Summe (4) die Homomorphie $\mathfrak{L}_{\alpha'} \sim \mathfrak{L}'_{\beta'} \subseteq \mathfrak{L}_{\beta'}$ betrachten, umfasst die Annahme $\beta' \neq \alpha'$ auch $\mathfrak{L}'_{\beta'} = (0)$. Somit gilt:

Satz 39: *Der Ring $\bar{\mathfrak{B}}$ der $\mathfrak{B}$-Endomorphismen eines halbeinfachen Moduls $\mathfrak{M}$ ist direkte komplete Summe der Ringe $\bar{\mathfrak{B}}_{\alpha'\alpha'}$, eine Summe die im Ringsinn verstanden werden darf. Das Produkt aus zwei ausgezeichneten verschieden Ringsummanden ist null.*

Bezuglich der Struktur von $\bar{\mathfrak{B}}_{\alpha'\alpha'} = E_{\alpha'} \bar{\mathfrak{B}} E_{\alpha'}$ erlauben Satz 10 und 11 folgenden

Zusatz: *Jeder Ring $\bar{\mathfrak{B}}_{\alpha'\alpha'}$ ist isomorph zu dem von der Gesamtheit der Matrizen (transfiniten) von summierbaren Linien von $\mathfrak{B}$-Endomorphismen, die zu dem Kommutator von $\mathfrak{B}$ im Ringe der $\mathfrak{B}$-Endomorphismen eines einfachen Untermoduls von $\mathfrak{L}_{\alpha'}$ gehören, gebildeten Ring. Dieser Kommutator ist ein Divisionsring.*

Wir können in der Untersuchung des Endomorphismenringes einer direkten diskreten Summe von isomorphen einfachen Untermoduln noch etwas weitergehen, wenn die Menge $\mathfrak{B}$ als leer angenommen wird oder man wenigstens einen kommutativen Ring annimmt. Falls $\mathfrak{B}$ leer ist, dann erlaubt Satz 13 die Erläuterung, dass $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{A}$-irreduzibel ist, wenn $\mathfrak{A}$ der Endomorphismenring von $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$ ist. So ergibt sich:

Satz 40: *Wenn $\mathfrak{B}$ ein kommutativer Ring ist, so ist der Ring $\bar{\mathfrak{B}}$ der $\mathfrak{B}$-Endomorphismen eines Moduls $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$, der direkte diskrete Summe von einfachen isomorphen $\mathfrak{B}$-Moduln ist, primitiv.* Und noch allgemeiner:

Satz 41: *Falls $\mathfrak{B}$ kommutativ ist, dann hat ein halbeinfacher $\mathfrak{B}$-Modul einen Ring $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$-Endomorphismen, der halbeinfach ist (keinen J-Radikal besitzt).* Die Beweisführung verlangt einige Hilfssätze.

Hilfssatz 18: *Dann und nur dann ist $a \in \mathfrak{P}$, wenn $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$, falls $\mathfrak{P}$ ein zweiseitiges Ideal eines Ringes $\mathfrak{S}$ ist, dessen $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ kein nilpotentes Ideal besitzt,* [13, § 4]. Dass die

Bedingung notwendig ist, ist klar. Umgekehrt falls $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$, bezeichnete man mit $\mathfrak{r}$ das von a erzeugte Ideal. Da $\mathfrak{r}^2$ sich aus Elementen der Form $\Sigma(as+i)(as'+ia')$, $(s, s' \in \mathfrak{S};\ i, i'$ ganze Zahlen), zusammensetzt, ersieht man, dass $\mathfrak{r}^2 \subseteq a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$. Entspricht $\mathfrak{r}'$ dem $\mathfrak{r}$ im Homomorphismus $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, dann ist $\mathfrak{r}'^2 = (0)$, $\mathfrak{r}' = (0)$. Hieraus schliesst man $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{P}$, w. z. b. w. Es ist evident, dass man die Bedingung des Satzes durch $\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{P}$ ersetzen kann.

