SOBRE NILIDEAIS E IDEAIS QUASE-REGULARES

POR

A. Almeida Costa

(Porto)

---

1) **Introdução** — No nosso livro *Sistemas hiper-complexos e representações* [de futuro (I)], publicado em 1948 (*Colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Porto*, n.º 19), utilizámos as notações seguintes, que também aqui empregaremos: $\mathfrak{R}$ é o *radical* dum anel, conjunto unido dos seus ideais nilpotentes; $\mathfrak{R}^{**}$ é o *radical* — L, de Levitzki, conjunto unido dos ideais semi-nilpotentes do anel; e $\mathfrak{R}^{*}$ é o *radical* — K, de Köthe, conjunto unido dos nilideais do anel, sob a hipótese de o conjunto unido dos nilideais bilaterais, $\mathfrak{N}$, conter todos os nilideais unilaterais.

Seguindo R. Baer, *Radical ideals*, «American Journal of Mathematics», vol. LXV, 1943, págs. 537 a 568, chamaremos *ideal radical* todo o nilideal bilateral $\mathfrak{M}$, dum anel $\mathfrak{S}$, tal que $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}$ não tem ideal nilpotente. Então, $U(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$ representará o conjunto unido dos ideais radicais e designar-se-á *radical superior* de $\mathfrak{S}$; e $L(\mathfrak{S})$ representará a intersecção de todos os ideais radicais e designar-se-á *radical inferior* de $\mathfrak{S}$. Tanto $U(\mathfrak{S})$ como $L(\mathfrak{S})$ são ideais radicais.

Conforme S. Perlis, *A characterization of the radical of an algebra*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 48, 1942, págs. 128 a 132, diremos que um elemento $a \in \mathfrak{S}$ é *quase-regular direito*, se existir $a' \in \mathfrak{S}$ tal que $a + a' + aa' = o$. Um ideal direito diz-se quase-regular direito, se todos os seus elementos forem quase-regulares direitos. Definições análogas levam a *ideais quase-regulares esquerdos*. Um elemento diz-se *quase-regular*, se for quase-regular direito e também quase-regular esquerdo.

N. Jacobson, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, «American Journal of Mathematics, vol. LXVII, 1945, págs. 300 a 320, demonstrou que, num anel qualquer, o conjunto unido dos ideais quase-regulares direitos é idêntico ao conjunto unido dos ideais quase-regulares esquerdos e ao conjunto unido dos ideais bilaterais quase-regulares. Esse conjunto unido é o *radical* — J, de Jacobson, que representaremos pelo símbolo $\mathfrak{R}_{**}$.

Têm lugar as seguintes relações:

$$\mathfrak{R}_{**} \supseteqq \mathfrak{R}^* \supseteqq \mathfrak{R}^{**} \supseteqq \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}^* = U(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R},$$
$$U(\mathfrak{S}) \supseteqq \mathfrak{R}^{**} \supseteqq L(\mathfrak{S}),$$

se $\mathfrak{R}^*$ existe. Quando $\mathfrak{R}^*$ não existe, deve substituir-se, na primeira sucessão de igualdades, $\mathfrak{R}^*$ pelo conjunto unido dos nilideais bilaterais $\mathfrak{R} = U(\mathfrak{S})$.

Quanto ao radical, ao radical — L e ao radical — K, mostramos o seguinte, em (I), Cap. I: 1) é necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^*$ exista e seja igual a $\mathfrak{R}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tenha nilideal (pág. 12); 2) é necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^*$ exista e seja igual a $\mathfrak{R}^{**}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$ não tenha nilideal (pág. 14); 3) é necessário e suficiente, para que $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$, que $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ não tenha ideal semi-nilpotente (pág. 14).

No Cap. II, de (I), foram tratados os anéis $\mathfrak{S}$ com condição de máximo e com condição de mínimo para ideais direitos (abreviadamente: condição dupla de cadeia). Seguindo J. Levitzki, *Über nilpotente Unterringe*, «Mathematische Annalen», Band 105, 1931, págs. 620 a 627, estabelecemos que: 1′) é condição necessária e suficiente, para que um sub-anel $\mathfrak{S}'$, de $\mathfrak{S}$, seja sub-nilanel, que se tenha $\mathfrak{S}'^{n+1} = (o)$, supondo n o comprimento da série de composição de $\mathfrak{S}$. Concluiu-se daqui: *todo o sub-nilanel dum anel com condição dupla de cadeia é nilpotente.*

No Cap. IV, de (I), estudaram-se, seguindo C. Hopkins, *Rings with minimal condition for left ideals*, «Annals of Mathematics», vol. 40, 1939, págs. 712 a 730, os anéis com condição de mínimo para ideais direitos ou *anéis-U*. Demonstrou-se: 1″) um anel-U tem um radical-K igual ao radical, que é nilpotente [pág. 89]; 2″) $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ é anel com condição dupla de cadeia. Resulta daqui: 3″) *todo o sub-nilanel dum anel com condição de mínimo é nilpotente.* Para o verificar basta ter em conta esta outra proposição: 4″) *se a for um ideal bilateral nilpotente de $\mathfrak{S}$ e se em $\mathfrak{S}/a$*

for nilpotente todo o sub-nilanel, a mesma propriedade tem lugar em $\mathfrak{S}$ [cfr. (I), pág. 90].

Na investigação de exigências mais fracas capazes de garantir a nilpotência de cada sub-nilanel de $\mathfrak{S}$, citemos as condições I) e II) de K. Asano, *Über Ringe mit Vielfachenkettensatz*, «Proceedings of the Imperial Academy», Tokyo, vol. XV, n.º 9, 1939, págs. 288 a 291 [Cfr. (I), pág. 103]: I) condição de mínimo para ideais bilaterais de $\mathfrak{S}$; II) condição de mínimo para ideais direitos de $\mathfrak{S}$ que contenham um ideal primo.

E, por fim, anotemos ainda: β) a condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$ e a condição de mínimo para ideais direitos contendo $\mathfrak{R}$ também garantem a nilpotência dos sub-nilanéis de $\mathfrak{S}$ [Cfr. J. Levitzki, *A characteristic condition for semi-primary rings*, «Duke Mathematical Journal», vol. XI, 1944, págs. 367 e 368].

Todos os casos enunciados se ligam a uma proposição mais geral, como vamos ainda recordar. Efectivamente, no Cap. III, de (I), intitulado *Anéis semi-primários*, distinguimos, conforme Levitzki [*Semi-nilpotent ideals*, «Duke Mathematical Journal», vol. 10, 1943, págs. 553 556 e *On the radical of a general ring*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 49, 1943, págs. 462 a 466]: 1‴) os *anéis — A generalizados*, definidos como aqueles que possuem radical — K e para os quais $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^*$ é semi-simples; 2‴) os *anéis — A*, caracterizados pela semi-simplicidade de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$; 3‴) os *anéis — A especiais*, com duas propriedades características: nilpotência de $\mathfrak{R}$ e semi-simplicidade de $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$. Em 2‴) e 3‴) estão casos particulares de 1‴). Em 3‴) não havia necessidade de exigir a nilpotência de $\mathfrak{R}$, para incluir os anéis — A especiais nos anéis — A generalizados. Fazendo essa exigência, enuncia-se uma proposição comum aos 3 casos: 1^(IV)) é condição necessária e suficiente, para que $\mathfrak{S}$ seja um anel — A generalizado (anel — A, anel — A especial), que $\mathfrak{R}^*$ exista ($\mathfrak{R}^{**}$ e $\mathfrak{R}$ existem sempre) e tenha lugar a condição de mínimo para ideais direitos contendo $\mathfrak{R}^*$ (respectivamente: $\mathfrak{R}^{**}$ e $\mathfrak{R}$). [Cfr. (I), pág. 79].

Vale, agora, a proposição mais geral a que acima aludimos: *num anel — A especial, todo o sub-nilanel é nilpo-*

tente. E isto, porque $\mathfrak{R}$ é nilpotente e em $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$ é válida a condição dupla de cadeia, o que permite aplicar o resultado 4'').