Hilfssatz 19: *Dann und nur dann ist $a \in \mathfrak{R}_{..}$, wenn* $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{..}$, [5]. Setzt man $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{..}$ voraus, dann garantiert der voraufgegangene Hilfssatz $\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{R}_{..}$ und somit $a \in \mathfrak{R}_{..}$

Hilfssatz 20: *Falls $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{S}$ ist, dann ist der J-Radikal von $\mathfrak{a}$:* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_{..}$, [26]. Stellt man den J-Radikal von $\mathfrak{a}$ durch das Symbol $\mathfrak{R}'_{..}$ dar, so nehmen wir $b \in \mathfrak{R}'_{..}$ an. Da man $\mathfrak{a}\mathfrak{S}b\mathfrak{S}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}b\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}'_{..}$ hat, verbürgt der obige Hilfssatz, dass $\mathfrak{S}b\mathfrak{S}$ sich aus zu $\mathfrak{R}'_{..}$ gehörenden elementen zusammensetzt. Unter diesen Bedingungen ist $\mathfrak{S}b\mathfrak{S}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{S}$, das sich aus in $\mathfrak{S}$ fast regulären Elementen zusammenzetzt, wodurch $b \in \mathfrak{R}_{..}$. Somit ist $b \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_{..}$. Umgekehrt betrachten wir das zweiseitige Ideal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_{..}$ von $\mathfrak{S}$. Es ist ein in $\mathfrak{S}$ fast reguläres Ideal, dessen fast Inversen dem eigenen Ideal zugehören, [23, Kap. XIV, § 2]. Jedoch ist es in diesem Fall auch ein fast reguläres zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{a}$, da man $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_{..} \subseteq \mathfrak{R}'_{..}$ hat, was die Beweisführung vervollständingt.

Hilfssatz 21: *Wenn $\mathfrak{S}$ eine direkte komplete Summe von Ringen $\mathfrak{A}_\mu$ ist, (von denen man annimmt dass sie in $\mathfrak{S}$ enthalten sind), dann ist der J-Radikal von $\mathfrak{S}$ direkte komplete Summe der J-Radikale der $\mathfrak{A}_\mu$.* Unter Berücksichtigung des vorigen Hilfssatzes und der Definition

der direkten kompleten Ringsumme ist die Beweisführung offensichtlich.

Wir gehen jetzt zum Satz über. Falls $\mathfrak{M}$ ein halbeinfacher $\mathfrak{R}$-Modul ist, schreiben wir, wie im (4), $\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{L}_{\gamma'}$. Die verschiedenen in Satz 39 erwähnten Ringe $\overline{\mathfrak{R}}_{\alpha'\alpha'}$ sind primitiv und in $\overline{\mathfrak{R}}$ zweiseitige Ideale. Da der J-Radikal eines primitiven Ringes Null ist, zeigt Hilfssatz 21, dass der J-Radikal von $\overline{\mathfrak{R}}$ Null ist. Der Beweis ist somit erbracht.

Wir schalten hier folgende Bemerkungen an. Jacobson, [5], bewies, dass ein Ring $\mathfrak{S}$ dann und nur dann halbeinfach ist, wenn er zu einer unterdirekten Summe primitiver Ringe isomorph ist. Angesichts dieses Ergebnisses ist deshalb Satz 41 eine Folge der Sätze 39 und 40. Der amerikanische Gelehrte bewies ferner, dass ein zweiseitiges Ideal eines halbeinfachen Ringes ein halbeinfacher Ring ist. Diese Behauptung ist unmittelbare Folge von Hilfssatz 20.

Es gibt noch andere Fälle, in denen es wiederum möglich ist im Studium des Aufbaus der Ringe $\mathfrak{R}$, auf die wir uns beziehen, fortzuschreiten, was aus den nächsten Sätzen und dem folgenden § hervorgeht.

Wir nehmen an, dass der in Satz 11 angeführte Modul $\mathfrak{m}$ in Bezug auf $\mathfrak{R}$ endlich ist: $\mathfrak{m} = u_1\mathfrak{R} + \cdots + u_n\mathfrak{R}$. Man kommt zu

Satz 42: *Falls $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement und $\mathfrak{Q}$ anti-isomorph zu $\mathfrak{R}$ ist, und die direkte diskrete Summe $\mathfrak{M} = \Sigma\, \mathfrak{m}_\mu$ von endlichen isomorphen $\mathfrak{R}$-Moduln, für welche das Einselement von $\mathfrak{R}$ unitärer operator ist, gegeben wird, dann ist der Ring $\overline{\mathfrak{R}}$ der Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ isomorph* *zu dem Ring aller Übermatrizen von Dimension M (Menge der ν), die von Elementen, welche Matrizen der Ordnung n (Ordnung der $\mathfrak{m}_\nu$ auf $\mathfrak{K}$) mit Elementen von $\mathfrak{Q}$ gebildet werden, sodass jede Linie der Übermatrix eine endliche Zahl von nicht null Matrizen der Ordnung n besitzt,* [Vgl. 9 und 24, S. 64].

Wir nehmen noch eingeschränkter unter den Bedingungen des voraufgegangenen Satzes an, dass $\mathfrak{m}_\nu = u_\nu \mathfrak{K}$ nur eine Dimension besitzt; dann gilt das

Korollar 5: *Bei gegebener direkter diskreter Summe $\mathfrak{M} = \sum_{\nu \in M} u_\nu \mathfrak{K}$ vermindert sich der Ring $\mathfrak{K}$ auf den Ring von Matrizen von M Dimensionen, die mit Elementen von $\mathfrak{Q}$ gebildet werden, sodass jede Linie eine endliche Anzahl von nicht null Elementen besitzt. Hier ist der Ring der $\overline{\mathfrak{K}}$-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ isomorph zu $\mathfrak{K}$*, [Vgl. 9 und 24, S. 64].

9) **Über unendliche Moduln in bezug auf Divisionsringe.** Falls $\mathfrak{M}$ als Operatorbereich einen Divisionsring $\mathfrak{K} = \mathfrak{D}$ zulässt, dessen Einselement man als unitären Operator annimmt, erlaubt die Anwendung der Ergebnisse des voraufgegangen §, wie schon erwähnt, im Studium von $\mathfrak{K}$ fortzuschreiten. Wir nehmen $v \in \mathfrak{M}$ an. Dann ist $v\mathfrak{D}$ einfacher $\mathfrak{D}$-Modul, sodass wir unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $v \in v\mathfrak{D}$ ist, behaupten dürfen, dass $\mathfrak{M}$ ein halbeinfacher Modul ist. Und zwar gemäss

Satz 43: *Falls ein Modul $\mathfrak{M}$ gegeben ist, und man $\mathfrak{D}$ als einen Divisionsring von Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ annimmt, dann ist $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{D}$-halbeinfach.*

Die in Satz 38 ausgesprochene Bedingung könnte hier unmittelbar bewiesen werden wie es in [4] und [24, S. 62] geschieht. Auf diese Weise ergibt sich angesichts des Satzes 38 die Halbeinfachheit von $\mathfrak{M}$.

Wir schreiben nun $\mathfrak{M} = \sum_{\nu \in M} u_\nu \mathfrak{D}$ als direkte diskrete Summe von einfachen $\mathfrak{D}$-Moduln, die $\mathfrak{D}$-isomorph sind und eine einzige Dimension besitzen. Für den Ring $\overline{\mathfrak{D}}$ der $\mathfrak{D}$-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ gilt folgender