Na verdade, em (I), pág. 103, demonstrámos que as condições de Asano bastavam para que $\mathfrak{S}$ fosse anel — A especial. E em (I), pág. 87, viu-se que a condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$ arrastava a nilpotência de $\mathfrak{S}$, de sorte que o último caso anotado entra ainda nos anéis — A especiais. De resto, a este respeito, é válido o

Teorema 1: — *Há implicação recíproca na afirmação* α), *de que é válida em* $\mathfrak{S}$ *a condição de mínimo para ideais direitos contendo* $\mathfrak{R}^{**}$ *e a condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em* $\mathfrak{R}^{**}$, *a um lado, e a afirmação análoga* β), *acima referida, relativa a* $\mathfrak{R}$. Em (I), pág. 87, viu-se que a condição de mínimo para ideais bilaterais semi-nilpotentes arrastava a nilpotência do radical — L. Então, α) implica β). Reciprocamente, se β) é válida, $\mathfrak{S}$ é anel — A especial e $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$.

Nos §§ que vão seguir-se, mostraremos: I') Que, nos anéis — A, todo o sub-nilanel é semi-nilpotente. II') Que, num anel arbitrário, não pode existir nilideal direito mínimo superior ao radical — L. Resulta, como consequência, que, se um anel possui nilideal direito semi-regular, há no anel uma infinidade de nilideais direitos semi-regulares formando uma cadeia descendente, como sucede quando não existe radical — K. III') Que, sendo $\mathfrak{P}$ um ideal bilateral do anel $\mathfrak{S}$ tal que $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ não tem ideal nilpotente, é condição necessária e suficiente, para que $a \in \mathfrak{P}$, que $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$. Resulta deste teorema uma propriedade conhecida dos radicais — L, K e J, assim como do radical superior de Baer. IV') Que, se a matriz $M = (a_{ik})$ pertence ao radical — L, de $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_n(\mathfrak{A}_n$ é o anel de matrizes do grau n com elementos do anel $\mathfrak{A}$), os elementos de M pertencem ao radical — L, de $\mathfrak{A}$; V') Que, num anel arbitrário, não pode haver ideal direito semi-nilpotente mínimo superior ao radical $\mathfrak{R}$, desde que este se suponha nilpotente. Resulta, como consequência, que, se num anel $\mathfrak{S}$ for válida a condição de mínimo para os ideais nilpotentes, ou é $\mathfrak{R}$ o radical — L, ou há entre $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^{**}$ uma infinidade de ideais direitos semi-

-nilpotentes em cadeia descendente. VI') Que é condição necessária e suficiente, para que um nilideal bilateral $\mathfrak{P}$ seja ideal radical do anel $\mathfrak{S}$, que $\mathfrak{P}$ se componha de todos os elementos $a \in \mathfrak{S}$ para os quais exista um inteiro σ, dependente de a, tal que $(a\mathfrak{S})^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$. Resulta daqui o corolário seguinte: se $\mathfrak{P}$ é um ideal radical e se $(a\mathfrak{S})^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$, tem-se $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$. VII') Que a validade, para ideais bilaterais, duma certa propriedade demonstrada por Jacobson para ideais unilaterais, levará imediatamente à existência de uma infinidade de ideais bilaterais, compreendidos entre $U(\mathfrak{S})$ e $L(\mathfrak{S}) \subset U(\mathfrak{S})$, que não são ideais radicais. VIII') Que o radical — J tem muitas propriedades análogas às do radical — L. IX') Que, ao lado dum certo conjunto H, considerado por Perlis, podem considerar-se outros dois conjuntos: o conjunto H_d, composto de elementos h tais que $g + h$ é regular direito, qualquer que seja o elemento regular direito g, e apenas desses elementos; e o conjunto H_e, onde se invocam elementos regulares esquerdos. Para cada um dos três conjuntos, é válido um teorema do tipo seguinte: é necessário e basta, para que $h \in H_d$, que a soma $v + h$ seja quase-regular direita, sempre que v é quase-regular direito. Mostraremos ainda: que a igualdade $H_d = H_e$ implica $H_d \subseteq H$; que, num anel semi-simples, se tem $H_d = H_e = H = (o)$; e que, caracterizando um anel semi-primário como aquele para o qual vale a condição de mínimo para os ideais direitos contendo o radical — J, se tem $H = H_d = H_e =$ = radical — J.

2) **Dois teoremas sobre semi-nilpotência** — É natural, em confronto, com a questão da nilpotência, versada na *Introdução*, ver se é possível enfraquecimento de condições, de modo a garantir ùnicamente a semi-nilpotência dos sub-nilanéis. Teremos necessidade de dois lemas.

Lema 1: — *Se um anel* $\mathfrak{T}$ *tem um número finito de geradores* $a_1, \ldots, a_n$, *o anel* $\mathfrak{T}^{\sigma}$, *qualquer que seja o inteiro* σ, *tem igualmente um número finito de geradores.* Observemos que os elementos de $\mathfrak{T}^2$ são da forma $\Sigma t t'$, com $t, t' \in \mathfrak{T}$. Quer dizer que os referidos elementos são da forma $\Sigma a_{i_1} \ldots a_{i_q}$, onde $q \geqq 2$. Se uma parcela da última soma é produto de dois elementos a_i, ela pertencerá ao sub-anel gerado pelos $a_i a_k$; se tiver 3, pertencerá ao sub-anel gerado por $a_i a_k a_m$; se tiver 4, já pertence ao sub-anel gerado pelos $a_i a_k$, etc. Assim, os elementos $a_i a_k$, $a_i a_j a_k$, $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ gerarão $\mathfrak{T}^2$. Anàlogamente se verifica que os elementos $a_i a_j a_k$, $a_i a_j a_k a_l$, $a_i a_j a_k a_l a_m$ gerarão $\mathfrak{T}^3$. Dum modo geral, $\mathfrak{T}^n$ é gerado pelos elementos $a_{i_1} \ldots a_{i_{n+k}}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ i_j = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n+k)$.

Lema 2: — *Se $\mathfrak{S}_1$ é um sub-nilanel de $\mathfrak{S}$ tal que $\mathfrak{S}_1^\sigma \subseteq \mathfrak{R}^{**}$, $\mathfrak{S}_1$ é semi-nilpotente.* Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{S}_1$ elementos em número finito. O anel $\mathfrak{T}$ que eles geram verifica a condição $\mathfrak{T}^\sigma \subseteq \mathfrak{R}^{**}$. Em virtude do lema anterior, $\mathfrak{T}^\sigma$ tem um número finito de geradores, de modo que $\mathfrak{T}^{\sigma\tau} = (o)$, para um certo inteiro τ. O lema está provado.

Posto isto, fixaremos o seguinte

Teorema 2: — *Num anel — A, todo o sub-nilanel é semi-nilpotente.* De facto, estudemos o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{S}'$. Se $\mathfrak{S}_1$ é sub-nilanel de $\mathfrak{S}$, o seu correspondente $\mathfrak{S}_1'$ é sub-nilanel do anel semi-simples $\mathfrak{S}'$ (anel — A especial). Então, $\mathfrak{S}_1'$ é nilpotente, de modo que há uma potência $\mathfrak{S}_1^\sigma$ contida em $\mathfrak{R}^{**}$. O lema 2 mostra que $\mathfrak{S}_1$ é semi-nilpotente.

Passemos ao outro teorema aludido na epígrafe.

Teorema 3: — *Num anel arbitrário $\mathfrak{S}$, não existe nilideal direito $\mathfrak{r}$, com a propriedade de ser o mínimo nilideal para o qual $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}^{**}$.* E isso porque, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}^{**}$, o correspondente de $\mathfrak{r}$ seria um nilideal direito mínimo $\mathfrak{r}' \neq (o)$, para o qual $\mathfrak{r}'^2 = (o)$, o que levaria ao absurdo $\mathfrak{r}' = (o)$. Devemos, por isso, preservar-nos de dar um enunciado como este: «a condição de mínimo para nilideais direitos de $\mathfrak{S}$ contendo $\mathfrak{R}^{**}$ arrasta a existência e semi-nilpotência de $\mathfrak{R}^*$».

Tem todavia sentido o seguinte

Teorema 4: — *A condição de mínimo para nilideais direitos de $\mathfrak{S}$ arrasta a existência de $\mathfrak{R}^*$ e a sua nilpotência.* Não havendo, então, com efeito, nilideais direitos contendo $\mathfrak{R}^{**}$, também não pode haver nilideal direito $\mathfrak{r}$ com elementos não pertencentes ao radical — L, visto que, de contrário, o nilideal $(\mathfrak{r}, \mathfrak{R}^{**})$ conteria o referido radical. Em seguida, bastaria até a condição de mínimo para ideais bilaterais semi-nilpotentes, para ficar garantida a nilpotência de $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}^*$ [cfr. (I), pág. 87].