Satz 44: *Wenn man $\mathfrak{M}$ als Modul in bezug auf einen Divisionsring $\mathfrak{D}$ seiner Endomorphismen annimmt und $\mathfrak{M} = \sum u_\nu \mathfrak{D}$ als direkte diskrete Summe schreibt, dann ist der Ring $\overline{\mathfrak{D}}$ der $\mathfrak{D}$-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ isomorph zu dem Ring aller Matrizen von M Dimensionen, die mit Elementen eines Divisionsringes $\mathfrak{D}'$, der anti-isomorph zu $\mathfrak{D}$ ist, gebildet werden, sodass jede Linie eine endliche Anzahl von nicht null Elementen besitzt, und der Ring der $\overline{\mathfrak{D}}$-Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ist isomorph zu $\mathfrak{D}$. Ausserdem ist $\mathfrak{M}$ $\overline{\mathfrak{D}}$-irreduzibel und $\mathfrak{D}$ und $\overline{\mathfrak{D}}$ sind reziproke Kommutatoren.*
Von den drei Behauptungen, aus denen das Angeführte besteht, sind die erste und die zweite unmittelbare Folgen von Korollar 5. Dass $\mathfrak{M}$ $\overline{\mathfrak{D}}$-irreduzibel ist, schliesst man aus Satz 13. Um schliesslich zu sehen, dass $\mathfrak{D}$ und $\overline{\mathfrak{D}}$ reziproke Kommutatoren sind, genügt es angesichts des Satzes 12 (dessen Beweis man bei [24], Seite 61, Satz 50, findet) jeden $\overline{\mathfrak{D}}$-Endomorphismus als ein Element von $\mathfrak{D}$ zu erkennen. Falls Θ ein $\overline{\mathfrak{D}}$-Endomorphismus ist, nehmen wir einen festen Untermodul $u_\alpha \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{M}$. Wir können $u_\alpha \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' u_\alpha$ schreiben, wobei das zu $\mathfrak{D}$ anti-isomorphe $\mathfrak{D}'$ der Divisionsring der $\mathfrak{D}$-Endomorphismen von $u_\alpha \mathfrak{D}$ ist. Der Gedankengang von Satz 12 zeigt, dass Θ in $u_\alpha \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' u_\alpha$ einen $\mathfrak{D}'$-Endomorphismus definiert oder dass es folglich ein Element von $\mathfrak{D}$, welches unabhängig von dem Index α ist, bildet.

Wenn wir den Endomorphismenring eines Moduls $\mathfrak{M}$ durch $E(\mathfrak{M})$ darstellen, können wir sagen, dass $\mathfrak{M}$ *absolut irreduzibel* ist, wenn es $E(\mathfrak{M})$-irreduzibel ist. Wir erhalten:

Korollar 6: *Nimmt man* $1 \in \mathfrak{D}$ *als unitären Moduloperator an, dann ist ein Modul* $\mathfrak{M}$ *in bezug auf einen Divisionsring* $\mathfrak{D}$ *absolut irreduzibel.*

Korollar 7: *Ein absolut irreduzibler Modul* $\mathfrak{M}$ *bestimmt für* $E(\mathfrak{M})$ *ein Zentrum* $\mathfrak{K}$*, der ein Korper ist (kommutativer Divisionsring). Ausserdem wird* $E(\mathfrak{M})$ *auf einen Ring aller Matrizen mit Elementen von* $\mathfrak{K}$ *reduziert, unter der Bedingung, dass die Linien jeder Matrix nur eine endliche Anzahl von nicht null Elementen besitzen.*

Nehmen wir z.B. einen willkürlichen Ring $\mathfrak{S}$. Falls p eine Primzahl ist, dann ist $p\mathfrak{S}$ ein zweiseitiges Ideal und $\mathfrak{S}/p\mathfrak{S}$ ein Quotientenring. Für jedes Element $\bar{a}$ dieses Quotientenringes ist $p\bar{a}=0$. Wenn man durch (p) das von p im Bereich der ganzen Zahlen erzeugte Hauptideal darstellt, dann ist der Quotientenring ein Modul in bezug auf den Körper $\mathfrak{K}_p = \{0+(p),\ 1+(p), \cdots, p-1+(p)\}$ wobei $\bar{1}=1+(p)$ unitärer Operator im Modul ist. Man kann $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}/p\mathfrak{S} = (0)$ haben, was $\mathfrak{S} = p\mathfrak{S}$ bedeutet. Falls jedoch $\mathfrak{S}_p \neq (0)$ ist, hat jedes nicht null Element des Quotientenringes die Ordnung p. Nimmt man ferner $\mathfrak{S}_p$ als Modul an, dann verwirklicht folgender

Satz 45: *Wenn ein beliebiger Ring* $\mathfrak{S}$ *gegeben wird una man* p *als Primzahl annimmt und falls* $\mathfrak{S} \neq p\mathfrak{S}$*, dann ist der Quotientenring* $\mathfrak{S}/p\mathfrak{S}$*, welcher* $\mathfrak{S}$*-Modul ist, absolut irreduzibel und setzt sich aus Elementen, die alle dieselbe Primzahlordnung* p *haben, zusammen.*

Wir setzen die Untersuchungen über das Verhältnis der Moduln in bezug auf Divisionsringe nicht weiter fort. Die von Jacobson durch ebenso einleuchtende wie einfache

Überlegungen hierzu erhaltenen wichtigen Ergebnisse sind Gegenstand von [4], [5] und [8]. Auch unter [3] [9], [15] und [24] befinden sich Betrachtungen die mit den betreffenden Untersuchungen in Zusammenhang stehen.

10) **Untermodul G** — Die in [11] und [16] enthaltenen Gedankengänge von B. Brown und N. H. McCoy können auf die Modulntheorie angewandt werden und zu interessanten Ergebnissen führen, die wir im Einzelnen entwickeln werden. In diesem § ist $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{S}$-Modul und alle Untermoduln sind $\mathfrak{S}$-Untermoduln. Die Elemente von $\mathfrak{M}$ werden durch $x, y, z, \cdots$ und die Element von $\mathfrak{S}$ durch $A, B, \cdots$ bezeichnet.

Wenn $x \in \mathfrak{M}$ gegeben wird, lassen wir ihm den Untermodul $(x\mathfrak{S}, t\mathfrak{S})$ entsprechen, wobei $t \in \mathfrak{M}$ ein bestimmtes von x unabhängizes Element ist. Im allgemeinen gilt $x \notin (x\mathfrak{S}, t\mathfrak{S})$, aber falls x zu dem betreffenden Untermodul gehört, nennt man x *regulär*. Ein aus regulären Elementen gebildeter Untermodul heisst *regulärer Untermodul*. Es gilt:

Sasz 46: *Wenn* $x-y$ *regulär und* $y \in (x\mathfrak{S}, t\mathfrak{S})$ *ist, dann ist* x *regulär.*

Korollar 8: *Die Summe zweier regulärer Untermoduln ist ein regulärer Untermodul.*

Wir nennen *Untermodul* G von $\mathfrak{M}$ und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{G}$ die Menge der Elemente $x \in \mathfrak{M}$ für welche jedes Element $y \in \{mx + x\mathfrak{S}\}$ regulär ist. Vohlverstanden nimmt man m als ganze Zahl an, sodass $\{mx + x\mathfrak{S}\}$ der von x erzeugte Untermodul ist.

Bemerkung: Grundsätzlich könnte es sich ausnahmsweise nicht um einen $\mathfrak{S}$-Untermodul handeln. Jedoch zeigt das folgende Korollar, dass dem nicht so ist.

Korollar 9: *$\mathfrak{G}$ ist ein regulärer Untermodul und der vereinten Menge aller regulären Untermoduln gleich.*

Korollar 10: *Im Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}/\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{M}}$ ist bei regulären $x \in \mathfrak{M}$ sein Entsprechden $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ regulär und umgekehrt.*

Korollar 11: *Im Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \overline{\mathfrak{M}}$ des voraufgegangenen Korollars hat ein regulärer Untermodul einen regulären Untermodul als Entsprechend und umgekehrt.*

Korollar 12: *Der Differenzmodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{G}$ besitzt keinen regulären Untermodul.*

Nimmt man $\mathfrak{T} = \{\alpha, \beta, \cdots\}$ als anti-isomorphen Ring von $\mathfrak{S}$ an und schreibt man $xA = \alpha x$, wobei sich A und α im Anti-isomorphismus entsprechen, so erklärt man einleuchtend denselben Untermodul G.

Satz 47: *Ist ein Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$ gegeben, dann ist der Untermodul G von $\mathfrak{U}$ gleich $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}$.* Obwohl man $t \notin \mathfrak{U}$ haben kann, ist der Satz richtig. In dem besonderen Fall, wenn $t = 0$ ist, können wir einige möglicherweise auftretenden Schwierigkeiten überwinden.