Substituindo o radical — L pelo radical $\mathfrak{R}$, podemos falar de nilideal direito mínimo $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}$? A resposta só pode ser afirmativa, se $\mathfrak{R}$ não for nilpotente. Devemos, por isso, preservar-nos de dar um enunciado em que figure uma hipótese como esta: «condição de mínimo para nilideais direitos de $\mathfrak{S}$ contendo $\mathfrak{R}$ e condição de mínimo para ideais bilaterais contidos em $\mathfrak{R}$».

3) **Semi-regularidade e existência de $\mathfrak{R}^*$** — Assim como à noção de nilanel se opõe a de anel regular, assim, à noção de semi-nilpotente, opõe Levitzki a de *semi-regular,* para significar a existência dum número finito de elementos gerando um anel não nilpotente (potente).

Teorema 5: — *Se $\mathfrak{r}$ é um ideal direito semi-regular de $\mathfrak{S}$, o ideal $\mathfrak{r}^\sigma$, qualquer que seja o inteiro σ, é igualmente semi--regular.* Sejam, de facto, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{r}$ elementos gerando um anel potente. Tem-se $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{r}$. Como $\mathfrak{T}^\sigma$ tem um número finito de geradores (lema 1), segue-se que há em $\mathfrak{T}^\sigma$ um número finito de elementos gerando um anel potente. Em virtude de ser $\mathfrak{T}^\sigma \subseteq \mathfrak{r}^\sigma$, o teorema fica provado.

A afirmação contida no teorema 3, permite estabelecer esta proposição:

Teorema 6: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel com um nilideal direito semi-regular $\mathfrak{r}$, há em $\mathfrak{S}$ uma infinidade de nilideais direitos semi-regulares formando uma cadeia descendente. Cada elemento da cadeia contém o radical — L.*

Visto que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ é semi-regular, também $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{R}^{**}) = \mathfrak{s}_1$ é semi-regular. Como $\mathfrak{s}_1$ não pode ser mínimo contendo $\mathfrak{R}^{**}$, existe $\mathfrak{s}_2$ tal que $\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{s}_2 \supset \mathfrak{R}^{**}$. Depois encontra-se $\mathfrak{s}_2 \supset \mathfrak{s}_3 \supset \mathfrak{R}^{**}$, etc.

Corolário 1: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel para o qual não existe radical* — K, *há em $\mathfrak{S}$ uma infinidade de ideais direitos e de ideais esquerdos (em cadeia descendente) que são nilideais semi-regulares.* Por hipótese, com efeito, há em $\mathfrak{S}$ um nilideal direito (e um esquerdo) semi-regular.

Em (I), pág. 10, introduzimos, conforme Köthe, o nilideal bilateral $\mathfrak{N}$, conjunto unido (ou soma) dos nilideais bilaterais. Saber se existe ou não radical $\mathfrak{N}^*$ equivale a saber se há ou não há possibilidade de «mergulhar» um nilideal unilateral num nilideal bilateral. Em (I), pág. 11, demonstrámos que é condição necessária e suficiente, para a existência de radical — K, que a soma de dois nilideais direitos seja um nilideal direito. Introduzindo a noção de elemento pròpriamente nilpotente [(I), pág. 12], sabemos que, se não existe radical — K, há elementos pròpriamente nilpotentes a_1 e a_2 tais que $a_1 - a_2$ não é pròpriamente nilpotente. Então $(a_1 - a_2)\mathfrak{S}$ não é nilideal, o mesmo se dizendo do ideal $(a_1\mathfrak{S}, a_2\mathfrak{S})$, que é soma de dois nilideais direitos. Conclui-se também que $a_1\mathfrak{S}$ e $a_2\mathfrak{S}$ não podem pertencer simultâneamente a $\mathfrak{N} = U(\mathfrak{S})$. Assim, quando não existe radical — K, há, em $\mathfrak{S}$, um nilideal $a\mathfrak{S}$ não contido em $\mathfrak{N}$. Pondo $a\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$, este é nilanel semi-regular. $\mathfrak{T}$ tem radical — K, igual a $\mathfrak{T}$, diferente do radical — L, igual a $\mathfrak{N}_1$. Se é $b \in \mathfrak{T}$, $b \notin \mathfrak{N}_1$, o ideal $b\mathfrak{T} = \mathfrak{P}$, de $\mathfrak{T}$, é semi-regular, visto que $b\mathfrak{T} \leqq \mathfrak{N}_1$ implicaria $b \in \mathfrak{N}_1$ [(I), pág. 14; ou, adiante, teorema 11]. Vê-se, todavia, que $b\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, pois a igualdade $b\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ daria $\mathfrak{T} = b\mathfrak{T} = b^2\mathfrak{T} = \ldots = (o)$, por ser b um elemento nilpotente. Como é também $b\mathfrak{T} = ba\mathfrak{T}$, estamos em presença dum nilideal de $\mathfrak{S}$, sendo $a\mathfrak{S} \supset ba\mathfrak{S}$. É claro que podemos raciocinar do mesmo modo sobre $\mathfrak{P}$ e formar $c\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$, etc. Assim, é possível precisar, em certo sentido, o resultado expresso no corolário 1, por meio deste

Teorema 7: — *Se $\mathfrak{S}$ é um anel para o qual não existe radical* — K, *há em $\mathfrak{S}$ uma cadeia descendente de nilideais direitos semi-regulares da forma $c_1\mathfrak{S} \supset c_2\mathfrak{S} \supset c_3\mathfrak{S} \supset \ldots$.*

Convém anotar que a demonstração anterior, começada a partir de $\mathfrak{T}$, estabelece o

Teorema 8: — *Se T é um nilanel semi-regular, há em T cadeias descendentes infinitas de nilideais semi-regulares das formas $\mathrm{T} \supset a_1\mathrm{T} \supset \ldots; \mathrm{T} \supset \mathrm{T}b_1 \supset \ldots$.*

Levitzki, «*On three problems concerning nil-rings*», *Bulletin of the American Mathematical Society*. vol. 51, 1945, págs. 913 a 919, em face dos resultados contidos nos teoremas 7 e 8, por ele ali estabelecidos, faz a observação de que, à questão aberta «há ou não há anéis sem radical — K?», só poderá dar-se uma resposta positiva, se for positiva a resposta a esta segunda questão «há ou não há nilanéis semi-regulares?».

É válido o

Teorema 9: — *Se $\mathfrak{S}$ tem radical $\mathfrak{N}^*$ e se $\mathfrak{P}$ é nilideal bilateral, o radical* — K *de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ existe e é $\mathfrak{N}^*/\mathfrak{P}$.* A demonstração resulta imediatamente estudando o homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, no qual $\mathfrak{N}^*$ e $\mathfrak{N}^*/\mathfrak{P}$ se correspondem. Em correlação com este resultado, provaremos o

Teorema 10: — *Se $\mathfrak{P}$ é um ideal bilateral semi-nilpotente de $\mathfrak{S}$ e se $\mathfrak{r}$ é semi-regular, o ideal direito $(\mathfrak{r}, \mathfrak{P})/\mathfrak{P} = \mathfrak{r}'$, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'$, é também semi-regular.* Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{r}$ elementos que geram um anel potente T. Os correspondentes $a'_1, \ldots, a'_n \in \mathfrak{r}'$, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$, geram um anel T' que não pode ser nilpotente, pois, de contrário, ter-se-ia $\mathrm{T}'^{\sigma} = (o)$, $\mathrm{T}^{\sigma} \leqq \mathfrak{P}$. Em virtude do lema 1, pois que T tem um número finito de geradores, T^{σ} tem igualmente um número finito de geradores. Então, como $\mathfrak{P}$ é semi-nilpotente, existiria um inteiro τ tal que $\mathrm{T}^{\sigma\tau} = (o)$, o que é absurdo. [Esta demonstração simplifica a que foi dada em (I), pág. 13, na qual $\mathfrak{N}^{**}$ substitui $\mathfrak{P}$].

Corolário 2: — *Se $\mathfrak{P}$ é um ideal bilateral semi-nilpotente, o radical* — L, *de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, é $\mathfrak{N}^{**}/\mathfrak{P}$.* Pelo teorema, na correspondência $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, correspondem-se de modo biunívoco completo os ideais semi-nilpotentes de $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ e os ideais semi-nilpotentes de $\mathfrak{S}$ que contêm $\mathfrak{P}$.