Korollar 13: *Der Untermodul G von $\mathfrak{G}$ ist gleich $\mathfrak{G}$.*

Es ist möglich allgemeinere Betrachtungen anzustellen, aus denen die vorgennanten Eigenschaften hervorgehen. B. Brown und N. H. McCoy, [16], definieren eine andere Form der Regularität auf folgende Weise. Sie stellen sich den Aufbauprozess eines $x \in \mathfrak{M}$ entsprechenden Untermoduls $\mathfrak{U}(x)$ derart vor, dass falls $\mathfrak{M} \sim \overline{\mathfrak{M}}$ ein $\mathfrak{S}$-Homomorphismus bei dem $x \to \bar{x}$ ist, dann ist auch $\mathfrak{U}(x) \to \overline{\mathfrak{U}(x)} = \mathfrak{U}(\bar{x})$. Sie sagen weiter, dass $x \in \mathfrak{M}$ ein Element des Untermoduls F von $\mathfrak{M}$ sei, wenn für jedes $y \in \{mx + x\mathfrak{S}\}$ $y \in \mathfrak{U}(y)$ wäre.

Bemerkung: Prinzipiell brauchte es sich ausnahmsweise nicht um einen $\mathfrak{S}$-Untermodul zu handeln. Im Folgenden sehen wir, dass dem nicht so ist.

Die Eigenschaft $x \in \mathfrak{U}(x)$ charakterisiert x als regulär. Wir stellen für $\mathfrak{F}$ (1) den Untermodul F dar. In $\mathfrak{F}$ sind alle regulären Untermoduln enthalten und alle Element von $\mathfrak{F}$ sind regulär.

Da $\mathfrak{U}(x)$ $\mathfrak{S}$-Untermodul ist, befindet sich $\mathfrak{U}(0)$ in denselben Bedingungen. Dann wird $0 \in \mathfrak{U}(0)$ stets verwirklicht und deshalb ist 0 regulär ebenso der Untermodul (0). Mindestens erhält man $(0) \subseteq \mathfrak{F}$. Es ist leicht zwei Grenzfälle in der Erklärung von $\mathfrak{F}$ anzuführen. Nehmen wir zuerst bei beliebigen x: $\mathfrak{U}(x) = (0)$ an. Dann bedeutet $x \in \mathfrak{F}$: $y = 0$ falls $y \in \{mx + x\mathfrak{S}\}$. Im Besonderen ist $x = 0$, $\mathfrak{F} = (0)$. Im zweiten Falle nehmen wir $\mathfrak{U}(x) = \{mx + x\mathfrak{S}\}$. Hierbei ist der Modul selbst regulär und $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

Von den Sätzen die wir über $\mathfrak{F}$ anführen, gewinnt man die entsprechenden Beweise, wenn man wie für die voraufgegangenen die Überlegungen von B. Brown und N. H. McCoy folgt.

Satz 48: *In einem Modul $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$ kann der Untermodul $\mathfrak{U}(x)$ (x als nicht regulär angenommen) stets in einem Untermodul $\mathfrak{L}$ dergestalt eingebettet werden, dass $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ unterdirekt irreduzibel ist und einen mit $\bar{\mathfrak{F}}$ bezeichneten Untermodul F gleich Null besitzt.*

Satz 49: *Nimmt man $\mathfrak{L}$ als Untermodul von $\mathfrak{M}$ dergestalt an, dass $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ einen Nulluntermodul F besitzt, dann erhält man $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$.*

Satz 50: *Nimmt man $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{M}$ an, dann gilt die Gleichheit $\mathfrak{F} = \Pi \mathfrak{L}$, wobei $\mathfrak{L}$ alle Untermoduln von $\mathfrak{M}$ unter folgenden Bedingungen durchläuft: 1·) $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ ist unterdirekt irreduzibel; 2·) $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ besitzt einen Nulluntermodul F.*

(1) Die Buchstaben $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{L}$ sind zu unterscheiden.

Korollar 14: *$\mathfrak{L}$ ist ein $\mathfrak{S}$-Untermodul.*

Korollar 15: *$\mathfrak{L}$ ist die vereinte Menge aller regulären Untermoduln.*

Satz 51: *Dann und nur dann erhält man $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}$, wenn kein $\mathfrak{L}\neq\mathfrak{M}$ besteht für welches: 1·) $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ unterdirekt irreduzibel ist; 2·) $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ einen Nulluntermodul hat.*

Satz 52: *Der Differenzmodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$ kat einen Nulluntermodul F.*

Satz 53: *Dann und nur dann ist in einem Modul $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{L}=(0)$, wenn $\mathfrak{M}$ zu einer unterdirekten Summe von unterdirekt irreduzibeln Untermoduln, von welchen jeder einen Nulluntermodul F besitzt, isomorph ist.*

Satz 54: *Dann und nur dann hat ein unterdirekt irreduzibler Modul $\mathfrak{M}\neq(0)$ einen Nulluntermodul F, wenn sein Minimaluntermodul $J\neq(0)$ ein Element $x\neq 0$ für welches $\mathfrak{A}(x)=(0)$ enthält.*

Die Anwendung des voraufgegangenen Satzes auf den Fall in dem man die Regularität von x durch die Eigenschaft $x\in(x\mathfrak{S}, t\mathfrak{S})$ erklärt, auf welche zu Beginn des § Bezug genommen wurde, zeigt, dass kein unterdirekt irreduzibler Modul mit einem Nulluntermodul G besteht, ausser wenn man $t\mathfrak{S}=(0)$ hat. Von dieser Annahme wird in der Tat im Folgenden ausgegangen. Aus diesem Grunde benutzen wir die Bezeichnung des *Untermoduls* G_1 statt der des Untermoduls G mit dem Buchtaben $\mathfrak{G}_1$ an stelle von $\mathfrak{G}$.

Satz 55: *Dann und nur dann hat ein unterdirekt irreduzibler Modul $\mathfrak{M}\neq(0)$ einen Nulluntermodul G_1, wenn sein Minimaluntermodul $J\neq(0)$ ein Element $x_0\neq 0$ für welches $x_0\mathfrak{S}=(0)$ enthält.* Dann hat der Minimaluntermodul die Form $J=\{mx_0\}$ und $J\mathfrak{S}$ ist gleich (0). Gewisse

Sätze sind gültig, die sich auf den Fall entsprechen lassen, in welchen man $\mathfrak{S}$ als kommutativ annimmt.

Satz 56: *Wenn $\mathfrak{M}\neq(0)$ ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul mit einem Untermodul G_1 gleich Null ist, dann ist der $\mathfrak{S}$-Minimaluntermodul $J\neq(0)$ endlich und hat eine Charakteristik gleich einer Primzahl p.*

Satz 57: *Falls $\mathfrak{M}\neq(0)$ ein unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul mit einem Untermodul G_1 gleich Null ist, dann bestehen, unter der Annahme, dass $0\neq x\in\mathfrak{M}$ sowie $x\mathfrak{S}=(0)$, eine feste Primzahl (die Charakteristik von $J\neq(0)$) und eine ganze Zahl ϱ, eine Funktion von x, für welche $p^\varrho x=0$.*

Satz 58: *$\mathfrak{M}\neq(0)$ sei unterdirekt irreduzibler $\mathfrak{S}$-Modul mit einem Untermodul G_1 gleich Null; dann und nur dann ist $y\in J$, wenn die beiden Beziehungen $y\mathfrak{S}=(0)$, $py=0$ bestehen.*

Satz 59: *Falls $\mathfrak{M}$ gemäss den Bedingungen der Sätze 56 bis 58 ein $\mathfrak{S}$-Modul ist, dann besteht, für jedes x für welches $0\neq x\in\mathfrak{M}$, $x\mathfrak{S}\neq(0)$, ein $A\in\mathfrak{S}$, das die Beziehung $xA=x_0$ erfüllt.*