4) **Sobre algumas propriedades de $\mathfrak{N}^{**}$** — Levitzki demonstrou que é condição necessária e suficiente, para que $s \in \mathfrak{N}^{**}$, que seja $s\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{N}^{**}$, [(I), pág. 14]. Tem

lugar uma afirmação análoga para os radicais superior e inferior de Baer, assim como para o radical de Jacobson. Todas estas afirmações resultam do seguinte

Teorema 11: — *Se* $\mathfrak{P}$ *é um ideal bilateral tal que* $\mathfrak{S}/\mathfrak{P}$ *não tem ideal nilpotente, é condição necessária e suficiente, para que* $a \in \mathfrak{P}$, *que* $a\,\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$.

É imediato que a condição é necessária. Inversamente, se $a\,\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$, seja $\mathfrak{r}$ o ideal direito gerado por a. Como $\mathfrak{r}^2$ se compõe de elementos da forma $\Sigma\,(a\,s + i\,a)\,(a\,s' + i'\,a)$, ($s, s' \in \mathfrak{S}$; i, i' inteiros), vê-se que $\mathfrak{r}^2 \subseteq a\,\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$. Então, sendo $\mathfrak{r}'$ o correspondente de $\mathfrak{r}$ no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P}$, vê-se que $\mathfrak{r}'^2 = (o)$. Daqui tira-se $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{P}$, q. e. d.

Servindo-se deste resultado, demonstrou Levitzki [cfr. (I), pág. 15] que, dado um anel $\mathfrak{A}$, de radical $\mathfrak{R}_a{}^{**}$, o anel $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{S}$, composto de matrizes do grau n com elementos de $\mathfrak{A}$ e com o radical $\mathfrak{R}_s{}^{**}$, contém neste radical todas as matrizes $S = (a_{ik})$, com $a_{ik} \in \mathfrak{R}_a{}^{**}$. Também é válida a proposição inversa, como vamos ver.

(Continua)

SOBRE NILIDEAIS E IDEAIS QUASE-REGULARES

POR

A. Almeida Costa

(Porto)

(Conclusão)

Teorema 12: — *Se* $S = (a_{ik})$ *pertence ao radical* — L *de* $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_n$, *os elementos de* S *pertencem ao radical* — L *de* $\mathfrak{A}$. Seja B_{ik} a matriz de $\mathfrak{S}$ obtida quando se coloca $b \in \mathfrak{A}$ na linha i e coluna k, deixando iguais a zero os restantes elementos. Supondo b e c elementos arbitrários de $\mathfrak{A}$, a matriz $B_{kr}\,S\,C_{sk}$ tem todos os elementos nulos, salvo o elemento (k, k), que se reduz a $b\,a_{rs}\,c$. Assim,

$$D = \sum_k B_{kr}\,S\,C_{sk} = (b\,a_{rs}\,c, b\,a_{rs}\,c, \ldots, b\,a_{rs}\,c)$$

é uma matriz diagonal pertencente ao radical — L, de $\mathfrak{S}$. O ideal direito gerado por D é semi-nilpotente, de sorte que, supondo $i_1, \ldots, i_p$ números inteiros e $T_1, \ldots, T_p$ matrizes de $\mathfrak{S}$, o sub-anel de $\mathfrak{S}$ gerado pelos elementos

$$D\,T_1 + i_1\,D, \ldots, D\,T_p + i_p\,D \qquad (1)$$

é nilpotente. Escolhamos, em especial, como matrizes T_j, matrizes diagonais de elementos iguais $t_j \in \mathfrak{A}$. As matrizes (1) serão igualmente matrizes diagonais com elementos diagonais, dados, respectivamente, por

$$d\,t_1 + i_1\,d, \ldots, d\,t_p + i_p\,d, \qquad (d = b\,a_{rs}\,c).$$

O sub-anel de $\mathfrak{S}$ gerado por estes elementos será nilpotente. Então será nilpotente o sub-anel de $\mathfrak{A}$ gerado por um número finito de elementos do ideal direito gerado por d, de sorte que esse ideal é semi-nilpotente. Da condição de $b\,a_{rs}\,c$ pertencer ao radical — L, de $\mathfrak{A}$, e de c ser arbitrário, tira-se que $b\,a_{rs}$ pertence ao mesmo radical, e, por último, que a_{rs} pertence ainda ao mesmo radical, pois b é igualmente arbitrário.

Observação: — Se existe elemento um em $\mathfrak{A}$, existe elemento um em $\mathfrak{S}$. Um resultado estabelecido em (I), pág. 40, prova que, supondo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$, se tem neste caso $\mathfrak{R}^{**}_a = [\mathfrak{R}^{**}_s, \mathfrak{A}]$. Os raciocínios acabados de fazer demonstram, em seguida, a igualdade $\mathfrak{R}^{**}_s = \sum_{i,k} e_{ik} [\mathfrak{R}^{**}_s, \mathfrak{A}]$, no qual figuram as matrizes unidade $e_{ik} \in \mathfrak{S}$.

Terminaremos este §, enunciando duas proposições relativas ao radical — L, em correlação imediata com os resultados expressos nos teoremas 3 e 6.

Teorema 3′: — *Se, num anel $\mathfrak{S}$, forem diferentes os radicais — L e $\mathfrak{R}$, não pode haver ideal direito semi-nilpotente mínimo $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{R}$, sempre que $\mathfrak{R}$ seja nilpotente.*

Teorema 6′: — *Se, num anel $\mathfrak{S}$, for válida a condição de mínimo para os ideais nilpotentes, ou é $\mathfrak{R}$ o radical — L, ou há entre $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^{**}$ uma infinidade de ideais direitos semi-nilpotentes em cadeia descendente.*

5) **Sobre os ideais radicais** — O teorema 11 permite estabelecer para os ideais radicais a propriedade expressa no teorema seguinte:

Teorema 13: — *É condição necessária e suficiente, para que um nilideal bilateral $\mathfrak{P}$ seja ideal radical, que $\mathfrak{P}$ se componha de todos os elementos* a $\in \mathfrak{S}$ *para os quais existe um inteiro σ, dependente de* a, *tal que* $(\mathrm{a}\mathfrak{S})^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$.

A condição é *necessária*. Se $\mathfrak{P}$ é ideal radical, seja $a \in \mathfrak{S}$ com elemento tal que $(a\mathfrak{S})^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'$, o correspondente de a é a' tendo-se $(a'\mathfrak{S}')^{\sigma} = (o)$, $a'\mathfrak{S}' = (o)$. Logo é $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$ e $a \in \mathfrak{P}$. Por outro lado, para cada $a \in \mathfrak{P}$, é $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$.

A condição é *suficiente*. Realizada a condição, suponhamos $a' \in \mathfrak{S}'$ um elemento gerando um ideal direito nilpotente. Será também $a'\mathfrak{S}'$ nilpotente, com $(a'\mathfrak{S}')^{\sigma} = (o)$. Nesse caso, $(a\mathfrak{S})^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$, $a \in \mathfrak{P}$, $a' = o$. Não há em $\mathfrak{S}'$ ideais nilpotentes, de sorte que $\mathfrak{P}$ é ideal radical.

Corolário 3: — *Se $\mathfrak{P}$ é um ideal radical e se* $(\mathrm{a}\mathfrak{S})^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$, *tem-se* $\mathrm{a}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$.

Sob esta forma, o corolário resulta, de facto, do teorema anterior. Ele não é mais, porém, do que um caso particular deste

Teorema 14: — *Se $\mathfrak{P}$ é um ideal radical e $\mathfrak{r}$ é um ideal direito tal que $\mathfrak{r}^{\sigma} \subseteq \mathfrak{P}$, tem-se $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{P}$.*

Teorema 15: — *É condição necessária e suficiente, para que o radical — K exista e seja igual ao ideal radical T, que $\mathfrak{S}/$T não tenha nilideal.* De facto, nesse caso, todo o nilideal unilateral de $\mathfrak{S}$ está contido no nilideal bilateral T.

Corolário 4: — *Se* T *é um ideal radical de $\mathfrak{S}$ e se todo o ideal direito $\neq (o)$ em $\mathfrak{S}/$T contém um ideal direito mínimo,* T *é o radical superior de $\mathfrak{S}$ (radical — K), o qual contém todo o nilideal de $\mathfrak{S}$.* Este enunciado de Baer é consequência do teorema, pois que todo o ideal direito de $\mathfrak{S}/$T possui idempotente e não pode ser nilideal.