Satz 60: *Bei gegebenem Modul $\mathfrak{M}\neq(0)$, als $\mathfrak{S}$-Modul angenommen, ist es hinreichend, damit $\mathfrak{M}$ unterdirekt irreduzibel ist und einen Untermodul G_1 gleich Null hat, dass $\mathfrak{M}$ folgende Eigenschaften besitzt: 1·) es besteht ein Untermodul der Form $J=\{mx_0\}\neq(0)$; 2·) für jedes $0\neq x\in\mathfrak{M}$ sowie $x\mathfrak{S}=(0)$ bestehen eine feste Primzahl p und eine ganze Zahl ϱ für welche $p^\varrho x=0$; 3·) immer wenn $x\mathfrak{S}\neq(0)$, $px=0$ und nur in diesem Fall ist $x\in J$; 4·) nimmt man $x\mathfrak{S}\neq 0$ an, dann besteht $A\in\mathfrak{S}$ für welches $xA=x_0$.*

Wenn man einmal den Fall bei dem $\mathfrak{G}_1=(0)$ erledigt hat, dann ist es notwendig zur der Hypothese $\mathfrak{G}_1\neq(0)$ überzugehen. Die in Satz 28 erläuterten Bedingungen sind noch hinreichend, d.h.: die vier in Satz 28 angeführten Eigenschaften sind hinreichend, damit $\mathfrak{M}$

unterdirekt irreduzibel ist und $\mathfrak{G}_1 \neq (0)$ hat, selbst wenn $\mathfrak{H}$ nicht kommutativ sein sollte. Doch ist wohl zu verstehen, dass man $\mathfrak{H}/\Delta$ für ein Divisionsring hält. Jedoch findet man die notwendigen in den Sätzen 24 bis 27 aufgezeichneten Bedingungen hier nur zum Teil verwirklicht.

11) **Über die unterdirekt irreduziblen Ringe** — In Verfolgung und Erläuterung des in § 1 angewiesen und in den anderen §§ aufgestellten Gedankenganges werden wir noch im Zusammenhang mit [16], dessen Text in [27, § 5] wiedergegeben ist, eine knappe Angabe bezüglich der nicht kommutativen unterdirekt irreduziblen Ringe machen. Wir nehmen für einen beliebigen Ring $\mathfrak{H}$ folgende Definition der F-Regularität: dann und nur dann ist x F-regulär, wenn $x \in ((x\mathfrak{H}, \mathfrak{H}x\mathfrak{H}), (\mathfrak{H}x, \mathfrak{H}x\mathfrak{H}))$ ist. Es gilt das Folgende, das durch das Vorgehen gemäss N. H. McCoy, [18], demonstriert werden kann, welches bereits in § 6 bezüglich der Sätze 19 bis 23 und wiederum im voraufgegangenen § angewandt werden soll:

Satz 61: *Damit ein willkürlicher Ring $\mathfrak{H}$ unterdirekt irreduzibel ist und einen null F-Radikal hat, ist es notwendig und hinreichend, dass sich in $\mathfrak{H}$ folgende Eigenschaften finden:* 1·) *es besteht eine bestimmte Primzahl p für welche bei angenommen $a\mathfrak{H} = \mathfrak{H}a = (0)$, $[a \in \mathfrak{H}]$, man eine ganze Zahl k als Funktion von a bestimmen kann, die der Gleichung $p^k a = 0$ genügt;* 2·) *es besteht ein zweiseitiges Hauptideal $J = (x_0) \neq (0)$, sodass man für jedes $a \in J$, jedoch nur für die Elemente von J, $a\mathfrak{H} = \mathfrak{H}a = (0)$, $pa = 0$ erhält;* 3·) *nimmt man $a\mathfrak{H} \neq (0)$, $\mathfrak{H}a\mathfrak{H} = (0)$ an, dann besteht $b \in \mathfrak{H}$ sowie $ab = x_0$;* 4·) *nimmt man $\mathfrak{H}a \neq (0)$, $\mathfrak{H}a\mathfrak{H} = (0)$ an, dann besteht $c \in \mathfrak{H}$ sowie $ca = x_0$;* 5·) *nimmt man $\mathfrak{H}a\mathfrak{H} \neq (0)$ an, dann bestehen die Elemente $p_i, q_i \in \mathfrak{H}$, für welche $x_0 = \Sigma p_i a q_i$.*

Centro de Estudos Matemáticos do Porto,
Setembro de 1952.