6) **Sobre um problema de Baer-Levitzki** — Da definição de ideal radical, resulta que o radical — L é um ideal radical, o mesmo se dizendo do radical — K, se este existir. O anel quociente $\mathfrak{S}/\mathfrak{R} = \mathfrak{S}/U(\mathfrak{S})$ tem os dois radicais, superior e inferior, iguais a zero. No geral, porém, os dois radicais são distintos. Baer deu, com efeito, um exemplo

de nilanel sem ideal direito nilpotente, contendo um nilideal bilateral que não é ideal radical. Por um lado, neste exemplo, sendo (o) um ideal radical, é $L(\mathfrak{S})=(o)\neq$ $\neq U(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}$; por outro, mostra-se que um nilideal bilateral compreendido entre os radicais superior e inferior não é necessàriamente um ideal radical.

Jacobson deu a seguinte proposição: *se $\mathfrak{M}$ é um ideal bilateral quase-regular de $\mathfrak{S}$, e se $\mathfrak{L}$ é um ideal direito (esquerdo), com uma base finita, contido em $\mathfrak{M}$, tem-se $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{L}$ $(\mathfrak{M}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L})$ ou $\mathfrak{L}=(o)$.*

Põe-se a seguinte questão: *se $\mathfrak{a}$ for um ideal bilateral quase-regular gerado por um número finito de elementos, a hipótese $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{M}$ arrasta ou não arrasta uma das relações $\mathfrak{a}\mathfrak{M}\subset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}=(o)$?*

Se puder dar-se uma resposta positiva a esta questão, pode afirmar-se *que, sendo $U(\mathfrak{S})\supset L(\mathfrak{S})$, há entre os dois radicais, superior e inferior, uma infinidade de ideais bilaterais que não são ideais radicais.*

Para o verificar, vamos limitar-nos ao caso em que $U(\mathfrak{S})$ é semi-regular, visto que, se $U(\mathfrak{S})$ for semi-nilpotente, a afirmação tem efectivamente lugar, como adiante anotaremos.

Suponhamos, pois, $U(\mathfrak{S})$ semi-regular, e investiguemos primeiramente a hipótese de se ter também $L(\mathfrak{S})=$ $=(o)$. Tomemos $a_1,\ldots,a_n\in U(\mathfrak{S})$ tais que o sub-anel $\mathfrak{T}$, gerado pelos a_i, seja semi-regular.

Então será semi-regular o ideal bilateral $\mathfrak{a}$ gerado pelos mesmos a_i, tendo-se $\mathfrak{a}^2\subset\mathfrak{a}$. Precisamente $\mathfrak{a}^2\neq(o)$ não será ideal radical, pois, no homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}/\mathfrak{a}^2$, o correspondente de $\mathfrak{a}$ será $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$, que é nilpotente. Sabemos que $\mathfrak{T}^2\subseteq\mathfrak{a}^2$ é gerado por um número finito de elementos, $b_1,\ldots,b_m$, os quais geram igualmente um ideal bilateral semi-regular $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}^2$. Se for $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^2$, ter-se-á $\mathfrak{a}^2\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^3\subset\mathfrak{a}^2$, com $\mathfrak{a}^3\neq(o)$. O ideal $\mathfrak{a}^3$ também não é ideal radical. Se for $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}^2$, será $\mathfrak{b}^2\subset\mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b}^2\neq(o)$, $\mathfrak{b}^2$ não é ideal radical. O processo continua. E vê-se que se tem $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{a}^2\supseteq\mathfrak{b}\supset\mathfrak{b}^2\supseteq\mathfrak{c}\supset\mathfrak{c}^2\supseteq\ldots$, sendo $\mathfrak{a}^2\supset\mathfrak{b}^2\supset\mathfrak{c}^2\supset\ldots$ uma sucessão que, neste caso particular, para o qual $L(\mathfrak{S})=(o)$, verifica a afirmação em causa.

Na hipótese $L(\mathfrak{S})\neq(o)$, sabe-se que, no homomorfismo $\mathfrak{S}\sim\mathfrak{S}/L(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}'$, se tem: 1) $U(\mathfrak{S}')=U(\mathfrak{S})/L(\mathfrak{S})$; 2) $U(\mathfrak{S}')$ semi-regular (teorema 10); 3) $L(\mathfrak{S}')=(o)$.

Em $\mathfrak{S}'$ há uma infinidade de ideais bilaterais $\mathfrak{b}_1'\supset\mathfrak{b}_2'\supset\ldots$, contidos em $U(\mathfrak{S}')$, que não são ideais radicais. Os ideais bilaterais correspondentes $\mathfrak{b}_1\supset\mathfrak{b}_2\supset\ldots$, de $\mathfrak{S}$, estão contidos em $U(\mathfrak{S})$, contêm $L(\mathfrak{S})$ e não são ideais radicais, como resulta dos isomorfismos $\mathfrak{S}/\mathfrak{b}_1\simeq\mathfrak{S}'/\mathfrak{b}_1',\ldots$.

Levitzki deu, nesta ordem de ideias, no seu trabalho «*On three problems concerning nil-rings*», os resultados a que vamos aludir. Ele pôs este problema: há ou não há anéis $\mathfrak{S}$ para os quais $U(\mathfrak{S})\supset L(\mathfrak{S})$ e tais que todo o nilideal bilateral entre $U(\mathfrak{S})$ e $L(\mathfrak{S})$ é também um ideal radical? Respondendo a esta pergunta, ele próprio provou: α) *se $\mathfrak{S}$ é um anel com um radical superior semi-nilpotente, e se $U(\mathfrak{S})\supset L(\mathfrak{S})$, há em $\mathfrak{S}$ uma infinidade de nilideais bilaterais compreendidos entre aqueles dois e que não são ideais radicais;* β) *se $\mathfrak{S}$ é um anel com um radical superior semi-regular, $\mathfrak{S}$ contém um sub-anel $\mathfrak{S}'$ tal que $U(\mathfrak{S})\supseteq\mathfrak{S}'=$ $=U(\mathfrak{S}')\supset L(\mathfrak{S}')$ e tal que $\mathfrak{S}'$ contém um número infinito de nilideais bilaterais entre $U(\mathfrak{S}')$ e $L(\mathfrak{S}')$ que não são ideais radicais.*

Levitzki, nas suas demonstrações, introduziu as seguintes noções: se $a_1,\ldots,a_n\in\mathfrak{S}$, diz-se que o ideal direito gerado pelos a_i tem uma base própria direita, quando esse ideal tem a forma $\Sigma a_i\mathfrak{S}$; dá-se uma definição análoga para uma base própria esquerda; e diz-se que o ideal bilateral gerado pelos a_i tem uma base própria, se esse ideal tiver a forma $\Sigma\mathfrak{S}a_i\mathfrak{S}$. Então, aquele autor provou: γ) se um nilideal bilateral $\mathfrak{r}\neq(o)$ tem uma base própria direita, vale a relação $\mathfrak{r}^2\subset\mathfrak{r}$; δ) se um ideal semi-nilpotente direito $\mathfrak{r}\neq(o)$ tem uma base própria direita, vale a relação $\mathfrak{r}^2\subset\mathfrak{r}$; ε) se um ideal bilateral semi-nilpotente $\mathfrak{a}\neq(o)$ tem uma base própria, vale ainda $\mathfrak{a}^2\subset\mathfrak{a}$.

As afirmações γ) e δ) estão contidas na proposição muito mais geral de Jacobson, referida no começo deste §. A afirmação ε) resolve, pela afirmativa, num caso particular, a questão que acima referimos.

7) **Sobre o radical-J** — Jacobson define *anel radical* como aquele que é idêntico ao seu radical — *J*. Utilizando esta definição, podemos verificar que são equivalentes as três propriedades seguintes, dum ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}$, supondo que uma delas tem efectivamente lugar: 1) um número finito de elementos de $\mathfrak{r}$ gera um anel radi-

cal; 2) cada elemento de $\mathfrak{r}$ gera um anel radical; 3) o quase--inverso direito [1] de cada elemento $z \in \mathfrak{r}$ tem a forma duma soma finita $z' = \Sigma \pm z^\sigma$.

É imediato que 1) arrasta 2) e que 2) arrasta 3). Passa-se também de 3) a 2) muito fàcilmente. Por fim, admitamos 3) e demonstremos 1). Sejam $z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathfrak{r}$. O anel gerado pelos z_i compõe-se de elementos $Z = \Sigma \pm \pm z_{i_1} \dots z_{i_q}$. Visto que Z tem quase-inverso direito da forma $\Sigma \pm Z^\sigma = \Sigma \pm [\Sigma \pm z_{i_1} \dots z_{i_q}]^\sigma$, conclui-se que o referido quase-inverso pertence ao anel gerado pelos z_i. Podemos fixar, pois, o seguinte

Teorema 16: — *É condição necessária e suficiente, para que todo o conjunto finito de elementos dum ideal direito quase-regular* $\mathfrak{r}$ *gere um anel radical, que o quase-inverso de cada elemento* $z \in \mathfrak{r}$ *seja da forma* $\Sigma \pm z^\sigma$.

Dado um ideal bilateral quase-regular $\mathfrak{a}$, podemos destacar, de entre os ideais direitos quase-regulares, aqueles ideais $\mathfrak{r}$ para os quais tenha lugar: 1): existe um inteiro σ tal que $\mathfrak{r}^\sigma \subseteq \mathfrak{a}$. No homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{a} = \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{r}$ terá um correspondente $\mathfrak{r}'$, que será nilpotente. O conjunto unido dos $\mathfrak{r}'$ levará ao radical $\mathfrak{R}'$, de $\mathfrak{S}'$. O conjunto unido dos $\mathfrak{r}$ levará a um ideal bilateral $\mathfrak{R}[\mathfrak{a}]$, tendo-se $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}[\mathfrak{a}]/\mathfrak{a}$. Designando por *quase-nilpotente*, relativamente a $\mathfrak{a}$, um ideal $\mathfrak{r}$ com a propriedade 1), a teoria dos ideais quase-nilpotentes reduz-se à teoria dos ideais nilpotentes de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$. Há, anàlogamente, uma teoria de ideais *quase-semi-nilpotentes*, relativamente a $\mathfrak{a}$, considerando os ideais $\mathfrak{r}$ com a propriedade 2): cada conjunto finito de elementos de $\mathfrak{r}$ gera um sub-anel $\mathfrak{S}_1$, de $\mathfrak{S}$, para o qual existe um inteiro σ tal que $\mathfrak{S}_1^\sigma \subseteq \mathfrak{a}$. Define-se, então, um radical de Levitzki $\mathfrak{R}^{**}[\mathfrak{a}]$, que é o conjunto dos ideais direitos (ou esquerdos ou bilaterais) quase-semi-nilpotentes, relativamente a $\mathfrak{a}$. O radical $\mathfrak{R}'^{**}$, de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$, verifica a igualdade $\mathfrak{R}'^{**} = \mathfrak{R}^{**}[\mathfrak{a}]/\mathfrak{a}$.

[1] Supondo $a + a' + a a' = o$, a' diz-se *quase-inverso direito* de a.

Uma teoria de *quase-nilideais*, relativamente a $\mathfrak{a}$, obtém-se considerando os ideais direitos $\mathfrak{r}$ com a propriedade 3): para cada $r \in \mathfrak{r}$, existe um inteiro σ tal que $r^\sigma \in \mathfrak{a}$. O radical de Köthe $\mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]$ define-se como o conjunto unido dos ideais bilaterais quase-nilideais, relativamente a $\mathfrak{a}$, se esse conjunto contém os ideais unilaterais que sejam quase-nilideais, relativamente a $\mathfrak{a}$. Nesse caso, tem-se $\mathfrak{R}'^* = \mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}]/\mathfrak{a} = \text{radical} - K$ de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$. É claro que vale

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{R}^{**}[\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{R}^*[\mathfrak{a}],$$

se este último existe.

Poder-se-ia pensar, de modo análogo, em estender a definição de elemento quase-regular direito: considerar-se-ia $\mathfrak{a}$, como anteriormente, depois um elemento $b \in \mathfrak{S}$ para o qual existe $b' \in \mathfrak{S}$ tal que $b + b' + b b' \in \mathfrak{a}$. O estudo dos ideais direitos $\mathfrak{r}$, compostos de elementos b, obrigaria ao estudo dos ideais direitos quase-regulares de $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}$. O radical — J deste último levaria depois a um ideal bilateral de $\mathfrak{S}$, contendo $\mathfrak{a}$, que seria o conjunto unido dos ideais $\mathfrak{r}$. Jacobson demonstrou que o referido conjunto unido é precisamente o radical — J, de $\mathfrak{S}$.

O radical — J tem certas analogias com os outros radicais, embora a sua definição seja muito mais ampla. Assim: se e é um idempotente de $\mathfrak{S}$, tem-se

Teorema 17: — *Se* x *é um elemento dum ideal direito quase-regular* $\mathfrak{r}'$, *de* $e\mathfrak{S}e$, x *pertence ao radical-*J, *de* $\mathfrak{S}$. Com efeito, $x\mathfrak{S}e = x.e\mathfrak{S}e$ é um ideal direito quase-regular de $e\mathfrak{S}e$. Os elementos xae, $(a \in \mathfrak{S})$, são quase-regulares direitos. Escrevendo $xae = xa.e$, sabemos que $e.xa = xa$ é quase-regular direito [e isto porque, se za tem o quase-inverso direito v', az tem o quase-inverso direito $- az - av'z$]. Será $x\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, e, consequentemente, $x \in \mathfrak{R}_{**}$.

Corolário 5: — *O radical* $\mathfrak{R}'_{**}$, *de* $e\mathfrak{S}e$, *é igual a* $e\mathfrak{R}_{**}e$. Seja $x \in \mathfrak{R}'_{**}$. Então, $x \in \mathfrak{R}_{**}$, $x = exe \in e\mathfrak{R}_{**}e$, e, portanto, $\mathfrak{R}'_{**} \subseteq e\,\mathfrak{R}_{**}\,e$. Como este último é ideal bilateral de $e\,\mathfrak{S}\,e$, composto de elementos quase-regulares de $\mathfrak{S}$, o corolário fica provado, se houver quase-inversos desses elementos pertencentes ao ideal. Supondo $a \in e\,\mathfrak{S}\,e$ e $a + a' + a a' = o$, como se tem $a = e a = a e = e a e$, vê-se que $e a e + e a' e + e a a' e = a + e a' e + a e a' e = o$, de sorte que podemos supor $a' = e a' e$, como se deseja.

Consideremos uma decomposição de Peirce [(I), pág. 16]:

$$\mathfrak{S} = e\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,e + \mathfrak{J} + e\,\mathfrak{S}\,e \text{ (1)}.$$

Se x pertence a um ideal direito quase-regular $\mathfrak{r}''$ de $\mathfrak{J}$, sabemos que, pondo, conforme a igualdade anterior,

$$s = e a + b e + i + e s e, \quad (s \in \mathfrak{S}),$$

se tem $x s = x b e + x i = x(b e + i)$. Como $(b e + i)\,x = i x$ e como $x i$ é quase-regular, segue-se que $(b e + i)\,x$ é quase-regular direito. O mesmo se diz de $x\,(b e + i) = x s$. Assim, $x\,\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, $x \in \mathfrak{R}_{**}$. Daqui o

Teorema 18: — *Se* x *é um elemento dum ideal direito quase-regular* $\mathfrak{r}''$, *de* $\mathfrak{J}$, x *pertence a* $\mathfrak{R}_{**}$.

Corolário 6: — *O radical* $\mathfrak{R}''_{**}$, *de* $\mathfrak{J}$, *é igual a* $[\mathfrak{J}, \mathfrak{R}_{**}]$. Verifiquemos apenas que, dado a pertencente à intersecção e tal que $a + a' + a a' = a + a' + a' a = o$, se tem $a' \in \mathfrak{J}$. De facto, é $e a + e a' + e a a' = a e + a' e + a' a e = o$, e como $e a = a e = o$, é também $e a' = a' e = o$, o que caracteriza $a' \in \mathfrak{J}$.

---

(1) $\mathfrak{A}$ é o conjunto dos elementos $a \in \mathfrak{S}$ para os quais $a e = o$; $\mathfrak{B}$ o dos elementos $b \in \mathfrak{S}$ para os quais $e b = o$; $\mathfrak{J}$ o dos elementos $i \in \mathfrak{S}$ satisfazendo a $i e = e i = o$.

Na ordem de ideias que estamos desenvolvendo, e seguindo de perto (I), pág. 37 e seguintes, vamos considerar ainda um anel $\mathfrak{S}$ com n^2 matrizes unidades e_{ik} e com elemento um, nas condições seguintes: 1) $e_{ik}\,e_{jl} = \delta_{kj}\,e_{il}$, ($\delta_{kj}$ = símbolo de Kronecker); 2) $1 = e_{11} + \ldots + e_{nn}$. Se $\mathfrak{A}$ representa o conjunto dos elementos de $\mathfrak{S}$ que comutam com as referidas matrizes unidades, é válido o

Teorema 19: — *O radical* — J, *de* $\mathfrak{A}$, *é* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}]$, *se* $\mathfrak{R}_{**}$ *é o radical* — J *de* $\mathfrak{S}$. Ponhamos $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} \mathfrak{A}\,e_{ik}$. Jacobson demonstrou que o teorema 12 e o seu recíproco têm lugar para o radical — J. Assim

$$\mathfrak{R}_{**} = \sum_{i,k} \mathfrak{R}'_{**}\,e_{ik}, \quad (\mathfrak{R}'_{**} = \text{radical de } \mathfrak{A}).$$

Para se ver que $\mathfrak{R}'_{**} \subseteq \mathfrak{R}_{**}$, basta ter em conta as relações

$$e_{kk}\,\mathfrak{R}_{**}\,e_{kk} = \mathfrak{R}'_{**}\,e_{kk}, \quad \mathfrak{R}'_{**} \sum_k e_{kk} = \mathfrak{R}'_{**} =$$
$$= \sum_k e_{kk}\,\mathfrak{R}_{**}\,e_{kk} \subseteq \mathfrak{R}_{**}.$$

Então é $\mathfrak{R}'_{**} \subseteq [\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}]$. Como este último é ideal bilateral de $\mathfrak{A}$, o teorema ficará estabelecido, provando que tal ideal é quase-regular em $\mathfrak{A}$. Tomemos $\alpha \in [\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**}]$. Se $\alpha' = \Sigma\,\alpha_{ij}\,e_{ij}$, ($\alpha_{ij} \in \mathfrak{A}$), for o seu quase-inverso direito, tem-se

$$\alpha \sum_k e_{kk} + \sum_{i,j} \alpha_{ij}\,e_{ij} + \sum_{i,j} \alpha\,\alpha_{ij}\,e_{ij} = o.$$

Tira-se daqui $\alpha + \alpha_{kk} + \alpha\,\alpha_{kk} = o$, de sorte que o quase-inverso de α pertence a $\mathfrak{A}$. Isto significa que deve ser

$\alpha_{ij} = o$, se $i \neq j$, o que efectivamente se verifica, pois $o + \alpha_{ij} + \alpha\alpha_{ij} = o$, $(1+\alpha)\,\alpha_{ij} = o$, e, portanto,

$$(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha)\,\alpha_{ij} = \alpha_{ij} = o.$$

Continuando a supor $\mathfrak{S}$ o anel do téorema anterior, tem lugar o

Teorema 20: — *O anel* $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$ *é o anel completo de matrizes com elementos de* $\overline{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}_{**})/\mathfrak{R}_{**}$. De facto, no homomorfismo $\mathfrak{S} \sim \overline{\mathfrak{S}}$, os e_{ik} têm os correspondentes $\bar{e}_{ik}$. Como não pode ser $e_{ik} \in \mathfrak{R}_{**}$, visto que isso implicaria $e_{ik}\,e_{ki} = e_{ii} \in \mathfrak{R}_{**}$, as n^2 matrizes $\bar{e}_{ik}$ são diferentes de zero. Também não pode ter-se $\bar{e}_{ik} = \bar{e}_{jm}$, a não ser que $i = j$, $k = m$, pois aquela igualdade daria

$$e_{ik} - e_{jm} \in \mathfrak{R}_{**}, \qquad (e_{ik} - e_{jm})\,e_{ki} = e_{ii} \in \mathfrak{R}_{**},$$

se $m \neq k$. Supondo $m = k$, a igualdade

$$e_{ki}(e_{ik} - e_{jk}) = e_{kk} \in \mathfrak{R}_{**}$$

levaria igualmente a um absurdo, salvo se $j = i$, caso em que $e_{ik} = e_{jm}$. $\overline{\mathfrak{S}}$ admite a representação $\overline{\mathfrak{S}} = \sum_{i,k} \overline{\mathfrak{A}}\,\bar{e}_{ik}$, em que os elementos de $\overline{\mathfrak{A}}$ comutam com os $\bar{e}_{ik}$ e estes últimos são independentes. Para verificar esta última afirmação, escrevamos

$$\bar{a} = \sum_{i,k} \bar{\alpha}_{ik}\,\bar{e}_{ik} = o, \qquad (\bar{\alpha}_{ik} \in \overline{\mathfrak{A}}).$$

Deduz-se, sucessivamente:

$$\bar{a}\,\bar{e}_{ps} = \sum_i \bar{\alpha}_{ip}\,\bar{e}_{is} = o, \qquad \bar{e}_{rq}\,\bar{a}\,\bar{e}_{ps} = \bar{\alpha}_{qp}\,\bar{e}_{rs} = o,$$

$$\bar{\alpha}_{qp}\,\bar{e}_{rr} = o, \qquad \bar{\alpha}_{qp} \sum_r \bar{e}_{rr} = \bar{\alpha}_{qp} = o.$$

O teorema fica assim demonstrado. Pode precisar-se, de resto, que $\overline{\mathfrak{A}}$ contém todos os elementos comutáveis com os $\bar{e}_{ik}$. Se $\bar{a}$ é um tal elemento, pondo $\bar{a} = \sum_{i,k} \bar{\alpha}_{ik}\,\bar{e}_{ik}$, tem-se

$$\bar{a}\,\bar{e}_{jr} = \sum_i \bar{\alpha}_{ij}\,\bar{e}_{ir} = \bar{e}_{jr}\,\bar{a} = \sum_k \bar{\alpha}_{rk}\,\bar{e}_{jk},$$

e, portanto, para $i = j$, $r = k$, $\bar{\alpha}_{jj} = \bar{\alpha}_{rr}$. Fora disso, é $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{rk} = o$. A expressão de $\bar{a}$ toma a forma

$$\bar{a} = \sum \bar{\alpha}_{jj}\,\bar{e}_{jj} = \sum \bar{\alpha}\,\bar{e}_{jj} = \bar{\alpha},$$

se se põe $\bar{\alpha}_{11} = \ldots = \bar{\alpha}_{nn} = \bar{\alpha} \in \overline{\mathfrak{A}}$.

8) **O conjunto H de Perlis** — Perlis considerou, num anel $\mathfrak{S}$, com elemento um, o conjunto H dos elementos caracterizados pela propriedade seguinte: será $h \in H$ sempre que $g + h$ seja regular, qualquer que seja o elemento regular g, e apenas nesse caso.

Ao lado de H, podem considerar-se também dois outros conjuntos: o conjunto H_d, composto de elementos h tais que $g + h$ é regular direito, qualquer que seja o elemento regular direito g, e apenas desses elementos; e o conjunto H_e, para o qual se trata com elementos regulares esquerdos.

Para cada um dos três conjuntos, é válido um teorema, que se decalca no que vai enunciar-se, relativo a H_d.

Teorema 21: — *É necessário e basta, para que* $h \in H_d$, *que a soma* $v + h$ *seja quase-regular direita, sempre que* v *é quase-regular direito.* Na verdade, se $h \in H_d$, então $g + h$ é regular direito. Dado $v + h$, sabemos que $1 + v$ é regular direito e que, portanto, $(1+v) + h = 1 + (v+h)$ é regular direito. Isto significa que $v + h$ é quase-regular direito. Inversamente, se $v + h$ é quase-regular direito, com v quase-regular direito, tomemos o elemento regular direito g. Tem-se, com um certo v,

$$g + h = (1+v) + h = 1 + (v+h),$$

de sorte que $g + h$ é regular direito e $h \in H_d$.

Depois deste resultado, vemos que a definição de H (ou de H_d ou de H_e) pode dar-se independentemente da existência de elemento um. No geral, os três conjuntos são distintos. Imaginemos, porém, que $H_d = H_e$. Vamos ver que, então, H contém aqueles. De facto, dado $h \in H_d$, h é quase-regular direito e esquerdo, portanto quase-regular. Dado v quase-regular, a soma $v + h$ é quase-regular direita e esquerda, portanto quase-regular. Assim, $h \in H$, ou seja $H_d \subseteq H$. Daqui o

Teorema 22: — *Num anel qualquer, a igualdade* $\mathrm{H}_d = \mathrm{H}_e$ *implica* $\mathrm{H}_d \subseteq \mathrm{H}$.

Jacobson demonstrou que, dados v quase-regular direito e $a \in \mathrm{r}$, em que r é ideal quase-regular direito, a soma $v + a$ é quase-regular direita. Tendo ainda em conta considerações análogas relativas a «quase-regulares esquerdos» e o facto de os elementos do radical — J serem quase-regulares, conclui-se o

Teorema 23: — *Num anel qualquer o radical* — J *está contido nos diferentes* HH.

Imaginemos que H_d, por ex., é um ideal direito (ou esquerdo). Como os elementos de H_d são quase-regulares direitos, conclui-se o

Corolário 7: — *Se, num anel qualquer,* H_d *for um ideal direito (ou esquerdo) tem-se* $\mathfrak{R}_{**} = \mathrm{H}_d$. *O mesmo se diz quanto a* H_e *ou quanto a* H.

Na hipótese de haver elemento $1 \in \mathfrak{S}$, se tivermos em conta que $-g$ é regular direito (ou esquerdo), sempre que g o seja, fàcilmente se conclui que os HH são módulos. Na verdade, suponhamos $h, h' \in H_d$. Trata-se de provar que $g + (h - h')$ é regular direito quando g é regular direito. Como $g + h$ é regular direito, $-(g + h)$ é regular direito; então $-(g + h) + h'$ é regular direito, o mesmo se dizendo de $(g + h) - h' = g + (h - h')$, q. e. d.

Portanto:

Teorema 24: — *Num anel* $\mathfrak{S}$ *com elemento um, os conjuntos* H_d, H_e, H *são módulos.*

Dado um anel $\mathfrak{S}_o$, sem elemento um, suponhamos que o mesmo é estranho ao anel dos números inteiros, o que pode sempre fazer-se. Como habitualmente, definamos, em seguida, o anel $\mathfrak{S} = (1) + \mathfrak{S}_o$, onde (1) é o anel dos números inteiros. $\mathfrak{S}$ tem elemento um e contém $\mathfrak{S}_o$. A soma anterior é directa, no sentido de soma de grupos abelianos. Os elementos de $\mathfrak{S}_o$ serão afectados do índice o, colocado inferiormente.

Seja $a = \alpha + a_o$, com α inteiro, um elemento de $\mathfrak{S}$, suposto quase-regular direito. Se for $a + b + ab = o$, tem-se

$$(1 + \alpha + a_o)(1 + \beta + b_o) = 1, \quad \text{com} \quad b = \beta + b_o.$$

Concluem-se daqui as relações

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1, \quad (1 + \alpha) b_o + (1 + \beta) a_o + a_o b_o = o,$$

e, portanto, estas outras

$$\alpha = \beta = o, \quad a_o + b_o + a_o b_o = o, \quad a = a_o, \quad b = b_o, \quad \text{ou}$$

$$\alpha = \beta = -2, \quad -a_o - b_o + a_o b_o = o, \quad a = -2 + a_o, \quad b = -2 + b_o.$$

Vê-se que, se o conjunto dos elementos quase-regulares direitos de $\mathfrak{S}_o$ for

$$C_o = \{a_o, b_o, c_o, \ldots\},$$

o conjunto dos elementos quase-regulares direitos de $\mathfrak{S}$ é

$$C = \{a_o, b_o, c_o, \ldots; -2 - a_o, -2 - b_o, \ldots\}.$$

No caso particular dos elementos nilpotentes, podemos afirmar que os respectivos conjuntos de $\mathfrak{S}_o$ e de $\mathfrak{S}$ são iguais. Basta notar que, se

$$a^r = (\alpha + a_o)^r = \alpha^r + b_o = o,$$

é $\alpha^r = o$, $\alpha = o$, e, portanto, $a = a_o$.

Quanto a ideais pode afirmar-se: o ideal direito gerado por $a_o \in \mathfrak{S}_o$, em $\mathfrak{S}$, é o mesmo que o ideal direito gerado por a_o, em $\mathfrak{S}_o$; todo o ideal direito de $\mathfrak{S}_o$ é ideal direito de $\mathfrak{S}$; e os nilideais dos dois anéis coincidem.

Vamos ver que, mais geralmente, há coincidência dos ideais quase-regulares direitos. Seja $\mathfrak{r}$ um tal ideal de $\mathfrak{S}$. Se um elemento $-2 - r_o \in \mathfrak{r}$, tomemos um elemento $\alpha + a_o \in \mathfrak{S}$, com $\alpha \neq o, 1$. Será

$$(-2 - r_o)(\alpha + a_o) = -2\alpha + b_o \in \mathfrak{r}.$$

Devendo ter-se $-2\alpha = o$, ou $-2\alpha = -2$, chega-se a um absurdo. Assim, todos os elementos de $\mathfrak{r}$ pertencem a $\mathfrak{S}_o$. É válido o

Teorema 25: — *O anel $\mathfrak{S}$, em que se «mergulhou» $\mathfrak{S}_o$, tem os mesmos radicais que $\mathfrak{S}_o$: o radical — $\mathfrak{R}$, o radical — L, o radical — K e o radical — J.*

Pode observar-se, incidentalmente, que, se um elemento a_o é quase-regular direito em $\mathfrak{S}$, um seu quase-inverso direito pertence a $\mathfrak{S}_o$.

Um resultado devido a K. Shoda [cfr. (I), pág. 461] afirma que um anel simples é gerado pelos seus elementos regulares. Perlis deduziu daí que o conjunto H relativo a uma álgebra simples é nulo. De facto, pode ir-se um pouco mais longe e afirmar: 1) num anel simples, um elemento regular direito (ou esquerdo) é regular; 2) os diferentes HH relativos a um anel simples reduzem-se todos ao elemento zero.

O raciocínio de Perlis, transposto das álgebras simples para os anéis simples, prova que $H = (o)$. Então 2) resulta de 1) imediatamente. A demonstração de 1) faz-se como

para as álgebras com elemento um. Se $\mathfrak{S}$ é o anel simples em causa, é um módulo com respeito a um corpo não comutativo $\mathfrak{K}$. Dado $a \in \mathfrak{S}$, os elementos $1, a, \ldots, a^t$, para um t mínimo, não são independentes com respeito a $\mathfrak{K}$. Ponhamos

$$a^t + \alpha_{t-1} a^{t-1} + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_o = o, \quad (\alpha_i \in \mathfrak{K}).$$

Então é

$$(a^{t-1} + \ldots + \alpha_1) a = -\alpha_o,$$
$$(-\alpha_o)^{-1}(a^{t-1} + \ldots + \alpha_1) a = 1,$$

se $\alpha_o \neq o$. Admitindo que a é regular direito, não pode ser $\alpha_o = o$, pois, de contrário, ter-se-ia

$$(a^{t-1} + \ldots + \alpha_1) a = o, \quad a^{t-1} + \ldots + \alpha_1 = o,$$

contra a hipótese de t ser mínimo. Nestas condições, a tem inverso esquerdo e é regular, como se afirmou. Fixemos, por isso, o

Teorema 26: — *Num anel simples, todo o elemento regular direito (ou esquerdo) é regular.*

Perlis passou das álgebras simples às álgebras semi-simples. O seu raciocínio é aplicável aos anéis semi-simples. Para estes últimos, também é regular todo o elemento regular direito, podendo fixar-se o

Teorema 27: — *Num anel semi-simples, todo o elemento regular direito (ou esquerdo) é regular. Os diferentes* HH, *todos iguais, reduzem-se a zero.*

A demonstração faz-se observando que H_d, por ex., é a soma dos H_d definidos para cada parcela simples em que se decompõe o anel.

Imaginemos caracterizados os *anéis semi-primários pela condição de mínimo para os ideais direitos contendo o radical — J*. Tanto os anéis — *A* generalizados como os anéis

— A e os anéis — A especiais entram nesta definição. Tem lugar o

Teorema 28: — *Num anel semi-primário é* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_d = \mathrm{H}_e = \mathfrak{R}_{**}$. No estudo da correspondência anular homomorfa $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}/\mathfrak{R}_{**}$, vê-se imediatamente que os elementos quase-regulares direitos (ou esquerdos) estão sempre em correspondência. Já sabemos que o radical — J está contido em H_d. Tomemos agora $h \in H_d$. É $v + h$ quase-regular direito, se v o for. O correspondente $\bar{v} + \bar{h}$, por via do homomorfismo citado, é quase-regular direito, o que implica $\bar{h} = o$. Portanto $h \in \mathfrak{R}_{**}$ e $H_d = \mathfrak{R}_{**}$. O raciocínio é o mesmo para os outros $H\,H$.